Constantin Lazari, Marco Wettstein 27. September 2012

1. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Euklid den grössten gemeinsamen Teiler von 8 234 592 und 213 480.

Lösung:

`mod` bezeichne die Modulo- oder Ganzzahl-Division, deren Ergebnis der Rest der gewöhnlichen Division ist. `min` bezeichnet das Minimum, `max` das Maximum einer Reihe von Werten.

Ausgangslage	$a_0 = 8\,234\,592; b_0 = 213\,480$
Berechnung 1	$r_0 = a_0 \mod b_0 = 8\,234\,592 \mod 213\,480 = 122\,352$
Zuweisung 1	$a_1 = \max(b_0, r_0) = 213\,480; b_1 = \min(b_0, r_0) = 122\,352$
Berechnung 2	$r_1 = a_1 \mod b_1 = 213\,480 \mod 122\,352 = 91\,128$
Zuweisung 2	$a_2 = \max(b_1, r_1) = 122\,352; b_2 = \min(b_1, r_1) = 91\,128$
Berechnung 3	$r_2 = a_2 \mod b_2 = 122\,352 \mod 91\,128 = 31\,224$
Zuweisung 3	$a_3 = \max(b_2, r_2) = 91\,128; b_3 = \min(b_2, r_2) = 31\,224$
Berechnung 4	$r_3 = a_3 \mod b_3 = 91\,128 \mod 31\,224 = 28\,680$
Zuweisung 4	$a_4 = \max(b_3, r_3) = 31\,224; b_4 = \min(b_3, r_3) = 28\,680$
Berechnung 5	$r_4 = a_4 \mod b_4 == 31\,224 \mod 28\,680 = 2\,544$
Zuweisung 5	$a_5 = \max(b_4, r_4) = 28\,680; b_5 = \min(b_4, r_4) = 2\,544$
Berechnung 6	$r_5 = a_5 \mod b_5 = 28\,680 \mod 2\,544 = 696$
Zuweisung 6	$a_6 = \max(b_5, r_5) = 2\,544; b_6 = \min(b_5, r_5) = 696$
Berechnung 7	$r_6 = a_6 \mod b_6 = 2\,544 \mod 696 = 456$
Zuweisung 7	$a_7 = \max(b_6, r_6) = 696; b_7 = \min(b_6, r_6) = 456$
Berechnung 8	$r_7 = a_7 \mod b_7 = 696 \mod 456 = 240$
Zuweisung 8	$a_8 = \max(b_7, r_7) = 456; b_8 = \min(b_7, r_7) = 240$
Berechnung 9	$r_8 = a_8 \mod b_8 == 456 \mod 240 = 216$
Zuweisung 9	$a_9 = \max(b_8, r_8) = 240; b_9 = \min(b_8, r_8) = 216$
Berechnung 10	$r_9 = a_9 \mod b_9 = 240 \mod 216 = 24$
Zuweisung 10	$a_{10} = \max(b_9, r_9) = 216; b_{10} = \min(b_9, r_9) = 24$
Berechnung 11	$r_{10} = a_{10} \mod b_{10} = 216 \mod 24 = 0$

Das Ergebnis von Berechnung 11: $r_{10} = a_{10} \mod b_{10} = 0$ heisst, dass $b_{10} = 24$ der grösste gemeinsame Teiler ist.

2. Ein Bild mit einer Auflösung von 10.2 MBit kann mittels verlustfreier Kompression in 6.3 MBit dargestellt werden. Wie gross ist die Redundanz im Ausgangsformat mindestens?

Lösung:

Es gilt: Redundanz $:= \frac{\text{Bit}_{\text{Gesamt}}}{\text{Bit}_{\text{Nutz}}} - 1$

Also: Redundanz $= \frac{10.2}{6.3} - 1 = 0.62$

3. Sie haben sich eine Festplatte gekauft. Diese hat laut Hersteller eine Grösse von 160 GB. Im Windows Explorer sehen Sie, dass die Festplatte jedoch nur eine Grösse von 149 GB hat. Hat der Hersteller grosszügig aufgerundet oder gibt es eine natürliche Erklärung?

Lösung:

Ja, es gibt eine natürliche Erklärung. Der Internet Explorer zeigt das Ergebnis bzw. die Einheit falsch an:
$160\,\mathrm{GB} = 160 \cdot 10^9\,\mathrm{B} = 149 \cdot 2^{30}\,\mathrm{B} = 149\,\mathrm{GiB}$
Der Windows Explorer zeigt also GiB an, behauptet aber es seien GB, was offensichtlich falsch ist. Fairerweise muss man sagen, dass zur Zeit der Veröffentlichung des ersten Windows Explorers (1995) die Binärpräfixe noch nicht existierten.

4. Es sei das folgende Alphabet gegeben: $Z = \{*, +, \#, ?, \sim, \$\}$ mit:
$p(*) = 0.6; p(+) = 0.1; p(\#) = 0.2; p(?) = 0.04; p(\sim) = 0.04; p(\$) = 0.02$

(a) Wie gross ist der Informationsgehalt der einzelnen Zeichen?

Lösung:

Es seien $I(x)$ der Informationsgehalt des Zeichens x und $p(x)$ die Häufigkeit des Zeichens x.
$I(*) = -\log_2 p(*) = -\log_2 0.6 \approx 0.737$
$I(+) = -\log_2 p(+) = -\log_2 0.1 \approx 3.322$
$I(\#) = -\log_2 p(\#) = -\log_2 0.2 \approx 2.322$
$I(?) = -\log_2 p(?) = -\log_2 0.04 \approx 4.644$
$I(\sim) = -\log_2 p(\sim) = -\log_2 0.04 \approx 4.644$
$I(\$) = -\log_2 p(\$) = -\log_2 0.02 \approx 5.644$

(b) Wie gross ist die Entropie für das gegebene Alphabet?

Lösung:

Es seien $I(x)$ der Informationsgehalt des Zeichens x, $p(x)$ die Häufigkeit des Zeichens x und H_Z die Entropie des Alphabets Z.
Nach Claude Shannon gilt allgemein: $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot I_i$
Setzt man die Werte von p_i und I_i aus der Aufgabenstellung und der vorherigen Teilaufgabe ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} H_Z = {} & (0.6 \cdot 0.737) + (0.1 \cdot 3.322) + (0.2 \cdot 2.322) + (0.04 \cdot 4.644) \\ & + (0.04 \cdot 4.644) + (0.02 \cdot 5.644) \approx 1.723 \end{aligned}$$