1. (1) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e x}{\log_e x+1}\right) = \frac{(\log_e x)'(\log_e x+1) - (\log_e x)(\log_e x+1)'}{(\log_e x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(\log_e x+1) - (\log_e x)\cdot\frac{1}{x}}{(\log_e x+1)^2}$$

$$= \frac{\log_e x+1 - \log_e x}{x(\log_e x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(\log_e x+1)^2}$$

(2) $$\frac{d}{dx}\left\{\log_e(x+\sqrt{x^2+1})\right\} = (x+\sqrt{x^2+1})' \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(3) $$\int_3^5 \frac{dx}{x^3-2x^2+x} = \int_3^5 \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int_3^5 \left\{\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right\}dx$$

とおく。(A, B, C : 定数)

よって. $$(与式) = \int_3^5 \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-2)^2}dx = \int_3^5 \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-2)^2}dx$$

恒等式とみて係数を比較すると.

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \therefore A=1,\ B=-1,\ C=1$$

よって

$$(与式) = \int_3^5 \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$$

$$= \Big[\log_e x - \log_e(x-1) - (x-1)^{-1}\Big]_3^5$$

$$= \left(\log_e 5 - \log_e 4 - \frac{1}{4}\right) - \left(\log_e 3 - \log_e 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \log_e\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \log_e\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \log_e\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} = \log_e\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$$

2 (1) $\dfrac{3s^2+2s+1}{s^3+3s^2+4s+2}$ をラプラス変換

$$(与式) = \frac{3s^2+2s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$ とおく。(A, B, C : 定数)

$$(与式) = \frac{As^2+2As+2A+Bs^2+Bs+Cs+C}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{(A+B)s^2+(2A+B+C)s+(2A+C)}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

恒等式とみて係数を比較すると、

$$\begin{cases} A+B=3 & \cdots ① \\ 2A+B+C=2 & \cdots ② \\ 2A+C=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

② − ③ より B = 1

B = 1 を ① に代入して。A = 2

A = 2 を ③ に代入して、C = −3

よって、$$(与式) = \frac{2}{s+1} + \frac{s-3}{(s^2+2s+2)}$$

$$= 2\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - 4\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

よって、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+2s+1}{s^3+3s^2+4s+2}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}\right] - 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$= 2e^{-t} + e^{-t}\cos t - 4e^{-t}\sin t$$

$$= e^{-t}(2+\cos t - 4\sin t)$$

2

(2) $t\cdot e^{-3t}\sin(2t)$をラプラス変換

オイラーの公式を用いて、$\sin 2t = \frac{1}{2j}\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right)$とすると、

$$(与式) = t\cdot e^{-3t}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right) = \frac{1}{2j}t\left(e^{-(3-j2)t} - e^{-(3+j2)t}\right)$$

よって、

$$\mathcal{L}\left[t\cdot e^{-3t}\cdot\sin 2t\right] = \int_0^\infty \frac{1}{2j}t\left(e^{-(3-j2)t} - e^{-(3+j2)t}\right)e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^\infty t\left(e^{-(3-j2+s)t} - e^{-(3+j2+s)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\left[\left\{\frac{e^{-(3-j2+s)t}}{-(3-j2+s)} - \frac{e^{-(3+j2+s)t}}{-(3+j2+s)}\right\}t\right]_0^\infty - \int_0^\infty\left\{\frac{e^{-(3-j2+s)t}}{-(3-j2+s)} - \frac{e^{-(3+j2+s)t}}{-(3+j2+s)}\right\}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{0 - \left[\frac{e^{-(3-j2+s)t}}{(3-j2+s)^2} - \frac{e^{-(3+j2+s)t}}{(3+j2+s)^2}\right]_0^\infty\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{(3-j2+s)^2} - \frac{1}{(3+j2+s)^2}\right\}$$

ここで、$X = 3+s$，$Y = j2$とおくと、

$$\mathcal{L}\left[t\cdot e^{-3t}\cdot\sin 2t\right] = \frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{(X-Y)^2} - \frac{1}{(X+Y)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{Y}\left\{\frac{(X+Y)^2 - (X-Y)^2}{\{(X-Y)(X+Y)\}^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{Y}\left\{\frac{X^2+2XY+Y^2-(X^2-2XY+Y^2)}{(X^2-Y^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{Y}\left\{\frac{4XY}{(X^2-Y^2)^2}\right\} = \frac{4X}{(X^2-Y^2)^2}$$

