Etec de São Paulo

Aluno(a): Aluno(a):	1ª série	RM
Curso: ETIM – Desenvolvimento de Sistemas	Data: ___ / ___ / _____	
Componente Curricular: Matemática	Menção:	
Professor(a): Marcia Xavier Cury		

Competências/Habilidades	Critérios de Avaliação
Identificar problemas e planejar estratégias apropriadas para sua resolução. Analisar e avaliar argumentos e resultados. Aplicar os conceitos da matemática na resolução de problemas. Ler e interpretar informações relativas ao problema. Ler e interpretar textos e representações matemáticas. Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos.	Não basta a resposta correta, é necessário apresentar argumentação válida que acarreta a resposta correta. Raciocínio lógico; Comparações; Analogias; Organização; Clareza; Criticidade; Generalização; Objetividade; Uso correto de termos técnicos; Linguagem adequada; Coerência; Embasamento conceitual.

Trabalho em dupla sobre Sequências - RESOLUÇÃO

1. Prove que o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, em que a_1 é o primeiro termo e q é a razão dessa progressão.

PG 1º termo a_1 e razão q

$$P_n = \underbrace{a_1 \cdot (a_1 q) \cdot (a_1 q^2) (a_1 \cdot q^3) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})}_{\text{produto dos n primeiros termos}}$$

$$P_n = \underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdots a_1}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}}_{(n-1) \text{ fatores}}$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$$

Expoente de q: soma dos (n-1) primeiros termos de uma PA: $1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$

$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

Logo, $\boxed{P_n = a_1 \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}},\ n \in \mathbb{N}^*}$

Numa progressão geométrica finita com 9 termos, a razão é $q = -\frac{1}{4}$ e o produto de seus termos é $P_9 = -2^{27}$. Nessas condições, determine os extremos dessa progressão.

a_1 e a_9

PG $n = 9$ e $q = -\frac{1}{4}$ $P_9 = -2^{27}$

Como $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, então

$-2^{27} = a_1^9 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{9 \cdot \cancel{8}}{\cancel{2}}}$

(OBS: parênteses obrigatório)

$-2^{27} = a_1^9 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{36}$

opção

$\left(-\frac{1}{4}\right)^{36} = \frac{(-1)^{36}}{4^{36}} = \frac{1}{4^{36}}$

Como 36 é par $\left(-\frac{1}{4}\right)^{36} = \left(\frac{1}{4}\right)^{36}$

$-2^{27} = a_1^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{36} \Rightarrow -2^{27} = a_1^9 \cdot \frac{1}{4^{36}}$

$\therefore a_1^9 = -2^{27} \cdot 4^{36} \Rightarrow a_1^9 = -2^{27} \cdot 2^{72} \Rightarrow a_1^9 = -2^{99}$

Como 9 é ímpar, então $\boxed{a_1 = -2^{11}}$

$a_9 = a_1 \cdot q^8 = -2^{11} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^8 = -2^{11} \cdot \frac{(-1)^8}{4^8} = -\frac{2^{11}}{2^{16}} = -2^{-5}$

Resp: $a_1 = -2^{11}$ e $a_9 = -2^{-5} = -\frac{1}{2^5}$

2. Calcule a soma de todos os inteiros, compreendidos entre 100 e 500, que não são divisíveis nem por e, nem por 3 e nem por 5.

U: conj. nºs inteiros entre 100 e 500

$U = \{101, 102, 103, \ldots, 499\}$

$D = \{x \in U \mid x$ é divisível por $2\}$

$D = \{102, 104, \ldots, 498\}$

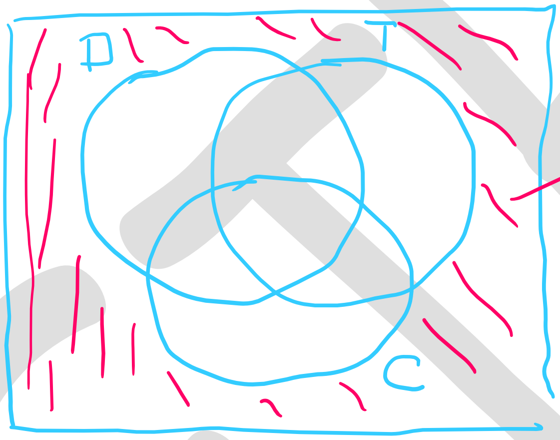
$T = \{x \in U \mid x$ é divisível por $3\}$

$T = \{103, 106, 109, \ldots, 498\}$

$C = \{x \in U \mid x$ é divisível por $5\}$

$C = \{105, 110, \ldots, 495\}$

Visualização



Solicitação

$\overline{D} \cap \overline{T} \cap \overline{C} = \overline{(D \cup T \cup C)} =$

$= U - (D \cup T \cup C)$

Procedimento: somar os nºs de $D \cup T \cup C$ e subtrair da soma dos nºs de U.

Para somar os nºs de $D \cup T \cup C$, pode-se usar a fórmula

$$S(D \cup T \cup C) = S(D) + S(T) + S(C) - S(D \cap T) - S(D \cap C) + \\ - S(T \cap C) + S(D \cap T \cap C)$$

(pensar porque é assim....)

