ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES

TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO: Se dá quando temos: $x^2 \pm 2xy + y^2$. Logo, podemos simplificar com: $(x + y)^2$, se não houver sinal de negativo, ou $(x - y)^2$, se houver sinal de negativo. Exemplo:

64+ 80 + 25, é um trinômio quadrado perfeito! Uma vez que: $64 = 8^2$, 80 = 2x8x5 e $25 = 5^2$. Poderíamos encontrar simplesmente buscando a raiz de 64 e de 25, e por fim, multiplicando raiz de 64 x raiz de 25 x 2, se o valor desse 80 teríamos um trinômio quadrado perfeito do tipo: $(8 + 5)^2$.

DIFERENÇA DE QUADRADOS: Quando temos dois números elevados ao quadrado em uma operação de subtração. Exemplo:

$4 - 1 = 2^2 - 1^2 = (2 - 1)^2 = (2 - 1) \times (2 + 1)$.

Adendo para o fato de que podemos simplificar, pois sempre o termo do meio irá se anular! Logo, ficaria simplesmente $x^2 - y^2$. PROVA: $(x - y) . (x + y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$.

SOMA EM FRAÇÃO: (a + b)/c = a/c + b/c.

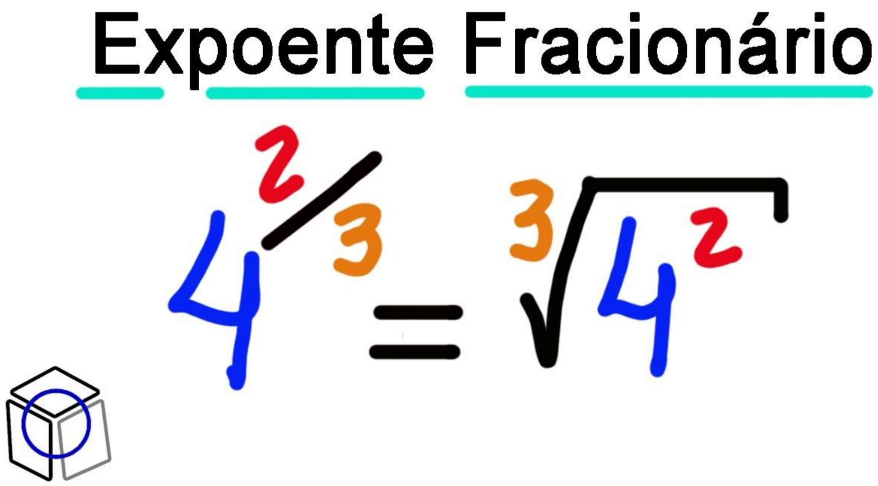
POTÊNCIA NEGATIVA:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \longrightarrow \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \longrightarrow \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

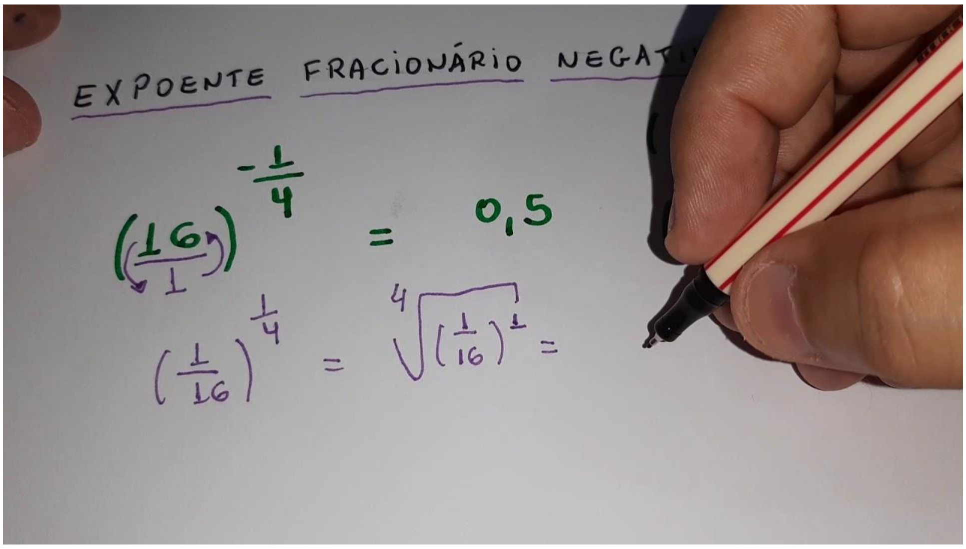
Quando uma potência for negativa, devemos inverter o número e elevar a fração ao módulo |X| do expoente.

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO:



Ou seja, simplesmente o denominador virará o índice, enquanto o numerador virará o expoente de uma potência sob o radicando.

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO NEGATIVO:



Ou seja, primeiro fazemos como se fosse negativo, invertendo o número e, em seguida, aplicamos a propriedade da potência com expoente fracionário.

MMC

Para calcular o MMC podemos fatorar todos os números em conjunto e depois multiplicar seus fatores, ou, fatorar cada um separadamente e pegar cada fator elevado ao maior expoente e multiplicá-los.

MDC

15, 20	2
15, 10	2
15, 5	3
5, 5	5
1, 1	

24, 12, 10	2
12, 6, 5	2
6, 3, 5	2
3, 3, 5	3
1, 1, 5	5
1, 1, 1	

8, 20	2
4, 10	2
2, 5	2
1, 5	5
1, 1	

Observe a fatoração para determinar o MMC e o MDC dos números acima

Temos que fatorar ambos números, separados ou em conjunto (acho que ao mesmo tempo fica mais fácil), e então multiplicamos seus fatores em comum elevados à maior potência em comum. Ou seja, como no exemplo do MDC entre 8 e 20, vemos que apesar de que 8 seja divisível por 2^3, 20 é apenas divisível por 2^2, portanto, como 8 não é divisível por 5, seu MDC será igual aos números em comum à ambos, ou seja, 2^2.

ALGUNS PRODUTOS NOTÁVEIS PARA SE RECORDAR:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) . (a-b)$$

$$a^2 + b^2 = \text{Não Tem}$$

$$a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ainda poderíamos escrever $a^3 - b^3$ como: $(a - b).(a + b)^2$

Por isso podemos escrever a^4 - b^4 como: $(a + b)^2.(a+b).(a-b)$.

FÓRMULA DE BHASKARA:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES, MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO:

$$\begin{cases} x+3y=34 & \text{I} \\ 2x-y=-2 & \text{II} \end{cases}$$

1ª equação:

isolando _x:

$x+3y=34$

$x=34-3y$

2ª equação

$x=34-3y$

$2x-y=-2$

$2(34-3y)-y=-2$

$68-6y-y=-2$

$-6y-y=-2-68$

$-7y=-70*(-1)$

$7y=70$

$y=\dfrac{70}{7}$

$y=10$

$y=10$

$x=34-3y$

$x=34-3*10$

$x=34-30$

$x=4$

DIVISÃO EUCLIDIANA:

dividendo

$$a = b \cdot q + r \text{ e } 0 \le r < |b|$$

divisor quoc resto

Ou seja, é a divisão por inteiros, onde haverá dividendo, divisor, quociente e o resto.

CONJUNTOS

SIMBOLOGIA

Símbolos dos conjuntos

Símbolo	Significado	Exemplo
$\mathbb{N}$	Símbolo dos números naturais	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$
$\mathbb{Z}$	Símbolo dos números inteiros	$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{R}$	Símbolo dos números reais	$\mathbb{R} = \left\{..., -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, ...\right\}$
$\mathbb{Q}$	Símbolo dos números racionais	$\mathbb{Q} = \left\{..., -\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{3}, 1, ...\right\}$
I	Símbolo dos números irracionais	$\mathrm{I} = \{...; -\sqrt{3}; 1{,}12681...; \pi...\}$
$\cup$	Símbolo de união	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4,5\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
$\cap$	Símbolo de intersecção	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4,5\}$ $A \cap B = \{3\}$
$-$	Símbolo de diferença	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4,5\}$ $A - B = \{1,2\}$
$\varnothing$ $\{\ \}$	Símbolos de conjunto vazio	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{4,5,6\}$

		$A \cap B = \{3\}$
$-$	Símbolo de diferença	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4,5\}$ $A - B = \{1,2\}$
$\varnothing$ $\{\ \}$	Símbolos de conjunto vazio	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{4,5,6\}$ $A \cap B = \varnothing$
$\forall$	Símbolo de para todo	$\forall x > 0$, x é positivo.
$\in$	Símbolo de pertence	$4 \in \mathbb{N}$ Quatro **pertence** aos números naturais.
$\notin$	Símbolo de não pertence	$-2 \notin \mathbb{N}$ Menos dois **não pertence** aos números naturais.
$\subset$	Símbolo de está contido	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ O conjunto de números naturais **está contido** no conjunto de números inteiros.
$\not\subset$	Símbolo de não está contido	$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}$ O conjunto de números reais **não está contido** no conjunto de números naturais.
$\supset$	Símbolo de contém	$\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ O conjunto de números inteiros **contém** o conjunto de números naturais.
$\not\supset$	Símbolo de não contém	$\mathbb{Q} \not\supset \mathbb{I}$ O conjunto de números racionais **não contém** o conjunto de números irracionais.

Usamos os símbolos de pertencentes ($\in$/$\notin$) para apenas elementos.

Usamos os símbolos de contém ou não ($\subset$) para apenas conjuntos. Se $A \subset B$, então A é subconjunto de B.

Façamos um exemplo:

$\exists X \in R \mid X \geq 10$, isso significa que existe X pertencente aos reais, tal que x é maior ou igual a 10.

$X \geq 0, \forall X \in N$, isso significa que x é maior ou igual a 0 para todo e qualquer x pertencente ao conjunto dos naturais.

Igualdade

Conj: A e B

$A = B \iff \begin{cases} \text{todo elemento de A é também elemento de B} \\ \text{e} \\ \text{todo elemento de B também elemento de A} \end{cases}$

Ex $A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{3, 7, 5, 1\}$

$1 \in A$ e $1 \in B$

$3 \in A$ e $3 \in B$

Em conjuntos, a ordem dos elementos não importa, mas os elementos não se repetem num mesmo conjunto.

Em conjuntos, usamos as chaves {} para representar os elementos dos conjuntos. [] É usado para representar um intervalo real.

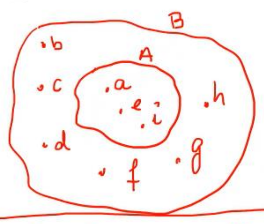
DIAGRAMA DE EULER-VENN

Subconjunto

$A = \{a, e, i\}$

$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

todo elemento de A, também é elemento, mas nem todo elemento de B é elemento A.



