Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 12.2017
J. Heiland / S. Werner
vom Max Planck Institut Magdeburg

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 4

1. Sei
$$\gamma_0\colon [0,1] \to \mathbb{C}\colon t \mapsto \cos(t\pi) + i\sin(t\pi)$$
eine Parametrisierung des halben Einheitskreises. Man berechne die Integrale der Funktionen
$$f\colon z \mapsto \exp(iz) \quad \text{und} \quad f\colon z \mapsto |\mathrm{Re} z|$$
längs von γ_0.

2. Die Kurve γ sei die Gerade vom Punkt $z_1 = 1$ zum Punkt $z_2 = i$. Man berechne das Kurvenintegral
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz\,.$$

3. Gegeben seien zu einer Menge $G \subset \mathbb{C}$ eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sowie zwei Parametrisierungen
$$\gamma : [a,b] \to G \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\gamma} : [\widetilde{a},\widetilde{b}] \to G$$
derselben Kurve derart, dass eine streng monoton wachsende und stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [a,b] \to [\widetilde{a},\widetilde{b}]$ existiert mit
$$\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(\varphi(t)) \qquad \forall\, t \in [a,b]\,.$$
Man beweise die Parametrisierungsinvarianz des Kurvenintegrals über f längs der gegebenen Kurve, d.h.
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\, dz\,.$$

4. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion über einem Gebiet G. Zu einer gegebenen glatten Kurve γ in G sei γ^- die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve γ. Man beweise die Beziehung
$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz\,.$$