

1.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\log_e x}{\log_e x + 1} \right) &= \frac{(\log_e x)'(\log_e x + 1) - (\log_e x)(\log_e x + 1)'}{(\log_e x + 1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x}(\log_e x + 1) - (\log_e x) \cdot \frac{1}{x}}{(\log_e x + 1)^2} \\
 &= \frac{\log_e x + 1 - \log_e x}{x(\log_e x + 1)^2} \\
 &= \frac{1}{x(\log_e x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{d}{dx} \left\{ \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1}) \right\} &= (x + \sqrt{x^2 + 1})' \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} (x + \sqrt{x^2 + 1})} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} (x + \sqrt{x^2 + 1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_3^5 \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = \int_3^5 \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int_3^5 \left\{ \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \right\} dx \quad \text{とみる.}$$

(A, B, C: 定数)

$$\text{よって, (等式)} = \int_3^5 \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} dx = \int_3^5 \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2} dx$$

恒等式とみて係数を比較すると.

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \therefore A = 1, B = -1, C = 1$$

よって

$$\begin{aligned}
 (\text{等式}) &= \int_3^5 \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx \\
 &= \left[\log_e x - \log_e (x-1) - (x-1)^{-1} \right]_3^5 \\
 &= \left(\log_e 5 - \log_e 4 - \frac{1}{4} \right) - \left(\log_e 3 - \log_e 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \log_e \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \log_e \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \log_e \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} = \log_e \frac{5}{6} + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

2

(1) $\frac{3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$ を部分分数変換

$$(5式) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{とおく. } (A, B, C: \text{定数})$$

$$(5式) = \frac{As^2 + 2As + 2A + Bs^2 + Bs + Cs + C}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{(A+B)s^2 + (2A+B+C)s + (2A+C)}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$$

恒等式とみて係数を比較可。と。

$$\begin{cases} A+B=3 & \dots (1) \\ 2A+B+C=2 & \dots (2) \\ 2A+C=1 & \dots (3) \end{cases}$$

(2)-(3) より $B=1$

$B=1$ を (1) に代入して、 $A=2$

$A=2$ を (3) に代入して、 $C=-3$

よって、

$$(5式) = \frac{2}{s+1} + \frac{s-3}{(s^2 + 2s + 2)}$$

$$= 2 \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} - 4 \frac{1}{(s+1)^2 + 1^2}$$

よって、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} \right] &= 2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} \right] - 4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1^2} \right] \\ &= 2e^{-t} + e^{-t} \cos t - 4e^{-t} \sin t \\ &= e^{-t} (2 + \cos t - 4 \sin t) \end{aligned}$$

2

(2) $t \cdot e^{-3t} \sin(2t)$ をラプラス変換オイラーの公式を用いて、 $\sin 2t = \frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t})$ とおくと、

$$(4式) = t \cdot e^{-3t} \cdot \frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t}) = \frac{1}{2j}t(e^{-(3-j2)t} - e^{-(3+j2)t})$$

よって、

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-3t} \sin 2t] = \int_0^{\infty} \frac{1}{2j}t(e^{-(3-j2)t} - e^{-(3+j2)t})e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} t(e^{-(3-j2+s)t} - e^{-(3+j2+s)t}) dt$$

$$\int fg = fG - \int f'G$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ \left[\left\{ \frac{e^{-(3-j2+s)t}}{-(3-j2+s)} - \frac{e^{-(3+j2+s)t}}{-(3+j2+s)} \right\} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-(3-j2+s)t}}{-(3-j2+s)} - \frac{e^{-(3+j2+s)t}}{-(3+j2+s)} \right\} dt \right\}$$

ただし、

 $t=0$ とき、 $t \cdot e^{-\infty} = 0$ 。 $t \rightarrow \infty$ とき、 $e^{-\infty} = 0$ 。

$$= \frac{1}{2j} \left\{ 0 - \left[\frac{e^{-(3-j2+s)t}}{(3-j2+s)^2} - \frac{e^{-(3+j2+s)t}}{(3+j2+s)^2} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{(3-j2+s)^2} - \frac{1}{(3+j2+s)^2} \right\}$$