$X = 3+s$，$Y = j2$を代入して

$$\mathcal{L}\left[t\cdot e^{-3t}\cdot\sin 2t\right] = \frac{4(3+s)}{\{(3+s)^2-(j2)^2\}^2}$$

$$= \frac{4(s+3)}{(s^2+6s+9+4)^2}$$

$$= \frac{4(s+3)}{(s^2+6s+13)^2}$$

2

(3) $\dfrac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ を逆ラプラス変換する。

$$(与式) = \frac{s^2 - s + 3}{(s+1)(s^2+5s+6)} = \frac{s^2 - s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

とおく。(A, B, C は定数)

よって、

$$(与式) = \frac{A(s^2+5s+6) + B(s^2+4s+3) + C(s^2+3s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{s^2(A+B+C) + s(5A+4B+3C) + (6A+3B+2C)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

恒等式とみて、係数を比較すると、

$$\begin{cases} A + B + C = 1 & \cdots ① \\ 5A + 4B + 3C = -1 & \cdots ② \\ 6A + 3B + 2C = 3 & \cdots ③ \end{cases}$$

② − ①×3 より、 $2A + B = -4$ … ④

③ − ①×2 より、 $4A + B = 1$ … ⑤

⑤ − ④ より、 $2A = 5$ ∴ $A = \frac{5}{2}$

$A = \frac{5}{2}$ を ⑤ に代入して、 $4 \cdot \frac{5}{2} + B = 1 \Leftrightarrow B = 1 - 10 = -9$

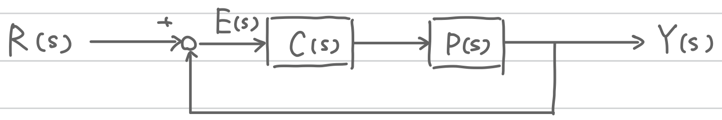
$A = \frac{5}{2}$, $B = -9$ を ① に代入して、 $\frac{5}{2} - 9 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 + 9 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

よって、 $\dfrac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \dfrac{\frac{5}{2}}{s+1} + \dfrac{-9}{s+2} + \dfrac{\frac{15}{2}}{s+3}$ であるから、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\right] = \frac{5}{2}e^{-t} - 9e^{-2t} + \underline{\frac{15}{2}e^{-3t}}$$

6 $\quad P(s) = \dfrac{K_t}{LJs^3 + (RJ + L\mu)s^2 + (R\mu + K_eK_t)s}$

テキスト 図20 (p29) の制御系で、外乱 $V(s) = 0$, 観測雑音 $W(s) = 0$ として、



という形で表せるので、

一巡伝達項 $L(s)$, 偏差 $E(s)$, 出力 $Y(s)$ は、目標入力 $R(s)$ と補償器 $C(s)$ と制御対象 $P(s)$ より、

$$L(s) = P(s) \cdot C(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + P(s) \cdot C(s)}$$

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} R(s) = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} R(s)$$

と表すことができる。6～10 の問題では、$L(s)$, $E(s)$, $Y(s)$ をこのように定義する。

(1) $C(s) = 1$ より、一巡伝達関数 $L(s)$ は、

$$L(s) = P(s)C(s) = P(s) = \frac{K_t}{L \cdot Js^3 + (RJ + L\mu)s^2 + (R\mu + K_eK_t)s}$$

(2) システムのゲイン余裕 G_m, 位相余裕 P_m, ゲイン交差周波数 ω_g, 位相交差周波数 ω_p は、$L(s)$ のボード線図から求めることができる。scilab でこれらの値を求めるコマンドを実行した結果を示す。

ゲイン余裕 $\quad G_m \fallingdotseq 25.9$ [dB]
位相余裕 $\quad P_m \fallingdotseq 49.3$ [deg]
ゲイン交差周波数 $\quad \omega_g \fallingdotseq 22.6$ [Hz]
位相交差周波数 $\quad \omega_p \fallingdotseq 124.6$ [Hz]

