

第三種オイラー型メルセンヌ超完全数のダブル B 型解について

梶田光

2025/08/19

1. はじめに

第三種オイラー型メルセンヌ完全数とは、以下の連立方程式の解のことである：

$$\begin{cases} \bar{h}A = 2h\varphi(a) + \bar{h}m + \bar{h}, \\ \varphi(A) = a + m \end{cases}$$

なお、慣例で $n-1$ のことを \bar{n} と書く。

飯高先生によって始められた一般化された完全数の研究では、自然数 α, β を固定したとき、 $a = \alpha p, A = \beta q$ ($p, q : \text{prime}, \gcd(\alpha, p) = \gcd(\beta, q) = 1$) の形の解が複数個存在するならば、その解をまとめてダブル B 型解とよぶ。

補題 1.1: a, b, c, d が無平方数で、 $\frac{\varphi(a)\varphi(b)}{ab} = \frac{\varphi(c)\varphi(d)}{cd}$ ならば、 $ab = cd$ 。

これは φ^k 同値の中で証明されている補題「 $I \geq 1$ 個の無平方数の列 $(\alpha_1, \dots, \alpha_I)$ と $(\beta_1, \dots, \beta_I)$ について、 $\prod_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{\alpha_i} = \prod_i \frac{\varphi(\beta_i)}{\beta_i}$ ならば $\prod_i \alpha_i = \prod_i \beta_i$ 」の $i = 2$ の場合である。

定理 1.1: ダブル B 型解の係数と平行移動 α, β と m は以下のいずれかを満たす。

- $\alpha = 1, \beta = 2^e h^f, m = \frac{-h-1-2^e \bar{h} h^f}{h+1}$
- $\alpha = 2^e, \beta = h^f, m = -\bar{h} h^f - h 2^e + \bar{h}$
- $\alpha = h^f, \beta = 2^e, m = -2h^f - 2^e + 1$

Proof: 今、 $(a, A) = (\alpha p_0, \beta q_0), (\alpha p_1, \beta q_1)$ がどちらも解であると仮定する。

p_0, p_1 のことをまとめて p と書き、 q_0, q_1 のことをまとめて q と書くと、下の連立方程式は 2 つの解を持つ：

$$\begin{cases} \bar{h}\beta q = 2h\varphi(\alpha)\bar{p} + \bar{h}m + \bar{h}, \\ \varphi(\beta)\bar{q} = \alpha p + m \end{cases}$$

これは p, q に関する連立一次方程式とみなすことができる。

よって、その係数行列 $\begin{pmatrix} \bar{h}\beta & 2h\varphi(\alpha) \\ \varphi(\beta) & \alpha \end{pmatrix}$ の行列式 $\bar{h}\alpha\beta - 2h\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ は 0 に等しい。

したがって $\frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\bar{h}}{2h}$ 。

$$x = \text{rad}(\alpha), y = \text{rad}(\beta) \text{ とおけば, } \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}, \frac{\varphi(y)}{y} = \frac{\varphi(\beta)}{\beta} \text{ より, } \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{xy} = \frac{\bar{h}}{2h} = \frac{\varphi(2)\varphi(h)}{2h}.$$

したがって 補題 1.1 より $\text{rad}(\alpha)\text{rad}(\beta) = xy = 2h$ で, したがって係数は以下の 4 パターンがあり得る.

- $\alpha = 1, \beta = 2^e h^f$
- $\alpha = 2^e, \beta = h^f$
- $\alpha = h^f, \beta = 2^e$
- $\alpha = 2^e h^f, \beta = 1$

これらを定義式から

$$\begin{cases} \bar{h}\beta q = 2h\varphi(\alpha)\bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} & \dots(\text{A}) \\ \varphi(\beta)\bar{q} = \alpha p + m & \dots(\text{B}) \end{cases}$$

に代入する.

(1) $\alpha = 1, \beta = 2^e h^f$ の場合

$$\begin{aligned} \bar{h}2^e h^f q &= 2h\bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} & \dots(\text{A}), \\ \bar{h}2^e h^f \bar{q} &= 2hp + 2hm & \dots(\text{B}) \times 2h \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \bar{h}2^e h^f = -2h - (h+1)m + \bar{h} \text{ より, } m = \frac{-h-1-\bar{h}2^e h^f}{h+1} \text{ を得る.}$$

(2) $\alpha = 2^e, \beta = h^f$ の場合

$$\begin{aligned} \bar{h}h^f q &= h2^e \bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} & \dots(\text{A}), \\ \bar{h}h^f \bar{q} &= h2^e p + hm & \dots(\text{B}) \times 2h \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \bar{h}h^f = -h2^e - m + \bar{h} \text{ より, } m = -\bar{h}h^f - h2^e + \bar{h}.$$

(3) $\alpha = h^f, \beta = 2^e$ の場合

$$\begin{aligned} \bar{h}2^e q &= 2\bar{h}h^f \bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} & \dots(\text{A}), \\ \bar{h}2^e \bar{q} &= 2\bar{h}h^f p + 2\bar{h}m & \dots(\text{B}) \times 2\bar{h} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \bar{h}2^e = -2\bar{h}h^f - \bar{h}m + \bar{h} \text{ より, } m = -2h^f - 2^e + 1.$$

(4) $\alpha = 2^e h^f, \beta = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \bar{h}q &= \bar{h}2^e h^f \bar{p} + \bar{h}m + \bar{h} & \dots(\text{A}), \\ \bar{h}\bar{q} &= \bar{h}2^e h^f \bar{p} + \bar{h}m & \dots(\text{B}) \times \bar{h} \end{aligned}$$

$$\text{しかし, これを引くと } \bar{h} = -\bar{h}2^e h^f + \bar{h} \text{ を得るが, この式は成立しない.}$$

■