そこで、 $X = 3+s$ 、 $Y = j2$ とおくと、

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-3t} \sin 2t] = \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{(X-Y)^2} - \frac{1}{(X+Y)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{Y} \left\{ \frac{(X+Y)^2 - (X-Y)^2}{\{(X-Y)(X+Y)\}^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{Y} \left\{ \frac{X^2 + 2XY + Y^2 - (X^2 - 2XY + Y^2)}{(X^2 - Y^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{Y} \left\{ \frac{4XY}{(X^2 - Y^2)^2} \right\} = \frac{4X}{(X^2 - Y^2)^2}$$

 $X = 3+s$ 、 $Y = j2$ を代入して

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-3t} \sin 2t] = \frac{4(3+s)}{\{(3+s)^2 - (j2)^2\}^2}$$

$$= \frac{4(s+3)}{(s^2 + 6s + 9 + 4)^2}$$

$$= \frac{4(s+3)}{(s^2 + 6s + 13)^2}$$

2

(3) $\frac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ を逆ラプラス変換する。

$$(与式) = \frac{s^2 - s + 3}{(s+1)(s^2+5s+6)} = \frac{s^2 - s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

とある。(A, B, Cは定数)

よって、

$$\begin{aligned} (与式) &= \frac{A(s^2+5s+6)+B(s^2+4s+3)+C(s^2+3s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{s^2(A+B+C) + s(5A+4B+3C) + (6A+3B+2C)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

恒等式とみて、係数を比較すると、

$$\begin{cases} A+B+C = 1 & \dots (1) \\ 5A+4B+3C = -1 & \dots (2) \\ 6A+3B+2C = 3 & \dots (3) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \times 3 \text{ より, } 2A+B = -4 \quad \dots (4)$$

$$(3) - (1) \times 2 \text{ より, } 4A+B = 1 \quad \dots (5)$$

$$(5) - (4) \text{ より, } 2A = 5 \quad \therefore A = \frac{5}{2}$$

$$A = \frac{5}{2} \text{ を (5) に代入して, } 4 \cdot \frac{5}{2} + B = 1 \Leftrightarrow B = 1 - 10 = -9$$

$$A = \frac{5}{2}, B = -9 \text{ を (1) に代入して, } \frac{5}{2} - 9 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 + 9 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

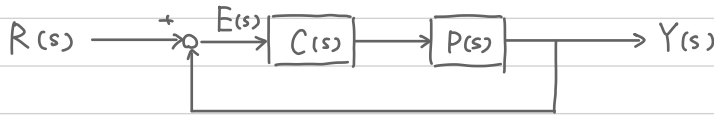
$$\text{よって, } \frac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{\frac{5}{2}}{s+1} + \frac{-9}{s+2} + \frac{\frac{15}{2}}{s+3} \quad \text{と表す。}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \right] = \frac{5}{2} e^{-t} - 9e^{-2t} + \frac{15}{2} e^{-3t}$$

6

$$P(s) = \frac{K_t}{LJs^3 + (RJ + L\mu)s^2 + (R\mu + K_e K_t)s}$$

テキスト 図 20 (p29) の制御系で、外乱 $V(s) = 0$ 、観測雑音 $W(s) = 0$ とし、



という形で表せるので、

一巡伝達関数 $L(s)$ 、偏差 $E(s)$ 、出力 $Y(s)$ は、目標入力 $R(s)$ と補償器 $C(s)$ と制御対象 $P(s)$ より、

$$L(s) = P(s) \cdot C(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + P(s) \cdot C(s)}$$

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} R(s) = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} R(s)$$

と表すことができる。6~10の問題では、 $L(s)$ 、 $E(s)$ 、 $Y(s)$ をこのように定義する。

(1) $C(s) = 1$ 时、一巡伝達関数 $L(s)$ は、

$$L(s) = P(s) C(s) = P(s) = \frac{K_t}{L \cdot J s^3 + (RJ + L\mu)s^2 + (R\mu + K_e K_t)s}$$

(2) システムのゲイン余裕 G_m 、位相余裕 P_m 、ゲイン交差周波数 ω_g 、位相交差周波数 ω_p は、 $L(s)$ のボード線図から求めることができる。scilabでこれらの値を求めるコマンドを実行して結果を示す。

ゲイン余裕 $G_m \doteq 25.9$ [dB]
 位相余裕 $P_m \doteq 49.3$ [deg]
 ゲイン交差周波数 $\omega_g \doteq 22.6$ [Hz]
 位相交差周波数 $\omega_p \doteq 124.6$ [Hz]

