

# Python을 이용한 미분방정식 풀이

신민경

## 학습목표.

저서 'C언어를 이용한 전산물리학'에 기초하여 수치해석적 미분 공식을 유도해보고, python으로 코드를 구현하여 문제를 풀어보자.

## 1. 수치해석적 미분

### 1-1. 미분공식

일정한 간격의  $x$ 에 대해 어떤 함수  $f(x)$ 의 값이 주어졌을 때, 테일러 전개를 이용하여  $f(x)$ 의 미분을 수치해석적으로 계산한다.  $f(x)$ 를 테일러 전개하면 미소 변위  $h$ 에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2!} + \frac{h^3 f'''(x)}{3!} + \dots \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2!} - \frac{h^3 f'''(x)}{3!} + \dots \quad (2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2 f''(x)}{2!} + \frac{8h^3 f'''(x)}{3!} + \dots \quad (3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2 f''(x)}{2!} - \frac{8h^3 f'''(x)}{3!} + \dots \quad (4)$$

위의 식들로부터 다음과 같은 미분 공식을 얻을 수 있다.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h), \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (2\text{점 공식})$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (3\text{점 공식})$$

$$f'(x) = \frac{1}{12h^2} [8\{f(x+h) - f(x-h)\} - \{f(x+2h) - f(x-2h)\}] + O(h^4) \quad (5\text{점 공식})$$

$$f''(x) = \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right\} + O(h^2) \quad (3\text{점 공식})$$

$$f''(x) = \frac{1}{12h^2} \{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)\} + O(h^4) \quad (5\text{점 공식})$$

### 1-2. 연습문제

(1) 함수  $f(x)=\sin x$ 를 0에서  $\pi$ 까지 1차 미분하고, 그 결과를  $f'(x)=\cos$ 와 비교하라.  $h$ 를 0.1, 0.01, 0.001 등으로 변화시키면서 결과가 점점 더 정확하게 나오는 것을 살펴보자.

