Tautologia

Conforme definições do dicionário Michaelis, **tautologia** é

1. *um vício de linguagem que consiste em repetir o mesmo pensamento com palavras sinônimas;*

2. Erro que apresenta, como progresso do pensamento, uma repetição em termos diferentes.

De origem grega (*tautos* exprime a ideia de **mesmo**, de **idêntico**, e *logos* significa **assunto**), o termo tautologia é outra denominação para o temido **pleonasmo vicioso** – temido porque é um efeito indesejado em qualquer redação.

- *Subir para cima*
- *Entrar para dentro*
- *Descer para baixo*
- *Sair para fora*

Na **Lógica Proposicional**, uma **tautologia** é uma proposição composta que é verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

$\underbrace{Chove}_{p}$ ou $\underbrace{não\ chove}_{\sim p}$. (p ∨ ~p)

p	~p	p ∨ ~p
V	F	V
F	V	V

Logo, p ∨ ~p é uma tautologia.

Contradição

Na **Lógica Proposicional**, uma **contradição** é uma proposição composta que é falsa quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

$\underbrace{Chove}_{p}$ e $\underbrace{não\ chove}_{\sim p}$. (p ∧ ~p)

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Logo, p ∧ ~p é uma contradição.

Uma proposição é **indeterminada** (ou **contingente**) quando não é uma tautologia e não é uma contradição, isto é, toda proposição cuja última coluna tem pelo menos um V e um F.

Implicação Lógica (⇒)

Dadas as proposições compostas P e Q, diz-se que ocorre uma implicação lógica entre P e Q quando a proposição condicional P → Q é uma tautologia.

Notação: P ⇒ Q (lê-se: "P implica Q" ou "se P, então Q".

P ⇒ Q qdo $\boxed{P \to Q \text{ é tautologia}}$

OBS.:

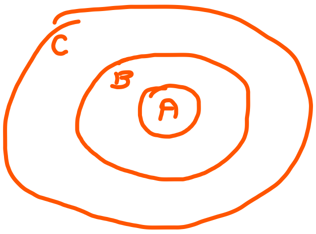
Os símbolos → e ⇒ têm significados diferentes:

→ indica uma operação entre proposições, dando origem a uma nova proposição p → q cuja tabela verdade pode conter tanto V quanto F.

⇒ indica que uma proposição P(p,q,r,...) implica logicamente ou apenas implica uma proposição Q(p,q,r,...) (P ⇒ Q), se Q(p,q,r,......) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p,q,r,.....) é verdadeira (V).

Exemplo

- Considerando os conjuntos A, B e C,
  A ⊂ B e B ⊂ C ⇒ A ⊂ C



p: A ⊂ B
q: B ⊂ C
r: A ⊂ C

- Se chover, então fico em casa. ($p \rightarrow q$)
  Chove. (p)
  Logo, fico em casa. (q)
  Construir a tabela verdade da condicional: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$p \wedge (p \rightarrow q)$**	**$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$**
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

tautologia

Logo, $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$

Equivalência Lógica ($\equiv$ ou $\Leftrightarrow$)

Vimos que:

Def.: Dadas as proposições compostas P e Q, diz-se que ocorre uma equivalência lógica entre P e Q quando suas tabelas verdades forem idênticas.

$P \Leftrightarrow Q$

Teorema: A proposição P é logicamente equivalente à proposição Q ($P \equiv Q$) sempre que a bicondicional ($P \leftrightarrow Q$) é uma tautologia.

Notação: $P \equiv Q$ ou $P \Leftrightarrow Q$ (lê-se: "P é equivalente a Q" ou "P se, e somente se Q).

