Python을 이용한 미분방정식 풀이

신민경

학습목표.
저서 'C언어를 이용한 전산물리학'에 기초하여 수치해석적 미분 공식을 유도해보고, python으로 코드를 구현하여 문제를 풀어보자.

1. 수치해석적 미분

1-1. 미분공식

일정한 간격의 x에 대해 어떤 함수 f(x)의 값이 주어졌을 때, 테일러 전개를 이용하여 f(x)의 미분을 수치해석적으로 계산한다. f(x)를 테일러 전개하면 미소 변위 h에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h\,f''(x)}{2!}+\frac{h^3f'''(x)}{3!}+ \qquad (1)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2f''(x)}{2!}-\frac{h^3f'''(x)}{3!}+ \qquad (2)$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{4h^2f''(x)}{2!}+\frac{8h^3f'''(x)}{3!}+ \qquad (3)$$

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+\frac{4h^2f''(x)}{2!}-\frac{8h^3f'''(x)}{3!}+ \qquad (4)$$

위의 식들로부터 다음과 같은 미분 공식을 얻을 수 있다.

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\quad(h),\ f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+O(h) \quad \text{(2점 공식)}$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2) \quad \text{(3점 공식)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{12h^2}\left[8\{f(x+h)-f(x-h)\}-\{f(x+2h)-f(x-2h)\}\right]+O(h^4) \quad \text{(5점 공식)}$$

$$f''(x)=\frac{1}{h}\left.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right\}+O(h^2) \quad \text{(3점 공식)}$$

$$f''(x)=\frac{1}{12h^2}\{-f(x-2h)+16f(x-h)-30f(x)+16f(x+h)-f(x+2h)\}+O(h^4) \quad \text{(5점 공식)}$$

1-2. 연습문제

(1) 함수 f(x)=sinx를 0에서 π까지 1차 미분하고, 그 결과를 $f'(x)$=cos와 비교하라. h를 0.1, 0.01, 0.001 등으로 변화시키면서 결과가 점점 더 정확하게 나오는 것을 살펴보라.

