Proposições e conjuntos

Exercício 1

A palavra "**é**", em português, pode ser usada de várias maneiras, como mostram os exemplos:

- Edson Arantes do Nascimento **é** Pelé. =
- O homem **é** mortal. ⊂
- Luísa **é** modelo. ∈

Na primeira frase, a palavra "**é**" indica igualdade (=); na segunda, indica inclusão entre conjuntos (⊂) e na terceira, indica pertinência a um conjunto (∈).

Nas frases a seguir, indique o significado da palavra "**é**", usando os símbolos =, ⊂ ou ∈.

a) Lisboa é a capital de Portugal.
b) A baleia é um mamífero.
c) Machado de Assis é escritor.
d) Machado de Assis é o autor de *Quincas Borba*.
e) Maria é bonita.
f) O jogador de futebol é atleta.
g) Pelé é jogador de futebol.
h) Meu carro é vermelho.
i) Bruce Wayne é Batman.

Quantificadores

Considere as sentenças:

(I) Os homens são mortais. não proposição
(II) Todos os homens são mortais.
(III) Alguns homens são mortais.
(IV) Algum homem não é mortal.
(V) Nenhum homem é mortal.

O aluno é estudioso
Todo aluno é estudioso
Algum aluno é estudioso

(I) não é proposição, pois não é possível atribuir, sem ambiguidade, um dos valores lógicos: verdadeiro ou falso.
(II), (III), (IV) e (V) são proposições.
Os termos **todos**, **nenhum** e **alguns** são chamados de quantificadores, pois transmitem a ideia de quantidade.
Assim, temos as proposições:

- Todo A é B.
- Nenhum A é B. (Todo A é não B)
- Algum A é B.
- Algum A não é B. (Algum A é não B)

A palavra **algum** tem sempre o significado de **pelo menos um**. no mínimo um
Assim, dizer "Alguns homens são bons." é o mesmo que afirmar "Pelo menos um homem é bom.".

Exemplo

- Todos os gatos são mamíferos. (V)
- Nenhuma baleia é peixe (V)
- Alguns homens são bons. (V)
- Alguns paulistas não são paulistanos. (V)

Sentenças abertas

Sentenças abertas correspondem a sentenças interrogativas ou imperativas. Não proposição

Exemplos:

1. Qual é o número que multiplicado por 4 dá 24? Sentença interrogativa
   Determine o número que multiplicado por 4 dá 24. Sentença imperativa
   Assim, "Se x representa o número procurado, temos que $\boxed{4 \cdot x = 24}$".
   Como não sabemos a quem o x se refere, não é possível atribuir um valor lógico (V ou F) à sentença.
   Porém, quando atribuímos um valor para x, a sentença aberta se torna uma proposição.
   Para x = 3, a proposição 4 · 3 = 24 é falsa.
   Para x = 6, a proposição 4 · 6 = 24 é verdadeira.

$2x + 5 = 11$ sentença aberta
$7x^2 - 5x + 11 < 10$ sentença aberta

2. $\underbrace{\text{Todos os } \underbrace{\text{animais são carnívoros}}_{\text{sentença aberta}}}_{\text{proposição}}$.

Indicando por p(x) a sentença aberta na variável x e sendo U o universo, temos que: Se $a \in U$, então $V(p(a)) = V$ ou $V(p(a)) = F$. Se $a \in U$ e $V(p(a)) = V$, dizemos que a satisfaz ou verifica p(x).

- Sempre devemos considerar um universo de discurso (ou universo U) que é o conjunto cujos elementos podem ser utilizados em uma sentença aberta para obtermos uma proposição.
- Chama-se conjunto verdade (V) ou conjunto solução de uma sentença aberta em um universo U, o conjunto de todos os elementos $a \in U$ tais que p(a) é uma proposição verdadeira.
- O conjunto verdade de uma sentença aberta depende do universo adotado. Mudando o universo, o conjunto verdade também pode mudar.