$\boxed{\text{A é subconjunto de B}}$

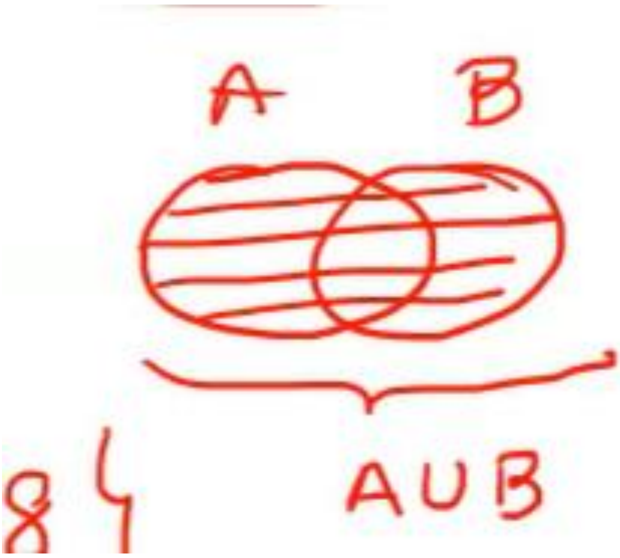
Notação $A \subset B$

A é subconjunto de B

É uma boa representação visual para entendermos melhor a disposição dos elementos.

Se D ⊂ A e A ⊂ B, então D ⊂ B.

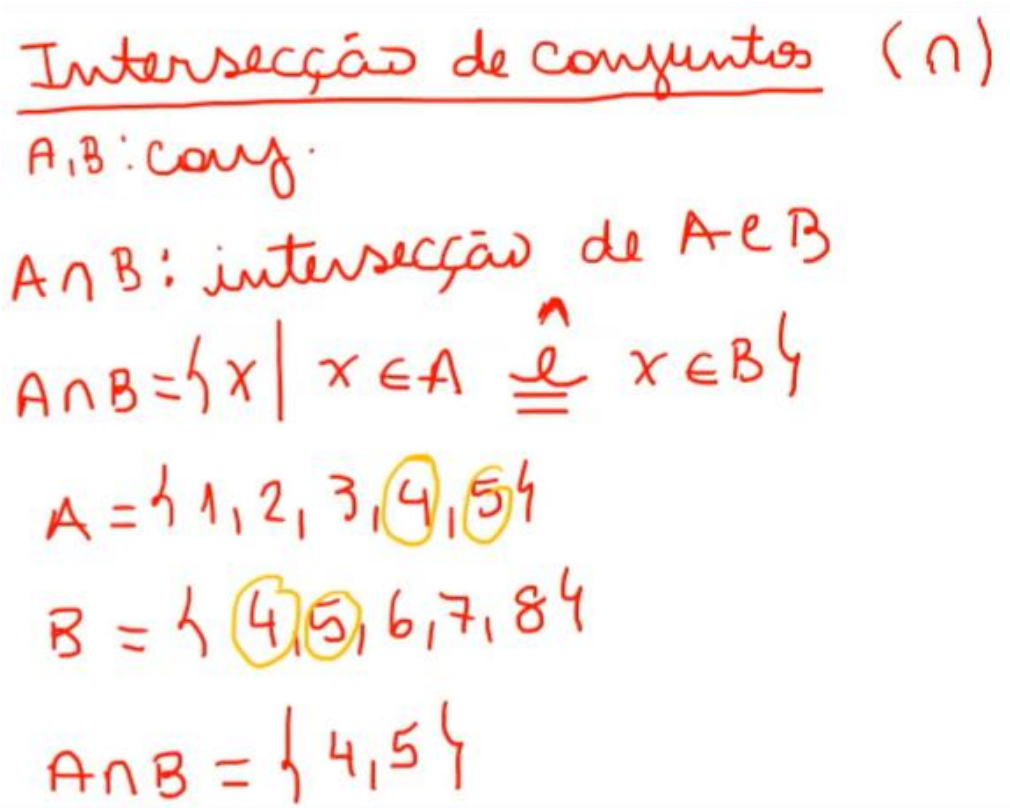
UNIÃO DE CONJUNTOS



Isso é para significar a união de todos os elementos de dois ou mais conjuntos.

Com Euler-Venn, pintariamos toda esta área dos circulos.

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS



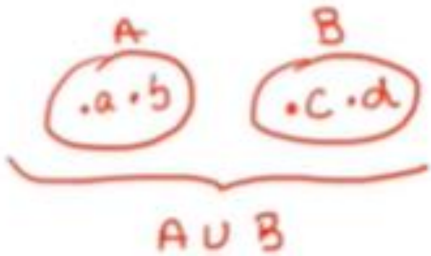
Já isto serve para indicar apenas um trecho onde ambos conjunto tem elementos em comum.

CONJUNTOS VAZIOS:

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cup \emptyset = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

Tem como representação {} ou ∅, mas nunca {∅}.

CONJUNTOS DISJUNTOS:

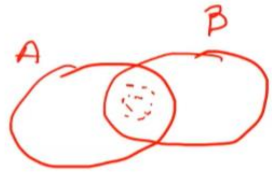


$$\boxed{\begin{array}{l} A \cap B = \emptyset \\ \text{A e B são disjuntos} \end{array}}$$

São conjuntos as quais sua intersecção é um conjunto vazio.

NÚMERO DE ELEMENTOS

$$\boxed{m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)}$$

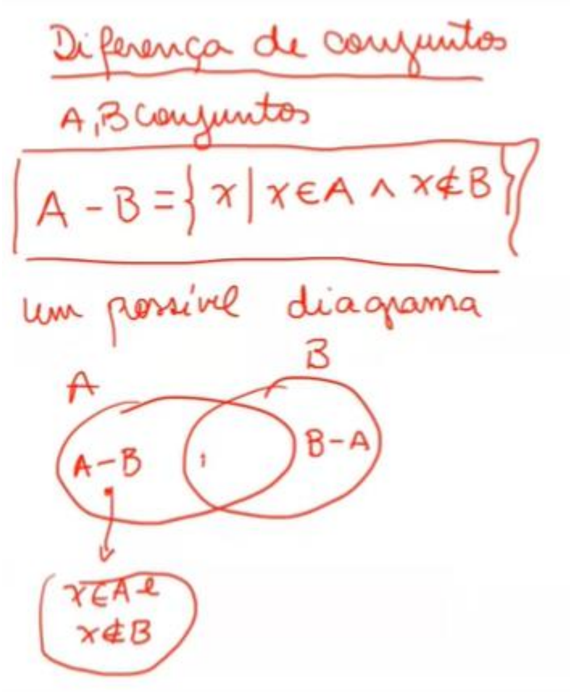


A e B conj.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cap B) = 0 \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

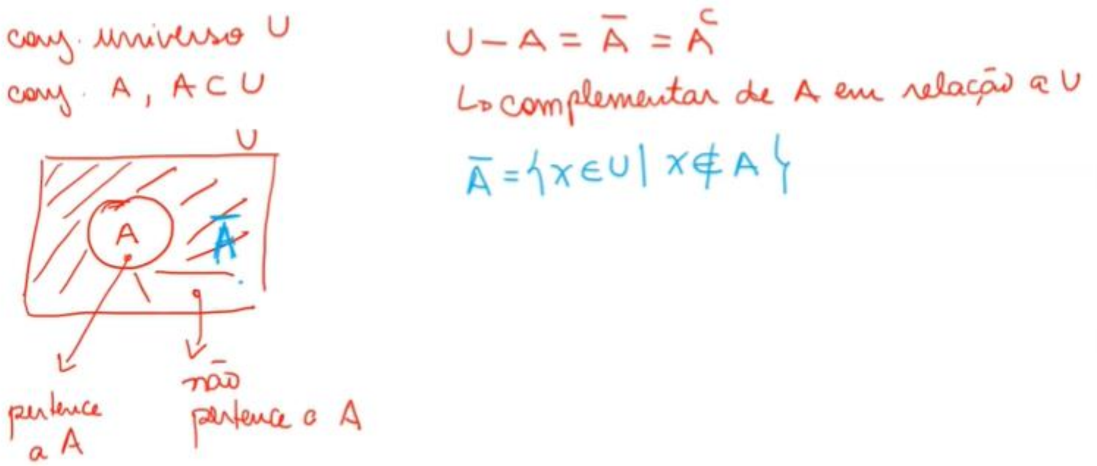
O número de elementos da união de dois ou mais conjuntos será dado pela diferença entre a soma do número de elementos de ambos conjuntos e o número de elementos da intersecção destes conjuntos.

DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS



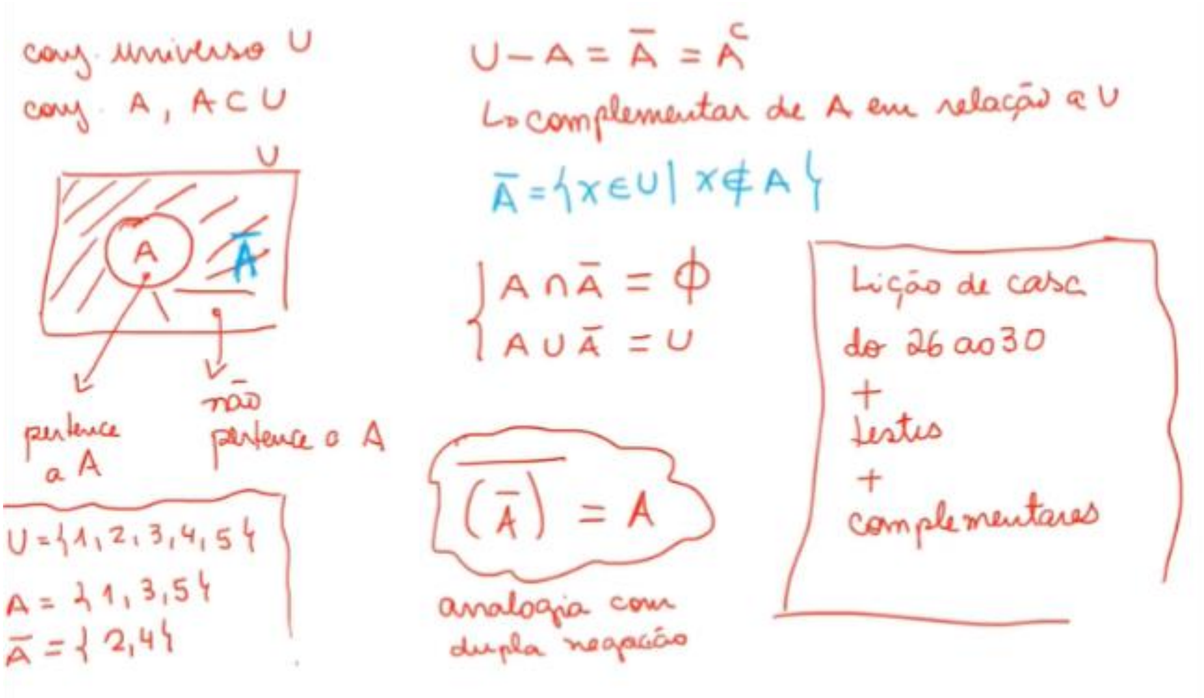
Ou seja, A – B = { x | x pertence a A e x não pertence a B}.

