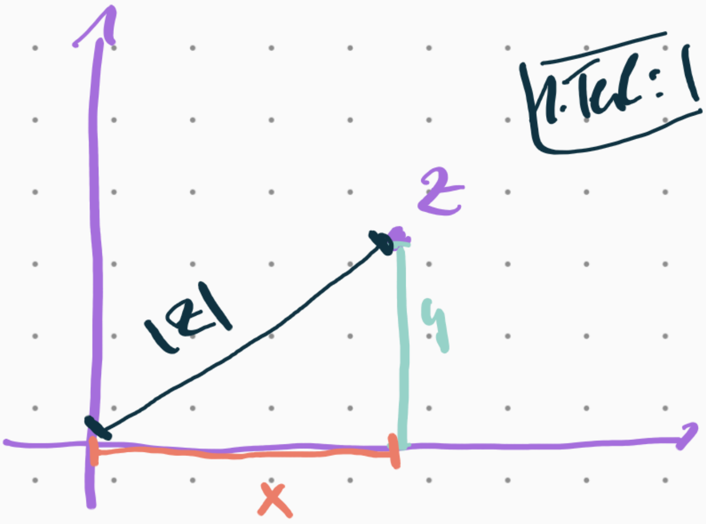
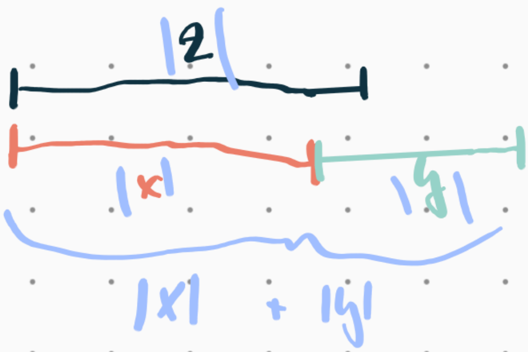
c) z.z. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|) \leq |z| \leq |x|+|y|$

falls $z = x+iy$



$\boxed{\text{1. Teil:}}$

$$\sqrt{|z|^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$
$$= \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{|x|^2+|y|^2}$$
$$\leq \sqrt{|x|^2+2|x||y|+|y|^2}$$
$$= \sqrt{(|x|+|y|)^2}$$
$$= |x|+|y|$$



schwieriges z.z. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|) \leq |z|$

Beobachtung: für $x = y$ gilt

$$\sqrt{|z|^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{|x|^2+|y|^2} = \sqrt{2}\sqrt{|x|^2}$$

also

$$|z| = \sqrt{2}\,|x| = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}(2\cdot|x|) \overset{x=y}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}(|x|+|y|)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 2}(|x|+|y|)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)$$

"für $x=y$ gilt sogar Gleichheit. Die Ungleichung ist "scharf" "

Aber wie zeigen wir das?

① **Versuch**: $|x|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 = |z|^2$

$|y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 = |z|^2$

$\Rightarrow |x| \leq |z|, \; |y| \leq |z| \quad \Rightarrow |x| + |y| \leq 2|z|$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(|x| + |y|) \leq |z|$

das ist nicht $\sqrt{2}$ sondern "schlechter"

da $\quad \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

"Wir verlieren, dass die Ungleichung "scharf" ist"

② **Deshalb**: Wir müssen uns mehr anstrengen.

Ansatz: $\quad y = \frac{y}{x} x =: \lambda x \quad , \; x \neq 0$

Falls $x = 0$, gilt schon $\quad |z| = |y| = |y| + \underbrace{|x|}_{=0} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\leq 1}(|y| + |x|)$

also: $\quad y = \lambda x \quad \Rightarrow \quad z = x + \lambda x$

$|z|^2 = |x|^2 + \lambda^2 |x|^2 = (1+\lambda^2)|x|^2$

außerdem: $\quad |x| + |y| = |x| + |\lambda||y|$

also ist unsere Aussage

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|) \overset{?}{\leq} |z|$$

"äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|\lambda||x|) \overset{?}{\leq} \sqrt{(1+\lambda^2}\ |x|$$

bzw

$$\frac{1}{2}(|x|+|\lambda||x|)^2 \overset{?}{\leq} (1+\lambda^2)|x|^2$$

bzw

$$\frac{1}{2}|x|^2+|\lambda||x|+\frac{1}{2}|\lambda|^2|x|^2 \overset{?}{\leq} |x|^2+\lambda^2|x|^2$$

bzw da $\lambda^2=|\lambda|^2$

$$0 \overset{?}{\leq} \frac{1}{2}|x|^2-|\lambda||x|+\frac{1}{2}|\lambda|^2|x|^2$$

bzw

$$0 \overset{?}{\leq} |x|^2-2|\lambda||x|+|\lambda|^2|x|^2$$

bzw.

$$0 \overset{?}{\leq} (|x|-|\lambda||x|)^2 \quad \checkmark$$

$\square$