Exemplos

- 8 é par $\Leftrightarrow$ 8 é divisível por 2
- Para os conjuntos A e B: $A \subset B$ e $B \subset A \Leftrightarrow A = B$

$\sim(\sim p) \equiv p$

$\sim(p \wedge p) \equiv \sim p \vee \sim q$ { De Morgan

$\sim(p \vee p) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \rightarrow q) \equiv ?$

Mais sobre o Operador Condicional

Negação da Condicional

Construindo as tabelas verdades de $p \to q$ e de $\sim(p \wedge \sim q)$

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$(p \to q) \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Tautologia

Tabelas verdade idênticas

Concluímos que $p \to q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$. (I)

E como $\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$, pela Lei de De Morgan, temos que $\boxed{p \to q \equiv \sim p \vee q}$ (II)

Negação do antecedente da condicional ou o consequente da condicional

Exemplo:

São equivalentes as proposições:

Se estudo, então passo de ano.

e

Não estudo ou passo de ano.

De (I), temos que

$\boxed{\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q}$

Isto é, a negação de uma proposição condicional é logicamente equivalente a uma conjunção.

Exemplo:

A negação de

Se estudo, então passo de ano.

é

Estudo e não passo de ano.

Lista de exercícios

1) Dar a negação, em linguagem simbólica, das seguintes proposições:
   a) $q \to \sim p$
   b) $\sim p \to q$
   c) $\sim p \to (\sim q \wedge r)$
   d) $(p \wedge q) \to r$
   e) $(p \to q) \to r$
   f) $p \to (q \to r)$

p	C	p∨C
V	F	V
F	F	F

$p \equiv p \vee C$

C: contradição

2) Dar a negação em linguagem natural de cada uma das seguintes proposições:
   a) Se está frio, então está chovendo.
   b) Se está sol, então eu irei à praia.
   c) Se Maria é bonita e rica, então ela é feliz.
   d) O cinema fica lotado, se o filme é bom.

$p \to q \equiv \sim p \vee q$

3) Por meio de equivalências lógicas, eliminar o conectivo "$\to$" nas seguintes proposições, seguindo o exemplo.

   Exemplo

   $(p \to q) \wedge (\sim p \to q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv q \vee (\sim p \wedge p) \equiv q \vee C \equiv q$

   contradição

   Logo, $(p \to q) \wedge (\sim p \to q) \equiv q$

   Agora é a sua vez!

   a) $(p \to q) \to r$
   b) $p \to (p \vee q)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv$
$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Proposições associadas a uma Proposição Condicional

Definições

Dada a proposição condicional $p \to q$, a ela estão associadas três outras proposições condicionais que contêm p e q: **recíproca da condicional**: $q \to p$ **contrapositiva**: $\sim q \to \sim p$ **recíproca da contrapositiva ou Inversa**: $\sim p \to \sim q$

Exemplo

Proposição condicional	*Se um animal é morcego, então ele é mamífero.* $p \to q$
Recíproca da condicional	*Se um animal é mamífero, então ele é morcego.* $q \to p$
Contrapositiva da condicional	*Se um animal não é mamífero, então ele não é morcego.* $\sim q \to \sim p$
Inversa da condicional	*Se um animal não é morcego, então ele não é mamífero.* $\sim p \to \sim q$

De (II), na página anterior, temos que:

$p \to q \equiv \sim p \vee q$

e

$\sim q \to \sim p \equiv \sim(\sim q) \vee \sim p \equiv q \vee \sim p \equiv \sim p \vee q$

Logo,

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

Portanto, **a proposição condicional é logicamente equivalente a sua contrapositiva**.

OBS.: A equivalência lógica obtida também pode ser verificada por meio de tabelas verdade.

Observe ainda que:

$q \to p \equiv \sim q \vee p \equiv p \vee \sim q$

Assim, a recíproca de uma proposição condicional **não é** logicamente equivalente a ela ($q \to p \not\equiv p \to q$).

A contrapositiva da recíproca da condicional $p \to q$ é logicamente a recíproca, isto é: $\sim p \to \sim q \equiv q \to p$.