CONJUNTOS UNIVERSOS:

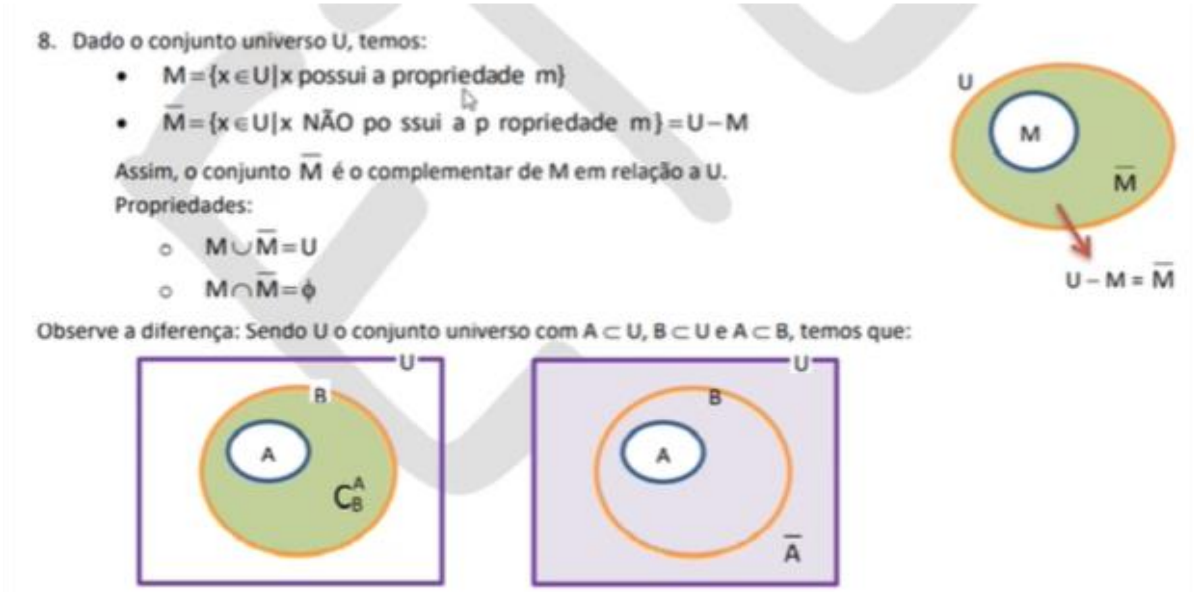


São o universo o qual a situação ocorre. Isto se dá quando há elementos que não pertencem a nenhum conjunto. Exemplo: 35 pessoas compram no mercado A, 25 no B e 10 em nenhum dos dois. O universo contém A, B e mais as 10 pessoas que não pertencem nem à A e nem à B.

COMPLEMENTARES:



São representados com uma barra em cima da letra que representa o conjunto, são basicamente tudo que não pertence a A, ou seja, Universo – A.



8. Dado o conjunto universo U, temos:

- $M = \{x \in U | x \text{ possui a propriedade } m\}$
- $\overline{M} = \{x \in U | x \text{ NÃO possui a propriedade } m\} = U - M$

Assim, o conjunto $\overline{M}$ é o complementar de M em relação a U.
Propriedades:

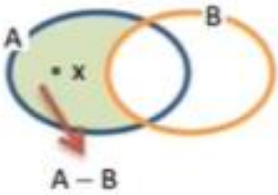
- $M \cup \overline{M} = U$
- $M \cap \overline{M} = \phi$

Observe a diferença: Sendo U o conjunto universo com $A \subset U$, $B \subset U$ e $A \subset B$, temos que:

Podemos ver que a união de M com seu complementar é o próprio universo, mas a intersecção entre ambos é vazia.

TERMOLOGIA:

4. **"Algum A não é B"** corresponde a "Existe x tal que $x \in A \wedge x \notin B$."



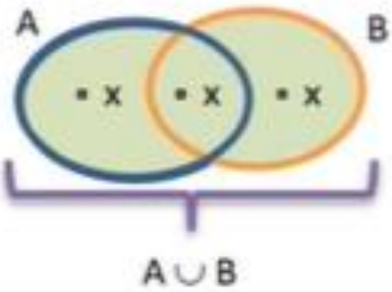
$\exists x \mid x \in A \wedge x \notin B$

Completando o estudo das relações entre proposições e conjuntos, temos:

5. **Igualdade de conjuntos (Todo A é B e Todo B é A)**

$A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

6. Reunião de A com B



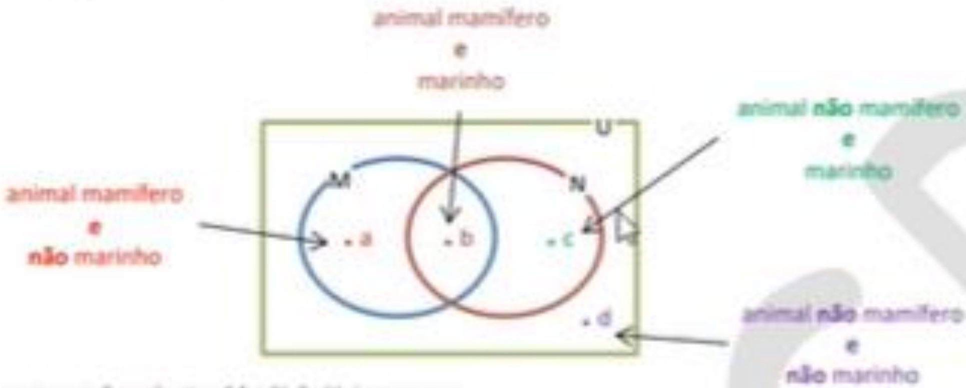
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Exemplo

Sendo:

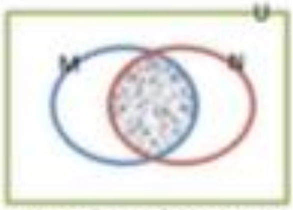
- U: conjunto dos animais.
- M: conjunto dos mamíferos.
- N: conjunto dos animais marinhos.

Considere o diagrama de Euler-Venn:

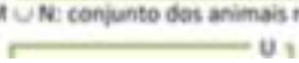


Assim, para os subconjuntos M e N de U, temos que:

$M \cap N$: conjunto dos animais mamíferos **e** marinhos



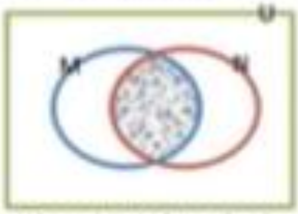
$M \cup N$: conjunto dos animais mamíferos **ou** marinhos



$\overline{M}$: conjunto dos animais **NÃO** mamíferos

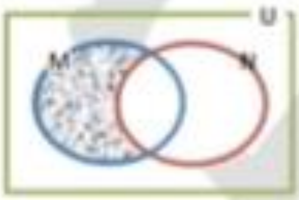
$\overline{N}$: conjunto dos animais **NÃO** marinhos

$M \cap N$: conjunto dos animais mamíferos **e** marinhos

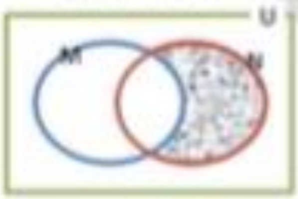


$M \cup N$: conjunto dos animais mamíferos **ou** marinhos

$M - N$: conjunto dos animais mamíferos **e não** marinhos

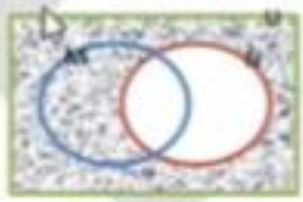


$N - M$: conjunto dos animais **não** mamíferos **e** marinhos



$\overline{M}$: conjunto dos animais **NÃO** mamíferos

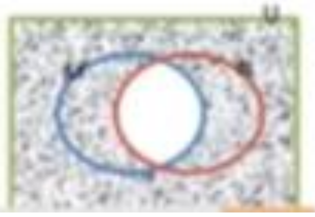
$\overline{N}$: conjunto dos animais **NÃO** marinhos

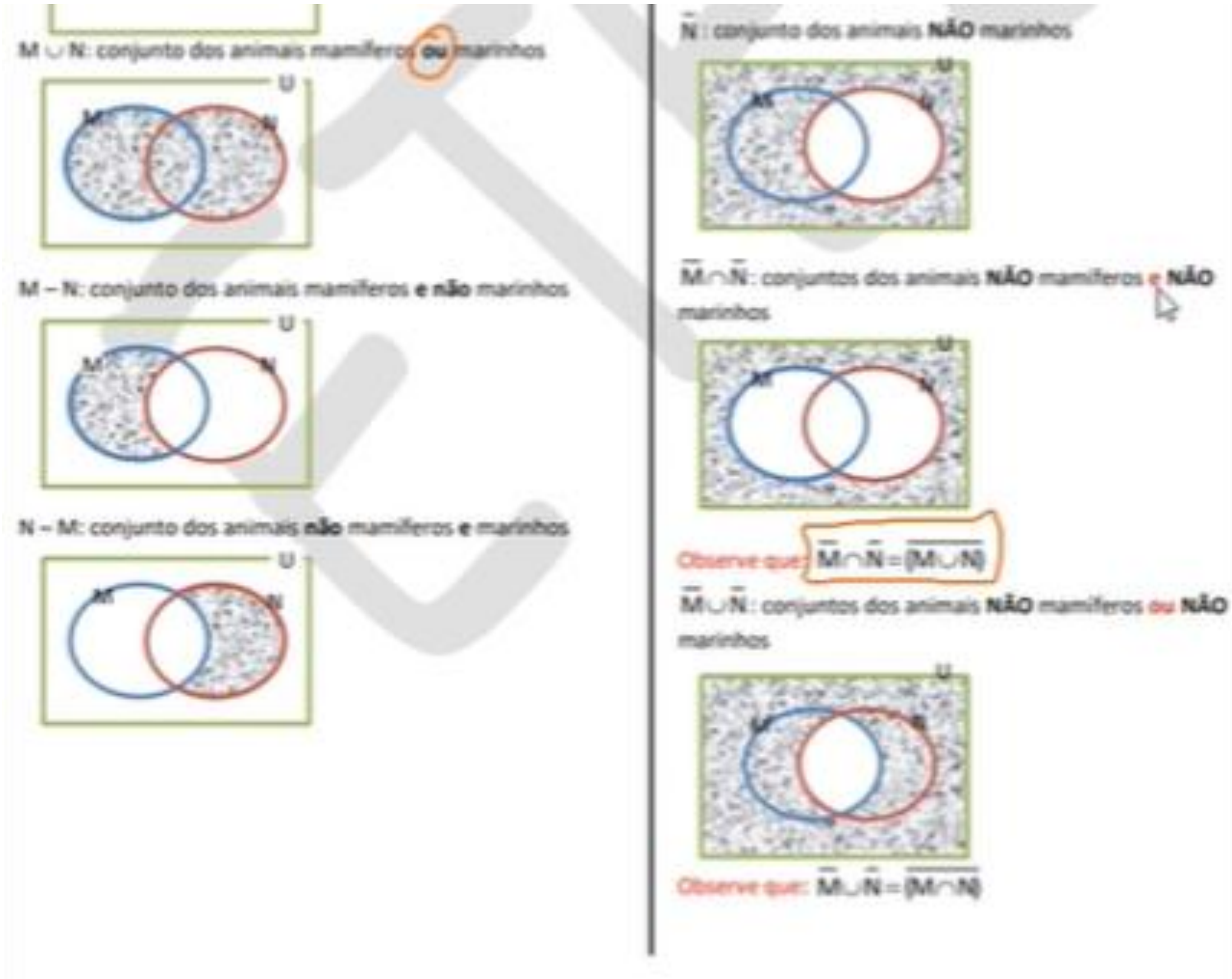


$\overline{M} \cap \overline{N}$: conjuntos dos animais **NÃO** mamíferos **e** **NÃO** marinhos

Observe que: $\overline{M} \cap \overline{N} = \overline{(M \cup N)}$

$\overline{M} \cup \overline{N}$: conjuntos dos animais **NÃO** mamíferos **ou** **NÃO** marinhos





Ou seja, temos termologias que podem ser usadas na prova, adendo especial para o fato de que:

∩ Tem um valor similar a "^", ou seja, ao conectivo "e". Logo, se virmos A e B, queremos a intersecção dos conjuntos.

