Divisão em $\mathbb{Z}$ (euclidiana) parte 2

Marcia Xavier Cury

$n = 6$ ou $n = 5$

$6 \,\underline{|\, 1}$ $\quad 6 \,\underline{|\, -1}$

$0 \quad 6 \quad\quad 0 \quad -6$

$6 \,\underline{|\, 6}$ $\quad 6 \,\underline{|\, -6}$

$0 \quad 1 \quad\quad 0 \quad -1$

Divisores de um número inteiro

Todo número inteiro n, não nulo, admite como divisores os inteiros

–1, 1, n e –n.

inteiros

Por exemplo, os divisores de 6 são –6, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 6.

Números primos

- Seja n um número inteiro tal que **n** $\neq -1$ **e n** $\neq$ **0 e n** $\neq$ **1**.

n é número primo $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\textbf{os únicos divisores de n são } -1\textbf{, 1, n e } -\textbf{n}}_{\text{n admite exatamente 4 divisores}}$.

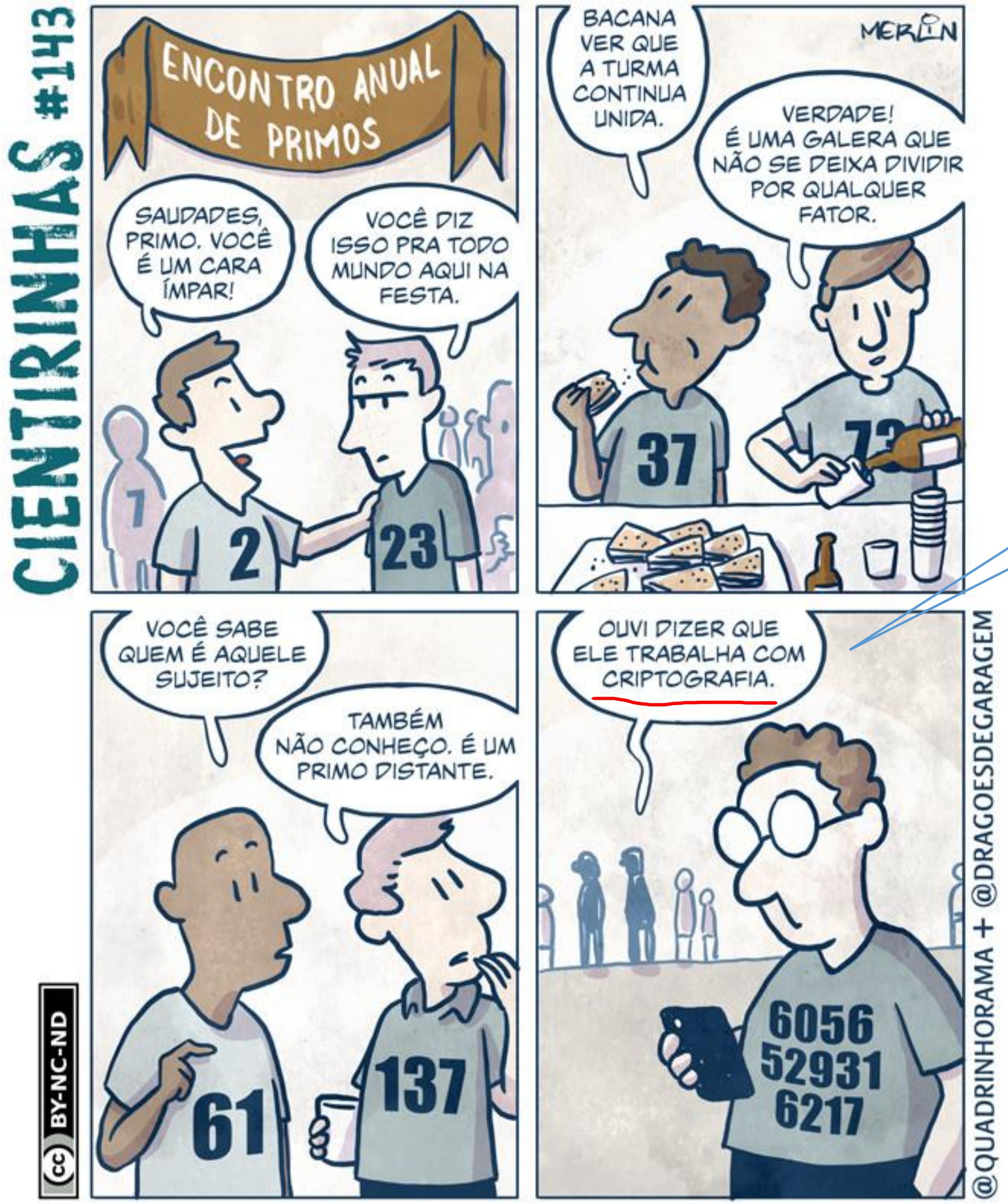
Exemplos de números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13 , 17, 19, 23, 29, ...

