Divisão em $\mathbb{Z}$ (euclidiana)

Marcia Xavier Cury

Divisão em $\mathbb{Z}$

Dividir 830 por 7.

$$
\begin{array}{l|l}
830 & 7 \\ \hline
13 & 118,57 \\
\;\;60 & \\
\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}
$$

em $\mathbb{R}$

Não é número inteiro!

$$
\begin{array}{l|l}
830 & 7 \\ \hline
13 & 118 \\
\;\;60 & \\
\;\;\;\;4 &
\end{array}
$$

Dividendo: número inteiro

Divisor: número inteiro não nulo

Quociente: número inteiro

Resto: número inteiro

Divisão em $\mathbb{Z}$

EF → $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

não é a definição

$$\begin{array}{l|l} 27 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array}$$

$5 \cdot 5 + 2 = 27$

Def

Sejam a e b números inteiros, com $b \neq 0$.

Dividir a por b é determinar os números inteiros q e r tais que:

dividendo

$$\mathbf{a = b \cdot q + r \quad e \quad 0 \leq r < |b|}$$

divisor quoc resto

q é o quociente e r é o resto da divisão de a por b

Nessas condições, q e r são únicos.

Atenção

div quoc resto

- $38 = 5 \cdot 7 + 3$

$$\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

$\underline{0 \leq 3 < 5}$

- $38 = 5 \cdot 5 + 13$

$$\cancel{\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 13 & 5 \end{array}}$$

- $38 = 5 \cdot 6 + 8$

$$\cancel{\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 8 & 6 \end{array}}$$

- $38 = 5 \cdot 4 + 18$

$$\cancel{\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 18 & 4 \end{array}}$$

$\begin{array}{c|c} 9 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} 8 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} 6 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} 5 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} 4 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \cline{2-2} & \end{array}$ **?**

Como $3 = 4 \cdot 0 + 3$, então o quociente é zero e o resto é 3.

$\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \cline{2-2} & \end{array}$

Como $2 = 4 \cdot 0 + 2$, então o quociente é zero e o resto é 2.

$\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \cline{2-2} & \end{array}$

Como $1 = 4 \cdot 0 + 1$, então o quociente é zero e o resto é 1.

$\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \cline{2-2} & \end{array}$ **??**

Como $0 = 4 \cdot 0 + 0$, então o quociente é zero e o resto é zero.

$\begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 0 \end{array}$

4 | 6
4 0

Dividir 647 por 6

647	6
0	1

647	6
04	1

647	6
04	10
4	

647	6
04	10
47	

647	6
04	107
47	
5	

A divisão de 647 por 6 tem quociente 107 e resto 5.

$0 \leq \text{resto} < |\text{divisor}|$

- Ao dividir 38 por 7 obtemos quociente 5 e resto 3, pois $38 = 7 \cdot 5 + 3$ e $0 \leq 3 < |7|$

$$\begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

- Ao dividir 38 por –7 obtemos quociente –5 e resto 3, pois $38 = (-7) \cdot (-5) + 3$ e $0 \leq 3 < |-7|$

$$\begin{array}{r|l} 38 & -7 \\ \hline 3 & -5 \end{array}$$

- Ao dividir –38 por 7 obtemos quociente –6 e resto 4, pois $-38 = \underbrace{7 \cdot (-6)}_{-42} + 4$ e $0 \leq 4 < |7|$

$$\begin{array}{r|l} -38 & 7 \\ \hline 4 & -6 \end{array}$$

- Ao dividir –38 por –7 obtemos quociente 6 e resto 4, pois $-38 = -7 \cdot 6 + 4$ e $0 \leq 4 < |-7|$

$$\begin{array}{r|l} -38 & -7 \\ \hline 4 & 6 \end{array}$$

Divisão exata

Sejam a e b números inteiros, com $b \neq 0$.

