

数値解析

第3回 ～逆行列の求め方～

今回の課題

1. 余因子行列を用いた方法（線形代数で習ったと思われる方法）で逆行列を求める
2. 掃出法（数値計算で一般的に用いられる方法）で逆行列を求める

余因子行列を用いた方法

【定理】 行列 A とその余因子行列 \tilde{A} の積は、

A の行列式 $|A|$ と単位行列 I の積に等しい。

$$A\tilde{A} = |A|I$$

この定理から A の逆行列 A^{-1} を求めるには？

両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I}\tilde{A} = |A|\underbrace{A^{-1}I}_{=A^{-1}}$$

$|A|$ を移項して整理すれば次の関係式を得る。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

余因子行列とは

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A から i 行と j 列のみを取り除いた小行列を M_{ij} とする。

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a_{ij}

余因子行列とは

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

\tilde{A} の i 行 j 列の要素は次のとおり。

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ji}|$$

反転していることに注意。

例題

次の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

解答

次の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & -9 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

解答

次の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

解答

次の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} = -5$$

解答

次の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

以下同様にして。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 & \tilde{a}_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \\ \tilde{a}_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 & \tilde{a}_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \\ \tilde{a}_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = 1 & \tilde{a}_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

解答

次の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

例題

次の行列 A の逆行列を余因子行列 \tilde{A} を用いて求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

解答

次の行列 A の逆行列を余因子行列 \tilde{A} を用いて求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \times 10 \times 2 + (-1) \times 5 \times (-9) + (-4) \times 2 \times (-2) \\ &\quad - (-4) \times 10 \times (-1) - 2 \times 5 \times 2 - 1 \times (-9) \times (-2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \text{ より } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

掃出法による方法

行列の基本変形

1. 二つの行を入れ替える
2. ある行を t 倍 ($t \neq 0$) する
3. ある行に他の行の t 倍を加える
4. 二つの列を入れ替える
5. ある列を t 倍 ($t \neq 0$) する
6. ある列に他の列の t 倍を加える

行に関する基本変形

列に関する基本変形

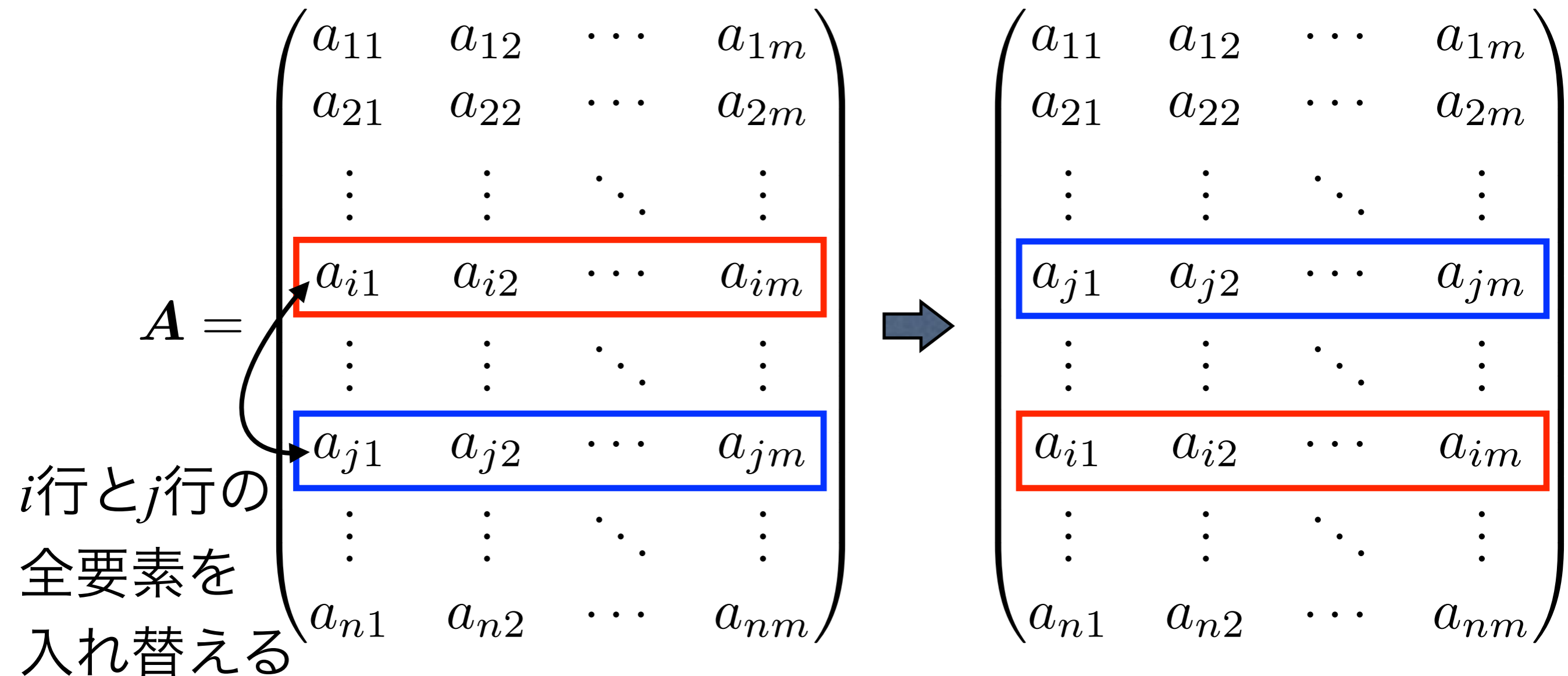
基本行列演算

1. 二つの行を入れ替える

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

基本行列演算

1. 二つの行を入れ替える



基本行列演算

2. ある行を t 倍 ($t \neq 0$) する

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t \cdot a_{i1} & t \cdot a_{i2} & \cdots & t \cdot a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