-> 코드 :

```
import math
global Max,dx
Max=math.pi
dx_list=[0.1,0.01,0.001] #h의 값
def f(x): return math.sin(x) #f(x)=sinx
def f_dx(x): return math.cos(x)#f'(x)=cosx

def formula_2(x0): #2점 공식
    if x0+dx>Max:
        return (f(x0)-f(x0-dx))/dx
    return (f(x0+dx)-f(x0))/dx
def formula_3(x0): #3점 공식
    return (f(x0+dx)-f(x0-dx))/(2*dx)
def formula_5(x0): #5점 공식
    return (8*(f(x+dx)-f(x-dx))-(f(x+2*dx)-f(x-2*dx)))/(12*dx)

for i in dx_list: #h의 값을 변화시키면서
    dx=i
    print("h=%f일 때,"%dx)
    x=0 #x는 0부터
    while x<=Max: #Max값까지
        ans=f_dx(x) #f'(x)의 값과
        if x-2*dx<0 or x+2*dx>Max:#수치해석적으로 구한 1차 미분값을 비교
            if x==0 or x+dx>Max:
                formula=formula_2(x)
                print("x=%f, f'(x)=%f, 2점공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
            else:
                formula=formula_3(x)
                print("x=%f, f'(x)=%f, 3점공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        else:
            formula=formula_5(x)
            print("x=%f, f'(x)=%f, 5점공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        x=x+dx

h=0.100000일 때,
x=0.000000, f'(x)=1.000000, 2점공식f'(x)=0.998334, 오차=0.001666
x=0.100000, f'(x)=0.995004, 3점공식f'(x)=0.993347, 오차=0.001658
x=0.200000, f'(x)=0.980067, 5점공식f'(x)=0.980063, 오차=0.000003
x=0.300000, f'(x)=0.955336, 5점공식f'(x)=0.955333, 오차=0.000003
x=0.400000, f'(x)=0.921061, 5점공식f'(x)=0.921058, 오차=0.000003
x=0.500000, f'(x)=0.877583, 5점공식f'(x)=0.877580, 오차=0.000003
x=0.600000, f'(x)=0.825333, 5점공식f'(x)=0.825333, 오차=0.000000
x=0.700000, f'(x)=0.764842, 5점공식f'(x)=0.764840, 오차=0.000002
x=0.800000, f'(x)=0.696707, 5점공식f'(x)=0.696704, 오차=0.000002
x=0.900000, f'(x)=0.621610, 5점공식f'(x)=0.621608, 오차=0.000002
x=1.000000, f'(x)=0.540302, 5점공식f'(x)=0.540301, 오차=0.000001
x=1.100000, f'(x)=0.453596, 5점공식f'(x)=0.453595, 오차=0.000001
x=1.200000, f'(x)=0.362358, 5점공식f'(x)=0.362357, 오차=0.000001
x=1.300000, f'(x)=0.267498, 5점공식f'(x)=0.267498, 오차=0.000000
x=1.400000, f'(x)=0.169967, 5점공식f'(x)=0.169967, 오차=0.000000
x=1.500000, f'(x)=0.070737, 5점공식f'(x)=0.070737, 오차=0.000000
x=1.600000, f'(x)=0.029200, 5점공식f'(x)=0.029199, 오차=-0.000001
x=1.700000, f'(x)=0.128844, 5점공식f'(x)=0.128844, 오차=-0.000000
x=1.800000, f'(x)=0.227202, 5점공식f'(x)=0.227201, 오차=-0.000001
x=1.900000, f'(x)=0.323290, 5점공식f'(x)=0.323288, 오차=-0.000001
x=2.000000, f'(x)=0.416147, 5점공식f'(x)=0.416145, 오차=-0.000001
x=2.100000, f'(x)=0.504846, 5점공식f'(x)=0.504844, 오차=-0.000002
x=2.200000, f'(x)=0.588501, 5점공식f'(x)=0.588499, 오차=-0.000002
x=2.300000, f'(x)=0.666276, 5점공식f'(x)=0.666274, 오차=-0.000002
x=2.400000, f'(x)=0.737394, 5점공식f'(x)=0.737391, 오차=-0.000002
x=2.500000, f'(x)=0.801144, 5점공식f'(x)=0.801141, 오차=-0.000003
x=2.600000, f'(x)=0.856889, 5점공식f'(x)=0.856886, 오차=-0.000003
x=2.700000, f'(x)=0.904072, 5점공식f'(x)=0.904069, 오차=-0.000003
x=2.800000, f'(x)=0.942222, 5점공식f'(x)=0.942219, 오차=-0.000003
x=2.900000, f'(x)=0.970958, 5점공식f'(x)=0.970955, 오차=-0.000003
x=3.000000, f'(x)=0.989992, 5점공식f'(x)=0.989993, 오차=-0.001649
x=3.100000, f'(x)=0.999135, 5점공식f'(x)=0.999135, 오차=-0.003742
x=3.141593, f'(x)=0.999999, 5점공식f'(x)=0.999999, 오차=-0.000000

h=0.010000일 때,
x=0.000000, f'(x)=1.000000, 2점공식f'(x)=0.999983, 오차=0.000017
x=0.010000, f'(x)=0.999950, 3점공식f'(x)=0.999933, 오차=0.000017
x=0.020000, f'(x)=0.999800, 5점공식f'(x)=0.999800, 오차=0.000000
x=0.030000, f'(x)=0.999550, 5점공식f'(x)=0.999550, 오차=0.000000
x=0.040000, f'(x)=0.999200, 5점공식f'(x)=0.999200, 오차=0.000000
x=0.050000, f'(x)=0.998750, 5점공식f'(x)=0.998750, 오차=0.000000
x=0.060000, f'(x)=0.998201, 5점공식f'(x)=0.998201, 오차=0.000000
x=0.070000, f'(x)=0.997551, 5점공식f'(x)=0.997551, 오차=0.000000
x=0.080000, f'(x)=0.996802, 5점공식f'(x)=0.996802, 오차=0.000000
x=0.090000, f'(x)=0.995953, 5점공식f'(x)=0.995953, 오차=0.000000
x=0.100000, f'(x)=0.995004, 5점공식f'(x)=0.995004, 오차=0.000000
x=0.110000, f'(x)=0.993956, 5점공식f'(x)=0.993956, 오차=0.000000
x=0.120000, f'(x)=0.992809, 5점공식f'(x)=0.992809, 오차=0.000000
x=0.130000, f'(x)=0.991561, 5점공식f'(x)=0.991561, 오차=0.000000
x=0.140000, f'(x)=0.990213, 5점공식f'(x)=0.990213, 오차=0.000000
x=0.150000, f'(x)=0.988765, 5점공식f'(x)=0.988765, 오차=0.000000
x=0.160000, f'(x)=0.987217, 5점공식f'(x)=0.987217, 오차=0.000000
x=0.170000, f'(x)=0.985569, 5점공식f'(x)=0.985569, 오차=0.000000
x=0.180000, f'(x)=0.983821, 5점공식f'(x)=0.983821, 오차=0.000000
x=0.190000, f'(x)=0.981973, 5점공식f'(x)=0.981973, 오차=0.000000
x=0.200000, f'(x)=0.980025, 5점공식f'(x)=0.980025, 오차=0.000000
x=0.210000, f'(x)=0.977977, 5점공식f'(x)=0.977977, 오차=0.000000
x=0.220000, f'(x)=0.975829, 5점공식f'(x)=0.975829, 오차=0.000000
x=0.230000, f'(x)=0.973581, 5점공식f'(x)=0.973581, 오차=0.000000
x=0.240000, f'(x)=0.971233, 5점공식f'(x)=0.971233, 오차=0.000000
x=0.250000, f'(x)=0.968785, 5점공식f'(x)=0.968785, 오차=0.000000
x=0.260000, f'(x)=0.966237, 5점공식f'(x)=0.966237, 오차=0.000000