(3) 定常速度偏差とは、単位ランプ入力に対する定常偏差のことである。

よって定常速度偏差 ϵ_v は、単位ランプ入力 $\frac{1}{s^2}$ より、

$$\epsilon_v = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s)\cdot\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sL(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{\frac{K_t}{L\cdot J\cdot s^2+(RJ+L\mu)s+(R\mu+K_eK_t)}} = \frac{R\mu+K_eK_t}{K_t}$$

各パラメータを代入して

$$\epsilon_v = \frac{3.2\cdot 9.0\times10^{-5}+4.9\times10^{-3}\cdot 0.47}{0.47}$$

$$= \frac{0.288\times10^{-3}+2.303\times10^{-3}}{0.47}$$

$$= \frac{2.591}{0.47}\times10^{-3} \fallingdotseq 5.51\times10^{-3}$$

7.

(1) 課題6のシステムの $L(s)$ のボード線図を図1(7ページ)に示す。

位相余裕を $P_m = 40$ [deg] とするには $L(s)$ の位相が -140 [deg] の周波数に着目する。
この周波数での $L(s)$ のゲインは -4 [dB] より、4 [dB] 分のゲイン補償器を設定できる。
よって、

$$20\log_{10}K = 4 \iff \log_{10}K = 0.2 \quad \therefore K = 10^{0.2} \fallingdotseq 1.58$$

よって $L(s)$ は、

$$L(s) = P(s)C(s) = 10^{0.2}\cdot P(s) \fallingdotseq 1.58P(s)$$

Kを定め、前問と同様に scilab コマンドより実行した結果は

ゲイン余裕 $G_m \fallingdotseq 21.9$ [dB]
位相余裕 $P_m \fallingdotseq 39.5$ [deg]
ゲイン交差周波数 $\omega_g \fallingdotseq 31.0$ [Hz]
位相交差周波数 $\omega_p \fallingdotseq 124.6$ [Hz]

位相余裕 $P_m \fallingdotseq 39.5$ [deg] となり、おおよそ $P_m = 40$ [deg] を満たすことができた。

(2). G(s)より、定常速度偏差 ϵ_v は、

$$\epsilon_v = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sL(s)}$$

となる。7(1)より $L(s) = P(s)C(s) \fallingdotseq 1.58P(s)$ より、

$$\epsilon_v = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1.58 \quad \dfrac{K_t}{L\cdot J\cdot s^2 + (RJ + l\mu)s + (R\mu + K_e K_t)}}$$

$$= \frac{1}{1.58} \cdot \frac{R\mu + K_e K_t}{K_t}$$

各パラメータを代入して、

$$\epsilon_v = \frac{2.591}{1.58 \cdot 0.47} \times 10^{-3} \fallingdotseq 3.49 \times 10^{-3} = \underline{0.00349}$$