-> 코드 :

```python
import math
global Max,dx
Max=math.pi
dx_list=[0.1,0.01,0.001] #h의 값
def f(x): return math.sin(x) #f(x)=sinx
def f_dx(x): return math.cos(x)#f'(x)=cosx

def formula_2(x0): #2점 공식
    if x0+dx>Max:
        return (f(x0)-f(x0-dx))/dx
    return (f(x0+dx)-f(x0))/dx
def formula_3(x0): #3점 공식
    return (f(x0+dx)-f(x0-dx))/(2*dx)
def formula_5(x0): #5점 공식
    return (8*(f(x+dx)-f(x-dx))-(f(x+2*dx)-f(x-2*dx)))/(12*dx)

for i in dx_list: #h의 값을 변화시키면서
    dx=i
    print("h=%f일 때,"%dx)
    x=0 #x는 0부터
    while x<=Max: #Max값까지
        ans=f_dx(x) #f'(x)의 값과
        if x-2*dx<0 or x+2*dx>Max:#수치해석적으로 구한 1차 미분값을 비교
            if x==0 or x+dx>Max:
                formula=formula_2(x)
                print("x=%f, f'(x)=%f, 2점공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
            else:
                formula=formula_3(x)
                print("x=%f, f'(x)=%f, 3점공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        else:
            formula=formula_5(x)
            print("x=%f, f'(x)=%f, 5점공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        x=x+dx
```

```
h=0.100000일 때,
x=0.000000, f'(x)=1.000000, 2점공식f'(x)=0.998334, 오차=0.001666
x=0.100000, f'(x)=0.995004, 3점공식f'(x)=0.993347, 오차=0.001658
x=0.200000, f'(x)=0.980067, 5점공식f'(x)=0.980063, 오차=0.000003
x=0.300000, f'(x)=0.955336, 5점공식f'(x)=0.955333, 오차=0.000003
x=0.400000, f'(x)=0.921061, 5점공식f'(x)=0.921058, 오차=0.000003
x=0.500000, f'(x)=0.877583, 5점공식f'(x)=0.877580, 오차=0.000003
x=0.600000, f'(x)=0.825336, 5점공식f'(x)=0.825333, 오차=0.000003
x=0.700000, f'(x)=0.764842, 5점공식f'(x)=0.764840, 오차=0.000003
x=0.800000, f'(x)=0.696707, 5점공식f'(x)=0.696704, 오차=0.000002
x=0.900000, f'(x)=0.621610, 5점공식f'(x)=0.621608, 오차=0.000002
x=1.000000, f'(x)=0.540302, 5점공식f'(x)=0.540301, 오차=0.000002
x=1.100000, f'(x)=0.453596, 5점공식f'(x)=0.453595, 오차=0.000002
x=1.200000, f'(x)=0.362358, 5점공식f'(x)=0.362357, 오차=0.000001
x=1.300000, f'(x)=0.267499, 5점공식f'(x)=0.267498, 오차=0.000001
x=1.400000, f'(x)=0.169967, 5점공식f'(x)=0.169967, 오차=0.000001
x=1.500000, f'(x)=0.070737, 5점공식f'(x)=0.070737, 오차=0.000000
x=1.600000, f'(x)=-0.029200, 5점공식f'(x)=-0.029199, 오차=-0.000000
x=1.700000, f'(x)=-0.128844, 5점공식f'(x)=-0.128844, 오차=-0.000000
x=1.800000, f'(x)=-0.227202, 5점공식f'(x)=-0.227201, 오차=-0.000001
x=1.900000, f'(x)=-0.323290, 5점공식f'(x)=-0.323288, 오차=-0.000001
x=2.000000, f'(x)=-0.416147, 5점공식f'(x)=-0.416145, 오차=-0.000001
x=2.100000, f'(x)=-0.504846, 5점공식f'(x)=-0.504844, 오차=-0.000002
x=2.200000, f'(x)=-0.588501, 5점공식f'(x)=-0.588499, 오차=-0.000002
x=2.300000, f'(x)=-0.666276, 5점공식f'(x)=-0.666274, 오차=-0.000002
x=2.400000, f'(x)=-0.737394, 5점공식f'(x)=-0.737391, 오차=-0.000002
x=2.500000, f'(x)=-0.801144, 5점공식f'(x)=-0.801141, 오차=-0.000003
x=2.600000, f'(x)=-0.856889, 5점공식f'(x)=-0.856886, 오차=-0.000003
x=2.700000, f'(x)=-0.904072, 5점공식f'(x)=-0.904069, 오차=-0.000003
x=2.800000, f'(x)=-0.942222, 5점공식f'(x)=-0.942219, 오차=-0.000003
x=2.900000, f'(x)=-0.970958, 5점공식f'(x)=-0.970955, 오차=-0.000003
x=3.000000, f'(x)=-0.989992, 3점공식f'(x)=-0.988343, 오차=-0.001649
x=3.100000, f'(x)=-0.999135, 2점공식f'(x)=-0.995393, 오차=-0.003742
```

