第三種オイラー超完全数のダブル B 型解について

梶田光

2025/08/22

1. はじめに

宮本 (2023) は第三種オイラー超完全数を, 以下の連立方程式の解と定めた:

$$\begin{cases} \overline{h}A = 2h\varphi(a) + \overline{h}m + \overline{h}, \\ \varphi(A) = a + m \end{cases}$$

なお, 慣例で $n-1$ のことを $\overline{n}$ と書き, h は奇素数, m は一般の(負になりうる)整数を表す.

この方程式は $a = h \cdot 2^e, A = h \cdot 2^e + m + 1$ の形の解を持つように設計されている.

しかし, オイラー関数は複雑な関数であるから, 上の形以外の解も存在する.

そこで, そのような例外解が発生する条件や例外解の性質などを調べる研究が発展してきた.

2. ダブル B 型解

宮本 (2025) は特定の h や m について, ダブル B 型解と呼ばれる解の構造が現れることを発見し, その特定の h, m について解を特定した.

ここで, ダブル B 型解とは, ある正整数の定数 α, β について, $a = \alpha p, A = \beta q$ $(p, q : \mathrm{prime}, (\alpha, p) = (\beta, q) = 1)$ と書ける解が 2 個以上存在することを言う.

下は宮本 (2025) が計算した解の中で典型的なダブル B 型解のみを抜き出した表である (したがってこれらがそれぞれの h, m の解をすべて列挙しているわけではない):

$h=3, m=-22$	
a	A
$2 \cdot 23$	$3^2 \cdot 5$
$2 \cdot 29$	$3^2 \cdot 7$
$2 \cdot 41$	$3^2 \cdot 11$
$2 \cdot 47$	$3^2 \cdot 13$
$2 \cdot 59$	$3^2 \cdot 17$
$2 \cdot 101$	$3^2 \cdot 31$
$2 \cdot 131$	$3^2 \cdot 41$
$2 \cdot 137$	$3^2 \cdot 43$
$2 \cdot 149$	$3^2 \cdot 47$

$h=3, m=-19$	
a	A
67	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
139	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$
163	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$
211	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$
283	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 23$
379	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 31$
499	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 41$
523	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 43$
571	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 47$

$h=3, m=-9$	
a	A
$3 \cdot 7$	$2^2 \cdot 7$
$3 \cdot 11$	$2^2 \cdot 13$
$3 \cdot 23$	$2^2 \cdot 31$
$3 \cdot 31$	$2^2 \cdot 43$
$3 \cdot 43$	$2^2 \cdot 61$
$3 \cdot 47$	$2^2 \cdot 67$
$3 \cdot 67$	$2^2 \cdot 97$
$3 \cdot 71$	$2^2 \cdot 103$
$3 \cdot 103$	$2^2 \cdot 151$

補題 2.1: ダブル B 型解の係数 α, β は $\dfrac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\overline{h}}{2h}$ を満たす.

Proof: 今, $(a, A) = (\alpha p_0, \beta q_0), (\alpha p_1, \beta q_1)$ がどちらも解であると仮定する. (ただし, $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ はすべて素数で, $(\alpha, p_0) = (\alpha, p_1) = (\beta, q_0) = (\beta, q_1) = 1$ と仮定する.)

さて, p_0, p_1 をまとめて p, q_0, q_1 をまとめて q と書くと, 下の p と q に関する連立一次方程式は 2 つ以上の解を持つ:

$$\begin{cases} \overline{h}\beta q = 2h\varphi(\alpha)\overline{p} + \overline{h}m + \overline{h} \\ \varphi(\beta)\overline{q} = \alpha p + m \end{cases}$$

したがって, その係数行列 $\begin{pmatrix} \overline{h}\beta & -2h\varphi(\alpha) \\ \varphi(\beta) & -\alpha \end{pmatrix}$ の行列式 $-\overline{h}\alpha\beta + 2h\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ は 0 に等しい.

よって $\dfrac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\overline{h}}{2h}$. ■

さて, これが α, β について何を意味するのか考える.

実は筆者の考案した φ^k 同値の論文の中で証明されている補題を利用すると, ここから即座に $\mathrm{rad}(\alpha)\mathrm{rad}(\beta) = 2h$ が言える (ここで $\mathrm{rad}(n)$ は n の根基, radical を表す.)

しかし, 今回はより直感的な理解のため, その補題の限定されたものを利用し, $\mathrm{rad}(\alpha)\mathrm{rad}(\beta) = 2h$ を証明してみる.

補題 2.2: 正整数 α, β に対して $\dfrac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\overline{h}}{2h}$ ならば, $\mathrm{rad}(\alpha)\mathrm{rad}(\beta) = 2h$.

Proof: $X = \mathrm{rad}(\alpha)\mathrm{rad}(\beta)$ とおく.

このとき, 補助関数 $\varphi'(n) := n \displaystyle\prod_{p^e \,\|\, n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^e$ とおく.