∪ Tem um valor similar a "v", ou seja, ao conectivo "ou". Ou seja, se virmos A ou B, queremos a união dos conjuntos.

Quando falamos de Não Mamíferos ou Não Marinhos, falamos do complementar entre eles, e então é só construir a expressão: M ∪ N = Conjunto dos animais marinhos ou marinhos.

OBS: ~M ∪ ~N = ~(M ∩ N), e a recíproca também é verdadeira, isto é, ~M ∩ ~N = ~ (M ∪ N). Outra coisa semelhante à lógica proposicional.

Propriedades

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer contidos no mesmo conjunto universo U, temos que:

- Comutativa:
    - $A \cap B = B \cap A$
    - $A \cup B = B \cup A$
- Associativa
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

    OBS.: por valer a propriedade associativa não há necessidade do uso dos parênteses.
- Distributiva
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

    Verifique utilizando o diagrama de Euler-Venn.
- Leis de De Morgan
    - $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    - $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Leis de absorção
    - $A \cup (A \cap B) = A$
    - $A \cap (A \cup B) = A$
- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

    Demonstração:

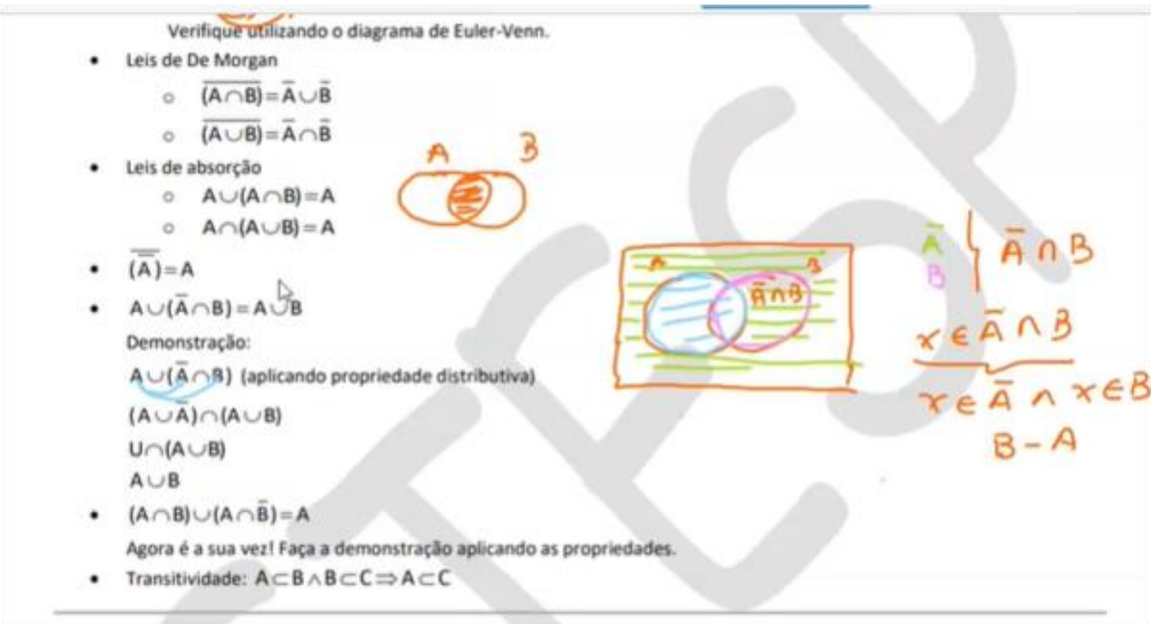
    $A \cup (\overline{A} \cap B)$ (aplicando propriedade distributiva)

    $(A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$

    $U \cap (A \cup B)$

    $A \cup B$

Novamente, remetendo à lógica.



Verifique utilizando o diagrama de Euler-Venn.

- Leis de De Morgan
  - $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
  - $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- Leis de absorção
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$
- $\overline{(\bar{A})} = A$
- $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$

  Demonstração:

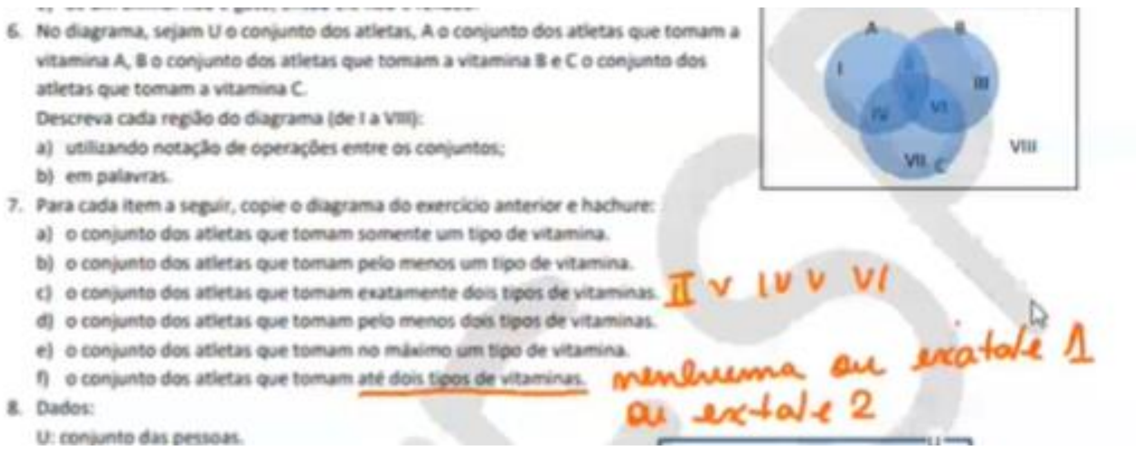
  $A \cup (\bar{A} \cap B)$ (aplicando propriedade distributiva)

  $(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)$

  $U \cap (A \cup B)$

  $A \cup B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

  Agora é a sua vez! Faça a demonstração aplicando as propriedades.
- Transitividade: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$



6. No diagrama, sejam U o conjunto dos atletas, A o conjunto dos atletas que tomam a vitamina A, B o conjunto dos atletas que tomam a vitamina B e C o conjunto dos atletas que tomam a vitamina C.
   Descreva cada região do diagrama (de I a VIII):
   a) utilizando notação de operações entre os conjuntos;
   b) em palavras.
7. Para cada item a seguir, copie o diagrama do exercício anterior e hachure:
   a) o conjunto dos atletas que tomam somente um tipo de vitamina.
   b) o conjunto dos atletas que tomam pelo menos um tipo de vitamina.
   c) o conjunto dos atletas que tomam exatamente dois tipos de vitaminas.
   d) o conjunto dos atletas que tomam pelo menos dois tipos de vitaminas.
   e) o conjunto dos atletas que tomam no máximo um tipo de vitamina.
   f) o conjunto dos atletas que tomam até dois tipos de vitaminas.
8. Dados:
   U: conjunto das pessoas.

Quando dizemos **ATÉ DUAS,** consideramos os que não tomaram nenhuma, os que tomaram exatamente uma e os que tomaram exatamente duas.

Quando dizemos **PELO MENOS UMA,** consideramos tudo que está dentro dos conjuntos.

Quando dizemos **EXATAMENTE 3,** consideramos a intersecção de todos.

PREPOSIÇÕES LÓGICAS

Princípios Lógica clássica

- **Princípio da identidade:**
  tudo é idêntico a si mesmo, isto é,
  A = A será sempre verdadeiro
- **Princípio da Não-Contradição:** ou é V ou é F
  uma proposição não poderá ser simultaneamente verdadeira e falsa
- **Princípio do Terceiro Excluído:**
  toda proposição ou será verdadeira ou será falsa, não existindo outra possibilidade

