1 Глава 1

1.1 Поиск контрпримеров

1.1.1 #1

Условие. Докажите, что значение $a+b$ может быть меньшим, чем значение $\min(a,b)$.

Допустим:

$$a = 0, b = -1 \tag{1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 0 + (-1) = &\quad -1 \qquad (2) \\ &\quad -1 \quad < 0 = \min(0, 1) \qquad (3) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

1.1.2 #2

Условие. Докажите, что значение $a \times b$ может быть меньшим, чем значение $\min(a,b)$.

Допустим:

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4} \tag{4}$$

Тогда:

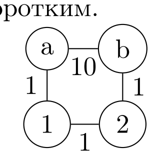
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \tag{5}$$

$$\tfrac{1}{8} < \min(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4} \tag{6}$$

Что и требовалось доказать.

1.1.3 #3

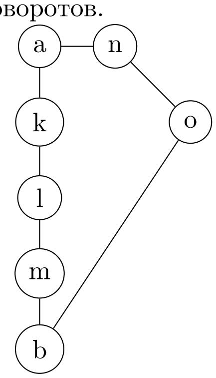
Условие. Начертите сеть дорог с двумя точками a и b, такими, что маршрут между ними, преодолеваемый за кратчайшее время, не является самым коротким.



Цена маршрута «a,1,2,b» равна 3, а цена маршрута «a,b» равна 10. То есть, маршрут, проходящий через больше точек, более длинный, преодолевается за меньшее время. Что и требовалось доказать.

1.1.4 #4

Условие. Начертите сеть дорог с двумя точками a и b, самый короткий маршрут между которыми не является маршрутом с наименьшим числом поворотов.



В данной сети дорог кратчайший маршрут от a до b это $anob$, в котором 3 ребра, но два поворота. Однако, маршрут без поворотов вообще, $aklmb$ не самый короткий — в нём 4 ребра. Что и требовалось доказать.

1.1.5 #5

Условие. Задача о рюкзаке: имея множество целых чисел $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ и целевое число T, найти такое подмножество множества S, сумма которого в точности равна T. Например, множество $S = \{1, 2, 5, 9, 10\}$, содержит такое подмножество, сумма элементов которого равна T = 22, но не T = 23.

Найти контрпримеры для каждого из следующих алгоритмов решения задачи о рюкзаке, т. е., нужно найти такое множество S и число T, при которых подмножество, выбранное с помощью данного алгоритма, не до конца заполняет рюкзак, хотя правильное решение и существует:

- вкладывать элементы множества S в рюкзак в порядке слева направо, если они подходят (т. е., алгоритм «первый подходящий»);
- вкладывать элементы множества S в рюкзак в порядке от наименьшего до наибольшего (т. е., используя алгоритм «первый лучший»);
- вкладывать элементы множества S в рюкзак в порядке от наибольшего до наименьшего.

Первый подходящий. $T = 10, S = \{9, 2, 2, 2, 2, 2\}$
Первый лучший. $T = 6, S = \{1, 2, 5, 4\}$
От самого большого. $T = 6, S = \{3, 2, 5, 4\}$

1.1.6 #6

Условие. Задача о покрытии множества: имея семейство подмножеств $S_1, \ldots, S_m$ универсального множества $U = \{1, \ldots, n\}$, найдите семейство подмножеств

$T \subset S$ наименьшей мощности, чтобы $\bigcup_{t_i} \in T^{t_i} = U$. Например, для семейства подмножеств $S_1 = \{1, 3, 5\}$, $S_2 = \{2, 4\}$, $S_3 = \{1, 4\}$, $S_5 = \{2, 5\}$ покрытием множества будет семейство подмножеств S_1 и S_2.

Приведите контрпример для следующего алгоритма: выбираем самое мощное подмножество для покрытия, после чего удаляем все его элементы из универсального множества; повторяем добавление подмножества, содержащего наибольшее количество неохваченных элементов, пока все элементы не будут покрыты.

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\} \tag{7}$$
$$S_2 = \{1, 2\} \tag{8}$$
$$S_3 = \{3, 4\} \tag{9}$$
$$S_4 = \{5, 6\} \tag{10}$$
$$S_5 = \{7, 8\} \tag{11}$$
$$S_6 = \{9, 10\} \tag{12}$$

Наилучшее покрытие это $S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$, но жадный алгоритм вначале выберет S_1 как самое мощное подмножество, а потом не останется ничего другого, как добавлять все остальные подмножества, то есть, в итоге алгоритм выберет все исходные подмножества в качестве результата работы, $T = S$.