(3) 定常速度偏差とは、単位ランプ入力に対する定常偏差のことである。

よって定常速度偏差 e_v は、単位ランプ入力の $\frac{1}{s^2}$ より、

$$\begin{aligned} e_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{K_t}{L \cdot J \cdot s^2 + (RJ + I \mu)s + (R\mu + K_e K_t)}} = \frac{R\mu + K_e K_t}{K_t} \end{aligned}$$

各パラメータを代入して

$$\begin{aligned} e_v &= \frac{3.2 \cdot 9.0 \times 10^{-5} + 4.9 \times 10^{-3} \cdot 0.47}{0.47} \\ &= \frac{0.288 \times 10^{-3} + 2.303 \times 10^{-3}}{0.47} \\ &= \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3} \doteq 5.51 \times 10^{-3} \text{ [m/s]} \quad \text{7=人い...} \end{aligned}$$

7.

(1) 課題6のシステムの $L(s)$ のボード線図を図1(ページ)に示す。

位相余裕を $P_m = 40 \text{ [deg]}$ とするには $L(s)$ の位相が -140 [deg] の周波数に着目する。

この周波数での $L(s)$ のゲインは -4 [dB] より、 4 [dB] 分のゲイン補償器を設定する。

よって、

$$20 \log_{10} K = 4 \Leftrightarrow \log_{10} K = 0.2 \quad \therefore K = 10^{0.2} \doteq 1.58$$

よって $L(s)$ は、

$$L(s) = P(s) C(s) = 10^{0.2} \cdot P(s) \doteq 1.58 P(s)$$

4 は L に
1/10 かな
きかい
6 分 1 まで
6 分 1 まで

K を定め、前問と同様に scilab コマンドより実行した結果は

$$\text{ゲイン余裕 } G_m \doteq 21.9 \text{ [dB]}$$

$$\text{位相余裕 } P_m \doteq 39.5 \text{ [deg]}$$

$$\text{ゲイン交差周波数 } \omega_g \doteq 31.0 \text{ [Hz]}$$

$$\text{位相交差周波数 } \omega_p \doteq 124.6 \text{ [Hz]}$$

位相余裕 $P_m \doteq 39.5 \text{ [deg]}$ となり、おおよそ $P_m = 40 \text{ [deg]}$ と
満ちることができた。

2. 2. 2.

(2). 6(3)より、定常偏差 e_{ss} は、

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)}$$

2. 2. 3. 7(1)より $L(s) = P(s)C(s) \doteq 1.58 P(s)$ より、

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1.58 \frac{k_t}{LJ \cdot s^2 + (RJ + 1 \mu)s + (R\mu + k_e k_t)}}$$

$$= \frac{1}{1.58} \cdot \frac{R\mu + k_e k_t}{k_t}$$

各パラメータを代入して、

$$e_{ss} = \frac{2.591}{1.58 \cdot 0.47} \times 10^{-3} \doteq 3.49 \times 10^{-3} = 0.00349$$