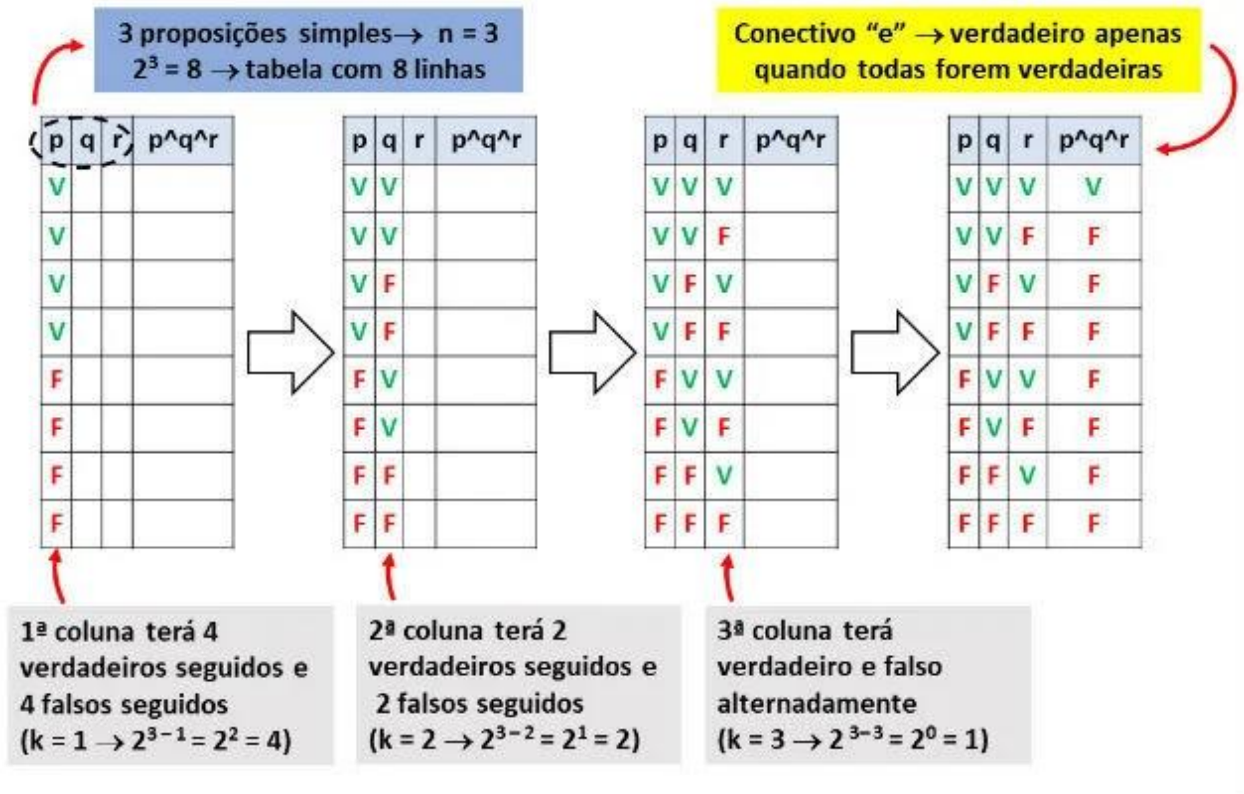
SIMBOLOGIA

Símbolo	Operação Lógica	Significado	Exemplo
p	.	Proposição 1	p = João é alto.
q	.	Proposição 2	q = Maria é baixa.
~	Negação	não	Se João é alto, "**~p**" é FALSO.
^	Conjunção	e	p**^**q = João é alto e Maria é baixa.
v	Disjunção	ou	p**v**q = João é alto ou Maria é baixa.
→	Condicional	se...então	p→q = Se João é alto então Maria é baixa.
↔	Bicondicional	se e somente se	p↔q = João é alto se e somente se Maria é baixa.

CONCEITOS GERAIS

- **Proposições Conjuntivas (E/^):** Só serão verdadeiras quando todos os elementos forem verdadeiros (V ^ V).
- **Proposições Disjuntivas (OU/v):** Só serão falsas quando todos os elementos forem falsos (F v F).
- **Proposições Condicionais (Se...Então/---->):** Só serão falsas quando a primeira proposição for verdadeira e a segunda falsa (V ----> F).
- **Proposições Bicondicionais (Se e somente se/<---->):** Só serão verdadeiras quando todos os elementos forem verdadeiros, ou todos os elementos forem falsos (F <----> F OU V <----> V).

TABELA VERDADE



Ou seja, para saber o número de linhas, teremos que:

Número de linhas n = 2 elevado a n, onde n é o número de proposições simples (letras como p, q, r, etc.)

Para encontrar cada caso, devemos seguir a regra em baixo, fazendo esta sequência, e então iremos analisar para cada caso se o valor da proposição seria verdadeira ou falsa. Exemplo:

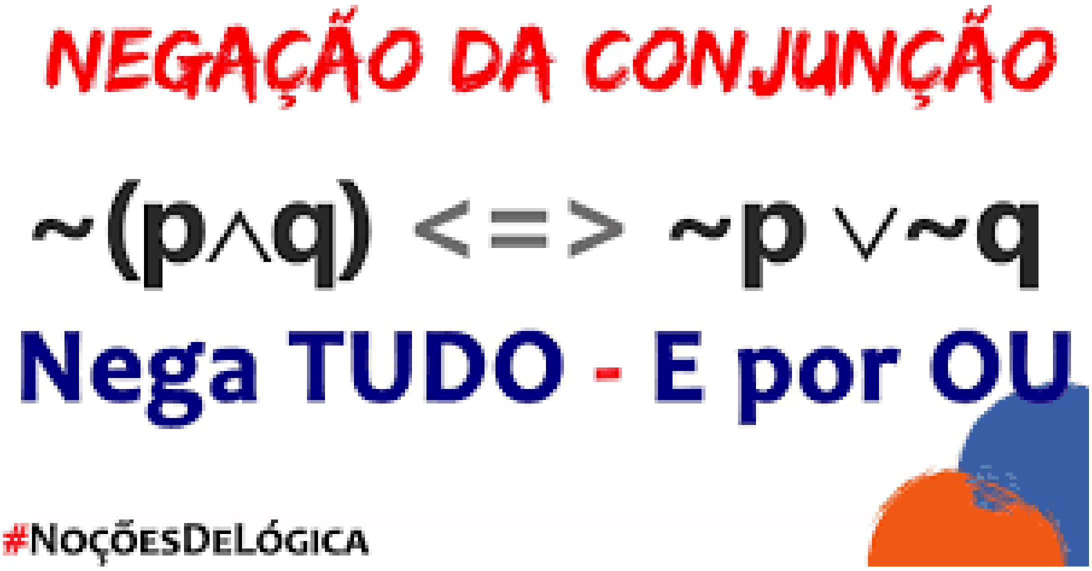
Se V(p) = V, V(q) = F e V(r) = V, ***onde V(x) é o valor lógico de uma proposição x***, então: V(p v q v r) = V. Da mesma forma, V(p ^ q ^ r) = F.

LEIS DE D. MORGAN

Negação de conjunção

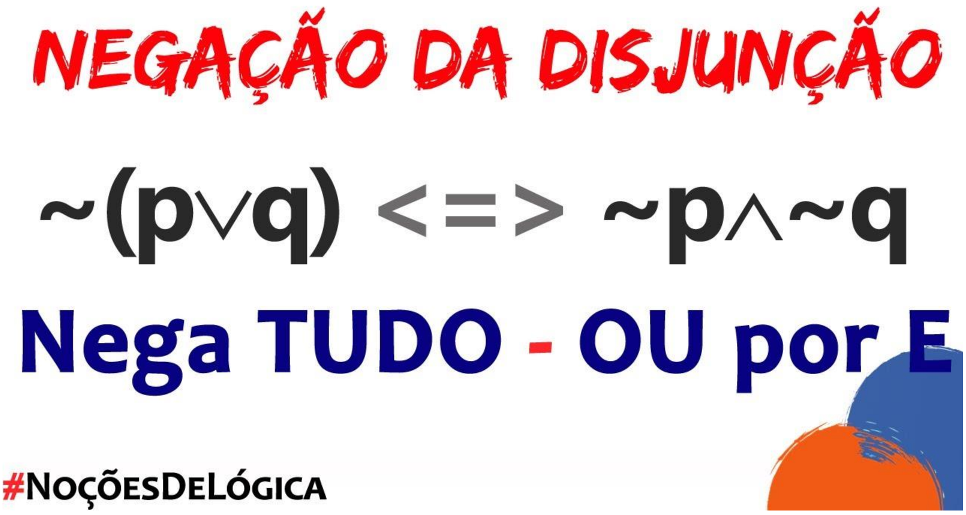
Primeiramente, temos que ter em mente que:

1)~p ^ ~q **<u>É DIFERENTE DE</u>** 2)~(p ^ q), seria algo como: 1)Não p e não q; 2)Não (p e q).



Logo, para negar ~(p^q) teria valor lógico igual a: ~p v ~q.

Negação de disjunção



Logo, ~(p v q) = ~p ^ ~q.

PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS À CONDICIONAL.

Proposições associadas a uma Proposição Condicional

Definições

Dada a proposição condicional $p \rightarrow q$, a ela estão associadas três outras proposições condicionais que contêm p e q:

recíproca da condicional: $q \rightarrow p$

contrapositiva: $\sim q \rightarrow \sim p$

recíproca da contrapositiva ou Inversa: $\sim p \rightarrow \sim q$

Exemplo

Proposição condicional	*Se um animal é morcego, então ele é mamífero.*	$p \rightarrow q$
Recíproca da condicional	*Se um animal é mamífero, então ele é morcego.*	$q \rightarrow p$
Contrapositiva da condicional	*Se um animal não é mamífero, então ele não é morcego.*	$\sim q \rightarrow \sim p$
Inversa da condicional	*Se um animal não é morcego, então ele não é mamífero.*	$\sim p \rightarrow \sim q$

EQUIVALENTE DA CONDICIONAL

1. $p \rightarrow q <=> \sim q \rightarrow \sim p$
2. $p \rightarrow q <=> \sim p \vee q$

#NoçõesDeLógica

EQUIVALÊNCIA LÓGICA: p ----> q = ~p v q.

P ----> q = ~q ----> ~p.

Equivalência Lógica

Se a operação lava-jato for interrompida os corruptos não serão punidos.

Se os corruptos forem punidos a operação lava-jato não será interrompida.

A operação lava-jato não será interrompida ou os corruptos não serão punidos.

NEGAÇÃO DA CONDICIONAL: ~(p ----> q) = p ^ ~q.

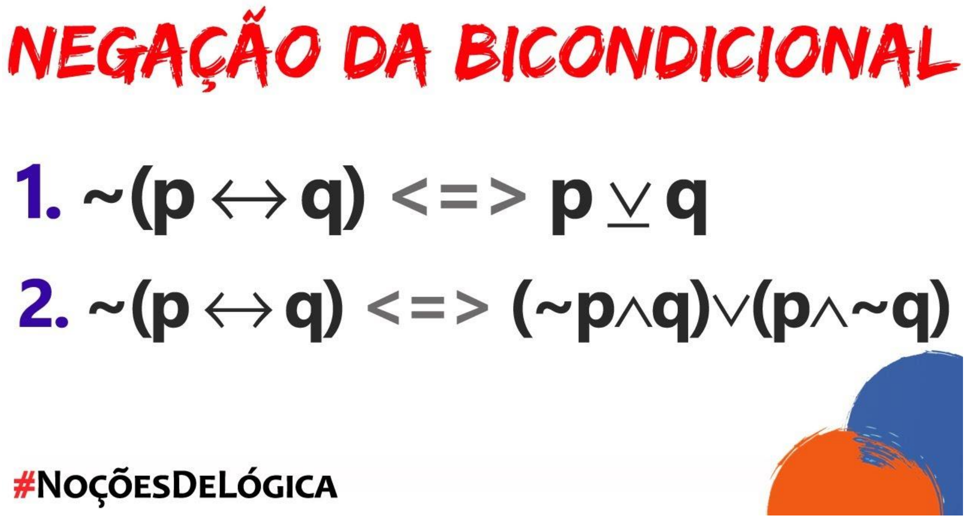
NEGAÇÃO DE UMA IMPLICAÇÃO: ~q ----> ~p.

RECÍPROCA DA CONDICIONAL: q ----> p.

CONTRAPOSITIVA: ~q ----> ~p. *Adendo para o fato de que: ~q ----> ~p = p ----> q.*

RECÍPROCA DA CONTRAPOSITIVA/INVERSA: ~p ----> ~q.