Observações:

O operador condicional NÃO satisfaz as propriedades

- Idempotente, isto é, $p \to p \not\equiv p$
- Comutativa, isto é, $p \to q \not\equiv q \to p$
- Associativa, isto é, $(p \to q) \to r \not\equiv p \to (q \to r)$

Verifique por tabelas verdade.

Exercício

Se não durmo, bebo. Se estou furioso, durmo. Se durmo, não estou furioso. Se não estou furioso, não bebo. Logo,

a) não durmo, estou furioso e não bebo
b) durmo, estou furioso e não bebo
c) não durmo, estou furioso e bebo
d) durmo, não estou furioso e não bebo
e) não durmo, não estou furioso e bebo

~~Em uma aula, fizemos este exercício utilizando tabelas verdade~~. Agora veremos como podemos resolvê-lo usando equivalências lógicas.

Nomeando as proposições simples:

- d: durmo
- f: furioso
- b: bebo

temos que:

- Se não durmo, bebo. $\sim d \to b$
- Se estou furioso, durmo. $f \to d$
- Se durmo, não estou furioso. $d \to \sim f$
- Se não estou furioso, não bebo. $\sim f \to \sim b$

Devemos ter que a disjunção

$$(\sim d \to b) \wedge (f \to d) \wedge (d \to \sim f) \wedge (\sim f \to \sim b)$$ (V)

seja verdadeira.

Assim, cada uma das proposições $\underbrace{\sim d \to b}_{V}$, $\underbrace{f \to d}_{V}$, $\underbrace{d \to \sim f}_{V}$ e $\underbrace{\sim f \to \sim b}_{V}$ é verdadeira.

1ª resolução

Lembrando que

- $d \to \sim f \equiv f \to \sim d$

vem que

$(\sim d \to b) \wedge (f \to d) \wedge (d \to \sim f) \wedge (\sim f \to \sim b) \equiv$

$\equiv (\sim d \to b) \wedge \underbrace{(f \to d) \wedge (f \to \sim d)}_{V} \wedge (\sim f \to \sim b)$

{ $f \to d$ é V
e
$f \to \sim d$ é V

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Estudando os valores lógicos de f e d, sabendo que $V(f \to d) = V$, $V(f \to \sim d) = V$ e $V((f \to d) \wedge (f \to \sim d)) = V$, concluímos que $V(f) = F$ e não há como determinar o valor lógico de **d.**

Detalhando

$$\overbrace{\underbrace{(f \to d)}_{V} \wedge \underbrace{(f \to \sim d)}_{V}}^{V}$$

f	d	f → d	~d	f → ~d	(f → d) ∧ (f → ~d)
~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

$V(f) = F$

$\underbrace{\underset{V}{\sim f} \to \sim b}_{V}$

$\therefore V(\sim b) = V$
$V(b) = F$

Sabendo que $V(\sim f \to \sim b) = V$ e $V(\sim f) = V$, temos que $V(\sim b) = V$, assim $V(b) = F$.

Sabendo que $V((\sim d \to b)) = V$ e $V(b) = F$, vem que $V(\sim d) = F$, assim $V(d) = V$

$\underbrace{\sim d \to \underset{F}{b}}_{V}$ $\therefore V(\sim d) = F \Rightarrow V(d) = V$

Portanto, $V(d) = V$, $V(f) = F$ e $V(b) = F$, isto é, durmo, não estou furioso e não bebo.

2ª resolução

Lembrando que:

- a disjunção é comutativa $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- a conjunção é comutativa $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \to q \equiv \sim p \vee q$
- $c \wedge p \equiv c$, em que c é uma contradição
- $c \vee p \equiv p$

$(\sim d \to b) \wedge (f \to d) \wedge (d \to \sim f) \wedge (\sim f \to \sim b) \equiv$

$\equiv (d \vee b) \wedge (\sim f \vee d) \wedge (\sim d \vee \sim f) \wedge (f \vee \sim b)$ (I)