Voltando ao exemplo 1, temos que:

- $p(x) : 4 \cdot x = 24$ e $U = \mathbb{N}$

  $V = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4 \cdot x = 24\} = \{6\} \subset \mathbb{N}$

$4 \cdot 6 = 24$ é prop. verdadeira
conj. solução ou conj. verdade
da sentença aberta

Mais exemplos:

a) Sejam
U: conjunto dos escritores brasileiros
Diga o nome de um escritor brasileiro (sentença aberta), isto é, x é escritor brasileiro.
A proposição “Machado de Assis é escritor brasileiro.” é verdadeira.
A proposição “José Saramago é escritor brasileiro.” é falsa.

b) $p(x): x + 2 < 9$ e $U = \mathbb{N}$
$V = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x + 2 < 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{N}$

c)

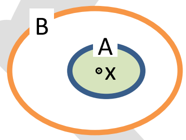
Sentença aberta	Universo	Conjunto Verdade
$x^2 = 4$	$\mathbb{N}$	{2}
$x^2 = 4$	$\mathbb{Z}$	{–2; 2}
$x^2 = 4$	$\mathbb{R}$	{–2; 2}

$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
$U = \mathbb{N} \Rightarrow S = \{2\}$
$U = \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

Relações entre Proposições e Conjuntos

Dados os conjuntos A e B, temos que:

1. “**Todo A é B**” corresponde a “Para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$.”



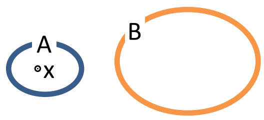
$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

A é subconjunto de B
$A \subset B$

$\forall$: para todo, qualquer que seja

OBS.: não está excluída a situação A = B, já que todo conjunto é subconjunto de si próprio.

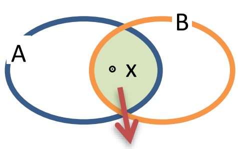
2. “**Nenhum A é B**” (Todo A é não B) corresponde a “Para todo x, se $x \in A$, então $x \notin B$.”



$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \notin B)$

$A \cap B = \varnothing$
A e B são conjuntos disjuntos

3. “**Algum A é B**” corresponde a “Existe x tal que $x \in A \wedge x \in B$.”

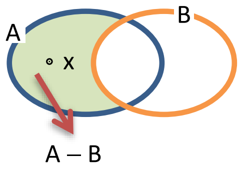


$\exists x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A \cap B$

$\exists$: existe $\mid$: tal que

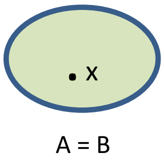
4. "**Algum A não é B**" corresponde a "Existe x tal que $x \in A \wedge x \notin B$."



$\exists x \mid x \in A \wedge x \notin B$

Completando o estudo das relações entre proposições e conjuntos, temos:

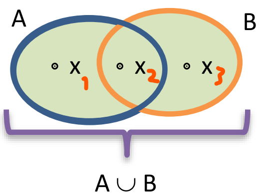
5. **Igualdade de conjuntos (Todo A é B e Todo B é A)**



$A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

6. **Reunião de A com B**

x: elemento genérico

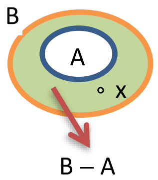


$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \}$

7. **Complementar de A em relação a B.**

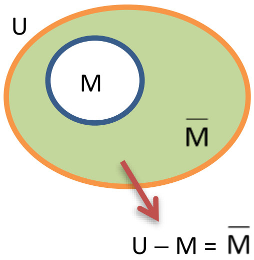
Se $A \subset B$, $B - A = C_B^A$ é o complementar de A em relação a B.



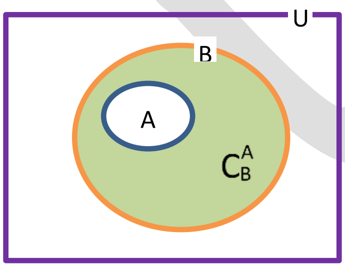
$A \subset B$ e $x \in C_B^A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

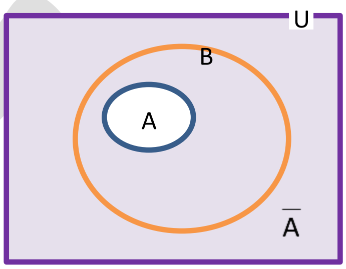
8. Dado o conjunto universo U, temos:
   - $M = \{x \in U \mid x$ possui a propriedade $m\}$
   - $\overline{M} = \{x \in U \mid x$ NÃO possui a propriedade $m\} = U - M$