–2, – 3, – 5, – 7, – 11, – 13 , – 17, – 19, – 23, – 29, ...

Os números 1 e –1 não são primos e não são compostos.

Zero não é primo, pois admite infinitos divisores.



Por que este comentário?

$n = 2k, k \in \mathbb{Z}$

n nº par

Existem infinitos números primos.

$\mathbb{N}$

$\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

não existe fórmula p/ determinar um nº primo.

http://dragoesdegaragem.com/wp-content/uploads/2019/06/cientirinhas143_790.jpg

Número composto

$n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e $n \neq 1$ e $n \neq -1$ e n não primo

- **Número composto** é um número inteiro que possui outros divisores além de -1, 1, n e –n.

- Por exemplo:

  Os divisores de 6 são 1, 2, 3, 6, –1, –2, –3 e –6. Assim, 6 é um número composto.

- **Decomposição em fatores primos**

  Todo número inteiro composto não nulo pode ser decomposto (fatorado) como um produto de números primos, e essa decomposição é única, a menos da escolha da ordem dos fatores e dos sinais dos fatores.

Teorema Fundamental da Aritmética

Quais são os divisores de 24?

Um procedimento para obter os divisores positivos de um número inteiro por meio da sua decomposição em fatores primos.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

		1
24	2	2
12	2	4
6	2	8
3	3	3, 6, 12, 24
1		

Decompõe o número em fatores primos.
Coloca uma terceira coluna, começando pelo número 1.
Multiplica cada fator primo obtido pelos números da terceira coluna sem repetição.

Assim, os divisores positivos de 24 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24.

E os divisores de 24 são ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12 e ± 24.

inteiros

OBS Vamos supor que 1 é primo

24	1
24	1
24	1
24	⋮
⋮	

não acaba nunca absurdo

Divisores de 18

	×	Divisores
18	2	1
9	3	2
3	3	3, 6
1		9, 18

algoritmo

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Divisores positivos de 18

1, 2, 3, 6, 9, 18

Divisores de 18: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ e ± 18

$5^0 = 1$

$360 \underline{|\ 12}$
0

Quantos são os divisores de 360?

Decomponha 360 em fatores primos positivos

$360 = 36 \cdot 10 = 6^2 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 3)^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Assim, podemos observar que:

- 360 é divisível por $2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0$
- 360 é divisível por $3 \cdot 5 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
- 360 é divisível por $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
- 360 é divisível por $1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0$
- 360 não é divisível por $2^4 \cdot 5$
- 360 não é divisível por $2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$\frac{360}{12} = \frac{2^{\cancel{3}\,1} \cdot 3^{\cancel{2}\,1} \cdot 5}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{3}}$ nº inteiro

$\therefore$ 360 é div. por 12

$\frac{360}{80} = \frac{\cancel{2^3} \cdot 3^2 \cdot \cancel{5^1}}{2^{4\,1} \cdot \cancel{5}}$ não é int.

