Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 11.2017
J. Heiland / S. Werner
vom Max Planck Institut Magdeburg

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 1

1. Man bestimme jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\, z^k, \quad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}\, z^k$$
.

2. Man bestimme jeweils alle $z \in \mathbb{C}$ mit
   a) $\exp(z) = -2$
   b) $\exp(z) = i$
   c) $\sin(z) = 100$
   d) $\cos(z) = 3i$.

3. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird definiert über die Potenzreihe
$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k \,.$$
   Man zeige
   a) Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $\rho = \infty$.
   b) Für beliebige $u, v \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(u + v) = \exp(u)\, \exp(v)$.

4. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ werden im Komplexen definiert über die Potenzreihen
$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} \,.$$
   Man zeige für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung
   a) $\exp(iz) = \cos(z) \,+\, i\, \sin(z)$
   b) $\sin(z) = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) \,-\, \exp(-iz)\big)$
   c) $\cos(z) = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) \,+\, \exp(-iz)\big)$.
   d) $|\cos^2(z) + \sin^2(z)| = 1$

5. Für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beweise man die Additionstheoreme
   a) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) \,+\, \cos(z_1)\sin(z_2)$
   b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \,-\, \sin(z_1)\sin(z_2)$.