그림1. h=0.1일 때 결과

```
h=0.010000일 때,
x=0.000000, f'(x)=1.000000, 2점공식f'(x)=0.999983, 오차=0.000017
x=0.010000, f'(x)=0.999950, 3점공식f'(x)=0.999933, 오차=0.000017
x=0.020000, f'(x)=0.999800, 5점공식f'(x)=0.999800, 오차=0.000000
x=0.030000, f'(x)=0.999550, 5점공식f'(x)=0.999550, 오차=0.000000
x=0.040000, f'(x)=0.999200, 5점공식f'(x)=0.999200, 오차=0.000000
x=0.050000, f'(x)=0.998750, 5점공식f'(x)=0.998750, 오차=0.000000
x=0.060000, f'(x)=0.998201, 5점공식f'(x)=0.998201, 오차=0.000000
x=0.070000, f'(x)=0.997551, 5점공식f'(x)=0.997551, 오차=0.000000
x=0.080000, f'(x)=0.996802, 5점공식f'(x)=0.996802, 오차=0.000000
x=0.090000, f'(x)=0.995953, 5점공식f'(x)=0.995953, 오차=0.000000
x=0.100000, f'(x)=0.995004, 5점공식f'(x)=0.995004, 오차=0.000000
x=0.110000, f'(x)=0.993956, 5점공식f'(x)=0.993956, 오차=0.000000
x=0.120000, f'(x)=0.992809, 5점공식f'(x)=0.992809, 오차=0.000000

x=3.040000, f'(x)=-0.994844, 5점공식f'(x)=-0.994844, 오차=-0.000000
x=3.050000, f'(x)=-0.995808, 5점공식f'(x)=-0.995808, 오차=-0.000000
x=3.060000, f'(x)=-0.996673, 5점공식f'(x)=-0.996673, 오차=-0.000000
x=3.070000, f'(x)=-0.997438, 5점공식f'(x)=-0.997438, 오차=-0.000000
x=3.080000, f'(x)=-0.998104, 5점공식f'(x)=-0.998104, 오차=-0.000000
x=3.090000, f'(x)=-0.998669, 5점공식f'(x)=-0.998669, 오차=-0.000000
x=3.100000, f'(x)=-0.999135, 5점공식f'(x)=-0.999135, 오차=-0.000000
x=3.110000, f'(x)=-0.999501, 5점공식f'(x)=-0.999501, 오차=-0.000000
x=3.120000, f'(x)=-0.999767, 5점공식f'(x)=-0.999767, 오차=-0.000000
x=3.130000, f'(x)=-0.999933, 3점공식f'(x)=-0.999916, 오차=-0.000017
x=3.140000, f'(x)=-0.999999, 2점공식f'(x)=-0.999974, 오차=-0.000025
```

그림2. h=0.01일 때 결과

-> h가 작을수록 오차가 작아진다.

(2) 함수 f(x)=sinx를 0에서 까지 2차 미분하고, 그 결과를 $f''(x) = -\sin x$와 비교하라. 이때 구간 크기 h를 0.1, 0.01, 0.001 등으로 변화시키면서 결과를 비교하라.