Trabalhando a parte destacada, vem que

contradição

$(\sim f \vee d) \wedge (\sim d \vee \sim f) \equiv (\sim f \vee d) \wedge (\sim f \vee \sim d) \equiv \sim f \vee (d \wedge \sim d) \equiv \sim f \vee c \equiv \sim f$

Propriedade distributiva

Assim, de (I) vem que:

$(d \vee b) \wedge \sim f \wedge (f \vee \sim b) \equiv \sim f \wedge (d \vee b) \wedge (f \vee \sim b)$ (II)

Trabalhando a parte destacada, temos que:

Propriedade distributiva

contradição

$(d \vee b) \wedge (f \vee \sim b) \equiv (d \wedge f) \vee (d \wedge \sim b) \vee (b \wedge f) \vee (b \wedge \sim b) \equiv (d \wedge f) \vee (d \wedge \sim b) \vee (b \wedge f) \vee c \equiv (d \wedge f) \vee (d \wedge \sim b) \vee (b \wedge f)$ (III)

De (II) e (III), vem que:

$\sim f \wedge [(d \wedge f) \vee (d \wedge \sim b) \vee (b \wedge f)] \equiv ((\sim f \wedge f) \wedge d) \vee (\sim f \wedge d \wedge \sim b) \vee ((\sim f \wedge f) \wedge b) \equiv c \vee (\sim f \wedge d \wedge \sim b) \vee c \equiv \sim f \wedge d \wedge \sim b$

Propriedades:
Distributiva
Associativa
Comutativa

contradição

Logo, $(\sim d \rightarrow b) \wedge (f \rightarrow d) \wedge (d \rightarrow \sim f) \wedge (\sim f \rightarrow \sim b) \equiv \sim f \wedge d \wedge \sim b$.

Como $V((\sim d \rightarrow b) \wedge (f \rightarrow d) \wedge (d \rightarrow \sim f) \wedge (\sim f \rightarrow \sim b)) = V$, então $V(\sim f \wedge d \wedge \sim b) = V$.

Assim, $V(\sim f) = V$, $V(d) = V$ e $V(\sim b) = V$, isto é, $V(f) = F$ e $V(d) = V$ e $V(b) = F$.
Portanto, durmo, não estou furioso e não bebo.

Lista de exercícios

4) Escreva a proposição recíproca, a inversa e a contrapositiva de cada uma das proposições seguintes:
   a) Se Carlos está doente, então ele precisa de um médico.
   b) Se x é par, então x^2 é par.
   c) Se $x < 0$, então $x \neq 1$.
   d) Se eu estudo, então eu sou aprovado.
5) Escreva a proposição contrapositiva de cada uma das proposições seguintes:
   a) $p \rightarrow q$
   b) $q \rightarrow p$
   c) $\sim p \rightarrow q$
   d) $p \rightarrow \sim q$
   e) $\sim q \rightarrow p$
   f) $q \rightarrow \sim p$
   g) $\sim p \rightarrow \sim q$
   h) $\sim q \rightarrow \sim p$
6) Considere as seguintes proposições:
   (I) Se tenho sorte, então ganho na Sena.
   (II) Se não tenho sorte, então não ganho na Sena.
   (III) Se ganho na Sena, então tenho sorte.
   (IV) Se não ganho na Sena, então não tenho sorte.
   (V) Não ganho na Sena, se não tenho sorte.
   a) Assumindo que a proposição (I) é verdadeira, quais das outras proposições são verdadeiras?
   b) Qual é a negação, a recíproca e a contrapositiva da proposição (I)?
7) Determine
   a) a recíproca da contrapositiva de $q \rightarrow \sim p$.
   b) a contrapositiva da recíproca de $q \rightarrow \sim p$.
   c) a contrapositiva da inversa de $q \rightarrow \sim p$.
   d) a inversa da contrapositiva de $q \rightarrow \sim p$.
8) Verifique se são equivalentes os pares de proposições.
   a) A: Se ele é um bom cantor, então ele faz sucesso.
      B: Ele não é um bom cantor ou faz sucesso.
   b) A: Se Q não é um quadrado, então Q não é um retângulo.
      B: Se Q é um quadrado, então Q é um retângulo.
9) Por meio de tabelas verdade, mostre que $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
10) Verifique, mediante o uso de tabelas verdade, as seguintes equivalências:
   a) $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \leftrightarrow q$ (negação da bicondicional)
   b) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$ (o operador bicondicional é comutativo)

c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ (o operador bicondicional é associativo)