- Nº de elementos de U

$m(U) = (499-101)+1 \Rightarrow m(U) = 399$

Soma dos nºs de U

$S(U) = \dfrac{(101+499) \cdot 399}{2} \Rightarrow \boxed{S(U) = 119\ 700}$

- Nº de elementos de D

$m(D) = \dfrac{498-102}{2} + 1 \Rightarrow m(D) = 199$

Soma dos nºs de D

$S(D) = \dfrac{(102+498) \cdot 199}{2} \quad \boxed{S(D) = 59\ 700}$

- Nº de elementos de T

$m(T) = \dfrac{498-102}{3} + 1 \Rightarrow m(T) = 133$

Soma dos nºs de T

$S(T) = \dfrac{(102+498) \cdot 133}{2} \Rightarrow \boxed{S(T) = 39\ 900}$

- Nº de elementos de C

$m(C) = \dfrac{495-105}{5} + 1 \quad \boxed{m(C) = 79}$

Soma dos nºs de C

$S(C) = \dfrac{(105+495) \cdot 79}{2} \Rightarrow \boxed{S(C) = 23\ 700}$

- $D \cap T = \{102, 108, 114, \dots, 498\}$
(nºs de U divisíveis por 2 e por 3, isto é, divisíveis por 6)

$$m(D \cap T) = \frac{498-102}{6} + 1 \Rightarrow m(D \cap T) = 67$$

$$S(D \cap T) = \frac{(102+498) \cdot 67}{2} \Rightarrow \boxed{S(D \cap T) = 20\,100}$$

- $D \cap C = \{110, 120, \dots, 490\}$
(nºs de U divisíveis por 2 e por 5, isto é, divisíveis por 10)

$$m(D \cap C) = \frac{490-110}{10} + 1 \Rightarrow m(D \cap C) = 39$$

$$S(D \cap C) = \frac{(110+490) \cdot 39}{2} \Rightarrow \boxed{S(D \cap C) = 11\,700}$$

- $T \cap C = \{105, 120, \dots, 495\}$ (Nºs divisíveis por 15)

$$m(T \cap C) = \frac{495-105}{15} + 1 \Rightarrow m(T \cap C) = 27$$

$$S(T \cap C) = \frac{(105+495) \cdot 27}{15} \Rightarrow \boxed{S(T \cap C) = 8\,100}$$

- $D \cap T \cap C = \{120, \dots, 480\}$ (Nºs divisíveis por 30)

$$m(D \cap T \cap C) = \frac{480-120}{30} + 1 \Rightarrow m(D \cap T \cap C) = 13$$

$$S(D \cap T \cap C) = \frac{(120+480) \cdot 13}{2} \Rightarrow \boxed{S(D \cap T \cap C) = 3\,900}$$

Logo,

$S(D \cup T \cup C) = 59700 + 39900 + 23700 - 20100 - 11700 - 8100 + 3900$

$S(D \cup T \cup C) = 87300$

$\therefore S(\overline{D \cup T \cup C}) = 119700 - 87300$.

$$\boxed{S(\overline{D \cup T \cup C}) = 32400}$$

—//—

OBS

1) Em uma PA $a_n = a_1 + (n-1).r$ (isolar o n)

$$\therefore n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \quad (r \neq 0)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

2) Sabemos que: A e B conjuntos

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Se A e B e C são conjuntos, então

$$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C] =$$

$$= \underbrace{n(A \cup B)}_{n(A) + n(B) - n(A \cap B)} + n(C) - n((A \cup B) \cap C) =$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - (n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C))$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

3. Quantos são os termos comuns às progressões (2, 5, 8, ..., 332) e (7, 12, 17, ..., 157).

$(2, 5, 8, \ldots, 332)$ PA de 1º termo $a_1 = 2$ e razão 3

termo geral $a_n = 2 + (n-1).3$

$$\boxed{a_n = 3n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*}$$

$332 = 3n - 1$
$n = 111$
$\therefore a_{111} = 332$

$(7, 12, 17, \ldots, 157)$ PA de 1º termo 7 e razão 5

termo geral $b_m = 7 + (m-1).5$

$$\boxed{b_m = 5m + 2,\ m \in \mathbb{N}^*}$$

$157 = 5m + 2$
$m = 31$
$\therefore b_{31} = 157$

Termos comuns: $a_n = b_m$

$n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 111$
$m \in \mathbb{N} \mid 1 \le m \le 31$

$3n - 1 = 5m + 2$

$3n - 3 = 5m$

$\therefore m = \frac{3(n-1)}{5}$

Como $m \in \mathbb{N}^*$, então $n-1$ é múltiplo de 5, isto é, n é múltiplo de 5 mais 1

n	m
6	3
11	6
16	9
21	12

PA de razão 5

PA de razão 3

$m \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

$n \in \{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51\}$

Resp: 10 termos comuns.