すると, $\mathrm{rad}(\alpha), \mathrm{rad}(\beta)$ は無平方数であり, さらに $\dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \displaystyle\prod_{p \,|\, \alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ であることから (β についても同様), $\dfrac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\varphi'(X)}{X}$.

さて, $\dfrac{\varphi'(X)}{X} = \dfrac{\overline{h}}{2h} = \dfrac{\frac{\overline{h}}{2}}{h}$ と書くと, 右辺は既約分数形であるから, ある正整数 k を用いて $X = kh$ と書ける.

φ' が完全乗法的関数, つまり任意の正整数 n, m について $\varphi'(nm) = \varphi'(n)\varphi'(m)$ が成り立つことに注意すると $\dfrac{\varphi'(X)}{X} = \dfrac{\varphi'(k) \cdot \varphi'(h)}{hk} = \dfrac{\varphi'(k)}{k} \cdot \dfrac{\overline{h}}{h} = \dfrac{\frac{\overline{h}}{2}}{h}$.

よって両辺を比較すると $\dfrac{\varphi'(k)}{k} = \dfrac{1}{2}$.

右辺は既約分数形であるから, さらにある整数 k' を用いて $k = 2k'$ と書ける.

すると $\dfrac{\varphi'(k)}{k} = \dfrac{\varphi'(k') \cdot \varphi'(2)}{2k'} = \dfrac{\varphi'(k')}{k'} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

よって $\dfrac{\varphi'(k')}{k'} = 1$, だが, φ' の定義より任意の 2 以上の整数 n について, n は素因数を持っているので $\varphi'(n) < n$.

したがって $k'=1$ で, $X=kh=2hk'=2h$ と書ける. ■

定理 2.1: 第三種オイラー超完全数のダブル B 型解は, 以下のいずれかに当てはまる:

- $\alpha=1,\beta=2^e h^f, m=\dfrac{-h-1-2^e\overline{h}h^f}{h+1}$
- $\alpha=2^e,\beta=h^f, m=-\overline{h}h^f-h2^e+\overline{h}$
- $\alpha=h^f,\beta=2^e, m=-2h^f-2^e+1.$

Proof: 先の補題たちより, $\mathrm{rad}(\alpha)\mathrm{rad}(\beta)=2h$ から, $(\mathrm{rad}(\alpha),\mathrm{rad}(\beta))$ の組は $(1,2h),(2,h),(h,2),(2h,1)$ のいずれかに分類できる.

$a=\alpha p, A=\beta q$ を定義式に代入した式を再掲する:

$$\begin{cases}\overline{h}\beta q &= 2h\varphi(\alpha)\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A})\\ \varphi(\beta)\overline{q} &= \alpha p+m \qquad ...(\mathrm{B})\end{cases}$$

(1) $(\mathrm{rad}(\alpha),\mathrm{rad}(\beta))=(1,2h)$ の場合

　このとき $\alpha=1,\beta=2^e h^f\ (e,f>0)$ と書ける.

$$\overline{h}2^e h^f q = 2h\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}2^e h^f \overline{q} = 2hp+2hm \qquad ...(\mathrm{B})\times 2h$$

　したがって, $\overline{h}2^e h^f=-2h-(h+1)m+\overline{h}$ より, $m=\dfrac{-h-1-\overline{h}2^e h^f}{h+1}$ を得る.

(2) $(\mathrm{rad}(\alpha),\mathrm{rad}(\beta))=(2,h)$ の場合

　このとき $\alpha=2^e,\beta=h^f\ (e,f>0)$ と書ける.

$$\overline{h}h^f q = h2^e\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}h^f \overline{q} = h2^e p+hm \qquad ...(\mathrm{B})\times 2h$$

　したがって, $\overline{h}h^f=-h2^e-m+\overline{h}$ より, $m=-\overline{h}h^f-h2^e+\overline{h}$.

(3) $(\mathrm{rad}(\alpha),\mathrm{rad}(\beta))=(h,2)$ の場合

　このとき $\alpha=h^f,\beta=2^e\ (e,f>0)$ と書ける.

$$\overline{h}2^e q = 2\overline{h}h^f\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}2^e \overline{q} = 2\overline{h}h^f p+2\overline{h}m \qquad ...(\mathrm{B})\times 2\overline{h}$$

　したがって, $\overline{h}2^e=-2\overline{h}h^f-\overline{h}m+\overline{h}$ より, $m=-2h^f-2^e+1$.

(4) $\mathrm{rad}(\alpha),\mathrm{rad}(\beta))=(2h,1)$ の場合

　このとき $\alpha=2^e h^f,\beta=1\ (e,f>0)$ と書ける.

$$\overline{h}q = \overline{h}2^e h^f\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}\overline{q} = \overline{h}2^e h^f\overline{p}+\overline{h}m \qquad ...(\mathrm{B})\times \overline{h}$$

　しかし, これを引くと $\overline{h}=-\overline{h}2^e h^f+\overline{h}$ を得るが, この式は成立しない.

■