-> 코드 :

```
import math
global Max,dx
Max=math.pi
dx_list=[0.1,0.01] #h의 값
def f(x): return math.sin(x) #f(x)=sinx
def f_2dx(x): return -math.sin(x) #f''(x)=-sinx

def formula_2(x0,dir): #1차 미분 2점 공식 dir이 -1이면 x0기준 왼쪽 점 이용
    if dir==-1:
        return (f(x0)-f(x0-dx))/dx
    return (f(x0+dx)-f(x0))/dx
def formula_3(x0): #3점 공식
    return (formula_2(x0,1)-formula_2(x0,-1))/dx
def formula_5(x0): #5점 공식
    return (-f(x0-2*dx)+16*f(x0-dx)-30*f(x0)+16*f(x0+dx)-f(x0+2*dx))/(12*dx*dx)

for i in dx_list: #h의 값을 변화시키면서
    dx=i
    print("h=%f일 때,"%dx)
    x=dx #x는 h부터
    while x+dx<=Max: #Max-h값까지
        ans=f_2dx(x) #f''(x)의 값과
        if x-2*dx<0 or x+2*dx>Max:#수치해석적으로 구한 2차 미분값을 비교
            formula=formula_3(x)
            print("x=%f, f''(x)=%f, 3점공식f''(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        else:
            formula=formula_5(x)
            print("x=%f, f''(x)=%f, 5점공식f''(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        x=x+dx
```

```
h=0.100000일 때,
x=0.100000, f''(x)=-0.099833, 3점공식f''(x)=-0.099750, 오차=-0.000083
x=0.200000, f''(x)=-0.198669, 5점공식f''(x)=-0.198669, 오차=-0.000000
x=0.300000, f''(x)=-0.295520, 5점공식f''(x)=-0.295520, 오차=-0.000000
x=0.400000, f''(x)=-0.389418, 5점공식f''(x)=-0.389418, 오차=-0.000000
x=0.500000, f''(x)=-0.479426, 5점공식f''(x)=-0.479425, 오차=-0.000001
x=0.600000, f''(x)=-0.564642, 5점공식f''(x)=-0.564642, 오차=-0.000001
x=0.700000, f''(x)=-0.644218, 5점공식f''(x)=-0.644217, 오차=-0.000001
x=0.800000, f''(x)=-0.717356, 5점공식f''(x)=-0.717355, 오차=-0.000001
x=0.900000, f''(x)=-0.783327, 5점공식f''(x)=-0.783326, 오차=-0.000001
x=1.000000, f''(x)=-0.841471, 5점공식f''(x)=-0.841470, 오차=-0.000001
x=1.100000, f''(x)=-0.891207, 5점공식f''(x)=-0.891206, 오차=-0.000001
x=1.200000, f''(x)=-0.932039, 5점공식f''(x)=-0.932038, 오차=-0.000001
x=1.300000, f''(x)=-0.963558, 5점공식f''(x)=-0.963557, 오차=-0.000001
x=1.400000, f''(x)=-0.985450, 5점공식f''(x)=-0.985449, 오차=-0.000001
x=1.500000, f''(x)=-0.997495, 5점공식f''(x)=-0.997494, 오차=-0.000001
x=1.600000, f''(x)=-0.999574, 5점공식f''(x)=-0.999572, 오차=-0.000001
x=1.700000, f''(x)=-0.991665, 5점공식f''(x)=-0.991664, 오차=-0.000001
x=1.800000, f''(x)=-0.973848, 5점공식f''(x)=-0.973847, 오차=-0.000001
x=1.900000, f''(x)=-0.946300, 5점공식f''(x)=-0.946299, 오차=-0.000001
x=2.000000, f''(x)=-0.909297, 5점공식f''(x)=-0.909296, 오차=-0.000001
x=2.100000, f''(x)=-0.863209, 5점공식f''(x)=-0.863208, 오차=-0.000001
x=2.200000, f''(x)=-0.808496, 5점공식f''(x)=-0.808496, 오차=-0.000001
x=2.300000, f''(x)=-0.745705, 5점공식f''(x)=-0.745704, 오차=-0.000001
x=2.400000, f''(x)=-0.675463, 5점공식f''(x)=-0.675462, 오차=-0.000001
x=2.500000, f''(x)=-0.598472, 5점공식f''(x)=-0.598471, 오차=-0.000001
x=2.600000, f''(x)=-0.515501, 5점공식f''(x)=-0.515501, 오차=-0.000001
x=2.700000, f''(x)=-0.427380, 5점공식f''(x)=-0.427379, 오차=-0.000000
x=2.800000, f''(x)=-0.334988, 5점공식f''(x)=-0.334988, 오차=-0.000000
x=2.900000, f''(x)=-0.239249, 5점공식f''(x)=-0.239249, 오차=-0.000000
x=3.000000, f''(x)=-0.141120, 3점공식f''(x)=-0.141002, 오차=-0.000118
```