11) Use equivalências lógicas para simplificar cada uma das seguintes proposições:

a) $\sim p \wedge (p \vee \sim q)$

b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q \wedge r))$

d) $\sim (p \vee q) \wedge \sim (q \vee r)$

e) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

f) $(q \wedge (p \wedge r)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim r))$

12) Elimine os operadores $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ das proposições, por meio de equivalências lógicas que não contenham esses símbolos:

a) $p \rightarrow (p \vee q)$

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

c) $p \leftrightarrow q$

13) Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições numa sentença o mais simples possível:

a) João é rico e não precisa de um empréstimo.

b) Fábio não é rico nem feliz.

c) Se as ações caem, aumenta o desemprego.

d) Nem Marcos nem Juliana são ricos.

e) Gisele é modelo se, e somente se ela é atriz.

f) Se Pedro é um poeta, então ele é pobre e feliz.

g) Se Iara estuda e presta atenção às aulas, então ela é aprovada.

h) Se Thaís ama a natureza, então ela ama os animais e as plantas.

14) Dadas as proposições:

p: O biscoito T é o mais fresquinho.

q: O biscoito T é o mais vendido.

r: O biscoito T é o mais barato.

Traduza para a linguagem natural as proposições abaixo, simplificando-as, se possível:

a) $p \vee q \vee r$

b) $p \wedge q \wedge \sim r$

c) $\sim (p \wedge q \wedge r)$

d) $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$

e) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$

f) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

g) $(\sim p \vee r) \rightarrow r$

h) $(p \wedge q) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)$

15) Sendo três números reais representados por a, b, e x, tem-se que

- $x = \pm a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$
- $x \leq a \Leftrightarrow x < a \vee x = a$
- $a < x < b \Leftrightarrow x > a \wedge x < b$

Negue as sentenças

a) $x = \pm 5$

b) $x \geq 7$

c) $2 < x \leq 6$

16) Sendo p: $x > 2$; q: $x < 5$; r: $x = 5$. Usando p, q e r, escreva em linguagem simbólica:

a) $x \leq 2$

b) $x \leq 5$

c) $2 < x < 5$

d) $2 < x \leq 5$

17) Simbolize as seguintes sentenças matemáticas:

a) x é maior que 5 e menor que 7, ou x não é igual a 6.

b) Se x é menor que 5 e maior que 3, então x é igual a 4.

c) x é maior que 1, ou x é menor que 1 e maior que 0.

18) Negue, em linguagem simbólica, as sentenças do exercício 17.

19. Uma afirmação equivalente para “Se estou feliz, então passei no concurso” é:

a) Se passei no concurso, então estou feliz.

b) Se não passei no concurso, então não estou feliz.

c) Não passei no concurso e não estou feliz.

d) Estou feliz e passei no concurso.

e) Passei no concurso e não estou feliz.

