Constantin Lazari, Marco Wettstein 11. November 2012

1. Gegeben ist die folgende Formel: $F_1 = ((a_1 \vee \neg a_2) \Rightarrow a_3) \Leftrightarrow \neg(\neg a_3 \wedge a_1)$
   (a) Bestimmen Sie den Wahrheitswert von F_1 für alle Belegungen (der Variablen a_1, a_2 und a_3).

Lösung:

			$I_1 = ((a_1 \vee \neg a_2) \Rightarrow a_3)$			$I_2 = \neg(\neg a_3 \wedge a_1)$			
				$H_1 =$			$H_2 =$		$F_1 =$
a_1	a_2	a_3	$\neg a_2$	$a_1 \vee \neg a_2$	$H_1 \Rightarrow a_3$	$\neg a_3$	$\neg a_3 \wedge a_1$	$\neg H_2$	$I_1 \Leftrightarrow I_2$
w	w	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	w	f	w	w	f	w
f	w	w	f	f	w	f	f	w	w
f	w	f	f	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	f	w	f	w	f

   (b) Ist entscheidbar, ob F_1 erfüllbar ist? (Antwort bitte kurz begründen)

Lösung:
Ja, denn mit Hilfe einer Wahrheitstabelle lässt sich für jede Zustandskombination der Variablen feststellen, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

   (c) Ist F_1 erfüllbar? (Antwort bitte kurz begründen)

Lösung:
Ja, denn Erfühlbarkeit bedeutet, dass es mindestens eine Kombinationen von Eingabe-Parametern (Variablen) gibt, welche die Aussage wahr macht. Dies ist in der Aufgabe bei 7 von 8 Fällen erfüllt.

2. Beweisen Sie die „De-Morganschen Regeln" (mit Hilfe von Wertetabellen):
   (a) $\neg(F_1 \vee F_2) \equiv (\neg F_1 \wedge \neg F_2)$

Lösung:

			Linker Teil			Rechter Teil
F_1	F_2	$(F_1 \vee F_2)$	$\neg(F_1 \vee F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$	$(\neg F_1 \wedge \neg F_2)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

In den Spalten „Linker Teil" und „Rechter Teil" stehen in der gleichen Zeile immer die gleichen Werte, was diese „De-Morgansche Regel" beweist.

3. Gegeben ist die folgende Formel:

$$F_2 = ((a_1 \Rightarrow a_2) \Rightarrow \neg a_3) \vee \neg a_2$$

(a) Geben Sie eine DNF zu F_2 an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
F_2 &= ((a_1 \Rightarrow a_2) \Rightarrow \neg a_3) \vee \neg a_2 \\
(a_1 \Rightarrow a_2) &\Leftrightarrow \neg a_1 \vee a_2 \\
((\neg a_1 \vee a_2) \Rightarrow \neg a_3) &\Leftrightarrow (\neg(\neg a_1 \vee a_2)) \vee \neg a_3) \\
&\Leftrightarrow \neg(a_2 \vee \neg a_1) \vee \neg a_3 \\
\neg(a_2 \vee \neg a_1) &\Leftrightarrow \neg a_2 \wedge \neg\neg a_1 \\
&\Leftrightarrow \neg a_2 \wedge a_1 \\
((\neg a_2 \wedge a_1) \vee \neg a_3) \vee \neg a_2 &\Leftrightarrow (\neg a_2 \wedge a_1) \vee \neg a_3 \vee \neg a_2 \\
&\Leftrightarrow \neg a_2 \wedge \neg a_3
\end{aligned}$$

Die Disjunktive Normal Form ist:

$$F_2 = ((a_1 \Rightarrow a_2) \Rightarrow \neg a_3) \vee \neg a_2 \Leftrightarrow \neg a_2 \wedge \neg a_3$$

(b) Geben Sie eine KDNF zu F_2 an.

Lösung:
Bei der kanonischen disjunktiven Normalform müssen alle Variablen vorkommen:

a_1	a_2	a_3	$\neg a_2$	$(a_1 \wedge \neg a_2)$	$\neg a_3$	F_2	Ausdruck
w	w	w	f	f	f	f	
w	w	f	f	f	w	w	$a_1 \wedge a_2 \wedge \neg a_3$
w	f	w	w	w	f	w	$a_1 \wedge \neg a_2 \wedge a_3$
w	f	f	w	w	w	w	$a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3$
f	w	w	f	f	f	f	
f	w	f	f	f	w	w	$\neg a_1 \wedge a_2 \wedge \neg a_3$
f	f	w	w	f	f	w	$\neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge a_3$
f	f	f	w	f	w	w	$\neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3$

Als KDNF:

$$\begin{aligned}
F_2 :&(a_1 \wedge a_2 \wedge \neg a_3) \vee (a_1 \wedge \neg a_2 \wedge a_3) \vee (a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3) \\
&\vee (\neg a_1 \wedge a_2 \wedge \neg a_3) \vee (\neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge a_3) \vee (\neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3)
\end{aligned}$$