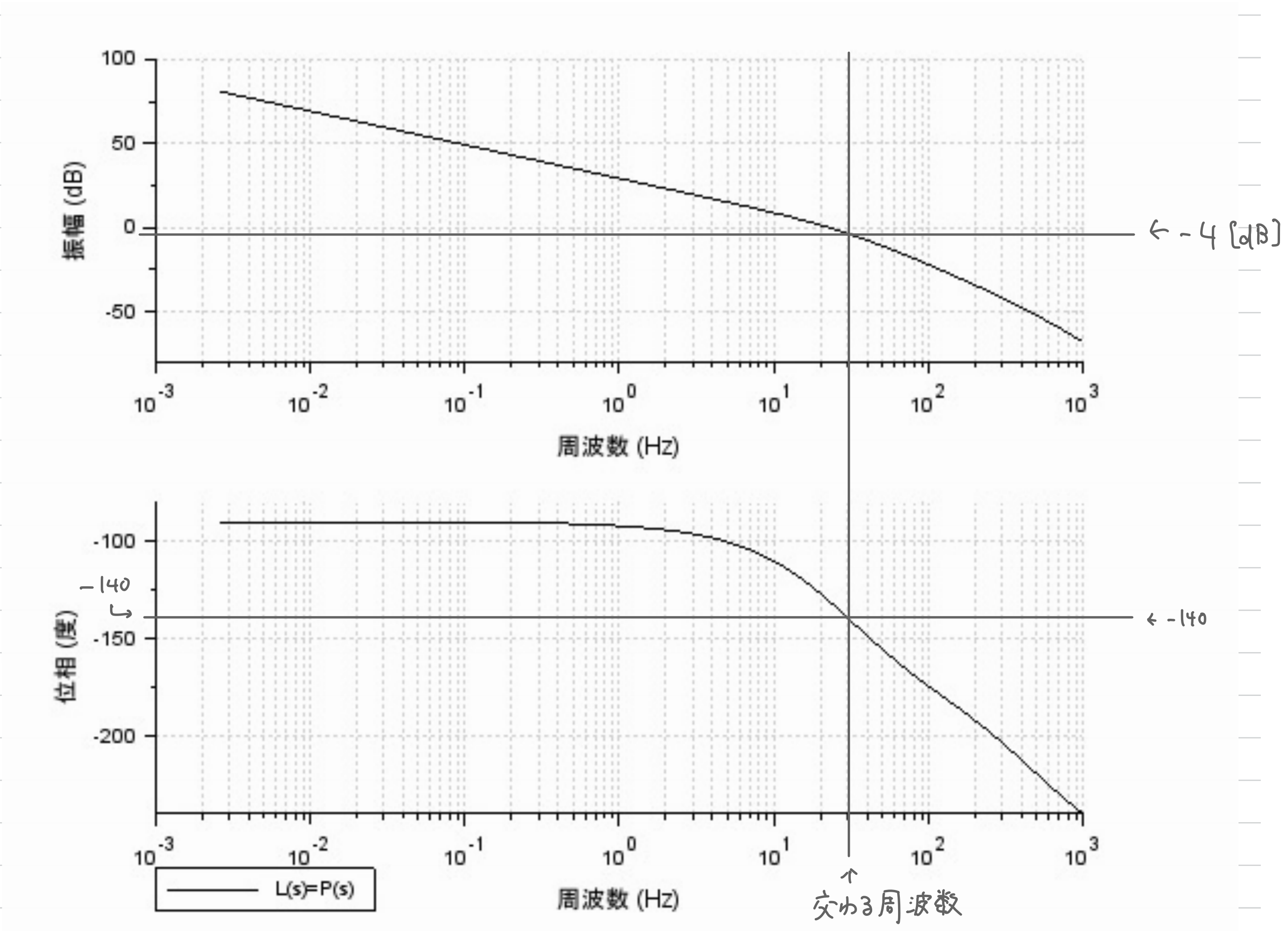


図1 課題6のL(s)のボード線図

8、6(3)、7(2)より、定常速度偏差ϵ_vは、

(1) $\epsilon_v = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)}$

$$= \frac{1}{K} \cdot \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3}$$

となる。ここで、[設計仕様1]より、$\epsilon_v \leqq 0.0017$を満たすには、

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3} \leqq 0.0017 \iff K \geqq \frac{2.591}{0.799} \fallingdotseq 3.2428$$

よって、$K = 3.5$とすることにする。Kをデシベルに変換して、$K = 20\log_{10} 3.5 \fallingdotseq 10.88$ [dB]

ゲイン補償器$C(s) = K = 10.88$を使用して
$L(s) = C(s)P(s) = 10.88\,P(s)$のボード線図を図2(9ページ)に示す。

位相余裕を$P_m = 45$ [deg]とするには$L(s)$の位相が-135 [deg]の周波数は24 [Hz]と読みとれる。また、αとゲイン周波数ω_gと位相余裕P_m [deg]の関係は、

α	0.05	0.1	0.15	0.2
ω_g [Hz]	14.39	24.20	31.73	37.95
P_m [deg]	49.78	40.43	33.82	29.19

であったので、$\alpha = 0.1$のとき、ω_gがおおむね24 [Hz]となるので$\alpha = 0.1$とする。
また、αが大きくなるにつれ、P_mが小さくなることから、安全性を見積った意味を理解した。

$\alpha = 0.1$、$K = 10.88$のとき、位相遅れ補償器を用いた結果は、scilabのコマンドより、

ゲイン余裕 $G_m \fallingdotseq 24.17$ [dB]
位相余裕 $P_m \fallingdotseq 40.43$ [deg]
ゲイン交差周波数 $\omega_g \fallingdotseq 24.21$ [Hz]
位相交差周波数 $\omega_p \fallingdotseq 117.69$ [Hz]