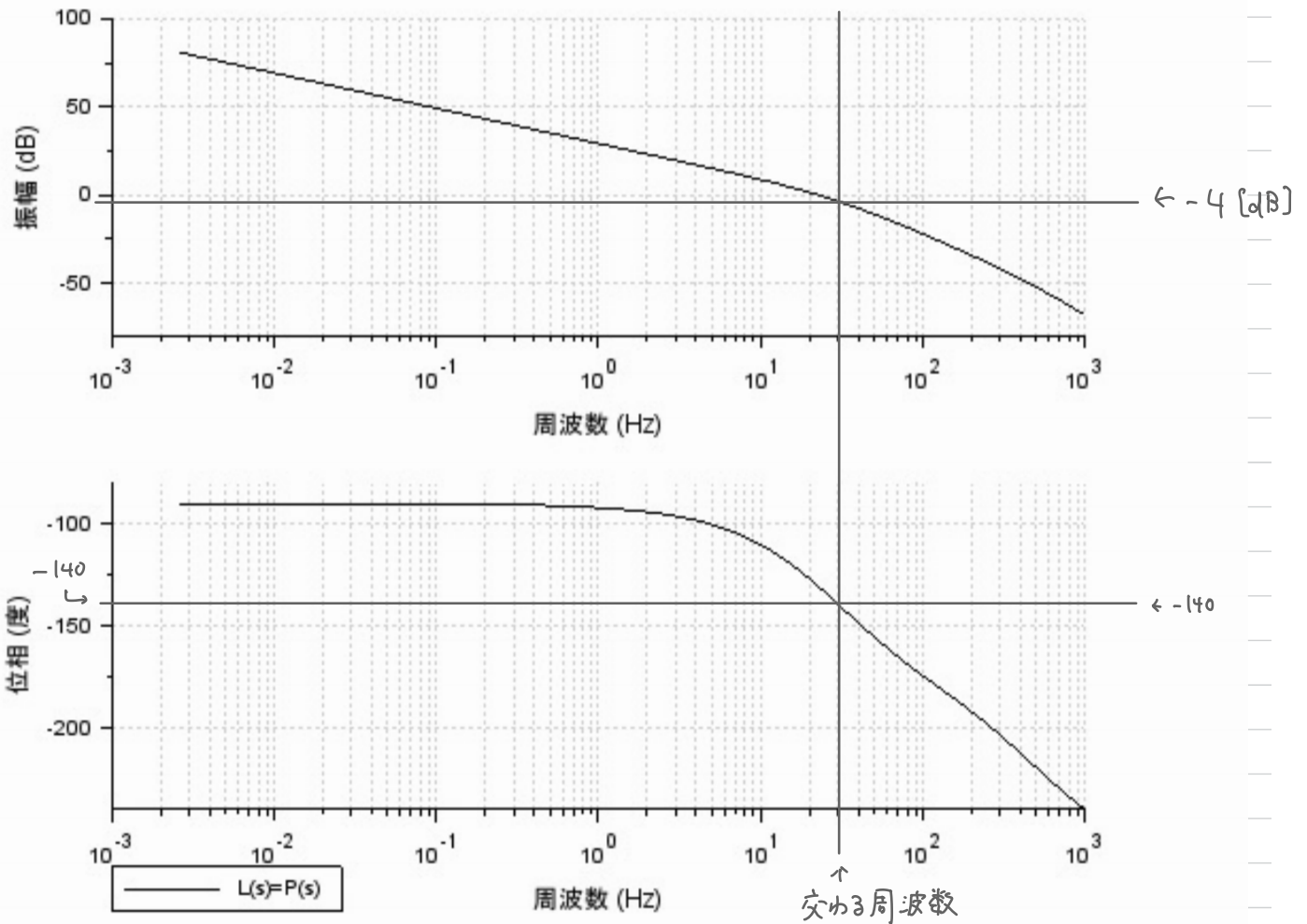


図1 課題6の $L(s)$ のボード線図

8. 6(3), 7(2)より、定常速度偏差 ϵ_u は、

$$(1) \quad \epsilon_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)}$$

$$= \frac{1}{K} \cdot \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3}$$

となる。ここで、[設計仕様1]より、 $\epsilon_u \leq 0.0017$ を満たすには、

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3} \leq 0.0017 \iff K \geq \frac{2.591}{0.799} \doteq 3.2428$$

よって、 $K = 3.5$ とおくとよい。

ゲイン補償器 $C(s) = K = 3.5$ を使用して、

$L(s) = C(s)P(s) = 3.5P(s)$ のボード線図を図2(1ページ)に示す。

位相余裕を $P_m = 45 [\text{deg}]$ とおき、 $L(s)$ の位相が $-135 [\text{deg}]$ の周波数は $24 [\text{Hz}]$ と読みとれる。また、 α とゲイン周波数 ω_g と位相余裕 $P_m [\text{deg}]$ の関係は、

α	0.1	0.2	0.3	0.4
$\omega_g [\text{Hz}]$	10.02	17.52	23.59	28.70
$P_m [\text{deg}]$	53.59	48.37	42.61	38.11

ておくと、 $\alpha = 0.3$ のとき、 ω_g がおおよそ $24 [\text{Hz}]$ となるので、 $\alpha = 0.3$ とおす。

また、 α が大きくなるにつれ、 P_m が小さくなることから、安全性を見積もる意味を理解して、

$\alpha = 0.3$ 、 $K = 3.5$ のとき、位相遅れ補償器を用いた結果は、SciLab のコメントより、

ゲイン余裕 $G_m \doteq 24.71 [\text{dB}]$
 位相余裕 $P_m \doteq 42.61 [\text{deg}]$
 ゲイン交差周波数 $\omega_g \doteq 23.60 [\text{Hz}]$
 位相交差周波数 $\omega_p \doteq 119.25 [\text{Hz}]$