Quando o resto da divisão de a por b é zero dizemos que a divisão é exata.

dividendo divisor quociente

Assim, $a = b \cdot q$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 0 & q \end{array}$$

Também podemos dizer que:

- a é divisível por b
- a é múltiplo de b
- b divide a
- b é divisor de a
- b é fator de a

$n \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{3n}_{\text{múltiplo de 3}}$

$$\begin{array}{r|l} 3n & 3 \\ \hline 0 & n \end{array}$$

Como $45 = 5 \times 9$, então são expressões equivalentes:

- a divisão de 45 por 9 é exata
- 45 é divisível por 9
- 45 é múltiplo de 9
- 9 divide 45
- 9 é divisor de 45
- 9 é fator de 45

Propriedades da divisão exata

- $\forall\, n \in \mathbb{Z}^*$, n é divisor n
- $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}^*$, se n é divisor de m e m é divisor de n, então n = m
- $\forall\, n, m, p \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$ e $m \neq 0$,

  se n é divisor de m e m é divisor de p, então n é divisor de p.

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \hline 0 & q \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & m \\ \hline 0 & k \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \overset{m}{36} & \overset{n}{4} \\ \hline 0 & 9 \end{array} \;\; e \;\; \begin{array}{r|l} \overset{p}{72} & \overset{m}{36} \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} \overset{p}{72} & \overset{n}{4} \\ \hline 0 & 18 \end{array}$$

Dem.:

n é divisor de m $\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z} \mid m = nq$ (I)

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \hline 0 & q \end{array}$$

e

m é divisor de p $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid p = mk$ (II)

$$\begin{array}{r|l} p & m \\ \hline 0 & k \end{array}$$

Substituindo (I) em (II), vem que p = n(qk), com q e k inteiros.

Logo, n é divisor de p.

$$p = m \cdot k \Rightarrow p = nqk \Rightarrow p = n \cdot (q \cdot k)$$

dividendo, divisor, quociente

$$\begin{array}{r|l} p & n \\ \hline 0 & qk \end{array}$$

interpretação

Ex.: 3 é divisor de 12 e 12 é divisor de 48 $\Rightarrow$ 3 é divisor de 48

Propriedades da divisão exata

12 é divisível por 3 e 18 é divisível por 3 $\Rightarrow$ 12+18 é divisível por 3

$12 = 3\cdot 4$ e $18 = 3\cdot 6 \Rightarrow \underbrace{3\cdot 4 + 3\cdot 6}_{12+18} = 3\cdot\underbrace{(4+6)}_{\text{nº int}}$

- $\forall$ n, m, p $\in \mathbb{Z}$, com n $\neq$ 0,

  se n é divisor de m e n é divisor de p, então n é divisor de m + p.

  Dem.:

  n é divisor de m $\Rightarrow \exists$ q $\in \mathbb{Z}$ | m = nq

  e

  n é divisor de p $\Rightarrow \exists$ k $\in \mathbb{Z}$ | p = nk

  Assim, m + p = nq + nk = n(q + k), com q e k inteiros.

  $$\begin{array}{r|l} m+p & n \\ \hline 0 & q+k \end{array}$$

  Logo, $\underbrace{\text{n é divisor de m + p}}_{\text{m+p é divisível por n}}$.

  Ex.: 3 é divisor de 12 e 3 é divisor de 15 $\Rightarrow$ 3 é divisor de 12 + 15

Divisão por 2

$r \in \mathbb{Z}$
e
$0 \leq r < 2$
$r = 0$ ou $r = 1$

Dividir o número inteiro n por 2:

$$\begin{array}{l|l} n & 2 \\ \hline r & q \end{array}$$

$n = 2q + r$, com $0 \leq r < 2$ e $q \in \mathbb{Z}$

Como r é inteiro e $0 \leq r < 2$, então $r = 0$ ou $r = 1$.

O resto da divisão de um número inteiro por 2 só pode ser 0 ou 1.

$\exists$ existe $\nexists$ não existe $\not\mathrm{E}$ proibido estacionar

Número par e número ímpar

- **Um número inteiro que dividido por 2 deixa resto zero é denominado par.**

$$\begin{array}{r|l} n & 2 \\ \hline 0 & k \end{array}$$

$\forall\ n \in \mathbb{Z}$, n número par $\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \mid n = 2k$

Um número é par quando é múltiplo de 2.

Zero é par!

$P = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

- **Um número inteiro que dividido por 2 deixa resto 1 é denominado ímpar.**

$$\begin{array}{r|l} n & 2 \\ \hline 1 & k \end{array}$$

$\forall\ n \in \mathbb{Z}$, n número ímpar $\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \mid n = 2k + 1$