Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 11.2017
J. Heiland / S. Werner
vom Max Planck Institut Magdeburg

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 3

1. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen $f(z)$ stetig und in welchen sie komplex differenzierbar sind:

   a) $f(z) = \bar{z}$

   b) $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$

   c) $f(z) = |z|^2$.

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende Menge und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Man beweise, dass dann $f(z)$ konstant sein muss.

3. Zeigen Sie, dass Potenzreihen beliebig oft differenzierbar sind, also dass die formal definierte Ableitung

   - eine konvergente Potenzreihe mit dem gleichen Konvergenzradius ist
   - und tatsächlich die Ableitung darstellt.

   Hinweis: Es dürfen die Argumente aus Jänich (Kapitel 1.2) verwendet werden (mit entsprechender Aufbereitung).

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch

   $$f(x + iy) := u(x, y) + i\, v(x, y) \qquad \forall\, (x, y) \in G_{\mathbb{R}^2},$$

   wobei

   $$G_{\mathbb{R}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + i\, y \in G\}$$

   die zu G gehörige offene Menge in $\mathbb{R}^2$ und $u, v : G_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Man beweise: Ist die zu f gehörige Funktion $\vec{f} : G_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(x, y) := (u(x, y), v(x, y))^{\mathsf{T}}$ total differenzierbar in $(x_0, y_0) \in G_{\mathbb{R}^2}$ und gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

   $$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,,$$

   so ist die Funktion $f(z)$ im Punkt $z_0 = x_0 + i\, y_0$ komplex differenzierbar.

5. Von einer komplexen Funktion $f\colon x + iy \mapsto 5x + iv(x, y)$ ist nur der Realteil und der Funktionswert $f(i) = i$ bekannt. Man bestimme den Imaginärteil $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, der f zu einer holomorphen Funktion macht.