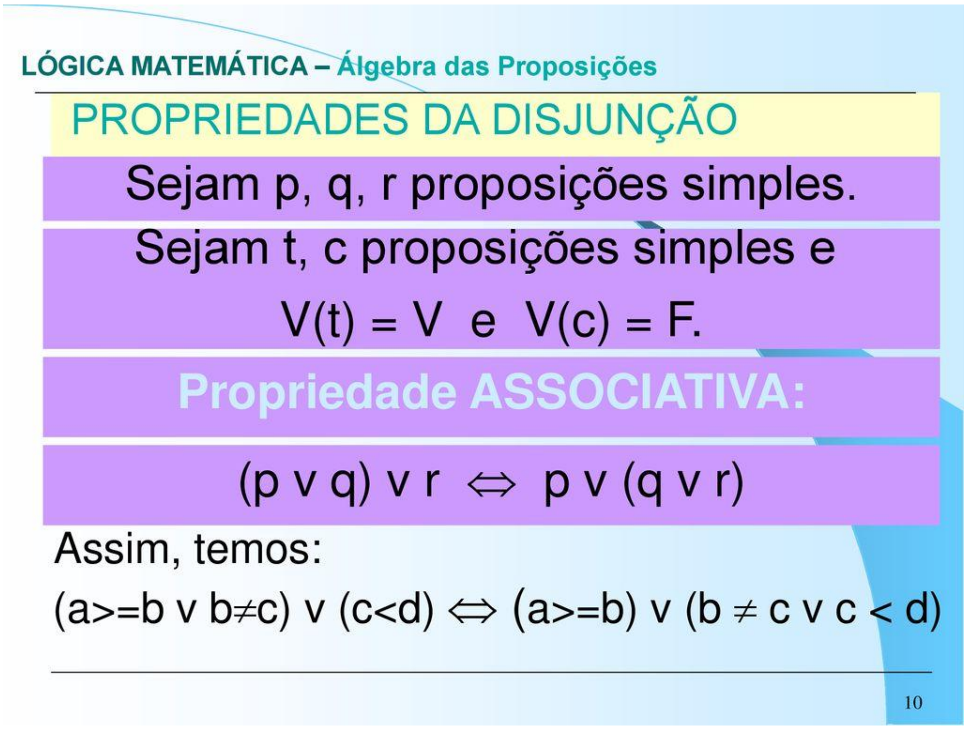
NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL:



PROPRIEDADES

COMUTATIVA:- Poderem serem alteradas as posições das proposições mas o valor lógico se manter. Apenas a disjunção (OU/v), a conjunção (E/^) e a Bicondicional (Se e somente se/<---->) são comutativas.

ASSOCIATIVA:

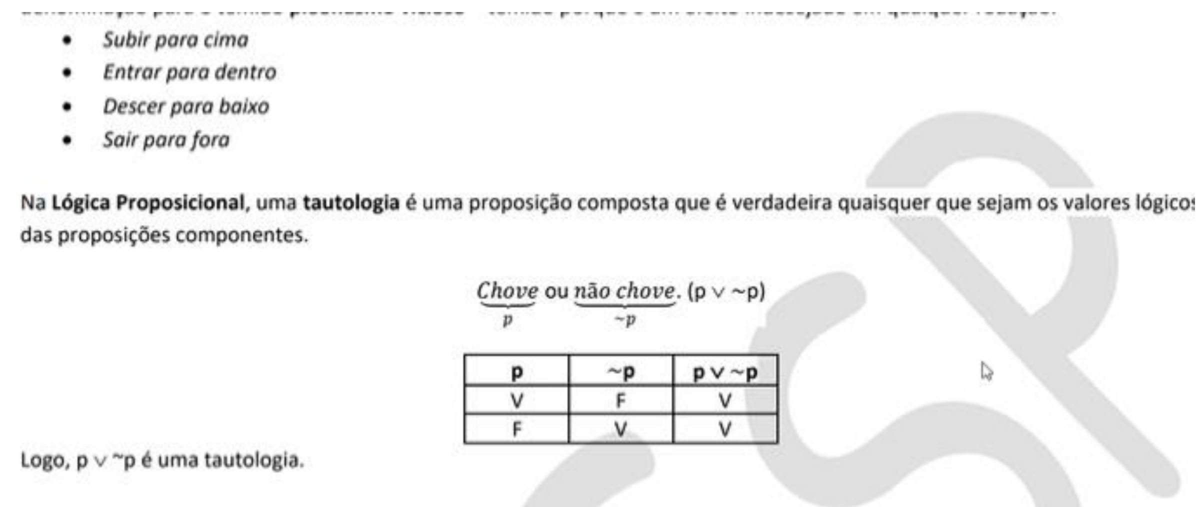


Implica que a ordem (ou a falta) dos parênteses não altera o valor lógico de determinada proposição.

DISTRIBUTIVA: Serve para simplificar uma expressão, é similar ao "por em evidência". Exemplo:

- p v (q ^ r) = (p v q) ^ (p ^ r).

TAUTOLOGIA:



- *Subir para cima*
- *Entrar para dentro*
- *Descer para baixo*
- *Sair para fora*

Na **Lógica Proposicional**, uma **tautologia** é uma proposição composta que é verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

$\underbrace{\textit{Chove}}_{p}$ ou $\underbrace{\textit{não chove}}_{\sim p}$. $(p \vee \sim p)$

p	~p	p v ~p
V	F	V
F	V	V

Logo, p v ~p é uma tautologia.

São proposições que serão sempre verdadeiras, independentemente do valor lógico de cada proposição simples. São representadas pela letra T. Assim, temos que:

- P ^ T = P | p v T = Tauntologia
- P v P = P
- P v ~P = Tauntologia

CONTRADIÇÃO:

Contradição

Na **Lógica Proposicional**, uma **contradição** é uma proposição composta que é falsa quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

$\underbrace{Chove}_{p}$ e $\underbrace{não\ chove}_{\sim p}$. ($p \wedge \sim p$)

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Logo, $p \wedge \sim p$ é uma contradição.

Uma proposição é **indeterminada** (ou **contingente**) quando não é uma tautologia e não é uma contradição, isto é, toda proposição cuja última coluna tem pelo menos um V e um F.

São proposições que sempre terão valor lógico falso. Isto é, independentemente do valor lógico de cada proposição simples. Representada pela letra C, ou seja, seria como uma proposição simples mas com o valor sempre falso. Temos que:

- P ^ C = Contradição | p v C = p.
- P ^ P = P
- P ^ ~P = Contradição

PROPOSIÇÃO INDETERMINADA/CONTINGENTE: Quando não é nem uma nem outra, isto é, tem valores lógicos variados.

IMPLICAÇÃO LÓGICA:

Dadas as proposições compostas P e Q, diz-se que ocorre uma implicação lógica entre P e Q quando a proposição condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Notação: $P \Rightarrow Q$ (lê-se: "P implica Q" ou "se P, então Q".

OBS.:

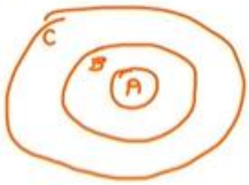
Os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ têm significados diferentes:

$\rightarrow$ indica uma operação entre proposições, dando origem a uma nova proposição $p \rightarrow q$ cuja tabela verdade pode conter tanto V quanto F.

$\Rightarrow$ indica que uma proposição P(p,q,r,...) implica logicamente ou apenas implica uma proposição Q(p,q,r,...) ($P \Rightarrow Q$), se Q(p,q,r,......) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p,q,r,.....) é verdadeira (V).

Exemplo

- Considerando os conjuntos A, B e C, $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$



Ou seja, **implicação lógica,** é basicamente um caso de "Se P, então Q" (P -> Q), onde o valor lógico será sempre Verdadeiro, ou seja, uma tauntologia.

NEGAÇÃO FALADA

Negação Proposição Simples

1º CASO: proposição do tipo ‘nenhum’ , ‘nenhuma’ ou ‘ninguém’.

NENHUM…………………ALGUM	
NENHUMA………………ALGUMA	
NINGUÉM……………… ALGUÉM	

Assim, para negar “Nenhum” usamos algum.

Negação Proposição Simples

Exemplo:

Escreva a negação da frase:

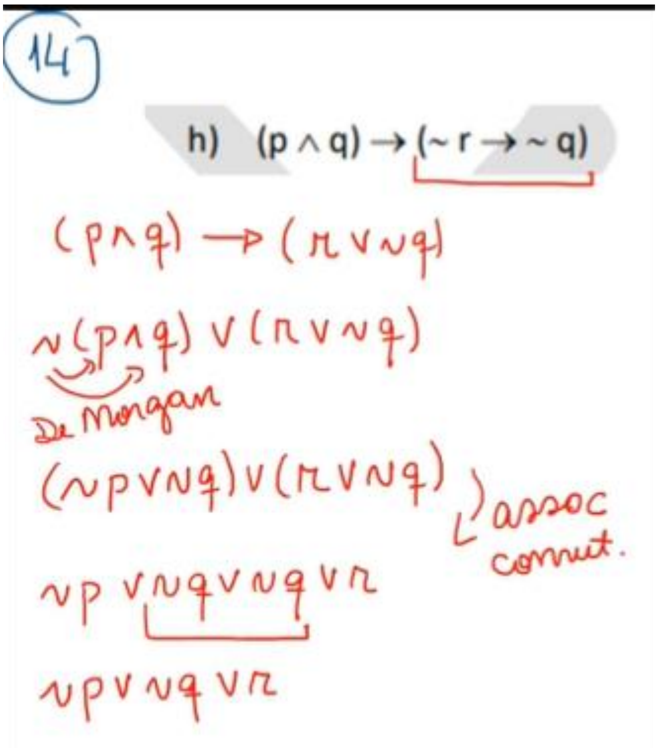
“**Todo** número x tal que $\mathbf{x + 1 > 2}$”

Algum número x tal que $x + 1 \leq 2$

Logo, devemos negar a situação final e trocar todo por algum.

ALGUNS EXERCÍCIOS

Abaixo, tem uma simplificação de um exercício.



14

h) $(p \wedge q) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)$

$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim q)$

$\sim(p \wedge q) \vee (r \vee \sim q)$

De Morgan

$(\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee \sim q)$ assoc comut.