となり、位相余裕 P_m がおおよそ $40 [\text{deg}]$ を満たすことが分かった。

また、定常速度偏差 ϵ_u は、

$$\epsilon_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + Ts}{sK(1 + \alpha Ts)P(s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + Ts)(LJs^3 + (RJ + L\mu)s^2 + (R\mu + K_e K_t)s)}{sK(1 + \alpha Ts) \cdot K_t}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{As^4 + Bs^3 + Cs^2 + (R\mu + K_e K_t)s}{\alpha K \cdot K_t \cdot Ts^2 + K \cdot K_t \cdot s}$$

$$= \frac{R\mu + K_e K_t}{K \cdot K_t} = \frac{1}{K} \cdot \frac{R\mu + K_e K_t}{K_t}$$

$$= \frac{1}{3.5} \cdot \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3} \doteq 0.00158 \leq 0.0017$$

となり、[設計仕様1]を満たしている。

(2) 位相遅れ補償器 $C(s)$ のボード線図を 図3 (ページ) に示す。

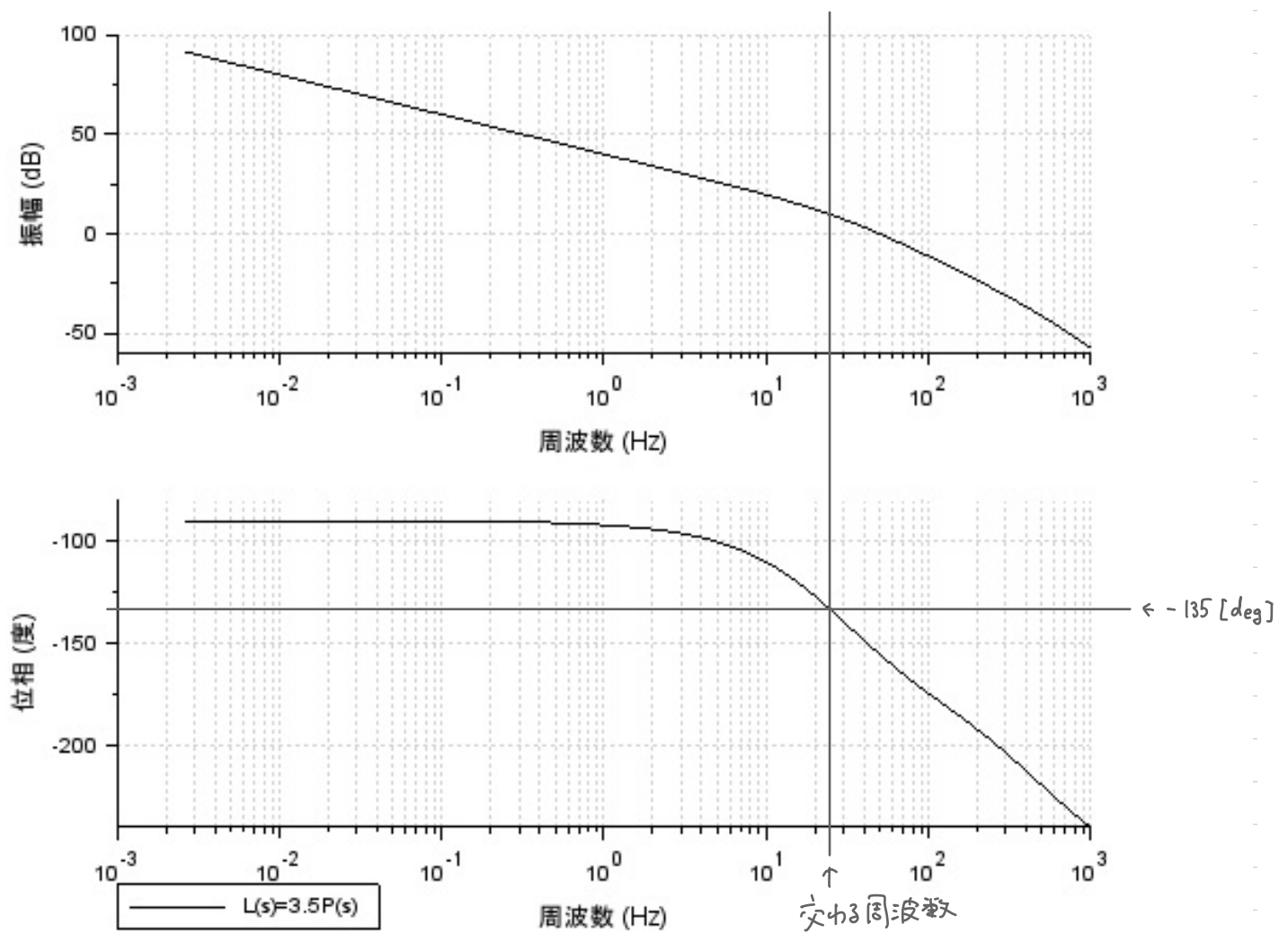


図2. $L(s) = 3.5P(s)$ のボード線図

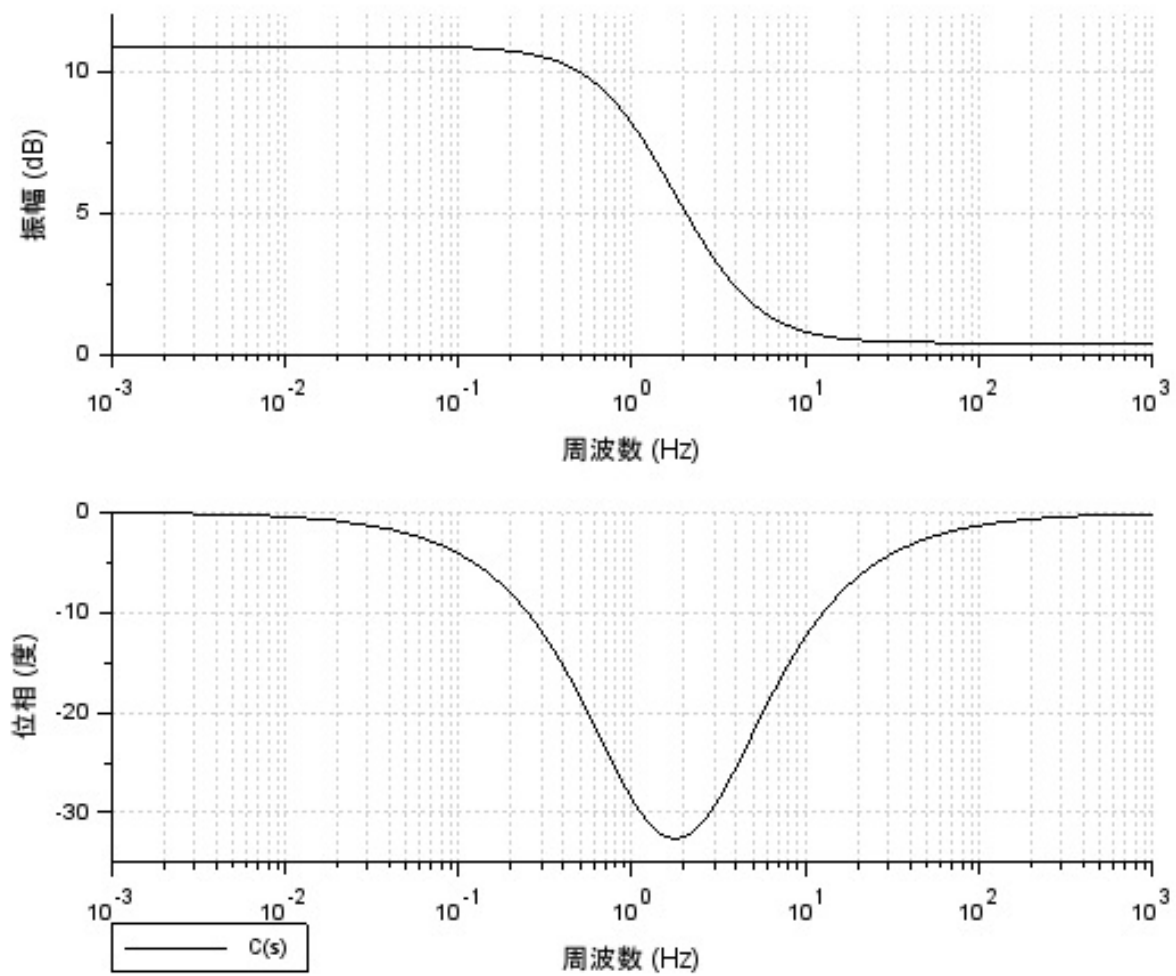


図3 位相遅れ補償器 $C(s)$ のボード線図

$$9. C(s) = K \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$

ゲイン補償器を用いて $L(s) = KP(s)$ で、ゲイン交差周波数 ω_g の値が $140 [\text{Hz}]$ となるように K を定める。

K と ω_g の関係は、

K	1	2	10	20	24	25	26
$\omega_g [\text{Hz}]$	22.64	35.96	88.21	125.49	137.40	140.20	142.95
$P_m [\text{deg}]$	49.34	34.80	8.76	-0.19	-2.46	-2.97	-3.46