20. Se João canta ou Maria sorri, então Josefa chora e Luiza não grita. Do ponto de vista lógico, uma afirmação equivalente à afirmação anterior é
    a) Se Luiza grita ou Josefa não chora, então João não canta e Maria não sorri.
    b) Se João não canta ou Maria não sorri, então Josefa não chora e Luiza grita.
    c) João canta ou Maria sorri, e Josefa não chora e Luiza grita.
    d) Se João canta, então Josefa chora e se Maria sorri, então Luiza grita.
    e) Se Luiza não grita e Josefa chora, então João canta ou Maria sorri.
21. Se $x + y = 2$, então $x = 0$. Ora, x não é zero. Então, pode-se afirmar que
    a) $y = 2$
    b) $y = 0$
    c) $y = 2 - x$
    d) $x + y \neq 2$
    e) $y \neq 0$
22. André é inocente ou Beto é inocente. Se Beto é inocente, então Caio é culpado. Caio é inocente se e somente se Dênis é culpado. Ora, Dênis é culpado. Logo
    a) Caio e Beto são inocentes
    b) André e Caio são inocentes
    c) André e Beto são inocentes
    d) Caio e Dênis são culpados
    e) André e Dênis são culpados
23. Se não leio, não compreendo. Se jogo, não leio. Se não desisto, compreendo. Se é feriado, não desisto. Então,
    a) se jogo, não é feriado.
    b) se não jogo, é feriado.
    c) se é feriado, não leio.
    d) se não é feriado, leio.
    e) se é feriado, jogo.
24. Uma professora de matemática faz as três seguintes afirmações:
    - "$X > Q$ e $Z < Y$";
    - "$X > Y$ e $Q > Y$, se e somente se $Y > Z$";
    - "$R \neq Q$, se e somente se $Y = X$".

    Sabendo-se que todas as afirmações da professora são verdadeiras, conclui-se corretamente que:
    a) $X > Y > Q > Z$
    b) $X > R > Y > Z$
    c) $Z < Y < X < R$
    d) $X > Q > Z > R$
    e) $Q < X < Z < Y$
25. Se $X \geq Y$, então $Z > P$ ou $Q \leq R$. Se $Z > P$, então $S \leq T$. Se $S \leq T$, então $Q \leq R$. Ora, $Q > R$, logo:
    a) $S > T$ e $Z \leq P$
    b) $S \geq T$ e $Z > P$
    c) $X \geq Y$ e $Z \leq P$
    d) $X > Y$ e $Z \leq P$
    e) $X < Y$ e $S < T$

Respostas

1.
   a) $p \wedge q$
   b) $\sim p \wedge \sim q$
   c) $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$
   d) $p \wedge q \wedge \sim r$
   e) $(p \rightarrow q) \wedge \sim r \equiv (\sim p \vee q) \wedge \sim r$
   f) $p \wedge q \wedge \sim r$

2.

a) Está frio e não está chovendo.
b) Está sol e não irei à praia.
c) Maria é bonita e rica e não é feliz.
d) O filme é bom e o cinema não fica lotado.

3.
a) $(p \to q) \to r \equiv (\sim p \vee q) \to r \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \sim q) \vee r$
b) $p \to (p \vee q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv t \vee q \equiv q$

4.
a) Se Carlos está doente, então ele precisa de um médico.
Recíproca: Se Carlos precisa de um médico, então ele está doente.
Inversa: Se Carlos não está doente, então ele não precisa de um médico.
Contrapositiva: Se Carlos não precisa de um médico, então ele não está doente.
b) Se x é par, então x^2 é par.
Recíproca: Se x^2 é par, então x é par.
Inversa: Se x não é par, então x^2 não é par.
Contrapositiva: Se x^2 não é par, então x não é par.
c) Se $x < 0$, então $x \neq 1$.
Recíproca: Se $x \neq 1$, então $x < 0$.
Inversa: Se $x \not< 0$, então $x = 1$. (Se $x \geq 0$, então $x = 1$.)
Contrapositiva: Se $x = 1$, então $x \not< 0$. (Se $x = 1$, então $x \geq 0$.)
d) Se eu estudo, então eu sou aprovado.
Recíproca: Se eu sou aprovado, então eu estudo.
Inversa: Se eu não estudo, então eu não sou aprovado.
Contrapositiva: Se eu não sou aprovado, então eu não estudo.