4. Dispondo 500 bolas formando um triângulo, com uma bola na primeira linha, duas na segunda, três na terceira etc, quantas bolas sobrarão? Quantas linhas haverá?

linha		Nº bolinhas
1	•	1
2	• •	2
3	• • •	3
4	• • • •	4
⋮	⋮	⋮
n		n

$(1, 2, 3, \ldots, n)$ PA de razão 1

Nº total de bolinhas $\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{(1+n)\cdot n}{2} \leq 500 \Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{produto de 2 números naturais consecutivos}} \leq 1000, \ n \in \mathbb{N}^*$$

$n = 30 \Rightarrow 30 \cdot 31 = 930 \leq 1000$

$n = 31 \Rightarrow 31 \cdot 32 = 992 \leq 100$

$n = 32 \Rightarrow 32 \cdot 33 = 1056 > 1000$

Logo, $\boxed{n = 31}$ e o nº de bolinhas usadas é

$$\frac{31 \cdot 32}{2} = 496$$

Resp: 31 linhas e sobram 4 bolinhas

5. Em uma PG, com número par de termos, a soma de todos os termos é igual ao triplo da soma dos termos de ordem ímpar. Determine a razão dessa PG.

n par

PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_n)$ de razão q

sequência $(a_1, a_3, a_7, \dots, a_{n-1})$ é uma PG de razão q^2, 1º termo a_1 e $\frac{n}{2}$ termos

S_I: soma dos termos de ordem ímpar

$$S_n = 3 \cdot S_I$$

Se $a_1 \neq 0$ e $q \neq 1$ e $q \neq -1$, então

$$\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{3 \cdot a_1 \cdot \left[(q^2)^{\frac{n}{2}} - 1 \right]}{q^2 - 1}$$

$$\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{3 \cdot a_1 \cdot (q^n - 1)}{q^2 - 1}$$

Logo, $\frac{1}{q-1} = \frac{3}{q^2-1} \Rightarrow \frac{q^2-1}{q-1} = 3$

$\frac{(q-1)(q+1)}{q-1} = 3 \Rightarrow q + 1 = 3$ (pois $q \neq 1$)

$$\boxed{q = 2}$$

Se $a_1 = 0$, então a seq. é $(0, 0, 0, \dots, 0)$ qualquer que seja a razão e $S_n = 3S_I$

Se $a_1 \neq 0$ e $q = 1$, a seq é $(a_1, a_1, \dots, a_1)$ e não ocorre $S_n = 3S_I$

Se $a_1 \neq 0$ e $q = -1$, a seq é $(a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots, a_1)$ e não ocorre $S_n = 3S_I$

Resp:

Se $a_1 \neq 0$ e $q \neq 1$ e $q \neq -1$, $q = 2$

Se $a_1 = 0$, então a razão é qualquer

OBS

PG $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots)$

sequência $(a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots)$

$b_1 = a_1$

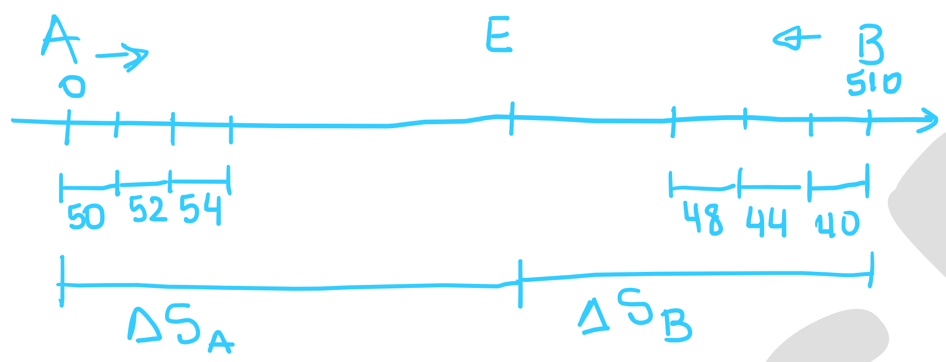
$b_2 = a_3 = a_1 \cdot q^2$

$b_3 = a_5 = a_1 \cdot q^4 = a_1 \cdot (q^2)^2$

$b_4 = a_7 = a_1 \cdot q^6 = a_1 \cdot (q^2)^3$

etc

6. Dois corpos, A e B, se encontram a uma distância de 510 m e se movem simultaneamente um ao encontro do outro. O corpo A percorre no primeiro minuto 50 m, e em cada minuto seguinte dois metros a mais que no precedente. O corpo B percorre no primeiro minuto 40 m, e em cada minuto seguinte quatro metros a mais que no precedente. Depois de quantos minutos se encontrarão esses corpos?



n: nº de minutos

$(50, 52, 54, \ldots)$ PA $a_1 = 50$ e razão 2 e n termos

$$a_n = 50 + (n-1)2 \Rightarrow a_n = 2n + 48, \ n \geq 1$$

$$\Delta S_A = \frac{(50 + 2n + 48)}{2} \cdot n \Rightarrow \Delta S_A = (49 + n) \cdot n, \ n \geq 1$$