그림 3. h=0.1일 때

```
h=0.010000일 때,
x=0.010000, f''(x)=-0.010000, 3점공식f''(x)=-0.010000, 오차=-0.000000
x=0.020000, f''(x)=-0.019999, 5점공식f''(x)=-0.019999, 오차=-0.000000
x=0.030000, f''(x)=-0.029996, 5점공식f''(x)=-0.029996, 오차=-0.000000
x=0.040000, f''(x)=-0.039989, 5점공식f''(x)=-0.039989, 오차=-0.000000
x=0.050000, f''(x)=-0.049979, 5점공식f''(x)=-0.049979, 오차=-0.000000
x=0.060000, f''(x)=-0.059964, 5점공식f''(x)=-0.059964, 오차=-0.000000
x=0.070000, f''(x)=-0.069943, 5점공식f''(x)=-0.069943, 오차=-0.000000
x=0.080000, f''(x)=-0.079915, 5점공식f''(x)=-0.079915, 오차=-0.000000
x=0.090000, f''(x)=-0.089879, 5점공식f''(x)=-0.089879, 오차=-0.000000
x=0.100000, f''(x)=-0.099833, 5점공식f''(x)=-0.099833, 오차=-0.000000
x=0.110000, f''(x)=-0.109778, 5점공식f''(x)=-0.109778, 오차=-0.000000
x=0.120000, f''(x)=-0.119712, 5점공식f''(x)=-0.119712, 오차=-0.000000
x=0.130000, f''(x)=-0.129634, 5점공식f''(x)=-0.129634, 오차=-0.000000
x=0.140000, f''(x)=-0.139543, 5점공식f''(x)=-0.139543, 오차=-0.000000
x=0.150000, f''(x)=-0.149438, 5점공식f''(x)=-0.149438, 오차=-0.000000
x=0.160000, f''(x)=-0.159318, 5점공식f''(x)=-0.159318, 오차=-0.000000

x=3.030000, f''(x)=-0.111361, 5점공식f''(x)=-0.111361, 오차=-0.000000
x=3.040000, f''(x)=-0.101418, 5점공식f''(x)=-0.101418, 오차=-0.000000
x=3.050000, f''(x)=-0.091465, 5점공식f''(x)=-0.091465, 오차=-0.000000
x=3.060000, f''(x)=-0.081502, 5점공식f''(x)=-0.081502, 오차=-0.000000
x=3.070000, f''(x)=-0.071532, 5점공식f''(x)=-0.071532, 오차=-0.000000
x=3.080000, f''(x)=-0.061554, 5점공식f''(x)=-0.061554, 오차=-0.000000
x=3.090000, f''(x)=-0.051570, 5점공식f''(x)=-0.051570, 오차=-0.000000
x=3.100000, f''(x)=-0.041581, 5점공식f''(x)=-0.041581, 오차=-0.000000
x=3.110000, f''(x)=-0.031587, 5점공식f''(x)=-0.031587, 오차=-0.000000
x=3.120000, f''(x)=-0.021591, 5점공식f''(x)=-0.021591, 오차=-0.000000
x=3.130000, f''(x)=-0.011592, 3점공식f''(x)=-0.011592, 오차=-0.000000
```

그림 4. h=0.01일 때

(3). 구면 베셀 함수는 일반적으로 정수 n에 대해 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$(x)= -1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$ (단, n은 음이 아닌 정수)

위 식을 이용하여 수치해석적 미분으로 x=[0,2π] 구간에서 $j_1(x)$와 $j_2(x)$를 구하라.

