5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty \iff \forall K \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \boxed{x_n > K}$$

Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig, finde N sodass $x_n > K$ für alle $n \geq N$.

frühere Übung $\boxed{\cancel{n \geq 4 \Rightarrow 2^n \geq n!}}$ was falsche ;)

(oder nächste Seite)

$$\cancel{\iff \frac{2^n}{n} \geq \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

$n \geq 4 \Rightarrow 2^n \geq n^2$

$$\Rightarrow n \geq 4 \quad \Rightarrow x_n = \frac{2^n}{n} \geq \cancel{(n-1)! \geq n-1}$$

$$\geq \frac{n^2}{n} = n$$

Damit:

Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig

Wähle $N = \max\{4, \cancel{\lceil K \rceil + 2}\}$ $\lceil K \rceil + 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$

$$x_n \cancel{\underset{n \geq 4}{\geq} n-1 \underset{n \geq N}{\geq} N-1} \geq \cancel{\lceil K \rceil + 2 - 1}$$

$$\cancel{\geq \lceil K \rceil + 1 > K}$$

$$x_n \overset{n \geq 4}{\geq} n \geq N \geq \lceil K \rceil + 1 > K \quad \blacksquare$$

$$\boxed{n \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 2^n \geq n^2}$$

$A(n)$

$2^3 \cancel{\geq} 8$

$2^4 \geq 16$ ✓

$2^5 = 32 \geq 25$ ✓

IA: $A(4)$ ist wahr $(16 \geq 16)$

IS: es gelte $\boxed{2^n \geq n^2}$, zeige $2^{n+1} \geq n^2$

betrachte: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 n^2$

gilt $\boxed{2n^2 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1}$?

bzw.

$\boxed{n^2 \geq 2n + 1}$?

ja, falls $n \geq 4$, gilt

$\boxed{n^2 \geq 4n \overset{?}{\geq} 2n + 1}$?

$\Updownarrow$

$\boxed{2n \geq 1}$ ✓ (gilt!)