$(40, 44, 48, \ldots)$ PA $b_1 = 40$ e razão 4 e n termos

$$b_n = 40 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow b_n = 4n + 36, \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Delta S_B = \frac{(40 + 4n + 36)n}{2} \Rightarrow \Delta S_B = (38 + 2n)n, \ n \geq 1$$

$$\Delta S_A + \Delta S_B = 510 \Rightarrow (49 + n)n + (38 + 2n)n = 510$$

$$49n + n^2 + 38n + 2n^2 - 510 = 0 \Rightarrow 3n^2 + 87n - 510 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 29n - 170 = 0$$

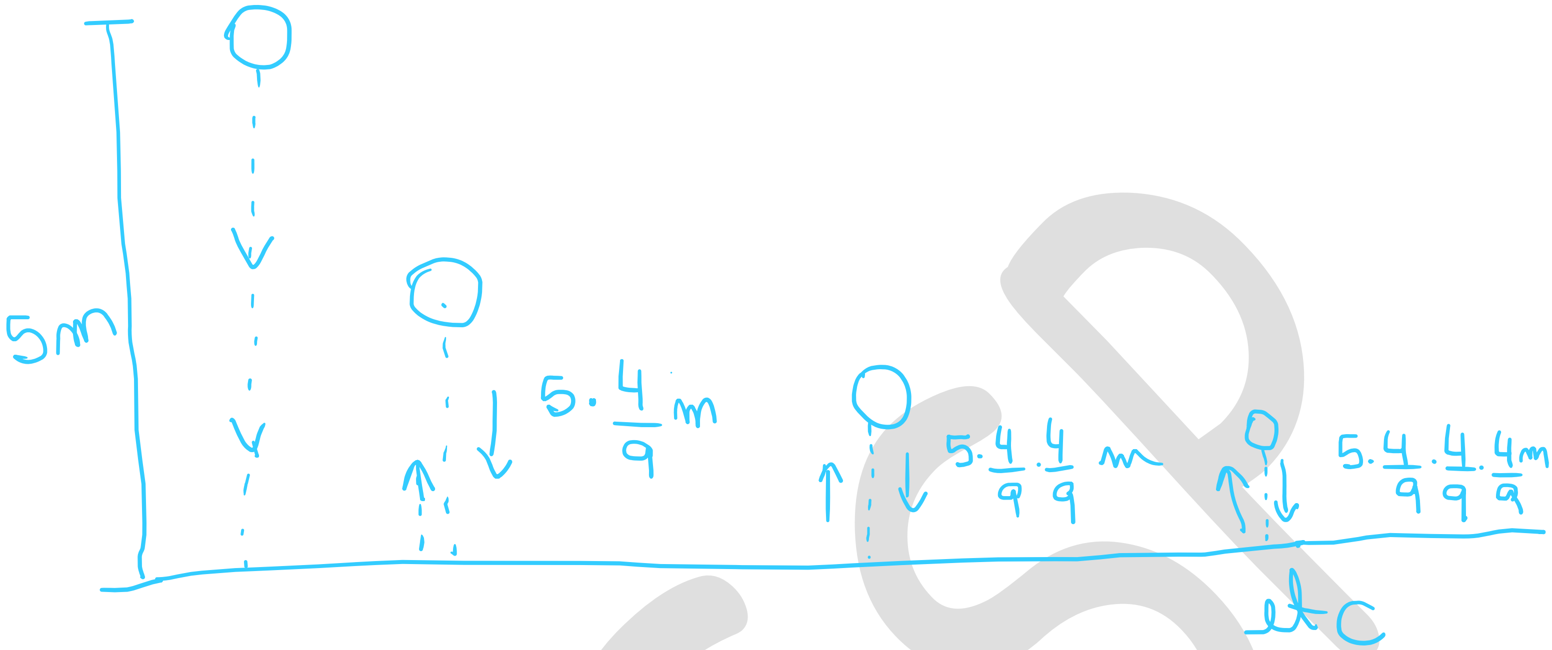
$$\Delta = 1521$$

$$n = \frac{-29 + 39}{2} \quad \text{ou} \quad n = \frac{-29 - 39}{2}$$ (não convém, pois $n \in \mathbb{N}^*$)

$$n = 5$$

Resp: 5 minutos

7. Larga-se uma bola de uma altura de 5 m. Após cada choque com o solo, a bola recupera apenas $\frac{4}{9}$ da altura anterior. Determine a distância total percorrida pela bola.



escrever pelo menos 3 termos

$$D = 5 + 2\cdot\underbrace{\left[5\cdot\frac{4}{9} + 5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 + 5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots\right]}_{\text{soma termos PG infinita}}$$

$$D = 5 + 2\cdot 5\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$D = 5 + \frac{40}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 5 + \frac{\cancel{40}^{\,8}}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{5}}$$

$$\boxed{D = 13\,m}$$

Opção

$$D_{descida} = 5 + 5\cdot\frac{4}{9} + 5\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots$$

$$D_{descida} = \frac{5}{1-\frac{4}{9}} = 9\,m$$

$$D_{subida} = 5\cdot\frac{4}{9} + 5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 + 5\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots$$

$$D_{subida} = \frac{5\cdot\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = 4\,m$$

Logo, a distância percorrida foi $(9+4)\,m = 13\,m$

8. Um garrafão contém V litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água e assim sucessivamente. Qual a quantidade de vinho que restará no garrafão após n dessas operações?