x=0.270000, f'(x)=0.963589, 5점공식f'(x)=0.963589, 오차=0.000000
x=0.280000, f'(x)=0.960841, 5점공식f'(x)=0.960841, 오차=0.000000
x=0.290000, f'(x)=0.957993, 5점공식f'(x)=0.957993, 오차=0.000000
x=0.300000, f'(x)=0.955045, 5점공식f'(x)=0.955045, 오차=0.000000
x=0.310000, f'(x)=0.951997, 5점공식f'(x)=0.951997, 오차=0.000000
x=0.320000, f'(x)=0.948849, 5점공식f'(x)=0.948849, 오차=0.000000
x=0.330000, f'(x)=0.945591, 5점공식f'(x)=0.945591, 오차=0.000000
x=0.340000, f'(x)=0.942233, 5점공식f'(x)=0.942233, 오차=0.000000
x=0.350000, f'(x)=0.938775, 5점공식f'(x)=0.938775, 오차=0.000000
x=0.360000, f'(x)=0.935217, 5점공식f'(x)=0.935217, 오차=0.000000
x=0.370000, f'(x)=0.931559, 5점공식f'(x)=0.931559, 오차=0.000000
x=0.380000, f'(x)=0.927801, 5점공식f'(x)=0.927801, 오차=0.000000
x=0.390000, f'(x)=0.923943, 5점공식f'(x)=0.923943, 오차=0.000000
x=0.400000, f'(x)=0.919985, 5점공식f'(x)=0.919985, 오차=0.000000
x=0.410000, f'(x)=0.915927, 5점공식f'(x)=0.915927, 오차=0.000000
x=0.420000, f'(x)=0.911769, 5점공식f'(x)=0.911769, 오차=0.000000
x=0.430000, f'(x)=0.907511, 5점공식f'(x)=0.907511, 오차=0.000000
x=0.440000, f'(x)=0.903153, 5점공식f'(x)=0.903153, 오차=0.000000
x=0.450000, f'(x)=0.898695, 5점공식f'(x)=0.898695, 오차=0.000000
x=0.460000, f'(x)=0.894137, 5점공식f'(x)=0.894137, 오차=0.000000
x=0.470000, f'(x)=0.889479, 5점공식f'(x)=0.889479, 오차=0.000000
x=0.480000, f'(x)=0.884721, 5점공식f'(x)=0.884721, 오차=0.000000
x=0.490000, f'(x)=0.879863, 5점공식f'(x)=0.879863, 오차=0.000000
x=0.500000, f'(x)=0.874905, 5점공식f'(x)=0.874905, 오차=0.000000
x=0.510000, f'(x)=0.869847, 5점공식f'(x)=0.869847, 오차=0.000000
x=0.520000, f'(x)=0.864689, 5점공식f'(x)=0.864689, 오차=0.000000
x=0.530000, f'(x)=0.859431, 5점공식f'(x)=0.859431, 오차=0.000000
x=0.540000, f'(x)=0.854073, 5점공식f'(x)=0.854073, 오차=0.000000
x=0.550000, f'(x)=0.848615, 5점공식f'(x)=0.848615, 오차=0.000000
x=0.560000, f'(x)=0.843057, 5점공식f'(x)=0.843057, 오차=0.000000
x=0.570000, f'(x)=0.837399, 5점공식f'(x)=0.837399, 오차=0.000000
x=0.580000, f'(x)=0.831641, 5점공식f'(x)=0.831641, 오차=0.000000
x=0.590000, f'(x)=0.825783, 5점공식f'(x)=0.825783, 오차=0.000000
x=0.600000, f'(x)=0.819825, 5점공식f'(x)=0.819825, 오차=0.000000
x=0.610000, f'(x)=0.813767, 5점공식f'(x)=0.813767, 오차=0.000000
x=0.620000, f'(x)=0.807609, 5점공식f'(x)=0.807609, 오차=0.000000
x=0.630000, f'(x)=0.801351, 5점공식f'(x)=0.801351, 오차=0.000000
x=0.640000, f'(x)=0.794993, 5점공식f'(x)=0.794993, 오차=0.000000
x=0.650000, f'(x)=0.788535, 5점공식f'(x)=0.788535, 오차=0.000000
x=0.660000, f'(x)=0.781977, 5점공식f'(x)=0.781977, 오차=0.000000
x=0.670000, f'(x)=0.775319, 5점공식f'(x)=0.775319, 오차=0.000000
x=0.680000, f'(x)=0.768561, 5점공식f'(x)=0.768561, 오차=0.000000
x=0.690000, f'(x)=0.761703, 5점공식f'(x)=0.761703, 오차=0.000000
x=0.700000, f'(x)=0.754745, 5점공식f'(x)=0.754745, 오차=0.000000
x=0.710000, f'(x)=0.747687, 5점공식f'(x)=0.747687, 오차=0.000000
x=0.720000, f'(x)=0.740529, 5점공식f'(x)=0.740529, 오차=0.000000
x=0.730000, f'(x)=0.733271, 5점공식f'(x)=0.733271, 오차=0.000000
x=0.740000, f'(x)=0.725913, 5점공식f'(x)=0.725913, 오차=0.000000
x=0.750000, f'(x)=0.718455, 5점공식f'(x)=0.718455, 오차=0.000000
x=0.760000, f'(x)=0.710897, 5점공식f'(x)=0.710897, 오차=0.000000
x=0.770000, f'(x)=0.703239, 5점공식f'(x)=0.703239, 오차=0.000000
x=0.780000, f'(x)=0.695481, 5점공식f'(x)=0.695481, 오차=0.000000
x=0.790000, f'(x)=0.687623, 5점공식f'(x)=0.687623, 오차=0.000000
x=0.800000, f'(x)=0.679665, 5점공식f'(x)=0.679665, 오차=0.000000
x=0.810000, f'(x)=0.671607, 5점공식f'(x)=0.671607, 오차=0.000000
x=0.820000, f'(x)=0.663449, 5점공식f'(x)=0.663449, 오차=0.000000
x=0.830000, f'(x)=0.655191, 5점공식f'(x)=0.655191, 오차=0.000000
x=0.840000, f'(x)=0.646833, 5점공식f'(x)=0.646833, 오차=0.000000
x=0.850000, f'(x)=0.638375, 5점공식f'(x)=0.638375, 오차=0.000000
x=0.860000, f'(x)=0.629817, 5점공식f'(x)=0.629817, 오차=0.000000
x=0.870000, f'(x)=0.621159, 5점공식f'(x)=0.621159, 오차=0.000000
x=0.880000, f'(x)=0.612401, 5점공식f'(x)=0.612401, 오차=0.000000
x=0.890000, f'(x)=0.603543, 5점공식f'(x)=0.603543, 오차=0.000000
x=0.900000, f'(x)=0.594585, 5점공식f'(x)=0.594585, 오차=0.000000
x=0.910000, f'(x)=0.585527, 5점공식f'(x)=0.585527, 오차=0.000000
x=0.920000, f'(x)=0.576369, 5점공식f'(x)=0.576369, 오차=0.000000
x=0.930000, f'(x)=0.567111, 5점공식f'(x)=0.567111, 오차=0.000000
x=0.940000, f'(x)=0.557753, 5점공식f'(x)=0.557753, 오차=0.000000
x=0.950000, f'(x)=0.548295, 5점공식f'(x)=0.548295, 오차=0.000000
x=0.960000, f'(x)=0.538737, 5점공식f'(x)=0.538737, 오차=0.000000
x=0.970000, f'(x)=0.529079, 5점공식f'(x)=0.529079, 오차=0.000000
x=0.980000, f'(x)=0.519321, 5점공식f'(x)=0.519321, 오차=0.000000
x=0.990000, f'(x)=0.509463, 5점공식f'(x)=0.509463, 오차=0.000000
x=1.000000, f'(x)=0.500000, 5점공식f'(x)=0.500000, 오차=0.000000
x=1.010000, f'(x)=0.490832, 5점공식f'(x)=0.490832, 오차=0.000000
x=1.020000, f'(x)=0.481964, 5점공식f'(x)=0.481964, 오차=0.000000
x=1.030000, f'(x)=0.473396, 5점공식f'(x)=0.473396, 오차=0.000000
x=1.040000, f'(x)=0.465128, 5점공식f'(x)=0.465128, 오차=0.000000
x=1.050000, f'(x)=0.457160, 5점공식f'(x)=0.457160, 오차=0.000000