-> 코드 :

```
import math as m
global Max,dx
Max=m.pi*2
dx=0.01
def f(x): return 1/x #f(x)=1/x
def f_dx(x): return -1/(x*x) #f'(x)=-1/x^2
def formula_2(x0): #2점 공식
    if x0+dx>Max:
        return (f(x0)-f(x0-dx))/dx
    return (f(x0+dx)-f(x0))/dx
def formula_3(x0): #3점 공식
    return (f(x0+dx)-f(x0-dx))/(2*dx)
def formula_5(x0): #5점 공식
    return (8*(f(x+dx)-f(x-dx))-(f(x+2*dx)-f(x-2*dx)))/(12*dx)
def j(n,x):
    return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(f_dx(x),n)*m.sin(x)/x
def numerical_j(n,x,formula): #수치해석적 미분으로 1/x를 미분하여 j(x)구하기
    if formula==5:
        return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(formula_5(x),n)*m.sin(x)/x
    elif formula==3:
        return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(formula_3(x),n)*m.sin(x)/x
    else:
        return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(formula_2(x),n)*m.sin(x)/x

x=dx
while x<=Max:
    if x-2*dx<=0 or x+2*dx>Max:# 5점 공식 사용못할 때
        if x-dx==0 or x+dx>Max: # 2점 공식
            ans1=numerical_j(1,x,2)
            ans2=numerical_j(2,x,2)
        else: #3점 공식
            ans1=numerical_j(1,x,3)
            ans2=numerical_j(2,x,3)
    else:
        ans1=numerical_j(1,x,5)
        ans2=numerical_j(2,x,5)
    print("x=%f, j1(x)=%f, 오차:%f, j2(x)=%f, 오차:%f"%(x,ans1,j(1,x)-ans1,ans2,j(2,x)-ans2))
    x=x+dx
```

```
x=0.030000, j1(x)=29.995500, 오차:3.332833, j2(x)=899.865006, 오차:211.079446
x=0.040000, j1(x)=24.437926, 오차:0.555407, j2(x)=597.371535, 오차:27.461811
x=0.050000, j1(x)=19.833004, 오차:0.158664, j2(x)=393.511978, 오차:6.321376
x=0.060000, j1(x)=16.597180, 오차:0.059488, j2(x)=275.631745, 오차:1.979396
x=0.070000, j1(x)=14.247617, 오차:0.026433, j2(x)=203.160465, 오차:0.754541
x=0.080000, j1(x)=12.473458, 오차:0.013213, j2(x)=155.753226, 오차:0.330160
x=0.090000, j1(x)=11.088912, 오차:0.007205, j2(x)=123.130126, 오차:0.160065
x=0.100000, j1(x)=9.979140, 오차:0.004202, j2(x)=99.749399, 오차:0.084017
x=0.110000, j1(x)=9.070002, 오차:0.002585, j2(x)=82.431073, 오차:0.046989
x=0.120000, j1(x)=8.311687, 오차:0.001661, j2(x)=69.250217, 오차:0.027681
x=0.130000, j1(x)=7.669552, 오차:0.001107, j2(x)=58.988044, 오차:0.017028
x=0.140000, j1(x)=7.118786, 오차:0.000761, j2(x)=50.843039, 오차:0.010866
x=0.150000, j1(x)=6.641158, 오차:0.000537, j2(x)=44.270810, 오차:0.007155
x=0.160000, j1(x)=6.222980, 오차:0.000387, j2(x)=38.891204, 오차:0.004842
x=0.170000, j1(x)=5.853775, 오차:0.000285, j2(x)=34.432294, 오차:0.003356
x=0.180000, j1(x)=5.525390, 오차:0.000214, j2(x)=30.695425, 오차:0.002376
x=0.190000, j1(x)=5.231386, 오차:0.000163, j2(x)=27.532751, 오차:0.001714
x=0.200000, j1(x)=4.966608, 오차:0.000126, j2(x)=24.832409, 오차:0.001257
x=0.210000, j1(x)=4.726884, 오차:0.000098, j2(x)=22.508501, 오차:0.000937
x=0.220000, j1(x)=4.508799, 오차:0.000078, j2(x)=20.494186, 오차:0.000707
x=0.230000, j1(x)=4.309532, 오차:0.000062, j2(x)=18.736825, 오차:0.000541
x=0.240000, j1(x)=4.126732, 오차:0.000050, j2(x)=17.194506, 오차:0.000418
x=0.250000, j1(x)=3.958422, 오차:0.000041, j2(x)=15.833527, 오차:0.000327
x=0.260000, j1(x)=3.802933, 오차:0.000034, j2(x)=14.626537, 오차:0.000258
x=0.270000, j1(x)=3.658840, 오차:0.000028, j2(x)=13.551156, 오차:0.000205
x=0.280000, j1(x)=3.524921, 오차:0.000023, j2(x)=12.588923, 오차:0.000165
x=0.290000, j1(x)=3.400126, 오차:0.000019, j2(x)=11.724506, 오차:0.000133
x=0.300000, j1(x)=3.283542, 오차:0.000016, j2(x)=10.945084, 오차:0.000109
x=0.310000, j1(x)=3.174374, 오차:0.000014, j2(x)=10.239870, 오차:0.000089
x=0.320000, j1(x)=3.071927, 오차:0.000012, j2(x)=9.599736, 오차:0.000074
x=0.330000, j1(x)=2.975592, 오차:0.000010, j2(x)=9.016914, 오차:0.000061
x=0.340000, j1(x)=2.884828, 오차:0.000009, j2(x)=8.484762, 오차:0.000051
x=0.350000, j1(x)=2.799158, 오차:0.000007, j2(x)=7.997574, 오차:0.000043
x=0.360000, j1(x)=2.718159, 오차:0.000006, j2(x)=7.550423, 오차:0.000036
```