- V litros de vinho $(V > 1)$
retira 1 L de vinho e coloca 1 L de água

$\boxed{\text{Restam } (V-1)\text{ L de vinho}}$ após 1ª retirada

concentração $\frac{V-1}{V}$ (nº puro)

- V litros de mistura
retira 1 L e coloca 1 L de água
em 1 L de mistura há $\frac{V-1}{V} \cdot 1L = \frac{V-1}{V}$ L de vinho que foram retirados
Quantidade de vinho que resta

$$V-1-\frac{(V-1)}{V} = (V-1)\left(1-\frac{1}{V}\right) = (V-1)\frac{(V-1)}{V} = \boxed{\frac{(V-1)^2}{V} L}$$

após 2ª retirada

concentração de vinho

$$\frac{\frac{(V-1)^2}{V}}{V} = \frac{(V-1)^2}{V^2} \text{ (nº puro)}$$

- retira 1 L de mistura e coloca 1 L de água
agora, em 1 L de mistura há $\frac{(V-1)^2}{V^2} \cdot 1L =$
$= \frac{(V-1)^2}{V^2}$ L de vinho que foram retirados.
Quantidade de vinho que resta, agora,

$$\frac{(V-1)^2}{V} - \frac{(V-1)^2}{V^2} = \frac{(V-1)^2}{V} \cdot \left(1-\frac{1}{V}\right) = \frac{(V-1)^2}{V} \frac{(V-1)}{V} =$$

$$= \boxed{\frac{(v-1)^3}{v^2}}$$ após 3 retirada

e assim sucessivamente

Considere a sequência

$$\left(\underset{a_1}{v-1};\ \underset{a_2}{\frac{(v-1)^2}{v}};\ \underset{a_3}{\frac{(v-1)^3}{v^2}};\ \ldots\right)$$

Como

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{(v-1)^2}{v}}{v-1} = \frac{v-1}{v}$$

e

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{(v-1)^3}{v^2}}{\frac{(v-1)^2}{v}} = \frac{v-1}{v}$$

então, a sequência é uma PG de 1º termo $v-1$ e razão $\frac{v-1}{v}$.

Logo,

$$a_n = (v-1)\cdot\left[\frac{(v-1)}{v}\right]^{n-1} = (v-1)\cdot\frac{(v-1)^{n-1}}{v^{n-1}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(v-1)^n}{v^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}^*}$$ após a 1ª retirada

9. Calcule o valor de $x = \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdots}}}}}$

1ª solução

Aplicando propriedade de radiciação e definição de potência com expoente racional

$x = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}}} \cdots\cdots$

$x = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[9]{5} \cdot \sqrt[27]{5} \cdot \sqrt[81]{5} \cdots\cdots$

$x = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{1}{27}} \cdot 5^{\frac{1}{81}} \cdots\cdots$ (produto de potências de mesma base)

$x = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots\cdots}$

O expoente de 5 é a soma de uma PG infinita convergente

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

Logo, $\boxed{x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}}$

2ª solução

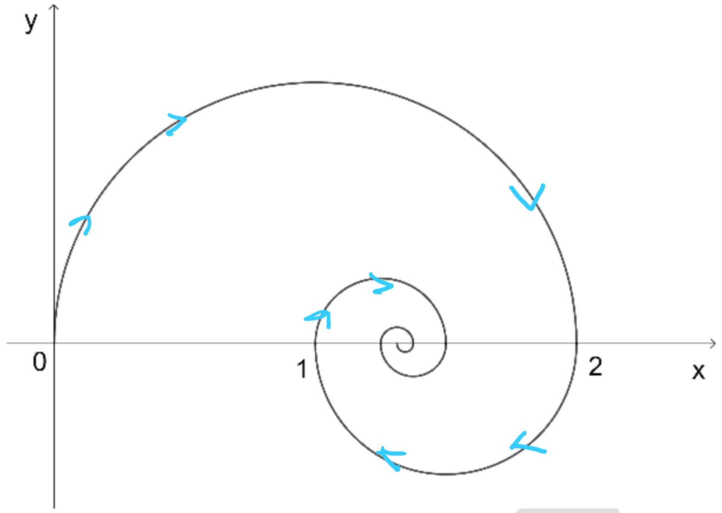
$x = \sqrt[3]{5 \sqrt[3]{5 \sqrt[3]{5 \sqrt[3]{5}}}} \cdots \Rightarrow x^3 = 5 \cdot \underbrace{\sqrt[3]{5 \sqrt[3]{5 \sqrt[3]{5}}} \cdots}_{x}$

$x^3 = 5x \Rightarrow x^3 - 5x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 5) = 0$