基本行列演算

3. ある行に他の行の t 倍を加える

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1m}^* \\ \parallel \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ +t \cdot a_{i1} & +t \cdot a_{i2} & \cdots & +t \cdot a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

掃出法による方法

【定理】 行列 A が正則（すなわち $|A| \neq 0$ ）ならば、行（又は列）に関する基本変形だけによって、 A を単位行列に変形することができる。逆も正しい。

正則行列 A に対して、上記の定理における行に関する基本変形を表す行列を S とすれば、

$$SA = I \quad \text{すなわち} \quad S = A^{-1}$$

従って、 $n \times 2n$ 行列 (A, I) にこの基本変形を行えば

$$S(A, I) = (SA, SI) = (I, S) = (I, A^{-1})$$

という形の行列が得られて A^{-1} が計算される。

掃出法による方法

$$S(A, I) = (SA, SI) = (I, S) = (I, A^{-1})$$

$$(A, I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

行に関する
基本変形
→

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right) = (I, A^{-1})$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求めよ。}$$

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \\ \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \\ \cdot \cdot \cdot \textcircled{3} \end{array}$$

 を1にし, かつ を0にするように変形する

【第1段階】

$$\begin{array}{lcl} \textcircled{1} \div 2 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2.5 & -0.5 & | & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \textcircled{4} \\ \textcircled{2} - \textcircled{4} \times 1 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 & | & -0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \textcircled{5} \\ \textcircled{3} - \textcircled{4} \times 3 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -8.5 & -0.5 & | & -1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \textcircled{6} \end{array}$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求めよ。}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2.5 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -8.5 & -0.5 & -1.5 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdots \textcircled{4} \\ \cdots \textcircled{5} \\ \cdots \textcircled{6} \end{array}$$

 を1にし, かつ を0にするように変形する

【第2段階】

$$\begin{array}{ll} \textcircled{4} - \textcircled{7} \times 2.5 & \Rightarrow \\ \textcircled{5} \div 0.5 & \Rightarrow \\ \textcircled{6} - \textcircled{7} \times (-8.5) & \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -10 & 17 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdots \textcircled{8} \\ \cdots \textcircled{7} \\ \cdots \textcircled{9} \end{array}$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求めよ。}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -10 & 17 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdots \textcircled{8} \\ \cdots \textcircled{7} \\ \cdots \textcircled{9} \end{array}$$

 を1にし, かつ を0にするように変形する

【第3段階】

$$\begin{array}{ll} \textcircled{8} - \textcircled{10} \times (-8) \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.2 & 0.44 & 0.32 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2 & -0.04 & -0.12 \\ 0 & 0 & 1 & -0.4 & 0.68 & 0.04 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdots \textcircled{11} \\ \cdots \textcircled{12} \\ \cdots \textcircled{10} \end{array} \\ \textcircled{7} - \textcircled{10} \times 3 \Rightarrow & \\ \textcircled{9} \div 25 \Rightarrow & \end{array} = A^{-1}$$

例題（手計算）

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子行列及び掃出法により求めよ。

解答

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子行列により求める。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 7 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{1+2} \cdot 4 & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \times 7 - 3 \times 4 = 2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & -1.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃出法により求める。

$$(A, I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \\ \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{array}$$

【第1段階】

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \div 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \cdot \cdot \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \cdot \cdot \cdot \textcircled{4} \end{array}$$

【第2段階】

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \times 1.5 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3.5 & -1.5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \cdot \cdot \cdot \textcircled{5} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

提出義務のない課題

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

の逆行列を余因子行列を用いた方法及び掃出法により求める。

課題

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

について、第 i 行から第 j 行の t 倍を差し引くプログラムを作成せよ。なお、プログラムにおいて、 i, j, t の値は $i, j = \{0, 1, 2\}$,
 $t = [-100, 100]$, ただし $t \neq 0$
として適宜設定すること。

課題

```
#include <stdio.h>
#define N 3

static void display(double a[][N]);

int main()
{
    int i, j, k;
    double t;
    double a[N][N] = {{2.0, 5.0, -1.0}, {1.0, 3.0, 1.0}, {3.0, -1.0, -2.0}};

    display(a);



i = ;
        j = ;
        t = ;
        for(k=0; k<N; k++){

        }


    display(a);
}
```

この箇所を完成させてください。

課題

```
void display(double a[][N])
{
    int i, j;
    printf("----- Matrix -----\n");
    for(i=0; i<N; i++){
        for(j=0; j<N; j++){
            printf("%10.4f",a[i][j]);
        }
        printf("\n");
    }
    printf("-----\n\n");
}
```