그림 5. 결과1

```
x=0.360000, j1(x)=2.718159, 오차:0.000006, j2(x)=7.550423, 오차:0.000036
x=0.370000, j1(x)=2.641451, 오차:0.000006, j2(x)=7.139042, 오차:0.000031
x=0.380000, j1(x)=2.568696, 오차:0.000005, j2(x)=6.759714, 오차:0.000026
x=0.390000, j1(x)=2.499591, 오차:0.000004, j2(x)=6.409196, 오차:0.000022
x=0.400000, j1(x)=2.433861, 오차:0.000004, j2(x)=6.084643, 오차:0.000019
x=0.410000, j1(x)=2.371260, 오차:0.000003, j2(x)=5.783552, 오차:0.000016
x=0.420000, j1(x)=2.311564, 오차:0.000003, j2(x)=5.503717, 오차:0.000014
x=0.430000, j1(x)=2.254572, 오차:0.000003, j2(x)=5.243184, 오차:0.000012
x=0.440000, j1(x)=2.200098, 오차:0.000002, j2(x)=5.000218, 오차:0.000011
x=0.450000, j1(x)=2.147976, 오차:0.000002, j2(x)=4.773275, 오차:0.000009
x=0.460000, j1(x)=2.098052, 오차:0.000002, j2(x)=4.560978, 오차:0.000008
x=0.470000, j1(x)=2.050185, 오차:0.000002, j2(x)=4.362093, 오차:0.000007
x=0.480000, j1(x)=2.004248, 오차:0.000002, j2(x)=4.175514, 오차:0.000006
x=0.490000, j1(x)=1.960123, 오차:0.000001, j2(x)=4.000248, 오차:0.000006
x=0.500000, j1(x)=1.917701, 오차:0.000001, j2(x)=3.835399, 오차:0.000005
x=0.510000, j1(x)=1.876882, 오차:0.000001, j2(x)=3.680158, 오차:0.000004
x=0.520000, j1(x)=1.837573, 오차:0.000001, j2(x)=3.533793, 오차:0.000004
x=0.530000, j1(x)=1.799691, 오차:0.000001, j2(x)=3.395641, 오차:0.000003
x=0.540000, j1(x)=1.763154, 오차:0.000001, j2(x)=3.265099, 오차:0.000003
x=0.550000, j1(x)=1.727891, 오차:0.000001, j2(x)=3.141618, 오차:0.000003
x=0.560000, j1(x)=1.693833, 오차:0.000001, j2(x)=3.024700, 오차:0.000002
x=0.570000, j1(x)=1.660917, 오차:0.000001, j2(x)=2.913888, 오차:0.000002
x=0.580000, j1(x)=1.629084, 오차:0.000001, j2(x)=2.808764, 오차:0.000002
x=0.590000, j1(x)=1.598279, 오차:0.000001, j2(x)=2.708946, 오차:0.000002
x=0.600000, j1(x)=1.568451, 오차:0.000000, j2(x)=2.614084, 오차:0.000002
x=0.610000, j1(x)=1.539552, 오차:0.000000, j2(x)=2.523855, 오차:0.000001
x=0.620000, j1(x)=1.511537, 오차:0.000000, j2(x)=2.437963, 오차:0.000001
x=0.630000, j1(x)=1.484365, 오차:0.000000, j2(x)=2.356135, 오차:0.000001
x=0.640000, j1(x)=1.457996, 오차:0.000000, j2(x)=2.278119, 오차:0.000001
x=0.650000, j1(x)=1.432394, 오차:0.000000, j2(x)=2.203682, 오차:0.000001
x=0.660000, j1(x)=1.407522, 오차:0.000000, j2(x)=2.132609, 오차:0.000001
x=0.670000, j1(x)=1.383350, 오차:0.000000, j2(x)=2.064701, 오차:0.000001
x=0.680000, j1(x)=1.359846, 오차:0.000000, j2(x)=1.999774, 오차:0.000001
x=0.690000, j1(x)=1.336982, 오차:0.000000, j2(x)=1.937655, 오차:0.000001
x=0.700000, j1(x)=1.314730, 오차:0.000000, j2(x)=1.878185, 오차:0.000001
x=0.710000, j1(x)=1.293064, 오차:0.000000, j2(x)=1.821217, 오차:0.000001
x=0.720000, j1(x)=1.271961, 오차:0.000000, j2(x)=1.766612, 오차:0.000001
```