$x = 0$ ou $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$

Como $x > 0$, então $\boxed{x = \sqrt{5}}$

10. No plano cartesiano, uma formiga sai da origem e descreve uma trajetória na forma de uma espiral. Essa espiral é formada por semicircunferências cujos centro pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio da primeira semicircunferência é igual a 1 e o raio de cada semicircunferência é igual à metade do raio da semicircunferência anterior, determine o comprimento da espiral e a abscissa do ponto "final" da trajetória da formiga.



comprimento circunferência : $2\pi r$

comprimento semicircunferência : πr

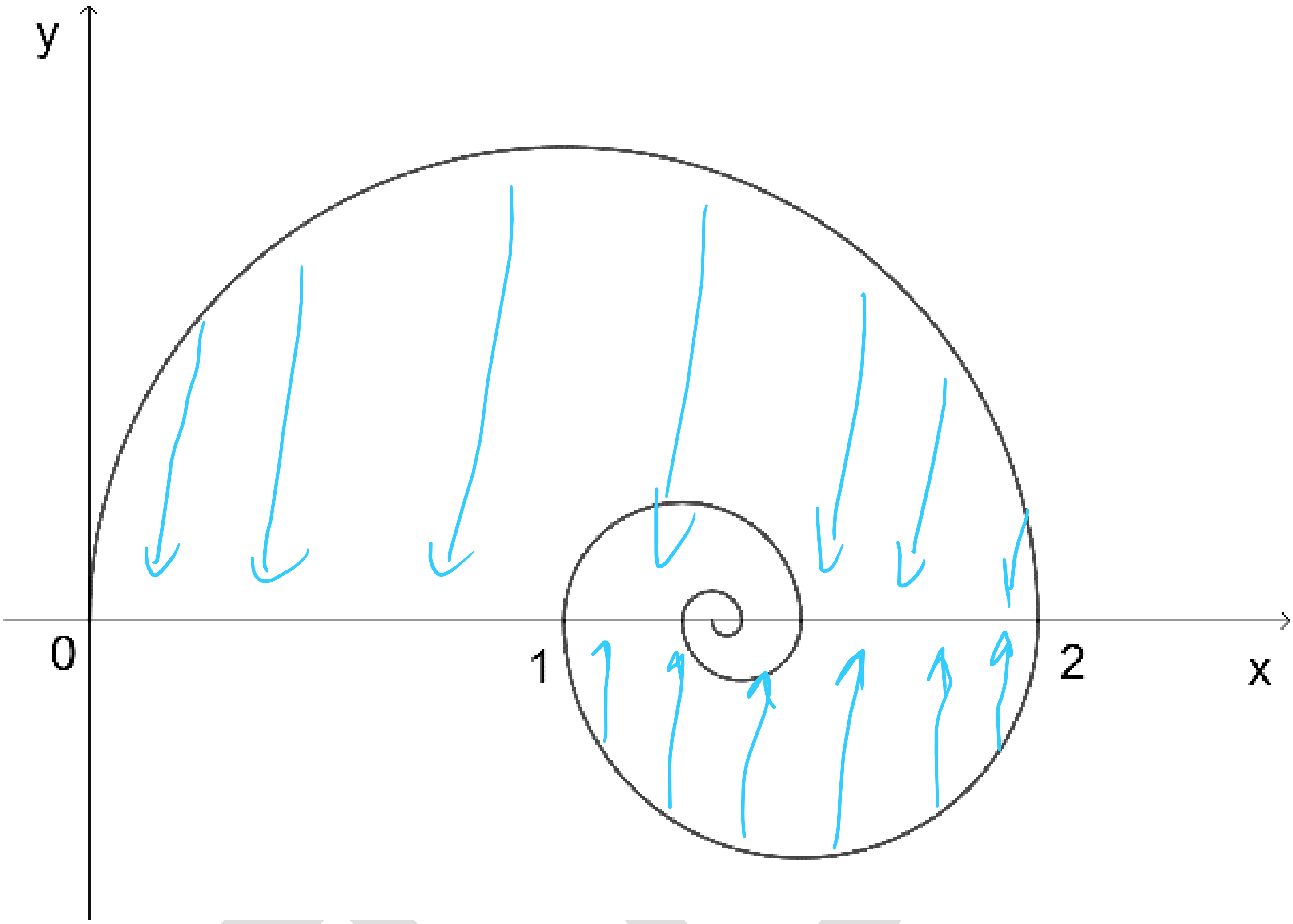
semicircunf	raio	compri/o
1	1	π
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{\pi}{8}$

....

$$L = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \ldots = \frac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi$$

soma PG infinita

Comprimento da espiral : 2π u.c.



