Infimum : Vermutung $\inf(M) = 2$

z.z. $\begin{cases} (a) & \forall y \in M: \quad y \geq 2 \\ (b) & i' < 2 \Rightarrow \exists y \in M: y > i' \end{cases}$

$M = M_1 \cup M_2$

$\forall x \in M: p(x) \Leftrightarrow \forall x \in M_1: p(x) \wedge \forall x \in M_2: p(x)$

Achtung: hier teilen wir die Aussagen in zwei Aussagen

(a) Wir probieren es mal direkt...

$\forall y \in M: y \geq 2 \Leftrightarrow \forall \frac{1}{2} < x < 2: \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

$\Leftrightarrow \forall 0 < z < \frac{1}{2}: (1-z) + \frac{1}{1-z} \geq 2 \quad \wedge \quad \forall 0 \leq q < 1: (1+q) + \frac{1}{1+q} \geq 2$

$(1-z) > 0 \qquad\qquad 1+q > 0$

$\Leftrightarrow \forall 0 < z < \frac{1}{2}: (1-z)^2 + 1 \geq 2(1-z) \quad \wedge \quad (1+q)^2 + 1 \geq 2(1+q)$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{1} - \cancel{2z} + z^2 + \cancel{1} \geq \cancel{2} - \cancel{2z} \quad \wedge \quad \cancel{1} + \cancel{2q} + q^2 + \cancel{1} \geq \cancel{2} + \cancel{2q}$

$\Leftrightarrow \forall 0 < z < \frac{1}{2}: \quad z^2 \geq 0 \quad \wedge \quad \forall 0 \leq q < 1: \quad q^2 \geq 0$

und das ist wahr

Wir können analog noch zeigen, dass (b) gilt.... aber

mit "2 ist untere Schranke" und "$2 \in M$" gilt direkt

$2 = \min(M) = \inf(M)$

also nur z.z. $2 \in M \Leftrightarrow \exists x^*: x^* + \frac{1}{x^*} = 2$. ja: $x^* = 1$ $\square$

Es bleibt noch z.z.: $\sup(M) = \frac{5}{2} \notin M \Rightarrow M$ hat kein Maximum

Annahme $y^* \in M: y^* = 2.5 \Leftrightarrow \exists \frac{1}{2} < x^* < 2: \frac{1}{x^*} + x^* = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 1 + x^{*2} - \frac{5}{2}x^* = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^*_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x_1^* = \frac{1}{2}, \; x_2^* = 2 \quad ↯$

$\square$

$\sqrt{xy}$

5.) a) $(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = \sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{y} = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = x \cdot y$

$\Rightarrow \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} =$ "Quadratwurzel von $x \cdot y$" $= \sqrt{xy}$

b)

$0 \leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 \overset{(a)}{=} x - 2\sqrt{xy} + y$

$\Leftrightarrow 0 \leq x - 2\sqrt{xy} + y$

$2\sqrt{xy} \leq x+y \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

6.) Sei $s = \sup(M)$.

z.z. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x > s - \varepsilon$

Beweis: Wir zeigen, dass die Negation falsch ist

$\neg(\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x > s-\varepsilon) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \neg(\exists x \in M : x > s-\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in M : \neg(x > s-\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in M : x < s-\varepsilon$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 :$ $s-\varepsilon$ ist obere Schranke

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 :$ $s-\varepsilon$ ist eine "bessere" obere Schranke

falsch, da $s = \sup(A)$ $\square$