

n と $\varphi(n)$ の比例関係について

梶田光

2025/09/13

1. はじめに

$n = 2\varphi(n)$ や $n = 3\varphi(n)$ は飯高先生によって調べられており、解はそれぞれ $n = 2^e$ ($e > 0$), $n = 2^e 3^f$ ($e, f > 0$) の形に書けることが証明されている.

そこで、今回はより一般的な n と $\varphi(n)$ の比例関係について考察した.

以降、 A, B を $\gcd(A, B) = 1$ を満たす正の定数で、 $An - B\varphi(n) = 0$ の形の方程式の解について考える.

2. $A = 1$ の場合

定理 2.1: $n - B\varphi(n) = 0$ に解が存在するならば、 $B \leq 3$.

Proof: B の偶奇で場合分けをする.

(1) B : even の場合

n は偶数なので $n = 2^e L$ ($e > 0, L$: odd) と書ける.

これを $n - B\varphi(n) = 0$ に代入すると $2^e L - B \cdot 2^{e-1} \varphi(L) = 0$ が得られる.

両辺を $2^e > 0$ で割ると $L - \frac{B}{2} \varphi(L) = 0$ が得られる.

さて、 B は偶数なので $\frac{B}{2}$ は自然数である.

ここで $L \neq 1$ とすると、 $\varphi(L)$ は偶数であるが、これは L が奇数であることに矛盾.

よって $L = 1$ であるが、このとき $1 - \frac{B}{2} = 0$, つまり $B = 2$ であり、 $B \leq 3$.

(2) B : odd の場合

いま $B > 4$ を仮定しているので、 B は素因数をもつ.

したがって、 $B = pD$ (p : odd prime, D : odd) と書ける.

さて、 $n - B\varphi(n) = 0$ より n も p の倍数であるから、 $n = p^e L$ ($e > 0, p \nmid L$) と書ける.

これと $B = pD$ を $n - B\varphi(n) = 0$ に代入すると $p^e L - p^e D(p-1)\varphi(L) = 0$ を得る.

両辺を $p^e > 0$ で割ると $L - D(p-1)\varphi(L) = 0$ となる.

さて、 $p-1$ は偶数であるから、 $D(p-1)$ も偶数.

したがって、 $D(p-1) \geq 4$ のときは先ほど示したように解は存在しない.

よって、解が存在するとすれば $D(p-1) \leq 3$ の場合であるが、これを満たす唯一の D, p は $D = 1, p = 3$ である.

すると $B = pD = 3$ であるが, これは $B \leq 3$ を満たす. ■

3. $A : \text{odd}$ の場合

定理 2.2: $A : \text{odd} > 1, \gcd(A, B) = 1$ とする.

$An - B\varphi(n) = 0$ に解が存在するならば, $2 \parallel p - 1$ を満たす奇素数 p を用いて $A = \frac{p-1}{2}, B = p$ と書け, さらにこのときの解は $n = 2^e p^f$ ($e, f > 0$) と書ける.

Proof: $\gcd(A, B) = 1, A > 1$ より $A \neq 1$, したがって $n \neq 1$.

また, n は 2 のべきではない; n が 2 のべきであるとする, $An - B\varphi(n) = 0$ を満たしながら $\gcd(A, B) = 1$ を満たす組は $(A, B) = (1, 2)$ しかなく, $A > 1$ の仮定に反するからである.

よって $n \geq 3$ より $\varphi(n)$ が偶数, したがって n も偶数で, $n = 2^e L$ ($e > 0, L : \text{odd}$) と書ける.

これを $An - B\varphi(n) = 0$ に代入すると $A \cdot 2^e L - B2^{e-1}\varphi(L) = 0$.

両辺を $2^{e-1} > 0$ で割って $2AL - B\varphi(L) = 0$ を得る.

(1) B が偶数の場合

$2AL - B\varphi(L) = 0$ は $L = \frac{B}{2} \cdot \frac{\varphi(L)}{A}$ と書き直せる.

ここで B は偶数なので $\frac{B}{2}$ は自然数だが, $\gcd(A, B) = 1$ より $\frac{\varphi(L)}{A}$ は自然数.

しかし n は 2 のべきではないので, $L > 1$ より $\varphi(L)$ は偶数.

すると $\frac{\varphi(L)}{A}$ も偶数となるが, これは L が奇数であることに矛盾.

(2) B が奇数の場合

B, A, L はすべて奇数なので, $2AL - B\varphi(L) = 0$ より $\nu_2(\varphi(L)) = 1$.

さて, $\varphi(L) = \prod_{p^e \parallel L} p^{e-1}(p-1)$ より, L は素因子を 1 つしか持てない.

よって $L = p^f$ ($f > 0, p : \text{odd prime}$) と書け, また $\nu_2(p-1) = 1$ より $2 \parallel p-1$.

これを $2AL - B\varphi(L) = 0$ に代入すると $2A \cdot p^f - B \cdot p^{f-1}(p-1) = 0$ を得る.

両辺を $p^{f-1} > 0$ で割ると $2Ap - B(p-1) = 0$ となり, したがって $Ap = B\frac{p-1}{2}$.

さて, $\gcd\left(p, \frac{p-1}{2}\right) = 1$ より B は p の倍数である.

そこで $D = \frac{B}{p}$ とおくと $A = D\frac{p-1}{2}$.

しかし $\gcd(A, B) = 1$ から $\gcd(A, D) = 1$ より, $D = 1$.

したがって $B = p, A = \frac{p-1}{2}$

このとき $n = 2^e L = 2^e p^f$. ■