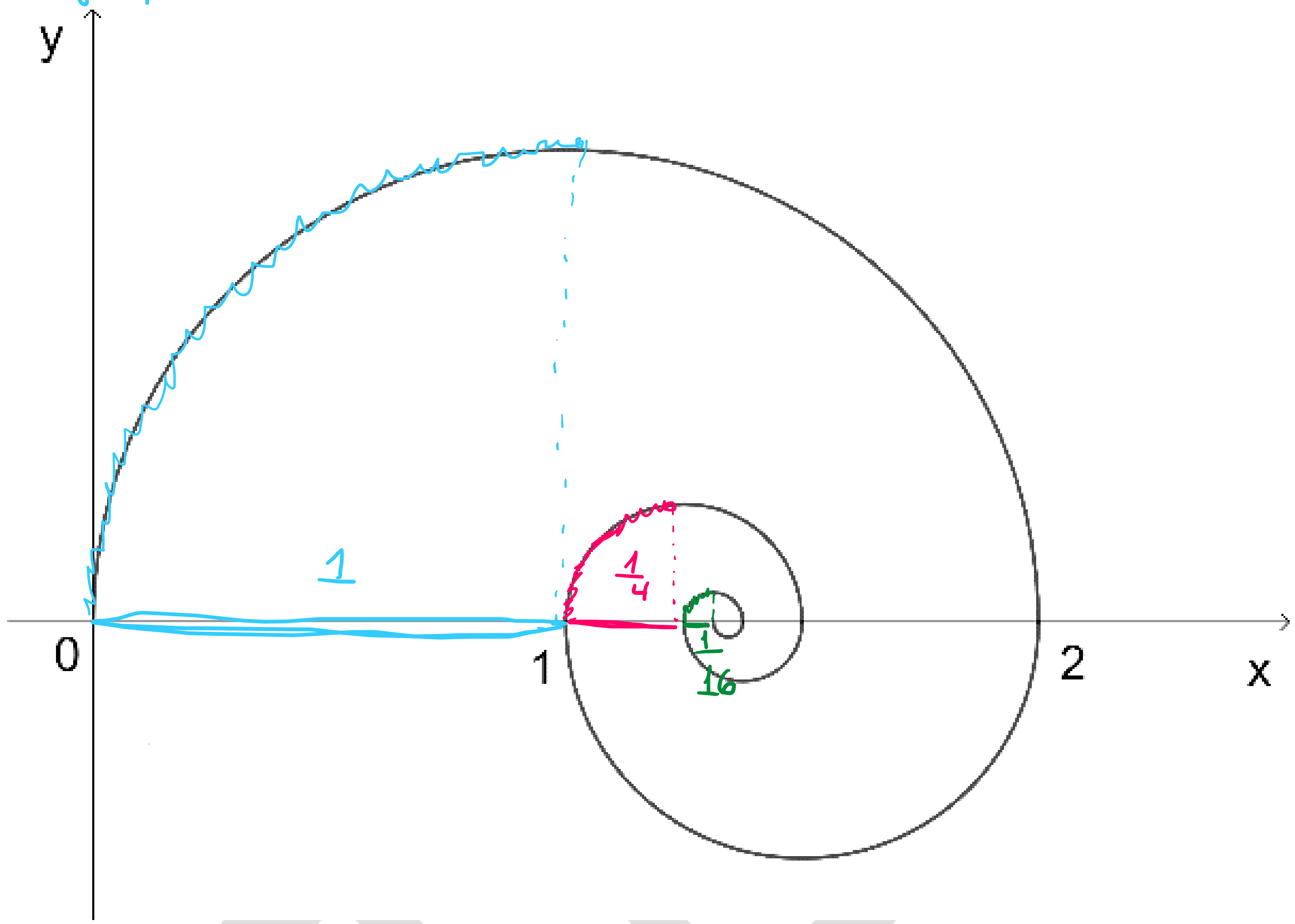
Considerar a projeção ortogonal de cada ponto da espiral sobre o eixo Ox

$$x = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

$$x = \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

$$x = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} - \frac{}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

opção 1



Projeção ortogonal de metade de cada semicircunferência que está acima do eixo Ox

$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{x = \frac{4}{3}}$$

11. A soma de três números que formam uma progressão geométrica crescente é igual a 65. Se do menor número é subtraído 1 e do maior número é subtraído 19, obtemos uma progressão aritmética. Determinar os números iniciais.

(a, b, c) PG crescente

$$\begin{cases} b^2 = ac \text{ (I) (propriedade da média geométrica)} \\ a + b + c = 65 \text{ (II)} \end{cases}$$

$(a-1, b, c-19)$ PA

Propriedade média aritmética

$$b = \frac{a-1+c-19}{2} \Rightarrow 2b = a + c - 20$$

De II, vem que $a + c = 65 - b$.

Logo, $2b = 65 - b - 20 \Rightarrow \boxed{b = 15}$

Assim $\begin{cases} 15^2 = ac \longrightarrow ac = 225 \text{ (III)} \\ a + c = 50 \longrightarrow c = 50 - a \text{ (IV)} \end{cases}$

De III e IV, vem que $a(50 - a) = 225$

$-a^2 + 50a - 225 = 0 \Rightarrow a = 5$ ou $a = 45$

$a = 5 \xRightarrow{(IV)} c = 45$

$a = 45 \xRightarrow{(IV)} c = 5$

Resp: os nºs são 5, 15 e 45

12. A sequência de números (1, 4, 10, 19, ...) tem a seguinte propriedade, a partir do segundo termo: a diferença entre um termo e seu antecessor forma uma progressão aritmética. Determine o termo geral dessa sequência de números.

