

2022年度 盛本ゼミ入室試験（一次募集） 課題レポート

提出期限：2021年11月18日

- 5問ある大問のうち、1は必須問題とし、2・3・4・5は選択問題とする（2・3・4・5から2題を選び解答せよ）。選択問題については、自分の興味や能力を主張できるものを選ぶこと。
- 数学的方法など、知らないことについては納得するまで調べる。この課題の目的は、単に正解できるかを確認することではなく、理解の深さと表現力を評価することである。自分の解答をもとに勉強会の仲間に説明することを想定して作成すること。
- PDFで提出すること。作成にはTeXを用いるのが望ましい（入室後の資料作りでは主にTeXを利用する）。ただし、数式を読みやすく出力していれば、他のソフトでも問題はない。

1 マクロ経済学

経済成長に関する実証研究では、一人あたりGDPが低い国ほど一人あたりGDP成長率が高い傾向にあることが知られている。このことをSolowの経済成長モデルを用いて説明しなさい。モデルの仮定や結果をもたらす理論的メカニズムに注意を払い、丁寧に述べる。

2 ミクロ経済学（1）

完全競争市場における企業行動を考える。この企業は資本 K と労働 L を投入して一つの財を生産するが、その生産技術は生産関数 $F(K, L) = K^\alpha L^\beta$ で与えられるとする（ $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha + \beta < 1$ とする）。要素市場における要素価格は、資本レンタル価格 $r > 0$ 、賃金率 $w > 0$ であるとする。このとき、以下の手順で企業の費用最小化問題を分析しよう。

- (2-1) 生産水準 $Y > 0$ を所与として、企業の費用最小化問題を数学的に定式化しなさい。
- (2-2) (2-1)で定式化した最適化問題をLagrange乗数法によって解き、最適な要素投入量とLagrange乗数の値を求めなさい（ただし、Lagrange乗数を λ で表記しなさい）。
- (2-3) (2-2)で得た最適な要素投入量を目的関数に代入すると、費用関数 $C(r, w, Y)$ が定まる。この費用関数 C を具体的に求めなさい。さらに、下記の関係が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{\partial C}{\partial Y} = \lambda$$

この関係式に基づき、Lagrange乗数 λ の解釈を述べなさい。

3 ミクロ経済学 (2)

2 人の消費者が財 x と財 y を交換する純粋交換経済を考える。各消費者はインデックス $i = 1, 2$ で識別され、消費者 i の財 x と財 y の消費量をそれぞれ x_i と y_i で表す。各消費者 i の効用関数は

$$U_i(x_i, y_i) = x_i^{\theta_i} y_i^{1-\theta_i}$$

であるとする (ここで θ_i は $0 < \theta_i < 1$ を満たす定数)。各消費者 i の初期賦存量 $\omega_i = (\omega_{xi}, \omega_{yi})$ は $(\omega_{x1}, \omega_{y1}) = (\omega_{x2}, \omega_{y2}) = (1, 1)$ とする。財 x をニューメレール財としてその価格を 1 と基準化し、財 y の相対価格を p とする。この経済の競争均衡における相対価格 p^* を求めよ。また、もし θ_i が両方の消費者で同一の値ならば、競争均衡の配分はどうなるだろうか。

4 確率・統計

(4-1) 確率変数の変換: X は閉区間 $[1, e]$ 上に一様分布する確率変数であるとする。¹このとき、確率変数 $Y = \ln X$ の確率密度関数を求めよ。²

(4-2) 母標準偏差の区間推定: ある正規母集団から 20 個の標本を無作為抽出した結果、その標本標準偏差が 6 であったとする。母標準偏差の 90%信頼区間を求めよ。³

5 プログラミング

次のような $\{x_t, y_t\}_{t=0}^{\infty}$ についての差分方程式システムを考える。

$$x_{t+1} = 0.5x_t + 0.4y_t$$

$$y_{t+1} = -0.3x_t - 0.8y_t$$

ただし、初期値は $(x_1, y_1) = (-0.5, 0.5)$ であるとする。 $\{x_t\}_{t=0}^{20}$ と $\{y_t\}_{t=0}^{20}$ を計算し図示するプログラムを書きなさい。R または Python を使い、結果の図と使用したスクリプトを示すこと。

¹ここで e はネイピア数を表す。

²ここで $\ln X$ は X の自然対数である。

³小数点第 3 位以下は切り捨てよ。例えば、10.846183 ならば、10.84 と答えよ。