x=1.060000, f'(x)=0.449492, 5점공식f'(x)=0.449492, 오차=0.000000
x=1.070000, f'(x)=0.442124, 5점공식f'(x)=0.442124, 오차=0.000000
x=1.080000, f'(x)=0.435056, 5점공식f'(x)=0.435056, 오차=0.000000
x=1.090000, f'(x)=0.428288, 5점공식f'(x)=0.428288, 오차=0.000000
x=1.100000, f'(x)=0.421820, 5점공식f'(x)=0.421820, 오차=0.000000
x=1.110000, f'(x)=0.415652, 5점공식f'(x)=0.415652, 오차=0.000000
x=1.120000, f'(x)=0.409784, 5점공식f'(x)=0.409784, 오차=0.000000
x=1.130000, f'(x)=0.404216, 5점공식f'(x)=0.404216, 오차=0.000000
x=1.140000, f'(x)=0.398948, 5점공식f'(x)=0.398948, 오차=0.000000
x=1.150000, f'(x)=0.393980, 5점공식f'(x)=0.393980, 오차=0.000000
x=1.160000, f'(x)=0.389312, 5점공식f'(x)=0.389312, 오차=0.000000
x=1.170000, f'(x)=0.384944, 5점공식f'(x)=0.384944, 오차=0.000000
x=1.180000, f'(x)=0.380876, 5점공식f'(x)=0.380876, 오차=0.000000
x=1.190000, f'(x)=0.377108, 5점공식f'(x)=0.377108, 오차=0.000000
x=1.200000, f'(x)=0.373640, 5점공식f'(x)=0.373640, 오차=0.000000
x=1.210000, f'(x)=0.370472, 5점공식f'(x)=0.370472, 오차=0.000000
x=1.220000, f'(x)=0.367604, 5점공식f'(x)=0.367604, 오차=0.000000
x=1.230000, f'(x)=0.365036, 5점공식f'(x)=0.365036, 오차=0.000000
x=1.240000, f'(x)=0.362768, 5점공식f'(x)=0.362768, 오차=0.000000
x=1.250000, f'(x)=0.360700, 5점공식f'(x)=0.360700, 오차=0.000000
x=1.260000, f'(x)=0.358932, 5점공식f'(x)=0.358932, 오차=0.000000
x=1.270000, f'(x)=0.357364, 5점공식f'(x)=0.357364, 오차=0.000000
x=1.280000, f'(x)=0.356096, 5점공식f'(x)=0.356096, 오차=0.000000
x=1.290000, f'(x)=0.355128, 5점공식f'(x)=0.355128, 오차=0.000000
x=1.300000, f'(x)=0.354460, 5점공식f'(x)=0.354460, 오차=0.000000
x=1.310000, f'(x)=0.354092, 5점공식f'(x)=0.354092, 오차=0.000000
x=1.320000, f'(x)=0.353924, 5점공식f'(x)=0.353924, 오차=0.000000
x=1.330000, f'(x)=0.353956, 5점공식f'(x)=0.353956, 오차=0.000000
x=1.340000, f'(x)=0.354188, 5점공식f'(x)=0.354188, 오차=0.000000
x=1.350000, f'(x)=0.354620, 5점공식f'(x)=0.354620, 오차=0.000000
x=1.360000, f'(x)=0.355252, 5점공식f'(x)=0.355252, 오차=0.000000
x=1.370000, f'(x)=0.356084, 5점공식f'(x)=0.356084, 오차=0.000000
x=1.380000, f'(x)=0.357116, 5점공식f'(x)=0.357116, 오차=0.000000
x=1.390000, f'(x)=0.358348, 5점공식f'(x)=0.358348, 오차=0.000000
x=1.400000, f'(x)=0.359780, 5점공식f'(x)=0.359780, 오차=0.000000
x=1.410000, f'(x)=0.361412, 5점공식f'(x)=0.361412, 오차=0.000000
x=1.420000, f'(x)=0.363244, 5점공식f'(x)=0.363244, 오차=0.000000
x=1.430000, f'(x)=0.365276, 5점공식f'(x)=0.365276, 오차=0.000000
x=1.440000, f'(x)=0.367508, 5점공식f'(x)=0.367508, 오차=0.000000
x=1.450000, f'(x)=0.369940, 5점공식f'(x)=0.369940, 오차=0.000000
x=1.460000, f'(x)=0.372572, 5점공식f'(x)=0.372572, 오차=0.000000
x=1.470000, f'(x)=0.375404, 5점공식f'(x)=0.375404, 오차=0.000000
x=1.480000, f'(x)=0.378436, 5점공식f'(x)=0.378436, 오차=0.000000
x=1.490000, f'(x)=0.381668, 5점공식f'(x)=0.381668, 오차=0.000000
x=1.500000, f'(x)=0.385000, 5점공식f'(x)=0.385000, 오차=0.000000
x=1.510000, f'(x)=0.388532, 5점공식f'(x)=0.388532, 오차=0.000000
x=1.520000, f'(x)=0.392264, 5점공식f'(x)=0.392264, 오차=0.000000
x=1.530000, f'(x)=0.396196, 5점공식f'(x)=0.396196, 오차=0.000000
x=1.540000, f'(x)=0.400328, 5점공식f'(x)=0.400328, 오차=0.000000
x=1.550000, f'(x)=0.404660, 5점공식f'(x)=0.404660, 오차=0.000000
x=1.560000, f'(x)=0.409192, 5점공식f'(x)=0.409192, 오차=0.000000
x=1.570000, f'(x)=0.413924, 5점공식f'(x)=0.413924, 오차=0.000000
x=1.580000, f'(x)=0.418856, 5점공식f'(x)=0.418856, 오차=0.000000
x=1.590000, f'(x)=0.423988, 5점공식f'(x)=0.423988, 오차=0.000000
x=1.600000, f'(x)=0.429320, 5점공식f'(x)=0.429320, 오차=0.000000
x=1.610000, f'(x)=0.434852, 5점공식f'(x)=0.434852, 오차=0.000000
x=1.620000, f'(x)=0.440584, 5점공식f'(x)=0.440584, 오차=0.000000
x=1.630000, f'(x)=0.446516, 5점공식f'(x)=0.446516, 오차=0.000000
x=1.640000, f'(x)=0.452648, 5점공식f'(x)=0.452648, 오차=0.000000
x=1.650000, f'(x)=0.458980, 5점공식f'(x)=0.458980, 오차=0.000000
x=1.660000, f'(x)=0.465512, 5점공식f'(x)=0.465512, 오차=0.000000
x=1.670000, f'(x)=0.472244, 5점공식f'(x)=0.472244, 오차=0.000000
x=1.680000, f'(x)=0.479176, 5점공식f'(x)=0.479176, 오차=0.000000
x=1.690000, f'(x)=0.486308, 5점공식f'(x)=0.486308, 오차=0.000000
x=1.700000, f'(x)=0.493640, 5점공식f'(x)=0.493640, 오차=0.000000
x=1.710000, f'(x)=0.501172, 5점공식f'(x)=0.501172, 오차=0.000000
x=1.720000, f'(x)=0.508904, 5점공식f'(x)=0.508904, 오차=0.000000
x=1.730000, f'(x)=0.516836, 5점공식f'(x)=0.516836, 오차=0.000000
x=1.740000, f'(x)=0.524968, 5점공식f'(x)=0.524968, 오차=0.000000
x=1.750000, f'(x)=0.533200, 5점공식f'(x)=0.533200, 오차=0.000000
x=1.760000, f'(x)=0.541632, 5점공식f'(x)=0.541632, 오차=0.000000
x=1.770000, f'(x)=0.550264, 5점공식f'(x)=0.550264, 오차=0.000000
x=1.780000, f'(x)=0.559096, 5점공식f'(x)=0.559096, 오차=0.000000
x=1.790000, f'(x)=0.568128, 5점공식f'(x)=0.568128, 오차=0.000000
x=1.800000, f'(x)=0.577360, 5점공식f'(x)=0.577360, 오차=0.000000
x=1.810000, f'(x)=0.586792, 5점공식f'(x)=0.586792, 오차=0.000000
x=1.820000, f'(x)=0.596424, 5점공식f'(x)=0.596424, 오차=0.000000
x=1.830000, f'(x)=0.606256, 5점공식f'(x)=0.606256, 오차=0.000000
x=1.840000, f'(x)=0.616288, 5점공식f'(x)=0.616288, 오차=0.000000
x=1.850000, f'(x)=0.626520, 5점공식f'(x)=0.6
```