$2^3 < 2^4$

4 possib e 3 possib e 2 possib.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Cada divisor positivo de 360 é da seguinte forma:

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$$

com a, b, c $\in \mathbb{N}$ tais que $a \in \underbrace{\{0, \underbrace{1, 2, 3}_{3\ n^{os}}\}}_{4\ n^{os}}$ e $b \in \underbrace{\{0, \underbrace{1, 2}_{2\ n^{os}}\}}_{4\ n^{os}}$ e $c \in \{0, 1\}$

Assim, há

4 (= 3 + 1) possibilidades de escolha para o valor de a;

3 (= 2 + 1), para b e

2 (= 1 + 1), para c,

pelo princípio multiplicativo, temos que o número 360 possui $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ divisores positivos.

Logo, 360 possui 48 divisores.

Quantos divisores tem 72? $\mathbb{Z}$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

cada divisor positivo $2^a \cdot 3^b$, $a, b \in \mathbb{N}$

nº possib. p/ valor de a: $3+1=4$

e

nº possib p/ valor de b: $2+1=3$

Logo, 72 possui $4 \times 3 = 12$ divisores positivos

$\therefore$ 72 possui $2 \cdot 12 = 24$ divisores

Máximo divisor comum (mdc)

conceito

Considere

o conjunto dos divisores positivos de 18: D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

o conjunto dos divisores positivos de 24: D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24}

o conjunto dos divisores positivos de 6 e 18: $\underbrace{D(18) \cap D(24)}$ = {1, 2, 3, 6}

Conjunto dos divisores comuns de 18 e 24

Assim, o máximo divisor comum de 18 e 24 é 6.

mdc (18, 24) = 6

Mínimo múltiplo comum (mmc) Conceito

Considere

o conjunto dos múltiplos positivos de 4: $M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$

o conjunto dos múltiplos positivos de 6: $M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, ...\}$

o conjunto dos múltiplos positivos de 4 e 6: $\underbrace{M(4) \cap M(6)}_{\text{Conjunto dos múltiplos positivos comuns de 4 e 6}} = \{12, 24, 36, 48, ...\}$

Assim, o mínimo múltiplo comum de 4 e 6 é 12.

$\text{mmc}\,(4, 6) = 12$

Cálculo do mdc e mmc

1. Decomponha os números em fatores primos positivos
2. mdc: identifique os fatores primos comuns, tome os com menor expoente e multiplique-os.

   mdc (72; 60) = ? $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

   Fatores primos comuns: 2 e 3

   mdc (72; 60) = $2^2 \cdot 3 = 12$

3. mmc: identifique todos os fatores primos dos números, tome os com o maior expoente e multiplique-os.

   mmc (72; 60) = ? $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

   Fatores primos: 2, 3 e 5.

   mmc (72; 60) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

72, 60

$$mdc(260, 840, 3300) = ?$$

$$260 = 26 \cdot 10 = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5 \Longrightarrow 260 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13$$

$$840 = 84 \cdot 10 = \underbrace{21}_{3 \cdot 7} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \Longrightarrow 840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^1 \cdot 7$$

$$3300 = 33 \cdot 100 = 3 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \Longrightarrow 3300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

$$mdc(260, 840, 3300) = 2^2 \cdot 5^1 = 20$$

{ fatores primos comuns nos 3 nºs com o menor expoente

$$mmc(260, 840, 3300) = \underbrace{2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1}_{\text{todos os fatores primos com o maior expoente}}$$

Números primos entre si

Sejam a e b números inteiros positivos.

a e b são primos entre si ⇔ mdc (a, b) = 1

5 e 7 são primos entre si, mdc(5, 7) = 1

Exemplo

4 e 9 são números primos entre si, pois mdc (4, 9) = 1

$\frac{4}{9}$ é uma fração irredutível, pois 4 e 9 são primos entre si.

chamamos fração irredutível

Lição de casa

- Capítulo 2, pág. 18 do 1 ao 6

  Testes: 1, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 21, 22

  Complementares: 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11
- Lista extra