となり、位相余裕P_mがおおむね40 [deg]を満たすことができた。

また、定常速度偏差ϵ_vは、

$$\epsilon_v = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1+Ts}{sK(1+\alpha Ts)P(s)}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{(1+Ts)(LJs^3 + (RJ+L\mu)s^2 + (R\mu + K_e K_t)s)}{sK(1+\alpha Ts) \cdot K_t}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{As^4 + Bs^3 + Cs^2 + (R\mu + K_e K_t)s}{\alpha \cdot K \cdot K_t \cdot Ts^2 + K \cdot K_t \cdot s}$$

$$= \frac{R\mu + K_e K_t}{K \cdot K_t} = \frac{1}{K} \cdot \frac{R\mu + K_e K_t}{K_t}$$

$$= \frac{1}{3.5} \cdot \frac{2.591}{0.47} \times 10^{-3} \fallingdotseq 0.00158 \leqq 0.0017$$

となり、[設計仕様1]を満たしている。

(2) 位相遅れ補償器 C(s) のボード線図を 図3 (10ページ) に示す。

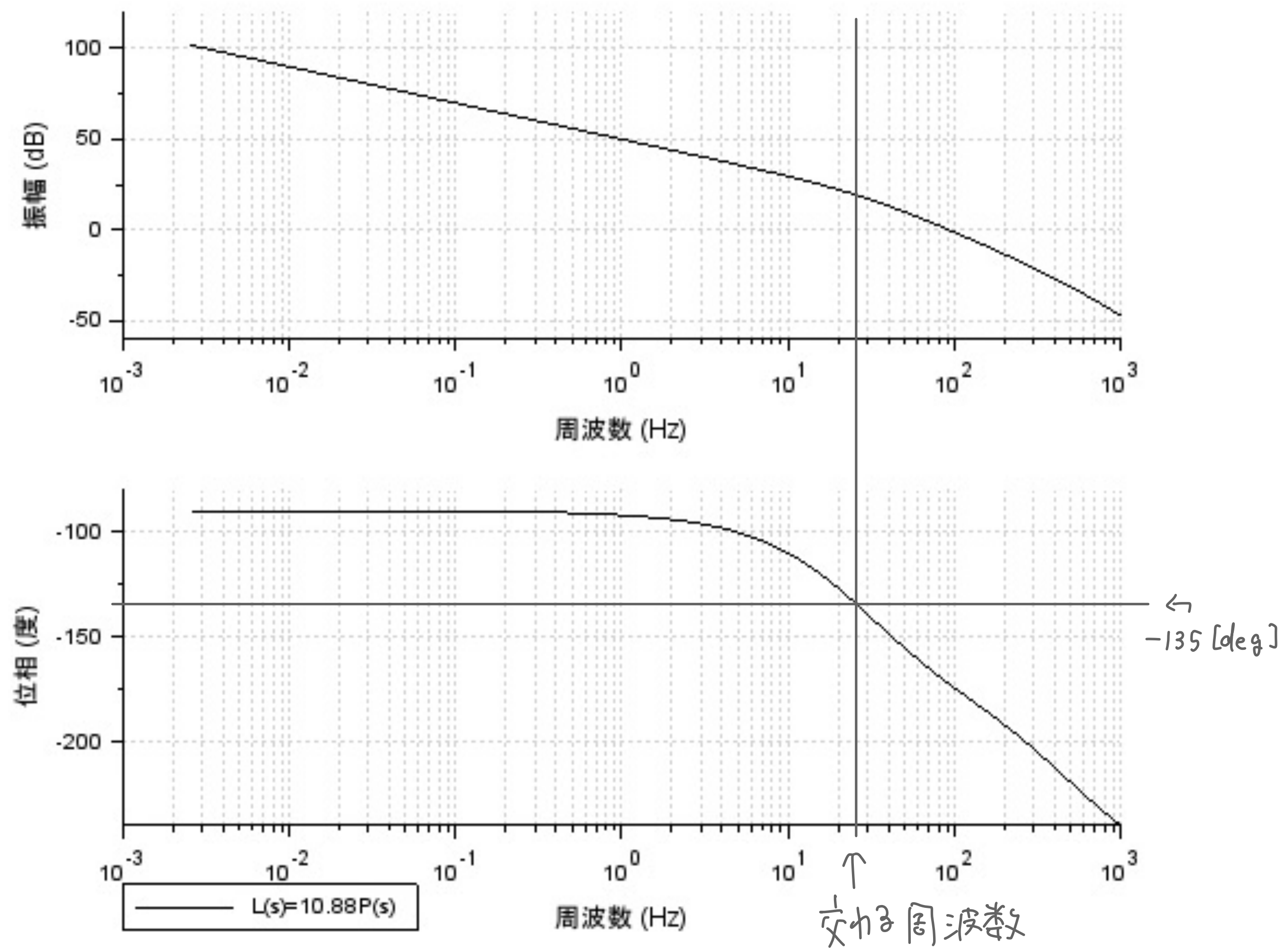


図2. L(s) = 10.88 P(s) のボード線図

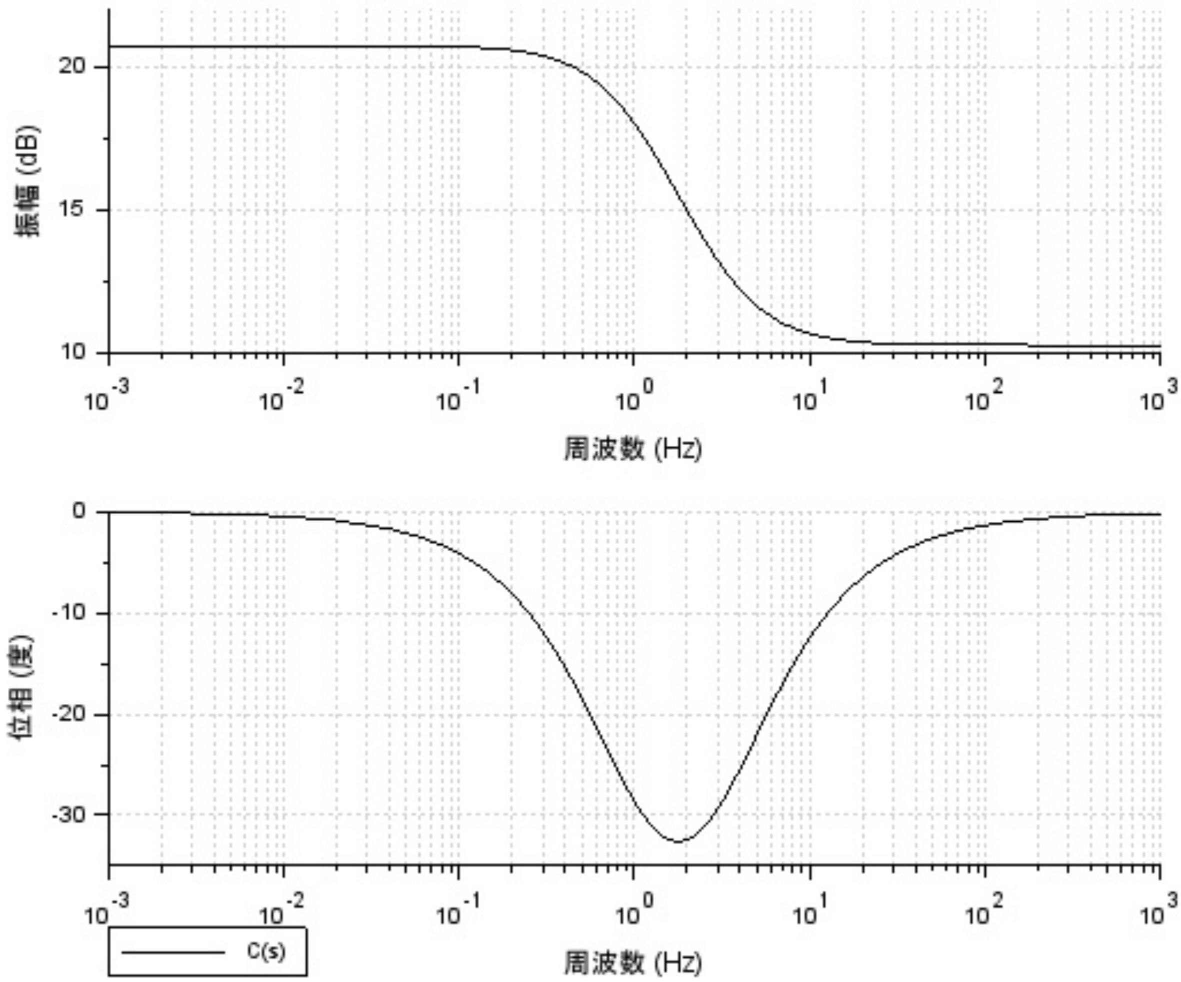


図3 位相遅れ補償器 C(s) のボード線図

9. $C(s) = K \cdot \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$, $\alpha > 1$