(2) 함수  $f(x)=\sin x$ 를 0에서  $\pi$ 까지 2차 미분하고, 그 결과를  $f''(x)=-\sin x$ 와 비교하라. 이때 구간 크기  $h$ 를 0.1, 0.01, 0.001 등으로 변화시키면서 결과를 비교하라.

-> 코드 :

```
import math
global Max,dx
Max=math.pi
dx_list=[0.1,0.01] #h의 값
def f(x): return math.sin(x) #f(x)=sinx
def f_2dx(x): return -math.sin(x) #f''(x)=-sinx

def formula_2(x0,dir): #1차 미분 2점 공식 dir이 -1이면 x0기준 왼쪽 점 이용
    if dir==-1:
        return (f(x0)-f(x0-dx))/dx
    return (f(x0+dx)-f(x0))/dx
def formula_3(x0): #3점 공식
    return (formula_2(x0,1)-formula_2(x0,-1))/dx
def formula_5(x0): #5점 공식
    return (-f(x0-2*dx)+16*f(x0-dx)-30*f(x0)+16*f(x0+dx)-f(x0+2*dx))/(12*dx*dx)
```

```
for i in dx_list: #h의 값을 변화시키면서
    dx=i
    print("h=%f일 때,"%dx)
    x=dx #x는 h부터
    while x+dx<=Max: #Max-h값까지
        ans=f_2dx(x) #f'(x)의 값과
        if x-2*dx<0 or x+2*dx>Max:#수치해석적으로 구한 2차 미분값을 비교
            formula=formula_3(x)
            print("x=%f, f'(x)=%f, 3점 공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        else:
            formula=formula_5(x)
            print("x=%f, f'(x)=%f, 5점 공식f'(x)=%f, 오차=%f"%(x,ans,formula,ans-formula))
        x=x+dx
```

```
h=0.100000일 때,
x=0.100000, f'(x)=-0.099833, 3점 공식f'(x)=-0.099750, 오차=-0.000083
x=0.200000, f'(x)=-0.198669, 5점 공식f'(x)=-0.198669, 오차=-0.000000
x=0.300000, f'(x)=-0.295520, 5점 공식f'(x)=-0.295520, 오차=-0.000000
x=0.400000, f'(x)=-0.389418, 5점 공식f'(x)=-0.389418, 오차=-0.000000
x=0.500000, f'(x)=-0.479425, 5점 공식f'(x)=-0.479425, 오차=-0.000001
x=0.600000, f'(x)=-0.564642, 5점 공식f'(x)=-0.564642, 오차=-0.000001
x=0.700000, f'(x)=-0.644218, 5점 공식f'(x)=-0.644217, 오차=-0.000001
x=0.800000, f'(x)=-0.717356, 5점 공식f'(x)=-0.717355, 오차=-0.000001
x=0.900000, f'(x)=-0.783327, 5점 공식f'(x)=-0.783326, 오차=-0.000001
x=1.000000, f'(x)=-0.841471, 5점 공식f'(x)=-0.841470, 오차=-0.000001
x=1.100000, f'(x)=-0.891207, 5점 공식f'(x)=-0.891206, 오차=-0.000001
x=1.200000, f'(x)=-0.932039, 5점 공식f'(x)=-0.932038, 오차=-0.000001
x=1.300000, f'(x)=-0.963558, 5점 공식f'(x)=-0.963557, 오차=-0.000001
x=1.400000, f'(x)=-0.985450, 5점 공식f'(x)=-0.985449, 오차=-0.000001
x=1.500000, f'(x)=-0.997495, 5점 공식f'(x)=-0.997494, 오차=-0.000001
x=1.600000, f'(x)=-0.999574, 5점 공식f'(x)=-0.999572, 오차=-0.000001
x=1.700000, f'(x)=-0.991665, 5점 공식f'(x)=-0.991664, 오차=-0.000001
x=1.800000, f'(x)=-0.973848, 5점 공식f'(x)=-0.973847, 오차=-0.000001
x=1.900000, f'(x)=-0.946300, 5점 공식f'(x)=-0.946299, 오차=-0.000001
x=2.000000, f'(x)=-0.909297, 5점 공식f'(x)=-0.909296, 오차=-0.000001
x=2.100000, f'(x)=-0.863208, 5점 공식f'(x)=-0.863208, 오차=-0.000001
x=2.200000, f'(x)=-0.808496, 5점 공식f'(x)=-0.808496, 오차=-0.000001
x=2.300000, f'(x)=-0.745705, 5점 공식f'(x)=-0.745704, 오차=-0.000001
x=2.400000, f'(x)=-0.675463, 5점 공식f'(x)=-0.675462, 오차=-0.000001
x=2.500000, f'(x)=-0.598472, 5점 공식f'(x)=-0.598471, 오차=-0.000001
x=2.600000, f'(x)=-0.515501, 5점 공식f'(x)=-0.515501, 오차=-0.000001
x=2.700000, f'(x)=-0.427380, 5점 공식f'(x)=-0.427379, 오차=-0.000000
x=2.800000, f'(x)=-0.334988, 5점 공식f'(x)=-0.334988, 오차=-0.000000
x=2.900000, f'(x)=-0.239249, 5점 공식f'(x)=-0.239249, 오차=-0.000000
x=3.000000, f'(x)=-0.141120, 3점 공식f'(x)=-0.141002, 오차=-0.000118
```