5.
a) $\sim q \to \sim p$
b) $\sim p \to \sim q$
c) $\sim q \to p$
d) $q \to \sim p$
e) $\sim p \to q$
f) $p \to \sim q$
g) $q \to p$
h) $p \to q$

6.
a) IV
b) Negação de I: Tenho sorte e não ganho na Sena.
Recíproca de I: III
Contrapositiva de I: IV

7.
a) $\sim q \to p$
b) $\sim q \to p$
c) $\sim p \to q$
d) $\sim p \to q$

8.
a) Sim
b) Não

9. Construção de tabelas verdade.
10. Construção de tabelas verdade.
11.
a) $\sim p \wedge \sim q$
b) p
c) $p \wedge (q \vee r)$
d) $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$
e) $p \vee \sim q$
f) $p \wedge q$

12.
a) q
b) $(p \wedge \sim q) \vee r$
c) $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

13.
a) João não é rico ou precisa de um empréstimo.
b) Fábio é rico ou feliz.
c) As ações caem e não aumenta o desemprego.

d) Marcos ou Juliana são ricos.
e) Gisele é modelo se, e somente se ela não é atriz. (Gisele não é modelo se, e somente se ela é atriz.)
f) Pedro é um poeta, e não é pobre ou não é feliz.
g) Iara estuda e presta atenção às aulas e ela não é aprovada.
h) Thaís ama a natureza, e ela não ama os animais ou as plantas.

14.
a) O biscoito T é o mais fresquinho ou o biscoito T é o mais vendido ou o biscoito T é o mais barato.
O biscoito T é o mais fresquinho ou o mais vendido ou o mais barato.
b) O biscoito T é o mais fresquinho e o biscoito T é o mais vendido e o biscoito T não é o mais barato.
O biscoito T é o mais fresquinho e o mais vendido e não é o mais barato.
O biscoito T é o mais fresquinho e o mais vendido, mas não é o mais barato.
c) O biscoito T não é o mais fresquinho ou o biscoito T não é o mais vendido ou o biscoito T não é o mais barato.
O biscoito T não é o mais fresquinho ou o mais vendido ou o mais barato.
d) O biscoito T é o mais fresquinho, e o biscoito T não é o mais vendido ou o biscoito T não é o mais barato.
O biscoito T é o mais fresquinho, e ele não é o mais vendido ou o mais barato.
O biscoito T não é o mais vendido ou o mais barato, e é o mais fresquinho.
O biscoito T não é o mais vendido ou o mais barato, mas é o mais fresquinho.
e) O biscoito T é o mais vendido e o mais barato, ou não é o mais fresquinho.
f) O biscoito T é o mais fresquinho e o mais vendido se, e somente se é o mais barato.
g) O biscoito T é o mais fresquinho ou mais barato. (após simplificação)
h) O biscoito T não é o mais fresquinho ou é o mais barato. (após simplificação)

15.
a) $x \neq 5 \wedge x \neq -5$
b) $x \leq 7 \wedge x \neq 7 \equiv x < 7$
c) $x \leq 2 \vee x > 6$

16.
a) $\sim p$
b) $q \vee r$
c) $p \wedge q$
d) $p \wedge (q \vee r)$

17.
a) $(x > 5 \wedge x < 7) \vee x \neq 6$
b) $(x < 5 \wedge x > 3) \rightarrow x = 4$
c) $x > 1 \vee (x < 1 \wedge x > 0)$

18.
a) $(x \leq 5 \vee x \geq 7) \wedge x = 6$
b) $(x < 5 \wedge x > 3) \wedge x \neq 4$
c) $x \leq 1 \wedge (x \geq 1 \vee x \leq 0)$

19. b
20. a
21. $x + y = 2 \rightarrow x = 0$ é equivalente a $x \neq 0 \rightarrow x + y \neq 2$ (contrapositiva)
Como $x \neq 0$, concluímos que $x + y \neq 2$