그림 6. 결과2

```
x=6.070000, j1(x)=-0.005742, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000946, 오차:-0.000000
x=6.080000, j1(x)=-0.005459, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000898, 오차:-0.000000
x=6.090000, j1(x)=-0.005176, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000850, 오차:-0.000000
x=6.100000, j1(x)=-0.004896, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000803, 오차:-0.000000
x=6.110000, j1(x)=-0.004616, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000755, 오차:-0.000000
x=6.120000, j1(x)=-0.004338, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000709, 오차:-0.000000
x=6.130000, j1(x)=-0.004061, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000662, 오차:-0.000000
x=6.140000, j1(x)=-0.003785, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000616, 오차:-0.000000
x=6.150000, j1(x)=-0.003511, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000571, 오차:-0.000000
x=6.160000, j1(x)=-0.003238, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000526, 오차:-0.000000
x=6.170000, j1(x)=-0.002967, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000481, 오차:-0.000000
x=6.180000, j1(x)=-0.002697, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000436, 오차:-0.000000
x=6.190000, j1(x)=-0.002428, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000392, 오차:-0.000000
x=6.200000, j1(x)=-0.002162, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000349, 오차:-0.000000
x=6.210000, j1(x)=-0.001896, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000305, 오차:-0.000000
x=6.220000, j1(x)=-0.001632, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000262, 오차:-0.000000
x=6.230000, j1(x)=-0.001370, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000220, 오차:-0.000000
x=6.240000, j1(x)=-0.001109, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000178, 오차:-0.000000
x=6.250000, j1(x)=-0.000849, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000136, 오차:-0.000000
x=6.260000, j1(x)=-0.000592, 오차:-0.000000, j2(x)=-0.000095, 오차:-0.000000
x=6.270000, j1(x)=-0.000335, 오차:0.000000, j2(x)=-0.000053, 오차:0.000000
x=6.280000, j1(x)=-0.000081, 오차:0.000000, j2(x)=-0.000013, 오차:0.000000
```

그림 7. 결과3