よって、 $K = 25$ とする。そのときの P_m は、 $P_m = -2.97$ なので、
 $\omega_g = 140 [\text{Hz}]$ 付近で $40 + 2.97 = 42.97 [\text{deg}]$ 値まわると考える。

$$\sin(42.97^\circ) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \therefore \alpha = \frac{1 + \sin(42.97^\circ)}{1 - \sin(42.97^\circ)} \doteq 5.28$$

また、 T に $\alpha = 5.28$ を代入して、

$$T = \frac{1}{2\pi \omega_g \alpha} \doteq 0.0004947$$

とすると、(これは `scilab` に計算させる) $K = 25$ 、 $\alpha = 5.28$ のとき `scilab` のコマンドより、

位相余裕 $P_m \doteq 20.25 [\text{deg}]$ 、ゲイン交差周波数 $f_g \doteq 249.56 [\text{Hz}]$ ではないと満足していないので、 K を6周整える。

K と ω_g と P_m の関係と下記に示す。

K	25	20	15	10
$\omega_g [\text{Hz}]$	249.56	216.07	177.31	141.51
$P_m [\text{deg}]$	20.25	26.14	33.20	41.72

よって、 $K = 10$ 、 $\alpha = 5.28$ のとき、[設計仕様2] のどちらも満たす。

(2) 設計には位相進み補償器 $C(s)$ のボード線図を図4 (ページ) に示す。

横軸の範囲は 10^{-1} から $10^5 [\text{Hz}]$ とし、今まで (10^{-3} から $10^3 [\text{Hz}]$) とは変えない。

