(i) $a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!} = \frac{n!}{n!(n+1) - n!} = \frac{n!}{n!(n+1-1)} = \frac{1}{n}$

easy!! :)

Vermutung: Grenzwert $x = 0$

Sei $\varepsilon > 0$, finde N, sodass $\forall n \geq N$ gilt

$$\left| \frac{n!}{(n+1)! - n!} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

bzw.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

bzw

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Nehme $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. $\square$

11) " $x_n = \frac{n}{2} - \frac{n^2}{2n+3} = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{n+3/2}\right)$

die "nahrhafte" Null

$$= \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{n+3/2} + \frac{3/2}{n+3/2} - \frac{3/2}{n+3/2}\right)$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(1 - \frac{3/2}{n+3/2}\right) = \frac{3/2\, n}{2n+3} = \frac{3n}{4n+6}$$

siehe nächste Seite!

$a_n = \frac{3n}{4n+6}$, Vermutung Grenzwert $a = \frac{3}{4}$

Sei $\varepsilon > 0$, finde $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N$:

$\left| \frac{3}{4} - \frac{3n}{4n+6} \right| < \varepsilon$ bzw.

$\frac{3}{4} - \frac{3n}{4n+6} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$3 - \frac{12n}{4n+6} < 4\varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$\cancel{12n} + 9 - \cancel{12n} < 16n\varepsilon + 24\varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$9 < 16n\varepsilon + 24\varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$16n\varepsilon > 9 - 24\varepsilon$

$\Leftarrow$

$16n > \frac{9}{\varepsilon} - \cancel{24}$

$\Uparrow$ nur noch hinverlaufend!

$16n > \frac{9}{\varepsilon}$

Damit: wenn $n > \left\lceil \frac{9}{16\varepsilon} \right\rceil$ ist,

dann ist $\left| \frac{4}{3} - a_n \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ wähle $N = \left\lceil \frac{9}{16\varepsilon} \right\rceil$ $\square$

iii) $a_n = n+3$, zeige dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{nicht}}$ konvergiert.

nicht

$$\neg\left(\exists a\ \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N: |a_n-a|<\varepsilon\right)$$

$\Updownarrow$

$$\forall a\ \neg\left(\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n \ldots <\varepsilon\right)$$

$\Updownarrow$

$$\forall a\ \exists \varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\in\mathbb{N}, n\geq N: |a_n-a|\geq\varepsilon$$

Sei $a\in\mathbb{R}$ beliebig fest, wir müssen ein ε finden

sei $\varepsilon=1$, sei $N\in\mathbb{N}$ beliebig fest.

Finden wir ein $n\geq N$, sodass $|n+3-a|\geq\varepsilon=1$??

Ja! zB. $n=\lceil \max\{a, N\}\rceil$

$$\Rightarrow |n+3-a| \underset{\substack{\uparrow \\ n\geq a}}{=} n+3-a \geq a+3-a = 3 > \varepsilon$$

und auch $n\geq N$. $\square$