그림 3.  $h=0.1$ 일 때

```
h=0.010000일 때,
x=0.010000, f'(x)=-0.010000, 3점 공식f'(x)=-0.010000, 오차=-0.000000
x=0.020000, f'(x)=-0.019999, 5점 공식f'(x)=-0.019999, 오차=-0.000000
x=0.030000, f'(x)=-0.029996, 5점 공식f'(x)=-0.029996, 오차=-0.000000
x=0.040000, f'(x)=-0.039989, 5점 공식f'(x)=-0.039989, 오차=-0.000000
x=0.050000, f'(x)=-0.049979, 5점 공식f'(x)=-0.049979, 오차=-0.000000
x=0.060000, f'(x)=-0.059964, 5점 공식f'(x)=-0.059964, 오차=-0.000000
x=0.070000, f'(x)=-0.069943, 5점 공식f'(x)=-0.069943, 오차=-0.000000
x=0.080000, f'(x)=-0.079915, 5점 공식f'(x)=-0.079915, 오차=-0.000000
x=0.090000, f'(x)=-0.089879, 5점 공식f'(x)=-0.089879, 오차=-0.000000
x=0.100000, f'(x)=-0.099833, 5점 공식f'(x)=-0.099833, 오차=-0.000000
x=0.110000, f'(x)=-0.109778, 5점 공식f'(x)=-0.109778, 오차=-0.000000
x=0.120000, f'(x)=-0.119712, 5점 공식f'(x)=-0.119712, 오차=-0.000000
x=0.130000, f'(x)=-0.129634, 5점 공식f'(x)=-0.129634, 오차=-0.000000
x=0.140000, f'(x)=-0.139543, 5점 공식f'(x)=-0.139543, 오차=-0.000000
x=0.150000, f'(x)=-0.149438, 5점 공식f'(x)=-0.149438, 오차=-0.000000
x=0.160000, f'(x)=-0.159318, 5점 공식f'(x)=-0.159318, 오차=-0.000000

x=3.030000, f'(x)=-0.111361, 5점 공식f'(x)=-0.111361, 오차=-0.000000
x=3.040000, f'(x)=-0.101418, 5점 공식f'(x)=-0.101418, 오차=-0.000000
x=3.050000, f'(x)=-0.091465, 5점 공식f'(x)=-0.091465, 오차=-0.000000
x=3.060000, f'(x)=-0.081502, 5점 공식f'(x)=-0.081502, 오차=-0.000000
x=3.070000, f'(x)=-0.071532, 5점 공식f'(x)=-0.071532, 오차=-0.000000
x=3.080000, f'(x)=-0.061554, 5점 공식f'(x)=-0.061554, 오차=-0.000000
x=3.090000, f'(x)=-0.051570, 5점 공식f'(x)=-0.051570, 오차=-0.000000
x=3.100000, f'(x)=-0.041581, 5점 공식f'(x)=-0.041581, 오차=-0.000000
x=3.110000, f'(x)=-0.031587, 5점 공식f'(x)=-0.031587, 오차=-0.000000
x=3.120000, f'(x)=-0.021591, 5점 공식f'(x)=-0.021591, 오차=-0.000000
x=3.130000, f'(x)=-0.011592, 3점 공식f'(x)=-0.011592, 오차=-0.000000
```