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 10,\ a_4 = 19, \dots, a_n$

$$\cancel{a_2} - a_1 = 3 = b_1$$
$$\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = 6 = b_2$$
$$a_4 - \cancel{a_3} = 9 = b_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} = b_{n-2}$$
$$a_n - \cancel{a_{n-1}} = b_{n-1}$$

Somando as igualdades, membro a membro, tem-se que

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} \quad (I)$$

$(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ é uma PA com 1º termo 3, razão 3 e tem $(n-1)$ termos

$$b_{n-1} = 3 + [(n-1)-1] \cdot 3 = 3 + 3n - 6$$

$$b_{n-1} = 3n - 3,\ n \geq 2$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = \frac{(\cancel{3} + 3n - \cancel{3})(n-1)}{2}$$

Em (I): $a_n - 1 = \dfrac{3n(n-1)}{2}$ $\qquad \dfrac{3n^2 - 3n}{2} + 1$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2},\ n \geq 1}$$

13. Completar a PH de 4 termos $\left(\frac{1}{3}, a_2, \frac{2}{3}, a_4\right)$. $a_2 \neq 0$ e $a_4 \neq 0$

$$\text{PH} \left(\frac{1}{3}, a_2, \frac{1}{\frac{3}{2}}, a_4\right) \Longleftrightarrow \left(\underset{b_1}{3}, \underset{b_2}{\frac{1}{a_2}}, \underset{b_3}{\frac{3}{2}}, \underset{b_4}{\frac{1}{a_4}}\right) \text{PA}$$

$$b_3 = b_1 + 2r \Rightarrow \frac{3}{2} = 3 + 2r \Rightarrow \boxed{r = -\frac{3}{4}}$$

$$b_2 = b_1 + r \Rightarrow \frac{1}{a_2} = 3 + \left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{a_2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \boxed{a_2 = \frac{4}{9}}$$

$$b_4 = b_3 + r \Rightarrow \frac{1}{a_4} = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{a_4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \boxed{a_4 = \frac{4}{3}}$$

Resp: $a_2 = \frac{4}{9}$ e $a_4 = \frac{4}{3}$

14. Interpolar 6 meios harmônicos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{3}$.

$$PH\left(\frac{2}{5}, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \frac{4}{3}\right)$$

$$PH\left(\frac{1}{\frac{5}{2}}, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \frac{1}{\frac{3}{4}}\right)$$

Logo, $\left(\frac{5}{2}, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \frac{3}{4}\right)$ é

uma PA com 8 termos, $a_1 = \frac{5}{2}$ e $a_8 = \frac{3}{4}$

$$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 7r \Rightarrow \boxed{r = -\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ a PA é $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \cancel{\frac{8}{4}}, \frac{7}{4}, \cancel{\frac{6}{4}}, \frac{5}{4}, \cancel{\frac{4}{4}}, \frac{3}{4}\right)$

$$2 \qquad \frac{3}{2} \qquad 1$$

PA é $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}\right)$

e a PH é $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1, \frac{4}{3}\right)$

15. Considere a PAG definida por a = –4, r = 3 e q = 2. Determine

a. os 5 primeiros temos dessa PAG;

PA $(-4, -1, 2, 5, 8, \ldots)$

PG $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$

Logo, a PAG é $(-4, -2, 8, 40, 128, \ldots)$

b. a expressão do termo geral dessa PAG;

Termo geral da PA $b_n = -4 + (n-1) \cdot 3$

$b_n = 3n - 7, n \in \mathbb{N}^*$

Termo geral da PG $c_n = 1 \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

Termo geral da PAG

$a_n = b_n \cdot c_n = (3n-7) \cdot 2^{n-1}$

$\boxed{a_n = (3n-7) \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*}$

c. o 10º termo dessa PAG.

$a_{10} = \underbrace{(3 \cdot 10 - 7)}_{23} \cdot \underbrace{2^9}_{512}$

$\boxed{a_{10} = 11\,776}$

16. Considere a PGA definida por a = –4, r = 3 e q = 2. Determine

a. os 5 primeiros temos dessa PGA;

a PG é $(-4, -8, -16, -32, -64, \dots)$

a PA é $(0, 3, 6, 9, 12, \dots)$

a PGA é $(-4, -5, -10, -23, -52, \dots)$

b. a expressão do termo geral dessa PGA;

Termo geral:

da PG $b_n = -4 \cdot 2^{n-1}, \; n \in \mathbb{N}^*$

$b_n = -2^2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = -2^{n+1}, \; n \in \mathbb{N}^*$

da PA $c_n = 0 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow c_n = 3n - 3, \; n \in \mathbb{N}^*$

da PGA $\boxed{a_n = -2^{n+1} + 3n - 3, \; n \in \mathbb{N}^*}$

c. o 10º termo dessa PGA.

$a_{10} = -2^{11} + 3 \cdot 10 - 3$

$a_{10} = -2048 + 23 \Rightarrow \boxed{a_{10} = -2025}$