$\sim p \vee \sim q \vee \sim q \vee r$

$\sim p \vee \sim q \vee r$

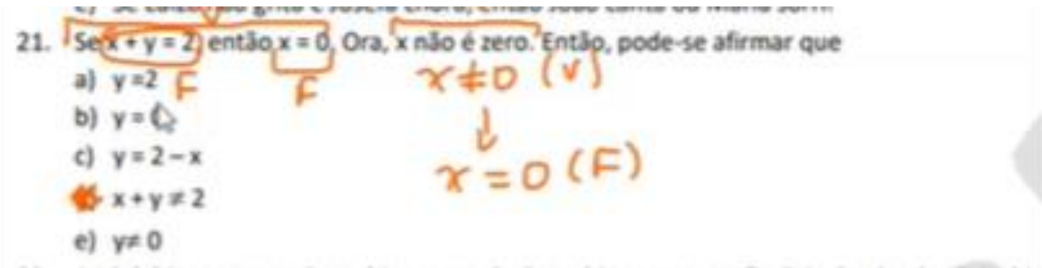
Explicando passo a passo:

Primeiramente, uma vez que p ----> q = ~p v q, a professora usou esta propriedade e a atribuiu a toda a proposição acima, ou seja, (p ^ q) ----> (r v ~q) virou ~(p ^ q) v (r v ~q).

Assim, aplicando D. Morgan, ela encontrou que: ~(p ^ q) = (~p v ~q).

Dessa forma, ela viu que se tratava de associativa e comutativa, ou seja, os parênteses não fazia diferença no caso! Além de que a ordem dos fatores não alterava o valor lógico! Assim, ela conseguiu reduzir ~p v ~q v ~q v r para ~p v ~q v r.

QUESTÃO 21:



21. Se $x + y = 2$ então $x = 0$. Ora, x não é zero. Então, pode-se afirmar que

a) $y = 2$ F

b) $y = 0$

c) $y = 2 - x$

d) $x + y \neq 2$

e) $y \neq 0$

F

$x \neq 0$ (V)

$x = 0$ (F)

Ou seja, só um adendo, temos que considerar a primeira proposição verdadeira, tal como a segunda. Assim, se q fosse falso, então p seria falso, afinal, se o valor de p depende do valor de q, ou seja, consideremos que:

Se x é V, então Q é F. Logo, x é F.

Temos que ter em mente que o resultado final, ou seja, o valor da proposição lógica tem que ser verdadeiro! Assim, p ----> q e V(q) = F, logo, para que V(p ----> q) = V, V(p) = F obrigatoriamente!

Logo, se V(p) = F e p implica que X + y = 2, então se V(~p) = V, x + y é diferente de 2.

Questão 2 (PF – Cespe). Um jovem, ao ser flagrado no aeroporto portando certa quantidade de entorpecentes, argumentou com os policiais conforme o esquema a seguir:

Premissa 1: Eu não sou traficante, eu sou usuário;

Premissa 2: Se eu fosse traficante, estaria levando uma grande quantidade de droga e a teria escondido;

Premissa 3: Como sou usuário e não levo uma grande quantidade, não escondi a droga.

Conclusão: Se eu estivesse levando uma grande quantidade, não seria usuário.

Considerando a situação hipotética apresentada acima, julgue os itens a seguir.

C) Sob o ponto de vista lógico, a argumentação do jovem constitui argumentação válida.

Observe que é possível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Por exemplo:

"Levo uma quantidade grande de droga" é verdadeira.

"Sou usuário" é verdadeira.

"Não sou traficante" é verdadeira.

O argumento seria:

Premissa 1: (V ^ V) é verdadeira.

Premissa 2: [F –> (V ^ ?)] é verdadeira.

Premissa 3: (F ^ F) –>?) é verdadeira.

Conclusão: (V –> F) é falsa.

Portanto é um argumento não-válido.

Resposta: Errado

Este exercício é interessante, pois apesar de que a premissa 2 parecia ser uma implicação e, portanto, ambos seriam falsas, temos que há possibilidade de que seja falso e se for o caso, pode não estar correto.

Para que V ----> F, temos que admitir que ele pode estar levando uma grande quantidade, e logo, não seria usuário. Podemos fazer isso pois, uma vez que temos F na primeira etapa de uma preposição condicional (F ----> (? ^ ?)), o valor lógico atribuído a ambas incógnitas são irrelevantes! Pois quaisquer que sejam os resultados, continuarão verdadeiros! Assim, haveria a possibilidade de que ele estaria sim levando uma grande quantidade!

< A sede do TRT/ES localiza-se no município de Cariacica.

< Por que existem juízes substitutos?

< Ele é um advogado talentoso.

Resolução:

Lembrando que para ser uma proposição, deve ser possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso.

– A sede do TRT/ES localiza-se no município de Cariacica.

É uma proposição pois é possível atribuir verdadeiro ou falso.

– Por que existem juízes substitutos?

Claramente pergunta não é proposição.

– Ele é um advogado talentoso.

Não é proposição. É a chamada sentença aberta, onde para ser verdadeiro ou falso depende de quem é “ele”.

ERRADO

Isso é outro exercício interessante, uma vez que quando falamos de preposições, deve ter obrigatoriamente falso ou verdadeiro e o sujeito deve ser definido! Quando usamos um “ele”, “ela”, “aquele”, “aquela”, etc. Não consideramos como preposição! E sim como uma sentença aberta.

Peguei apenas os exercícios mais interessantes que eu achei, mas se quiser ver mais eu achei eles neste site aqui:

https://sabermatematica.com.br/exercicios-resolvidos-proposicoes-logicas.html

SIGMA (Não deve cair, mas ela falou sobre isso)

$\sum$ letra grega sigma maiúscula

$$\sum_{i=1}^{7} 2i = \underbrace{(2\cdot1)+(2\cdot2)+(2\cdot3)+(2\cdot4)+(2\cdot5)+(2\cdot6)+(2\cdot7)}_{\text{soma dos 7 primeiros termos de uma PA}}$$

termo geral da parcela

$$\sum_{i=1}^{7} 2i = \frac{(2+14)\cdot 7}{2} = 56$$

Ou seja, temos que Σ terá um numero do lado direito (que é o termo geral das parcelas), um numero em cima (numero de elementos da PA) e um número abaixo (que é o valor de I).

Podemos dizer, em uma frase, que: Há 7 elementos, com uma variável de valor i=1 (razão) que tem como seu valor inicial 2i.

$$\sum_{i=1}^{40} (3i-1) = \underbrace{\underbrace{(3\cdot1-1)}_{2}+\underbrace{(3\cdot2-1)}_{5}+\underbrace{(3\cdot3-1)}_{8}+\dots+\underbrace{(3\cdot40-1)}_{119}}_{\text{soma dos 40 primeiros termos da PA}}$$

$$\sum_{i=1}^{40} (3i-1) = \frac{(2+119)\cdot \cancel{40}^{20}}{\cancel{2}} = 2420$$

—//—

$a_i = 3i-1$

$a_{i+1} = 3(i+1)-1 = 3i+2$

$a_{i+1} - a_i = 3i+2-3i+1$

$a_{i+1} - a_i = 3, \ \forall i \in \mathbb{N}^*$

Logo, a seq. é PA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Fórmulas	P.A	P.G
Termo Geral:	$a_n = a_1 + (n-1).r$	$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$
Soma dos termos:	$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} . n$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$
		$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$ **Condição:** $-1 < q < 1$
Equivalência:	$a_n + a_m = a_p + a_t$ *Onde:* $n + m = p + t$	$a_n . a_m = a_p . a_t$ *Onde:* $n + m = p + t$

Média aritmética

9.2.5 Propriedade da PA

Qualquer termo de uma PA com exceção dos extremos é a média aritmética entre o termo anterior e o termo posterior

$$PA\,(a\,,b\,,c\,)$$

Média Aritmética-------- $b = \dfrac{a+c}{2}$

Ou seja, a1 pode ser calculado pela média aritmética entre a1-1 e a1+1.

Média Geométrica

Um termo qualquer de uma progressão geométrica pode ser obtido através da média geométrica dos seus dois termos vizinhos ou, ainda, de quaisquer dois termos simétricos em relação a ele.

$$a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_{n-2} \cdot a_{n+2} = \ldots$$

Ou seja, o quadrado de um termo do meio pode ser calculado pela multiplicação de seu antecessor com seu sucessor.

Exercícios modelos de PA (sugiro tentar antes de ver a resposta)

1)

Questão sobre progressão aritmética no Enem de 2012

Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é

a) 21.
b) 24.
c) 26.
d) 28.
e) 31.

Resolução:

Para resolver essa questão, vamos identificar a progressão arimética que nos é dada no problema. Podemos considerar que cada coluna corresponde a um termo da sequência numérica, portanto, o primeiro termo é **1 ($a_1 = 1$)**, o segundo é **2 ($a_2 = 2$)**, o terceiro termo é **3 ($a_3 = 3$)** e assim sucessivamente até o sétimo e último termo da sequência numérica **($a_7 = 7$)**. Sabemos que a progressão possui sete elementos **(n = 7)** e temos conhecidos o primeiro e o último termo, logo, podemos usar a fórmula da soma dos elementos de uma PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).\, n}{2}$$

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7).\, 7}{2}$$

$$S_7 = \frac{(1 + 7).\, 7}{2}$$

$$S_7 = \frac{(1 + 7).\, 7}{2}$$

$$S_7 = \frac{8\, .\, 7}{2}$$

$$S_7 = \frac{56}{2}$$

$$S_7 = 28$$

Então há 28 cartas distribuídas nas fileiras. Como no baralho há 52 cartas, fazendo **52 – 28 = 24**, descobrimos que há 24 cartas no monte. A alternativa correta é a **letra b**.

2)

Questão 1

Enem - 2016

Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40
b) 60
c) 100
d) 115
e) 120

Ver Resposta

Resolução

Os andares trabalhados por João formam uma PA, cuja a razão é igual a 2. Já os andares que Pedro trabalhou formam uma PA de razão igual a 3.

Contudo, temos a informação que em exatamente 20 andares tanto João quanto Pedro trabalharam juntos. Desta maneira, vamos tentar encontrar alguma relação entre esses andares.

Para isso, vamos analisar as duas progressões dadas. No esquema abaixo, marcamos com círculos vermelhos os andares em que ambos trabalharam.

Sequência João: 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11, 13 , ...

Sequência Pedro: 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , ...

$7 - 1 = 6$ $\quad$ $13 - 7 = 6$

Note que esses andares formam uma nova PA (1, 7, 13, ...), cuja razão é igual a 6 e que possui 20 termos, conforme indicado no enunciado do problema.

Exercícios modelo de PG

1)

Questão 1

UFRGS - 2018

Considere a função real f definida por $f(x) = 2^{-x}$. O valor da expressão $S = f(0) + f(1) + f(2) +\ldots+ f(100)$ é

a) $S = 2 - 2^{-101}$.

b) $S = 2^{50} + 2^{-50}$.

c) $S = 2 + 2^{-101}$.

d) $S = 2 + 2^{-100}$.

e) $S = 2 - 2^{-100}$.