   Assim, o conjunto $\overline{M}$ é o complementar de M em relação a U.
   Propriedades:
   - $M \cup \overline{M} = U$
   - $M \cap \overline{M} = \phi$



Observe a diferença: Sendo U o conjunto universo com $A \subset U$, $B \subset U$ e $A \subset B$, temos que:



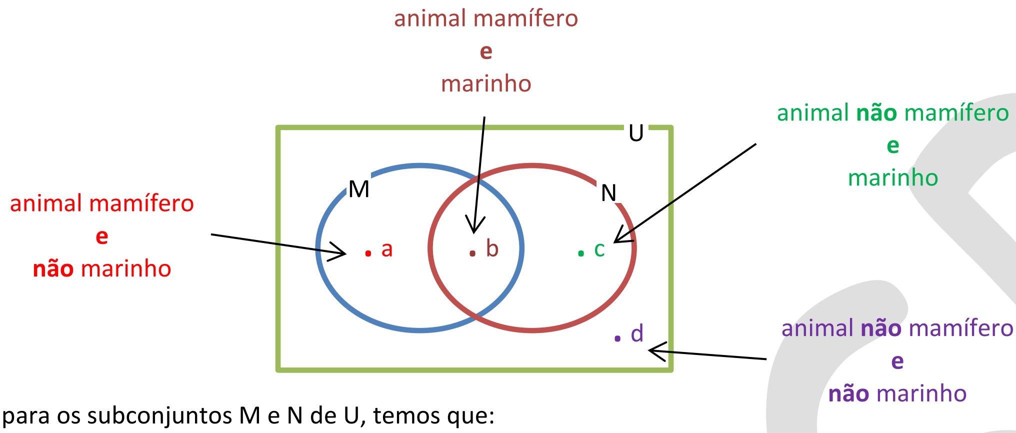


Exemplo

Sendo:

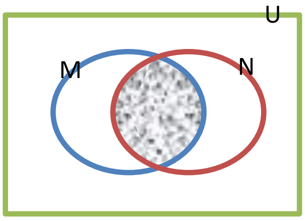
- U: conjunto dos animais.
- M: conjunto dos mamíferos.
- N: conjunto dos animais marinhos.

Considere o diagrama de Euler-Venn:

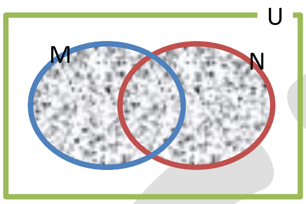


Assim, para os subconjuntos M e N de U, temos que:

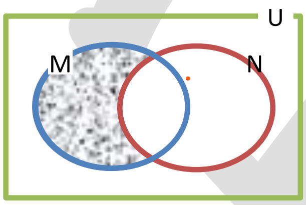
$M \cap N$: conjunto dos animais mamíferos **e** marinhos



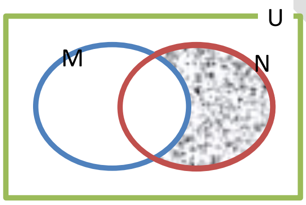
$M \cup N$: conjunto dos animais mamíferos **ou** marinhos



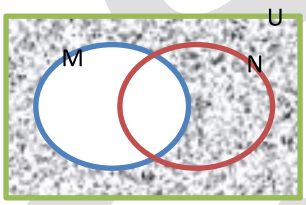
$M - N$: conjunto dos animais mamíferos **e não** marinhos



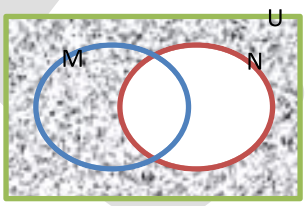
$N - M$: conjunto dos animais **não** mamíferos **e** marinhos



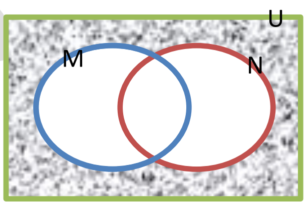
$\overline{M}$: conjunto dos animais **NÃO** mamíferos