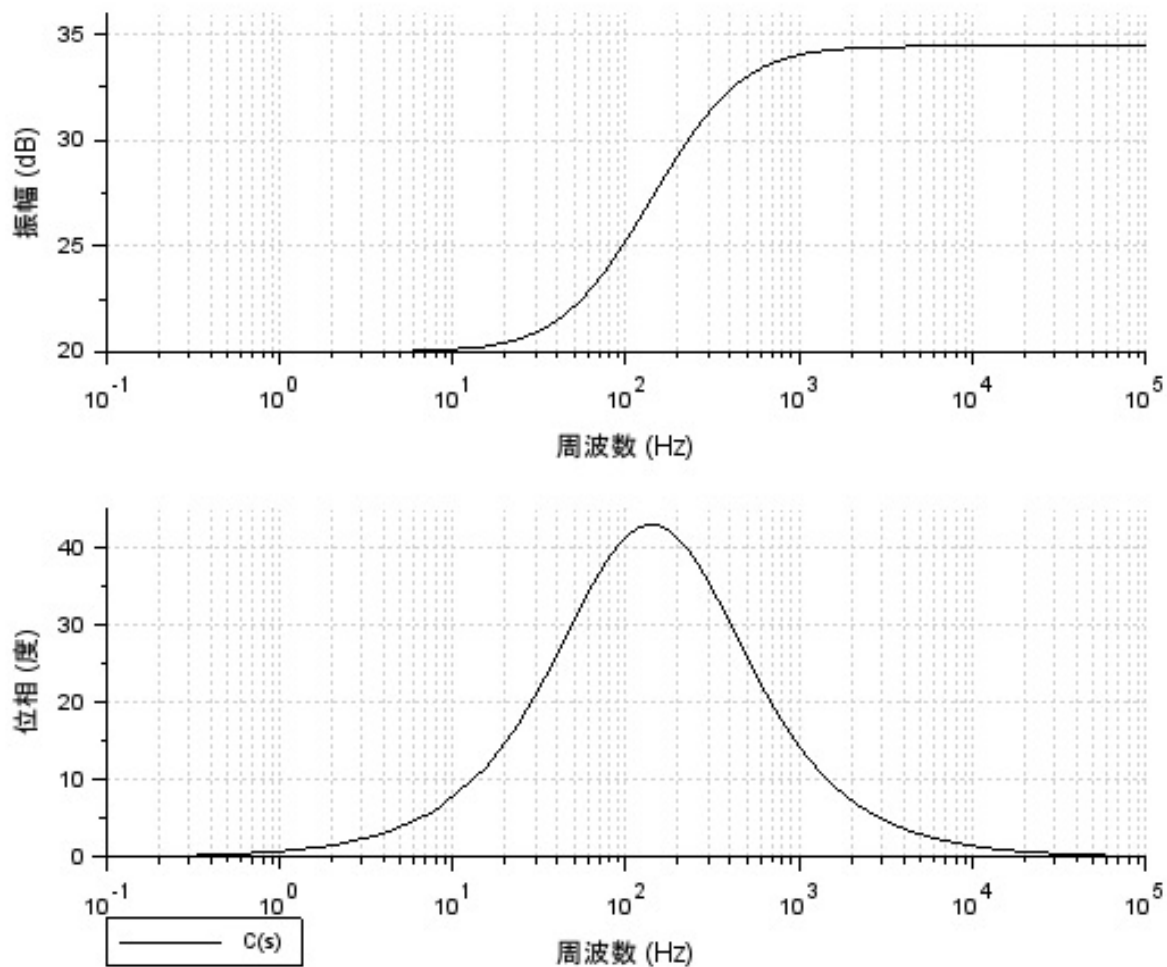


図4 位相進み補償器 $C(s)$ のボード線図

10 ステップ応答を求めるには、 $R(s) = U(s)$ とし、

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} U(s)$$

とする。課題7~9の補償器を用いて単位ステップ応答を図5(ページ)に示す。

図5より、

収束の速さが、

位相進み補償器、ゲイン補償器、位相進み補償器となる。

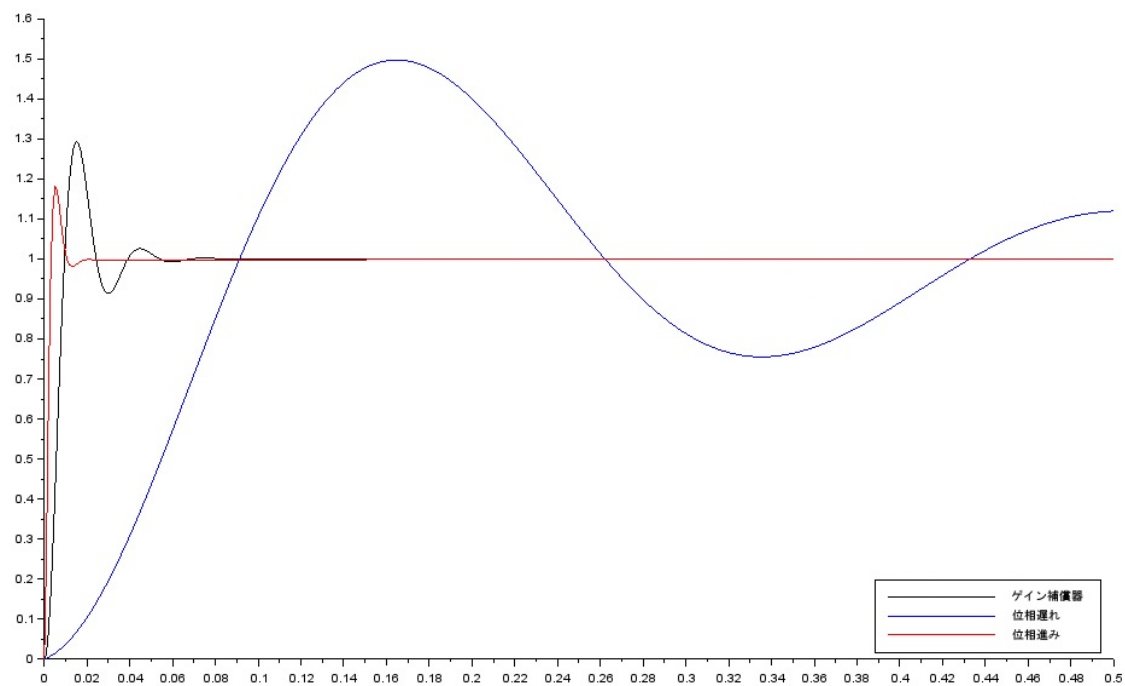


図5 各補償器を用いたステップ応答