第三種オイラー超完全数のダブル B 型解について

梶田光

2025/09/22

1. はじめに

第三種オイラー超完全数とは, 以下の連立方程式の解のことである:

$$\begin{cases} \overline{h}A = 2h\varphi(a) + \overline{h}m + \overline{h}, \\ \varphi(A) = a + m \end{cases}$$

なお, 慣例で $n-1$ のことを $\overline{n}$ と書く.

飯高先生によって始められた一般化された完全数の研究では, 自然数 α, β を固定したとき, $a = \alpha p, A = \beta q$ $(p, q : \mathrm{prime}, \gcd(\alpha, p) = \gcd(\beta, q) = 1)$ の形の解が複数個存在するならば, その解をまとめてダブル B 型解とよぶ.

補題 1.1: a, b, c, d が無平方数で, $\dfrac{\varphi(a)\varphi(b)}{ab} = \dfrac{\varphi(c)\varphi(d)}{cd}$ ならば, $ab = cd$.

これは φ^k 同値の中で証明されている補題 「$I \geq 1$ 個の無平方数の列 $(\alpha_1, ..., \alpha_I)$ と $(\beta_1, ..., \beta_I)$ について, $\displaystyle\prod_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{\alpha_i} = \prod_i \frac{\varphi(\beta_i)}{\beta_i}$ ならば $\displaystyle\prod_i \alpha_i = \prod_i \beta_i$」の $i = 2$ の場合である.

定理 1.1: ダブル B 型解の係数と平行移動 α, β と m は以下のいずれかを満たす.

- $\alpha = 1, \beta = 2^e h^f, m = \dfrac{-h - 1 - 2^e \overline{h} h^f}{h + 1}$
- $\alpha = 2^e, \beta = h^f, m = -\overline{h} h^f - h 2^e + \overline{h}$
- $\alpha = h^f, \beta = 2^e, m = -2h^f - 2^e + 1$

Proof: 今, $(a, A) = (\alpha p_0, \beta q_0), (\alpha p_1, \beta q_1)$ がどちらも解であると仮定する.

p_0, p_1 のことをまとめて p と書き, q_0, q_1 のことをまとめて q と書くと, 下の連立方程式は 2 つの解を持つ:

$$\begin{cases} \overline{h}\beta q &= 2h\varphi(\alpha)\overline{p} + \overline{h}m + \overline{h}, \\ \varphi(\beta)\overline{q} &= \alpha p + m \end{cases}$$

これは p, q に関する連立一次方程式とみなすことができる.

よって, その係数行列 $\begin{pmatrix} \overline{h}\beta & 2h\varphi(\alpha) \\ \varphi(\beta) & \alpha \end{pmatrix}$ の行列式 $\overline{h}\alpha\beta - 2h\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ は 0 に等しい.

したがって $\dfrac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\overline{h}}{2h}$.

$x=\mathrm{rad}(\alpha), y=\mathrm{rad}(\beta)$ とおけば, $\dfrac{\varphi(x)}{x}=\dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha}, \dfrac{\varphi(y)}{y}=\dfrac{\varphi(\beta)}{\beta}$ より, $\dfrac{\varphi(x)\varphi(y)}{xy}=\dfrac{\overline{h}}{2h}=\dfrac{\varphi(2)\varphi(h)}{2h}$.

したがって 補題 1.1 より $\mathrm{rad}(\alpha)\mathrm{rad}(\beta)=xy=2h$ で, したがって係数は以下の 4 パターンがあり得る.

- $\alpha=1, \beta=2^e h^f$
- $\alpha=2^e, \beta=h^f$
- $\alpha=h^f, \beta=2^e$
- $\alpha=2^e h^f, \beta=1$

これらを定義式から

$$\begin{cases} \overline{h}\beta q &= 2h\varphi(\alpha)\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}) \\ \varphi(\beta)\overline{q} &= \alpha p+m \qquad ...(\mathrm{B}) \end{cases}$$

に代入する.

(1) $\alpha=1, \beta=2^e h^f$ の場合

$$\overline{h}2^e h^f q = 2h\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}2^e h^f \overline{q} = 2hp+2hm \qquad ...(\mathrm{B})\times 2h$$

したがって, $\overline{h}2^e h^f=-2h-(h+1)m+\overline{h}$ より, $m=\dfrac{-h-1-\overline{h}2^e h^f}{h+1}$ を得る.

(2) $\alpha=2^e, \beta=h^f$ の場合

$$\overline{h}h^f q = h2^e\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}h^f\overline{q} = h2^e p+hm \qquad ...(\mathrm{B})\times 2h$$

したがって, $\overline{h}h^f=-h2^e-m+\overline{h}$ より, $m=-\overline{h}h^f-h2^e+\overline{h}$.

(3) $\alpha=h^f, \beta=2^e$ の場合

$$\overline{h}2^e q = 2\overline{h}h^f\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}2^e\overline{q} = 2\overline{h}h^f p+2\overline{h}m \qquad ...(\mathrm{B})\times 2\overline{h}$$

したがって, $\overline{h}2^e=-2\overline{h}h^f-\overline{h}m+\overline{h}$ より, $m=-2h^f-2^e+1$.

(4) $\alpha=2^e h^f, \beta=1$ の場合

$$\overline{h}q = \overline{h}2^e h^f\overline{p}+\overline{h}m+\overline{h} \qquad ...(\mathrm{A}),$$
$$\overline{h}\overline{q} = \overline{h}2^e h^f\overline{p}+\overline{h}m \qquad ...(\mathrm{B})\times \overline{h}$$

しかし, これを引くと $\overline{h}=-\overline{h}2^e h^f+\overline{h}$ を得るが, この式は成立しない.

■