ゲイン補償器を用いた $L(s) = KP(s)$ で、ゲイン交差周波数 ω_g の値が 140 [Hz] となるように K を定める。

K と ω_g の関係は、

K	1	2	10	20	24	25	26
ω_g [Hz]	22.64	35.96	88.21	125.49	137.40	140.20	142.95
Pm [deg]	49.34	34.80	8.76	−0.19	−2.46	−2.97	−3.46

よって、K = 25 とする。そのときの Pm は、Pm = −2.97 なので、
ω_g = 140 [Hz] 付近で 40 + 2.97 = 42.97 [deg] 進ませることを考える。

$\sin(42.97°) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ $\therefore \alpha = \frac{1 + \sin(42.97°)}{1 - \sin(42.97°)} \fallingdotseq 5.28$

また、T に α = 5.28 を代入して、

$T = \frac{1}{2\pi \omega_g \sqrt{\alpha}} \fallingdotseq 0.0004947$

とする。(これは scilab に計算させる) K = 25、α = 5.28 のとき scilab のコマンドより、

位相余裕 Pm ≒ 20.25 [deg]
ゲイン交差周波数 fg ≒ 249.56 [Hz]

で仕様を満足していないので、K の値を調整する。
K と ω_g と Pm の関係を下に示す。

K	25	20	15	10
ω_g [Hz]	249.56	216.07	177.31	41.51
Pm [deg]	20.25	26.14	33.20	131.72