Alternativa d
22. Sejam
a: André é inocente
b: Beto é inocente
c: Caio é inocente
d: Dênis é inocente
A proposição composta $(a \vee b) \wedge (b \rightarrow \sim c) \wedge (c \leftrightarrow \sim d)$ é verdadeira.
- Lembrando que $V(c \leftrightarrow \sim d) = V$ quando c e d têm o mesmo valor lógico.
Como $V(\sim d) = V$ (Dênis é culpado), então $V(c) = V$.
- $V(b \rightarrow \sim c) = V$ e $V(c) = V \Rightarrow V(\sim c) = F$ e $V(b) = F$

- $V(a \vee b) = V$ e $V(b) = F \Rightarrow V(a) = V$

Portanto, André é inocente, Beto é culpado e Caio é inocente.

Alternativa b

23. Sendo

l:leio

c: compreendo

j: jogo

d: desisto

f: feriado

temos que $(\sim l \to \sim c) \wedge (j \to \sim l) \wedge (\sim d \to c) \wedge (f \to \sim d)$(I)

Lembrando que:

- a disjunção é comutativa
- $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$ (ex. 1b, lista 3) (Cuidado: a recíproca não é verdadeira)
- $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

De (I), temos que

$$\underbrace{(j \to \sim l) \wedge (\sim l \to \sim c)}_{j \to \sim c} \wedge \underbrace{(f \to \sim d) \wedge (\sim d \to c)}_{f \to c} \Rightarrow (j \to \sim c) \wedge (f \to c) \text{ (II)}$$

Como $f \to c \equiv \sim c \to \sim f$, então em (II) temos que

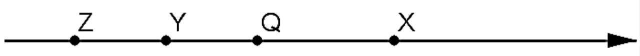
$(j \to \sim c) \wedge (\sim c \to \sim f) \Rightarrow j \to \sim f$

Alternativa a

24.

- $X > Q \wedge Z < Y$ é verdadeira quando $X > Q$ é verdadeira e $Z < Y$ ($\equiv Y > Z$) é verdadeira
- $X > Y$ e $Q > Y$, se e somente se $Y > Z$ é verdadeira quando os dois termos têm o mesmo valor lógico
- Como $Y > Z$ é verdadeira, então $X > Y$ e $Q > Y$ é verdadeira.
- $X > Y$ e $Q > Y$ é verdadeira quando $X > Y$ é verdadeira e $Q > Y$ é verdadeira.

Por enquanto, temos que



$X > Q > Y > Z$

- $R \neq Q$, se e somente se $Y = X$

  Como $X > Y$, então $Y = X$ é falso. Logo, $R \neq Q$ é falso. Assim, $R = Q$ é verdadeiro.

  Portanto, $X > R > Y > Z$

Alternativa b

25.

- Se $X \geq Y$, então $Z > P$ ou $Q \leq R$.

  $X \geq Y \to (Z > P \vee Q \leq R)$
- Se $Z > P$, então $S \leq T$.

  $Z > P \to S \leq T$
- Se $S \leq T$, então $Q \leq R$.

  $S \leq T \to Q \leq R$

Como $V(Q > R) = V$, então $V(Q \leq R) = F$

Assim

$V(S \leq T) = F$, pois $V(S \leq T \to Q \leq R) = V$ e $V(Q \leq R) = F$

$V(S \leq T) = F \Rightarrow S > T$

$V(Z > P) = F$, pois $V(Z > P \to S \leq T) = V$ e $V(S \leq T) = F$

$V(Z > P) = F \Rightarrow Z \leq P$

$V(Z > P \vee Q \leq R) = F$, pois $V(Z > P) = F$ e $V(Q \leq R) = F$

$V(X \geq Y) = F$, pois $V(X \geq Y \to (Z > P \vee Q \leq R)) = V$ e $V(Z > P \vee Q \leq R) = F$

$V(X \geq Y) = F \Rightarrow X < Y$

Portanto, $X < Y$ e $S > T$ e $Z \leq P$

Alternativa a