$\overline{N}$: conjunto dos animais **NÃO** marinhos



$\overline{M} \cap \overline{N}$: conjuntos dos animais **NÃO** mamíferos **e NÃO** marinhos

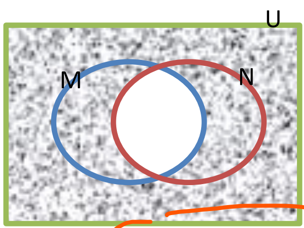


~p ∧ ~q ≡ ~(pvq)

parecidinho

Observe que: $\overline{M} \cap \overline{N} = \overline{(M \cup N)}$

$\overline{M} \cup \overline{N}$: conjuntos dos animais **NÃO** mamíferos **ou NÃO** marinhos



Observe que: $\overline{M} \cup \overline{N} = \overline{(M \cap N)}$

ver o outro arquivo

Propriedades

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer contidos no mesmo conjunto universo U, temos que:

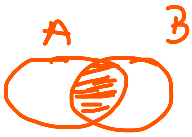
- Comutativa:
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup B = B \cup A$
- Associativa
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

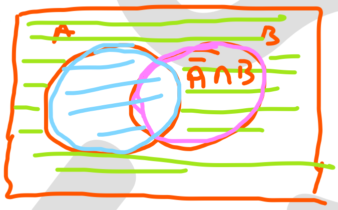
  OBS.: por valer a propriedade associativa não há necessidade do uso dos parênteses.
- Distributiva
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  Verifique utilizando o diagrama de Euler-Venn.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- Leis de De Morgan
  - $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Leis de absorção
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$





$\overline{A}$, B $\left\{ \overline{A} \cap B \right.$

$\underbrace{x \in \overline{A} \cap B}$

$x \in \overline{A} \wedge x \in B$

$B - A$

- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

  Demonstração:

  $A \cup (\overline{A} \cap B)$ (aplicando propriedade distributiva)

  $(A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$

  $U \cap (A \cup B)$

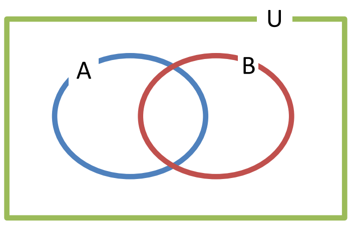
  $A \cup B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

  $A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap U = A$

  Agora é a sua vez! Faça a demonstração aplicando as propriedades.
- Transitividade: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

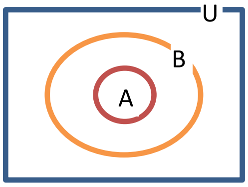
Exercícios

2. Sendo A e B conjuntos quaisquer do mesmo universo U, verifique, mediante o uso de diagramas de Euler-Venn, as seguintes propriedades:
   a) $A - B \subset (A \cup B)$
   b) $\overline{A} - \overline{B} = B - A$
   c) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
   d) $B - \overline{A} = B \cap A$
3. Dados:
   U: conjunto dos alunos da escola E.
   A: conjunto dos alunos da escola E que são homens.
   B: conjunto dos alunos da escola E que usam óculos.
   Descreva, em palavras, os conjuntos:

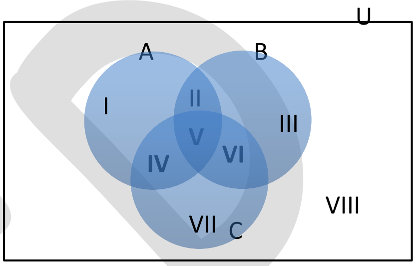


   a) $A - B$
   b) $B - A$
   c) $A \cap B$
   d) $A \cup B$
   e) $\overline{A}$
   f) $\overline{B}$
   g) $\overline{(A \cup B)}$
   h) $\overline{(A \cap B)}$
4. Com base no enunciado do exercício anterior, determine o valor lógico das seguintes proposições:
   a) Alguns homens não usam óculos.
   b) Alguns alunos que usam óculos não são homens.
   c) Todos os alunos que usam óculos não são homens.
   d) Alguns alunos que não usam óculos não são homens.