よって、K = 10、α = 5.28 のとき、[設計仕様2] のどちらも満たす。

(2) 設計した位相進み補償器 C(s) のボード線図を図4 (11ページ) に示す。

横軸の範囲は 10^{-1} から 10^{5} [Hz] とし、今まで (10^{-3} から 10^{3} [Hz]) とは変更した。

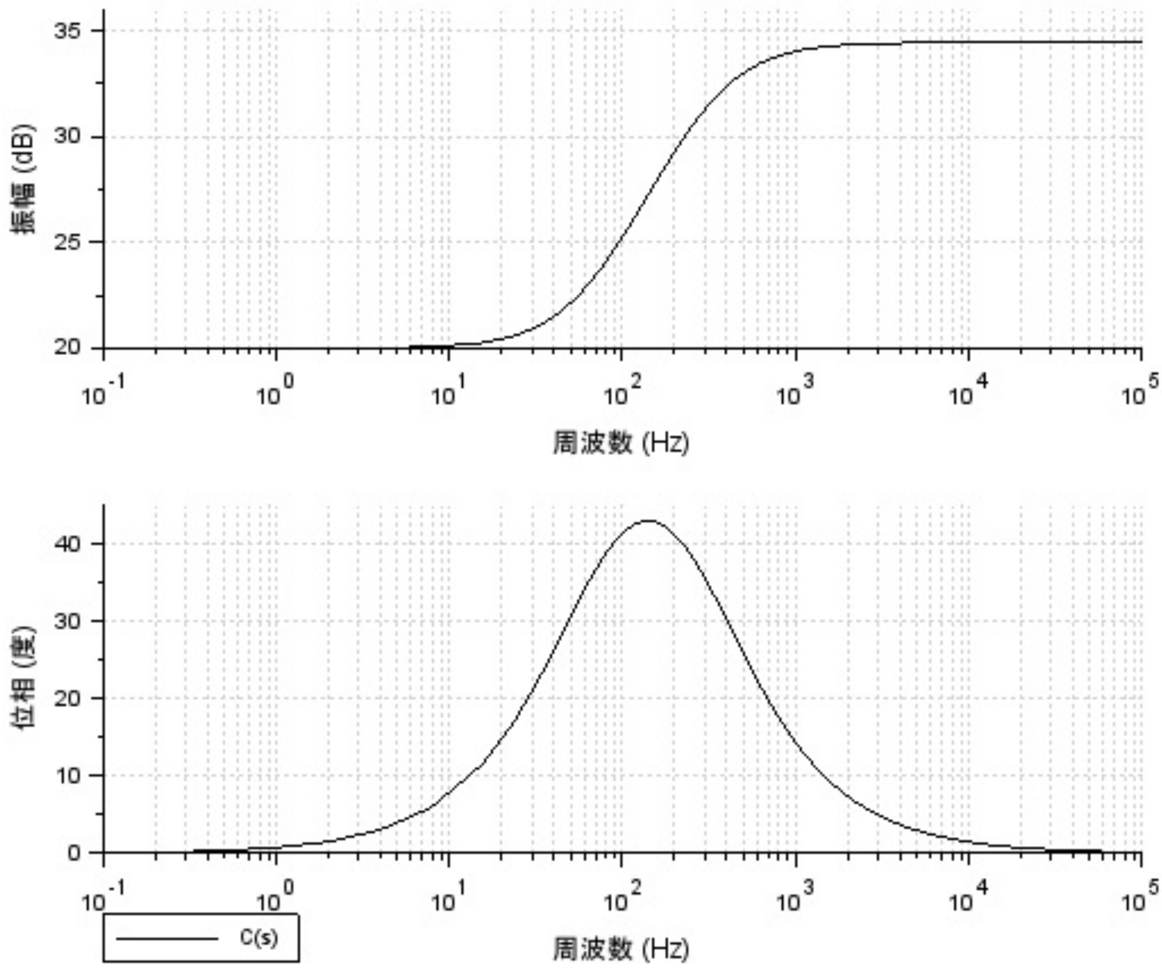


図4 位相進み補償器 C(s) のボード線図

10 ステップ応答を求めるには，R(s) = U(s) とし，

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} U(s)$$

とする。課題 7〜9 の補償器を用いた単位ステップ応答を図5（12 ページ）に示す。

図5より，

位相進み補償器，ゲイン補償器，位相進み補償器
の順番で収束が早くなった。

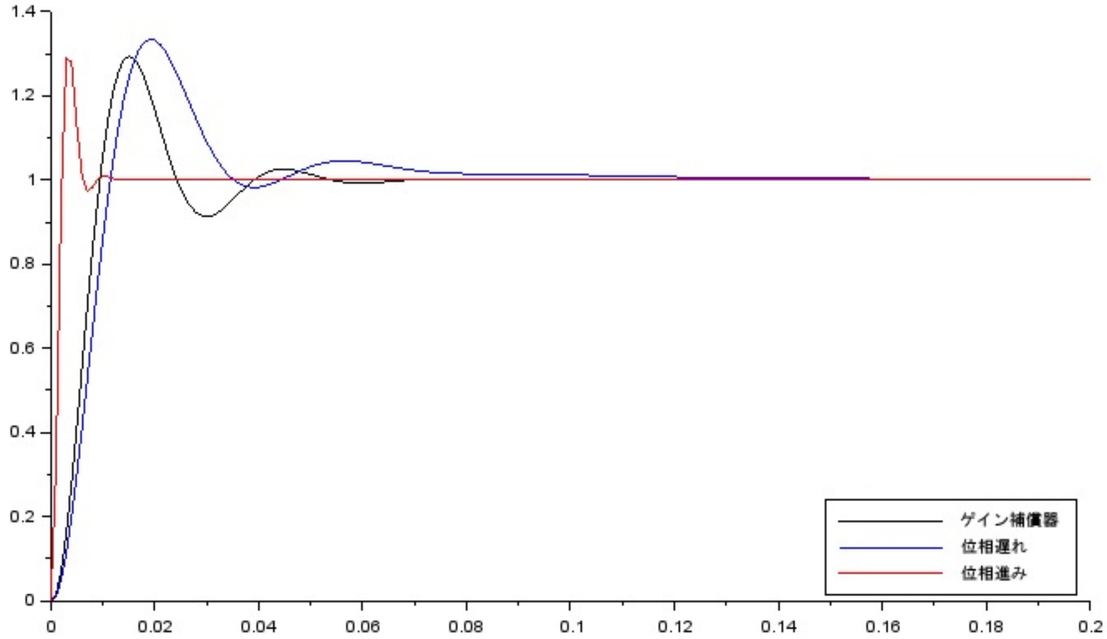


図5　各補償器を用いたステップ応答