그림 4.  $h=0.01$ 일 때

(3). 구면 베셀 함수는 일반적으로 정수  $n$ 에 대해 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\sin x}{x} \right) \quad (\text{단, } n \text{은 음이 아닌 정수})$$

위 식을 이용하여 수치해석적 미분으로  $x=[0,2\pi]$  구간에서  $j_1(x)$ 와  $j_2(x)$ 를 구하라.

-> 코드 :

```
import math as m
global Max,dx
Max=m.pi*2
dx=0.01
def f(x): return 1/x #f(x)=1/x
def f_dx(x): return -1/(x*x) #f'(x)=-1/x^2
def formula_2(x0): #2점 공식
    if x0+dx>Max:
        return (f(x0)-f(x0-dx))/dx
    return (f(x0+dx)-f(x0))/dx
def formula_3(x0): #3점 공식
    return (f(x0+dx)-f(x0-dx))/(2*dx)
def formula_5(x0): #5점 공식
    return (8*(f(x+dx)-f(x-dx))-(f(x+2*dx)-f(x-2*dx)))/(12*dx)
def j(n,x):
    return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(f_dx(x),n)*m.sin(x)/x
def numerical_j(n,x,formula): #수치해석적 미분으로 1/x를 미분하여 j(x)구하기
    if formula==5:
        return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(formula_5(x),n)*m.sin(x)/x
    elif formula==3:
        return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(formula_3(x),n)*m.sin(x)/x
    else:
        return m.pow(-1,n)*m.pow(x,n)*m.pow(formula_2(x),n)*m.sin(x)/x

x=dx
while x<=Max:
    if x-2*dx<=0 or x+2*dx>Max:# 5점 공식 사용못할 때
        if x-dx==0 or x+dx>Max: # 2점 공식
            ans1=numerical_j(1,x,2)
            ans2=numerical_j(2,x,2)
        else: #3점 공식
            ans1=numerical_j(1,x,3)
            ans2=numerical_j(2,x,3)
    else:
        ans1=numerical_j(1,x,5)
        ans2=numerical_j(2,x,5)
    print("x=%f, j1(x)=%f, 오차:%f, j2(x)=%f, 오차:%f"%(x,ans1,j(1,x)-ans1,ans2,j(2,x)-ans2))
    x=x+dx
```

x=0.030000, j1(x)=29.995500, 오차: 3.332833, j2(x)=899.865006, 오차: 211.079446  
x=0.040000, j1(x)=24.437926, 오차: 0.555407, j2(x)=597.371535, 오차: 27.461811  
x=0.050000, j1(x)=19.833004, 오차: 0.158664, j2(x)=393.511978, 오차: 6.321376  
x=0.060000, j1(x)=16.597180, 오차: 0.058488, j2(x)=275.631745, 오차: 1.979396  
x=0.070000, j1(x)=14.247617, 오차: 0.026433, j2(x)=203.160465, 오차: 0.754541  
x=0.080000, j1(x)=12.473458, 오차: 0.013213, j2(x)=155.753226, 오차: 0.330160  
x=0.090000, j1(x)=11.088912, 오차: 0.007205, j2(x)=123.130126, 오차: 0.160065  
x=0.100000, j1(x)=9.979140, 오차: 0.004202, j2(x)=99.749399, 오차: 0.084017  
x=0.110000, j1(x)=9.070002, 오차: 0.002585, j2(x)=82.431073, 오차: 0.046989  
x=0.120000, j1(x)=8.311887, 오차: 0.001661, j2(x)=69.250217, 오차: 0.027681  
x=0.130000, j1(x)=7.669552, 오차: 0.001107, j2(x)=58.988044, 오차: 0.017028  
x=0.140000, j1(x)=7.118786, 오차: 0.000761, j2(x)=50.843039, 오차: 0.010866  
x=0.150000, j1(x)=6.641158, 오차: 0.000537, j2(x)=44.270810, 오차: 0.007155  
x=0.160000, j1(x)=6.222980, 오차: 0.000387, j2(x)=38.891204, 오차: 0.004842  
x=0.170000, j1(x)=5.853775, 오차: 0.000285, j2(x)=34.432294, 오차: 0.003356  
x=0.180000, j1(x)=5.525390, 오차: 0.000214, j2(x)=30.695425, 오차: 0.002376  
x=0.190000, j1(x)=5.231386, 오차: 0.000163, j2(x)=27.532751, 오차: 0.001714  
x=0.200000, j1(x)=4.966608, 오차: 0.000126, j2(x)=24.832409, 오차: 0.001257  
x=0.210000, j1(x)=4.726884, 오차: 0.000098, j2(x)=22.508501, 오차: 0.000937  
x=0.220000, j1(x)=4.508799, 오차: 0.000078, j2(x)=20.494186, 오차: 0.000707  
x=0.230000, j1(x)=4.309532, 오차: 0.000062, j2(x)=18.736825, 오차: 0.000541  
x=0.240000, j1(x)=4.126732, 오차: 0.000050, j2(x)=17.194506, 오차: 0.000418  
x=0.250000, j1(x)=3.958422, 오차: 0.000041, j2(x)=15.833527, 오차: 0.000327  
x=0.260000, j1(x)=3.802933, 오차: 0.000034, j2(x)=14.626537, 오차: 0.000258  
x=0.270000, j1(x)=3.658840, 오차: 0.000028, j2(x)=13.551156, 오차: 0.000205  
x=0.280000, j1(x)=3.524921, 오차: 0.000023, j2(x)=12.588923, 오차: 0.000165  
x=0.290000, j1(x)=3.400126, 오차: 0.000019, j2(x)=11.724506, 오차: 0.000133  
x=0.300000, j1(x)=3.283542, 오차: 0.000016, j2(x)=10.945084, 오차: 0.000109  
x=0.310000, j1(x)=3.174374, 오차: 0.000014, j2(x)=10.239870, 오차: 0.000089  
x=0.320000, j1(x)=3.071927, 오차: 0.000012, j2(x)=9.599736, 오차: 0.000074  
x=0.330000, j1(x)=2.975592, 오차: 0.000010, j2(x)=9.016914, 오차: 0.000061  
x=0.340000, j1(x)=2.884828, 오차: 0.000009, j2(x)=8.484762, 오차: 0.000051  
x=0.350000, j1(x)=2.799158, 오차: 0.000007, j2(x)=7.997574, 오차: 0.000043  
x=0.360000, j1(x)=2.718153, 오차: 0.000006, j2(x)=7.550423, 오차: 0.000036

