6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome:

(i) Die Gleichung $a + x = b$ besitzt eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$, falls $a \neq 0$.

Körper: Menge $\mathbb{K}$: und Operationen

$\oplus: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ("Addition")

$\odot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ("Multiplikation")

mit Axiomen (Eigenschaften)

(A_1): $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

(A_2): $a \oplus b = b \oplus a$ (symmetrie)

(A_3) $\exists e \in \mathbb{K}: \forall a \in \mathbb{K}: a \oplus e = a$

(A_4) $\forall a \in \mathbb{K}: \exists a' \in \mathbb{K}: a \oplus a' = e$

Bemerke: in $\mathbb{R}$ ist e die "Null"

Wir zeigen: $\exists! \, e \in \mathbb{K}: \forall a \in \mathbb{K}: a \oplus e = a$

Beweis: Annahme $\exists e \in \mathbb{K}: \forall a \in \mathbb{K}: a \oplus e = a$ damit: $f \oplus e = f$

$\exists f \in \mathbb{K}: \forall a \in \mathbb{K}: a \oplus f = a$ damit: $e \oplus f = e$

Wegen (A2) gilt $e \oplus f = f \oplus e$ und damit: $e = f$ $\square$

Wir zeigen $\forall a \in \mathbb{K} \, \exists! \, a' \in \mathbb{K}: a \oplus a' = e$

Beweis: Sei a beliebig, aber fest ← so zeigt man was "für alle"

Annahme $\exists a' \in \mathbb{K}: a \oplus a' = e$

$\exists a^- \in \mathbb{K} \; a \oplus a^- = e$

$$a' = a' \oplus e = a' \oplus (a^- \oplus a) \overset{(A2)}{=} a' \oplus (a \oplus a^-) \overset{(A1)}{=} (a' \oplus a) \oplus a^- = e \oplus a^- = a^-$$

also $a' = a^-$

d.h. zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es nur ein a'.

Bemerkung: in $(\mathbb{R}, +)$ schreiben wir $a' = -a$

und $b + -a = b - a$

$\boxed{\text{Die Aufgabe!}}$

2.2. $\forall x \in K \, \forall b \in K \, \exists! x \in K: \; a \oplus x = b$

Beweis:

Sei $a \in K$, $b \in K$ beliebig fest

① Existenz: wir schreiben

$$b = b \oplus e = b \oplus (a \oplus a') \overset{(A_2),(A_1)}{=} a \oplus \underbrace{(b \oplus a')}_{=:x}$$

d.h. es gibt so ein x (nämlich $x = b \oplus a'$

② Eindeutigkeit: Annahme $\exists x \in K \, \exists y \in K$: $a \oplus x = b$ und $a \oplus y = b$

Wir sehen $a \oplus x = b \Leftrightarrow x \oplus a = b \Leftrightarrow x \oplus (a \oplus b') = e \Leftrightarrow x = (a \oplus b')'$

"x ist das inverse Element zu $(a \oplus b')$"

$a \oplus y = b \Leftrightarrow y \oplus a = b \Leftrightarrow y \oplus (a \oplus b') = e \Leftrightarrow y = (a \oplus b')'$

"y ist das ...."

Da das inverse Element zu $(a \oplus b')$ eindeutig ist, muss $x = y$ sein $\square$

Wir machen weiter bei den Axiomen

$\mathbb{K}$-Axiome bzgl. $\odot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

(M_1): $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

(M_2) $a \odot b = b \odot a$

(M_3) $\exists f \in K$: $a \odot f = a \quad \forall a \in K$, wie oben, f ist eindeutig,

(M_4) $\forall a \in K, a \neq 0 \, \exists a' \in K$: $a \odot a' = f$ a'... ist eindeutig, wir schreiben a^{-1} (oder $\frac{1}{a}$),

plus Distributivgesetze... Bemerke $(\mathbb{K}, \oplus) \Leftrightarrow (\mathbb{K}, \odot)$ (bis auf die "0" Ausnahme)

2.2. ist $a \in K$, $a \neq 0$. Dann gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.

Sei $a \in K$, $a \neq 0$, beliebig aber fest. sei a^{-1} das inverse Element.

dann gilt

$$\begin{array}{ccc} a \odot a^{-1} & = & f \\ \| \, (M_2) & & \| \\ a^{-1} \odot a & = & f \end{array}$$

Das heißt a ist das inverse Element zu a^{-1}

Also $a = (a^{-1})^{-1}$ (oder eben $a = \dfrac{1}{\frac{1}{a}}$). $\square$