ÜB-2 – Aufgabe 4

i.) Wir suchen: $L = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}}_{:= p(x)}\}$

und teilen auf: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$

wobei

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge p(x)\},$$
$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \wedge p(x)\},$$
$$L_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \wedge p(x)\}$$

und bestimmen:

$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}\} = \emptyset$ da $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$

(bräuchten wir gar nicht! — Leere Menge)

$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

da: $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} 1 > \frac{x}{x+1} \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} x+1 > x$ g.A. $\forall x \in \mathbb{R}$

$L_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}\} = \emptyset$

da $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} 1 > \frac{x}{x+1} \overset{x+1<0}{\Leftrightarrow} x+1 < x$ ↯

Damit: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \emptyset \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\} \cup \emptyset$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

□

A4-ii) gesucht: $L = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| - |x-1| \geq 1 \}$

Wie oben -- die Menge aufteilen um die Betragsstriche aufzuloesen...

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \wedge |x+1| - |x-1| \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \wedge x+1 - (x-1) \geq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \wedge 2 \geq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\}$$ da $2 \geq 1$ immer gilt!

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 \wedge |x+1| - |x-1| \geq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 \wedge x+1 - -(x-1) \geq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 \wedge x+1 + x - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 \wedge 2x \geq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 \wedge x \geq \tfrac{1}{2}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{2} \leq x < 1\}$$

$$L_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \wedge |x+1| - |x-1| \geq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \wedge -x-1 + x-1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \wedge -2 \geq 1\}$$
$$= \emptyset$$ da immer falsch!

(↑ "2 mal Minus")

$$\Rightarrow L = \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{2} \leq x\}$$

□