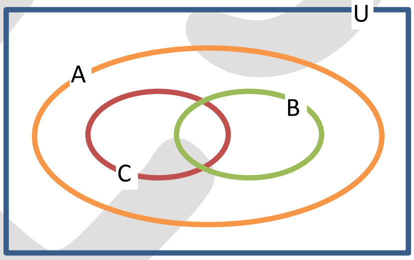
5. Dados:
   U: conjunto dos mamíferos.
   A: conjunto dos gatos.
   B: conjunto dos felídeos.
   Considere o diagrama ao lado:



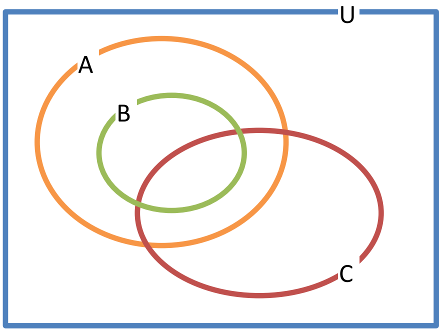
   Determine o valor lógico das seguintes proposições:
   a) Todos os gatos são felídeos.
   b) Nenhum felídeo é gato.
   c) Alguns não gatos são felídeos.
   d) Se um animal não é felídeo, então ele não é gato.
   e) Se um animal não é gato, então ele não é felídeo.
6. No diagrama, sejam U o conjunto dos atletas, A o conjunto dos atletas que tomam a vitamina A, B o conjunto dos atletas que tomam a vitamina B e C o conjunto dos atletas que tomam a vitamina C.



   Descreva cada região do diagrama (de I a VIII):
   a) utilizando notação de operações entre os conjuntos;
   b) em palavras.
7. Para cada item a seguir, copie o diagrama do exercício anterior e hachure:
   a) o conjunto dos atletas que tomam somente um tipo de vitamina.
   b) o conjunto dos atletas que tomam pelo menos um tipo de vitamina.
   c) o conjunto dos atletas que tomam exatamente dois tipos de vitaminas.
   d) o conjunto dos atletas que tomam pelo menos dois tipos de vitaminas.
   e) o conjunto dos atletas que tomam no máximo um tipo de vitamina.
   f) o conjunto dos atletas que tomam até dois tipos de vitaminas.
8. Dados:
   U: conjunto das pessoas.
   A: conjunto das crianças.
   B: conjunto das crianças que gostam de cachorro.
   C: conjunto das crianças que moram em apartamentos.



   Considerando o diagrama, descreva, em palavras, os conjuntos:
   a) $B \cap C$
   b) $A - C$
   c) $C - B$
   d) $A - (B \cap C)$
   e) $A - (B \cup C)$
   f) $A - \overline{B}$
   g) $\overline{(B \cup C)}$
9. Dados:
   U: conjunto da fauna.
   A: conjunto dos vertebrados.
   B: conjunto dos mamíferos.
   C: conjunto dos animais marinhos.



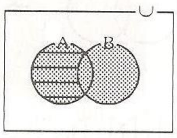
   Supondo verdadeiro o diagrama, determine o valor lógico das proposições:
   a) Todo mamífero é vertebrado.
   b) Todo animal marinho é vertebrado.
   c) Nenhum animal marinho é mamífero.
   d) Alguns animais marinhos são mamíferos.
   e) Se um animal é não mamífero, então ele não é vertebrado.
   f) Alguns vertebrados são não mamíferos.
   g) Alguns animais marinhos são não vertebrados.
   h) Se um animal é não marinho, então ele é vertebrado.
   i) Todo animal não mamífero é vertebrado.
   j) Se um animal é não vertebrado, então ele é não mamífero.
   k) Os mamíferos não podem ser animais marinhos.
   l) Todos os não mamíferos são não vertebrados.