Ver Resposta

Resolução

Considerando a lei de formação da função, podemos calcular alguns valores das funções. Assim, temos:

$f(0) = 2^0 = 1$

$f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$f(2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$f(3) \ = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Observamos que esses valores formam uma PG de quociente igual a $\frac{1}{2}$. Portanto, para encontrar o valor de S podemos utilizar a fórmula da soma finita de uma PG , ou seja:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

O número de termos da PG será igual a 101, pois queremos somar os resultados das funções partindo de x=0 até x=100. Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$S_{101} = \frac{1((\frac{1}{2})^{101} - 1)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{101} = \frac{\frac{1}{2^{101}} - 1}{\frac{-1}{2}}$$

$$S_{101} = \left(\frac{1}{2^{101}} - 1\right).(-2)$$

$$S_{101} = \frac{-2}{2^{101}} + 2$$

$$S_{101} = 2 - 2^{-100}$$

Alternativa: e) $S = 2 - 2^{-100}$

2)

Questão 4

PUC/SP - 2017

Considere a progressão aritmética (3, a_2 , a_3 ,...) crescente, de razão r, e a progressão geométrica (b_1 , b_2 , b_3 , 3,...) decrescente, de razão q, de modo que $a_3 = b_3$ e $r = 3q$. O valor de b_2 é igual a

a) a_6
b) a_7
c) a_8
d) a_9

Ver Resposta

Resolução

Vamos aplicar a fórmula do termo geral da PG, para encontrar a expressão do 3º termo, partindo do valor do 4º termo ($b_4 = 3$):

$$b_n = b_1 . q^{(n-1)}$$

$$b_4 = b_1 . q^{(4-1)} \Rightarrow 3 = b_1 . q^3 \Rightarrow b_1 = \frac{3}{q^3}$$

$$b_3 = b_1 . q^{(3-1)} \Rightarrow b_3 = \frac{3}{q^3} . q^2 \Rightarrow b_3 = \frac{3}{q}$$

Pela fórmula do termo geral da PA podemos encontrar a expressão de a_3. Sendo $a_3 = a_1 + (n - 1) r$, então temos que $a_3 = 3 + 2r$. Considerando essa expressão e que $a_3 = b_3$, encontramos:

$$3 + 2r = \frac{3}{q}$$

O enunciado da questão indica que r = 3q. Substituindo esse valor na expressão anterior, temos:

$$3 + 2.3q = \frac{3}{q} \Rightarrow 3q + \Rightarrow 6q^2 - 3 = 0$$

Podemos simplificar a equação do 2º grau, dividindo por 2. Assim, vamos calcular as raízes da equação $2q^2 + q - 1 = 0$. Para isso, usaremos a fórmula de Bhaskara:

Iremos desconsiderar o valor de q = -1, pois quando a razão é negativa, a PG é alternante, o que não é o caso.

Agora que conhecemos o valor da razão da PG, podemos também calcular o valor da razão da PA fazendo:

$$r = 3q \Rightarrow r = 3.\frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

Com os valores das razões, vamos calcular o valor de b_2. Assim, temos:

$$b_2 = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow b_2 = 3.4 \Rightarrow b_2 = 12$$

Para encontrar o termo da PA, que é igual a b_2, devemos fazer:

$$a_n = b_2 \Rightarrow a_n = 12$$
$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$12 = 3 + (n-1).\frac{3}{2}$$
$$12 - 3 = \frac{3}{2}(n-1)$$
$$9.\frac{2}{3} = n - 1$$
$$n = 6 + 1 \Rightarrow n = 7$$

Assim, o termo a_7 é igual ao termo b_2.

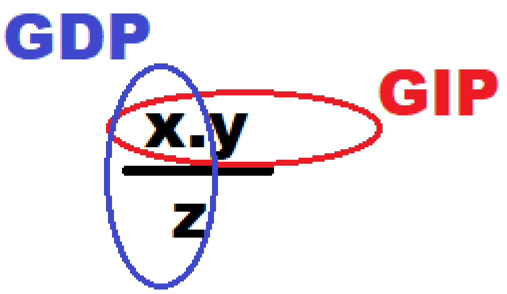
Alternativa: b) a_7

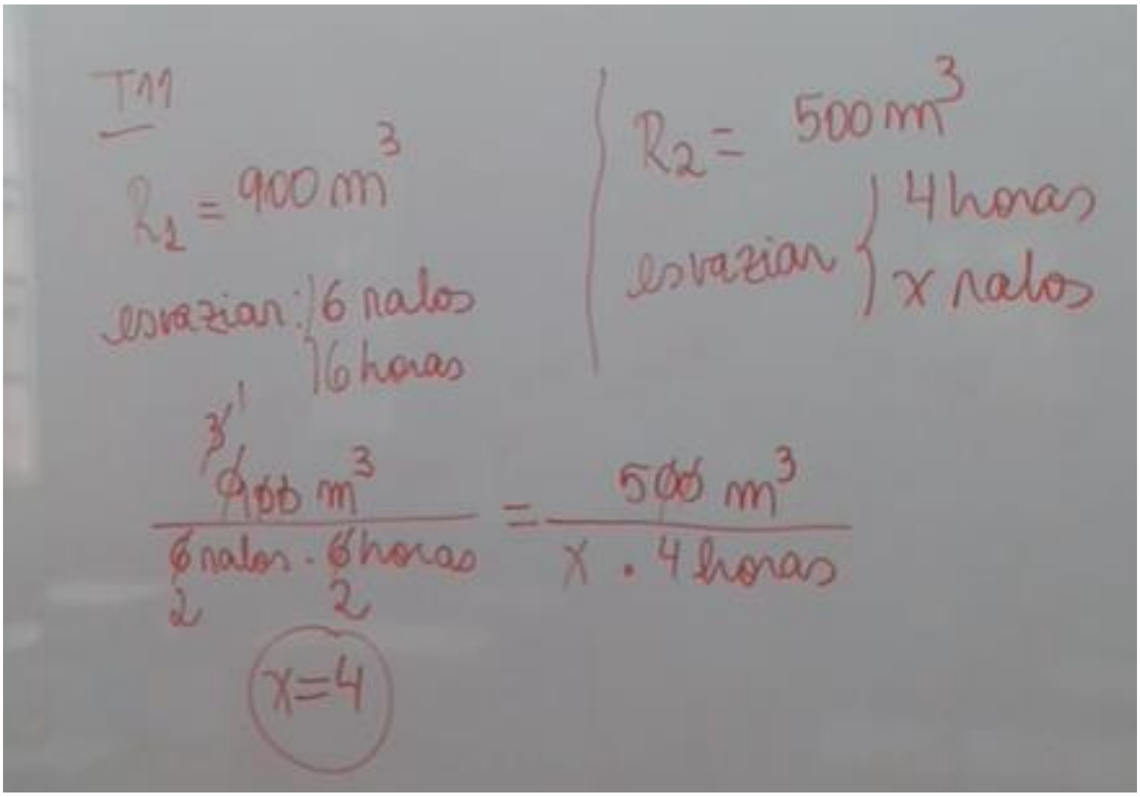
GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Quando uma grandeza é diretamente proporcional, logo, x/z = constante de proporcionalidade k.

Quando uma grandeza é inversamente proporcional, logo, x.y = constante de proporcionalidade k.

Quando temos muitas grandezas no meio,





Como neste caso, onde o exercício nos dá 3 grandezas para cada lado da equação, e quer que a gente descubra uma das grandezas. Temos que:

A vazão (em m³) é diretamente proporcional (quando uma cresce, a outra também cresce) ao número de ralos, tal como ao número de horas, afinal, quanto maior a vazão precisará de mais ralos, tal como mais tempo (horas).

Entretanto, o número de ralos é inversamente proporcional ao número de horas, afinal, quanto mais ralos menos tempo, e quanto mais tempo menos ralos.

Por fim, basta igualar em uma equação e encontrar o valor de X.

FUNÇÃO

FUNÇÕES PARES:

Ou seja, temos que, para que seja simétrico em relação a Y, temos que ter a mesma ordenada mas abscissas opostas, ou seja:

(a,b) = (-a,b).

E para que tenhamos simetria em relação a X, temos que ter a mesma abscissa mas ordenadas opostas, ou seja:

(a,b) = (a,-b).

FUNÇÃO IMPAR:

Ainda por cima, se quisermos que dois pontos sejam iguais em relação ao ponto O (0,0), temos que as abscissas e ordenadas devem ser opostas. Ou seja:

(a,b) = (-a,-b).

FUNÇÃO AFIM

F(x) = ax + b, onde a é diferente de 0.

Se a = 0, logo, temos uma função constante, onde f(x) = B.

Já se B= 0, então teremos uma função que passa pela origem do gráfico (0,0).

Se não soubermos A (coeficiente angular), ele pode ser dado pela taxa de variação média, ou seja, f(c) - f(d)/c - d = A.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se não soubermos B, lembremos que F(0) = a.0 + b, ou seja, f(0) = B.

Para encontrar a raiz, lembremos que: Se f(x) = 0, então ax + b = 0, ou seja, ax = -b, ou ainda:

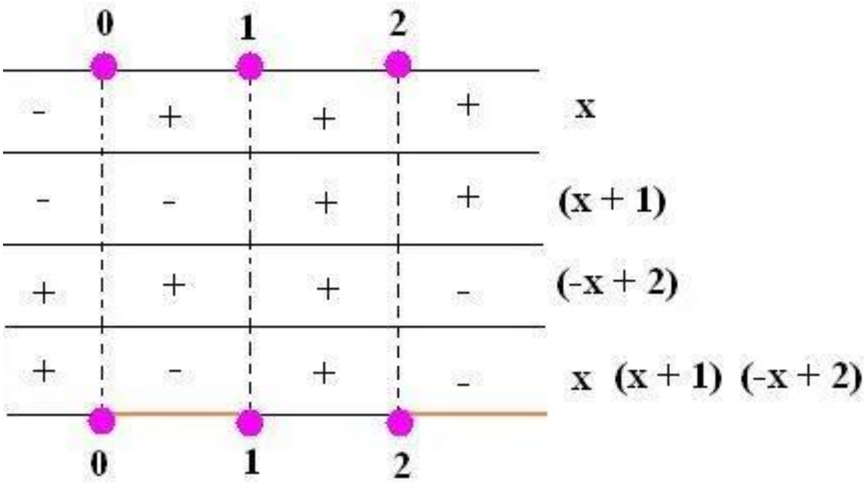
x = -b/a.

INEQUAÇÕES

Para uma equação, nós encontraremos um conjunto solução de valores possíveis, ou um intervalo real. Também podem serem ambos.

Quando não temos produto ou divisão, a inequação funciona como uma equação, exceto que se multiplicar ambos valores por um valor negativo, o sinal se inverte. Exemplo: x > 5 ----> -x < -5.

INEQUAÇÃO PRODUTO E QUOCIENTE



Neste caso, basta que designemos uma função para os produtos, encontremos sua raiz e montemos a tabela acima, onde o sinal se altera quando passa pela raiz, podendo passar de positivo pra negativo ou de negativo pra positivo.

Caso haja incógnita dos dois lados, basta passar tudo para um lado só, reduzir a um mesmo denominador e então montar a mesma operação acima.

NÃO FAZER DISTRIBUTIVA! Pois assim encontraremos uma inequação de segundo grau, e nós não aprendemos isso ainda.2