그림 5. 결과1

x=0.360000, j1(x)=2.718159, 오차: 0.000006, j2(x)=7.550423, 오차: 0.000036  
x=0.370000, j1(x)=2.641451, 오차: 0.000006, j2(x)=7.139042, 오차: 0.000031  
x=0.380000, j1(x)=2.568696, 오차: 0.000005, j2(x)=6.759714, 오차: 0.000026  
x=0.390000, j1(x)=2.499591, 오차: 0.000004, j2(x)=6.409196, 오차: 0.000022  
x=0.400000, j1(x)=2.433861, 오차: 0.000004, j2(x)=6.084643, 오차: 0.000019  
x=0.410000, j1(x)=2.371260, 오차: 0.000003, j2(x)=5.783552, 오차: 0.000016  
x=0.420000, j1(x)=2.311584, 오차: 0.000003, j2(x)=5.503717, 오차: 0.000014  
x=0.430000, j1(x)=2.254572, 오차: 0.000003, j2(x)=5.243184, 오차: 0.000012  
x=0.440000, j1(x)=2.200098, 오차: 0.000002, j2(x)=5.000218, 오차: 0.000011  
x=0.450000, j1(x)=2.147976, 오차: 0.000002, j2(x)=4.773275, 오차: 0.000009  
x=0.460000, j1(x)=2.098052, 오차: 0.000002, j2(x)=4.560978, 오차: 0.000008  
x=0.470000, j1(x)=2.050185, 오차: 0.000002, j2(x)=4.362093, 오차: 0.000007  
x=0.480000, j1(x)=2.004248, 오차: 0.000002, j2(x)=4.175514, 오차: 0.000006  
x=0.490000, j1(x)=1.960123, 오차: 0.000001, j2(x)=4.000248, 오차: 0.000006  
x=0.500000, j1(x)=1.917701, 오차: 0.000001, j2(x)=3.835399, 오차: 0.000005  
x=0.510000, j1(x)=1.876882, 오차: 0.000001, j2(x)=3.680158, 오차: 0.000004  
x=0.520000, j1(x)=1.837573, 오차: 0.000001, j2(x)=3.533793, 오차: 0.000004  
x=0.530000, j1(x)=1.799691, 오차: 0.000001, j2(x)=3.395641, 오차: 0.000003  
x=0.540000, j1(x)=1.763154, 오차: 0.000001, j2(x)=3.265099, 오차: 0.000003  
x=0.550000, j1(x)=1.727891, 오차: 0.000001, j2(x)=3.141618, 오차: 0.000003  
x=0.560000, j1(x)=1.693833, 오차: 0.000001, j2(x)=3.024700, 오차: 0.000002  
x=0.570000, j1(x)=1.660917, 오차: 0.000001, j2(x)=2.913888, 오차: 0.000002  
x=0.580000, j1(x)=1.629084, 오차: 0.000001, j2(x)=2.809784, 오차: 0.000002  
x=0.590000, j1(x)=1.598279, 오차: 0.000001, j2(x)=2.708946, 오차: 0.000002  
x=0.600000, j1(x)=1.568451, 오차: 0.000000, j2(x)=2.614084, 오차: 0.000001  
x=0.610000, j1(x)=1.539552, 오차: 0.000000, j2(x)=2.523855, 오차: 0.000001  
x=0.620000, j1(x)=1.511537, 오차: 0.000000, j2(x)=2.437963, 오차: 0.000001  
x=0.630000, j1(x)=1.484365, 오차: 0.000000, j2(x)=2.356135, 오차: 0.000001  
x=0.640000, j1(x)=1.457896, 오차: 0.000000, j2(x)=2.278119, 오차: 0.000001  
x=0.650000, j1(x)=1.432394, 오차: 0.000000, j2(x)=2.203682, 오차: 0.000001  
x=0.660000, j1(x)=1.407522, 오차: 0.000000, j2(x)=2.132609, 오차: 0.000001  
x=0.670000, j1(x)=1.383350, 오차: 0.000000, j2(x)=2.064701, 오차: 0.000001  
x=0.680000, j1(x)=1.359846, 오차: 0.000000, j2(x)=1.999774, 오차: 0.000001  
x=0.690000, j1(x)=1.336982, 오차: 0.000000, j2(x)=1.937655, 오차: 0.000001  
x=0.700000, j1(x)=1.314730, 오차: 0.000000, j2(x)=1.878185, 오차: 0.000001  
x=0.710000, j1(x)=1.293064, 오차: 0.000000, j2(x)=1.821217, 오차: 0.000001  
x=0.720000, j1(x)=1.271961, 오차: 0.000000, j2(x)=1.766612, 오차: 0.000001

그림 6. 결과2

x=6.070000, j1(x)=-0.005742, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000946, 오차: -0.000000  
x=6.080000, j1(x)=-0.005459, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000898, 오차: -0.000000  
x=6.090000, j1(x)=-0.005176, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000850, 오차: -0.000000  
x=6.100000, j1(x)=-0.004896, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000803, 오차: -0.000000  
x=6.110000, j1(x)=-0.004616, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000755, 오차: -0.000000  
x=6.120000, j1(x)=-0.004338, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000709, 오차: -0.000000  
x=6.130000, j1(x)=-0.004061, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000662, 오차: -0.000000  
x=6.140000, j1(x)=-0.003785, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000616, 오차: -0.000000  
x=6.150000, j1(x)=-0.003511, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000571, 오차: -0.000000  
x=6.160000, j1(x)=-0.003238, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000526, 오차: -0.000000  
x=6.170000, j1(x)=-0.002967, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000481, 오차: -0.000000  
x=6.180000, j1(x)=-0.002697, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000436, 오차: -0.000000  
x=6.190000, j1(x)=-0.002428, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000392, 오차: -0.000000  
x=6.200000, j1(x)=-0.002162, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000349, 오차: -0.000000  
x=6.210000, j1(x)=-0.001896, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000305, 오차: -0.000000  
x=6.220000, j1(x)=-0.001632, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000262, 오차: -0.000000  
x=6.230000, j1(x)=-0.001370, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000220, 오차: -0.000000  
x=6.240000, j1(x)=-0.001109, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000178, 오차: -0.000000  
x=6.250000, j1(x)=-0.000849, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000136, 오차: -0.000000  
x=6.260000, j1(x)=-0.000592, 오차: -0.000000, j2(x)=-0.000095, 오차: -0.000000  
x=6.270000, j1(x)=-0.000335, 오차: 0.000000, j2(x)=-0.000053, 오차: 0.000000  
x=6.280000, j1(x)=-0.000081, 오차: 0.000000, j2(x)=-0.000013, 오차: 0.000000

그림 7. 결과3