Respostas

1. Igualdade: a), d) e i); Inclusão: b), f); Pertinência: c), e), g) e h)

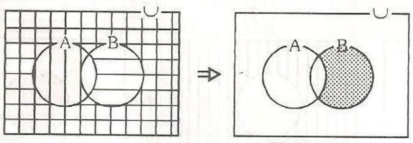
2)

a)



$A \cup B$ ▩
$A - B$ ▤

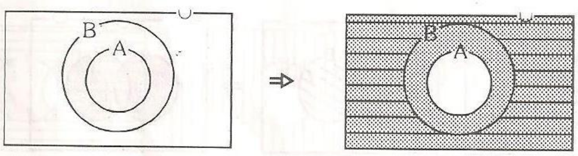
b)



$\overline{A}$ ▤
$\overline{B}$ ▥

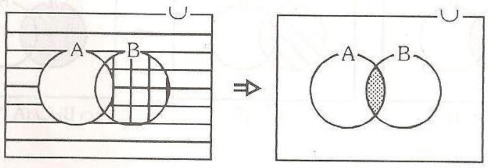
$\overline{A} - \overline{B} = B - A$

c)



$\overline{B}$ ▤
$\overline{A}$ ▩

d)



$\overline{A}$ ▤
B ▥

$B - \overline{A} = A \cap B$

3)

a) Conjunto dos alunos da escola E que são homens e não usam óculos.

b) Conjunto dos alunos da escola E que usam óculos e não são homens.

c) Conjunto dos alunos da escola E que são homens e usam óculos.

d) Conjunto dos alunos da escola E que são homens ou usam óculos.

e) Conjunto dos alunos da escola E que não são homens.

f) Conjunto dos alunos da escola E que não usam óculos.

g) Conjunto dos alunos da escola E que não são homens e não usam óculos.

h) Conjunto dos alunos da escola E que não são homens ou não usam óculos.

4) a) V b) V c) F d) V

5) a) V b) F c) V d) V e) V f) F

6)

a) I: $A - (B \cup C)$

II: $(A \cap B) - C$

III: $B - (A \cup C)$

IV: $(A \cap C) - B$

V: $A \cap B \cap C$

VI: $(B \cap C) - A$

VII: $C - (A \cup B)$

VIII: $\overline{(A \cup B \cup C)}$

b) I: Conjunto dos atletas que tomam a vitamina A e não tomam as vitaminas B e C.

II: Conjunto dos atletas que tomam as vitaminas A e B e não tomam a vitamina C.

III: Conjunto dos atletas que tomam a vitamina B e não tomam as vitaminas A e C.

IV: Conjunto dos atletas que tomam as vitaminas A e C e não tomam a vitamina B.

V: Conjunto dos atletas que tomam as vitaminas A e B e C.

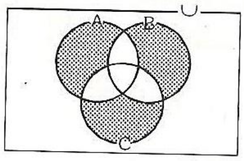
VI: Conjunto dos atletas que tomam as vitaminas B e C e não tomam a vitamina A.

VII: Conjunto dos atletas que tomam a vitamina C e não tomam as vitaminas A e B.

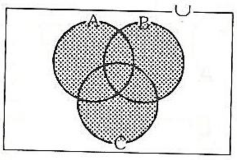
VIII: Conjunto dos atletas que não tomam as vitaminas A e B e C.

7)

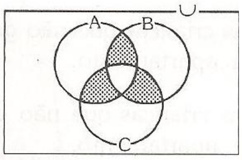
a)



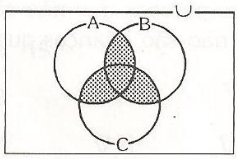
b)



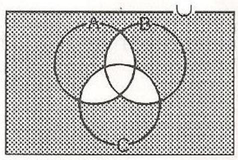
c)



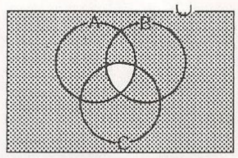
d)



e)



f)



8)

a) Conjunto das crianças que gostam de cachorro e moram em apartamento.

b) Conjunto das crianças que não moram em apartamento.

c) Conjunto das crianças que moram em apartamento e não gostam de cachorro.

d) Conjunto das crianças que não gostam de cachorro ou não moram em apartamento.

e) Conjunto das crianças que não gostam de cachorro e não moram em apartamento.

f) Conjunto das crianças que gostam de cachorro.

g) Conjunto das pessoas que não são crianças que gostam de cachorro e não são crianças que moram em apartamento.

9)

a) V	c) F	e) F	g) V	i) F	k) F
b) F	d) V	f) V	h) F	j) V	l) F