4.4 矩、多元正态分布

数学科学学院

电子科技大学
UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE
AND TECHNOLOGY OF CHINA

矩

随机变量更一般的数字特征是矩

定义： 设X是随机变量，若$E(|X|^k) < \infty$，

则称$E(X^k)$为k阶原点矩，

称$E(|X|^k)$为k阶绝对原点矩。

原点矩是数学期望的推广。

定义： 设X是随机变量，若数学期望$E(X)$存在，且$E(|X-E(X)|^k) < \infty$，

则称$E([X-E(X)]^k)$为k阶中心矩，

称$E([X-E(X)]^k)$为k阶绝对中心矩。

中心矩是方差的推广。

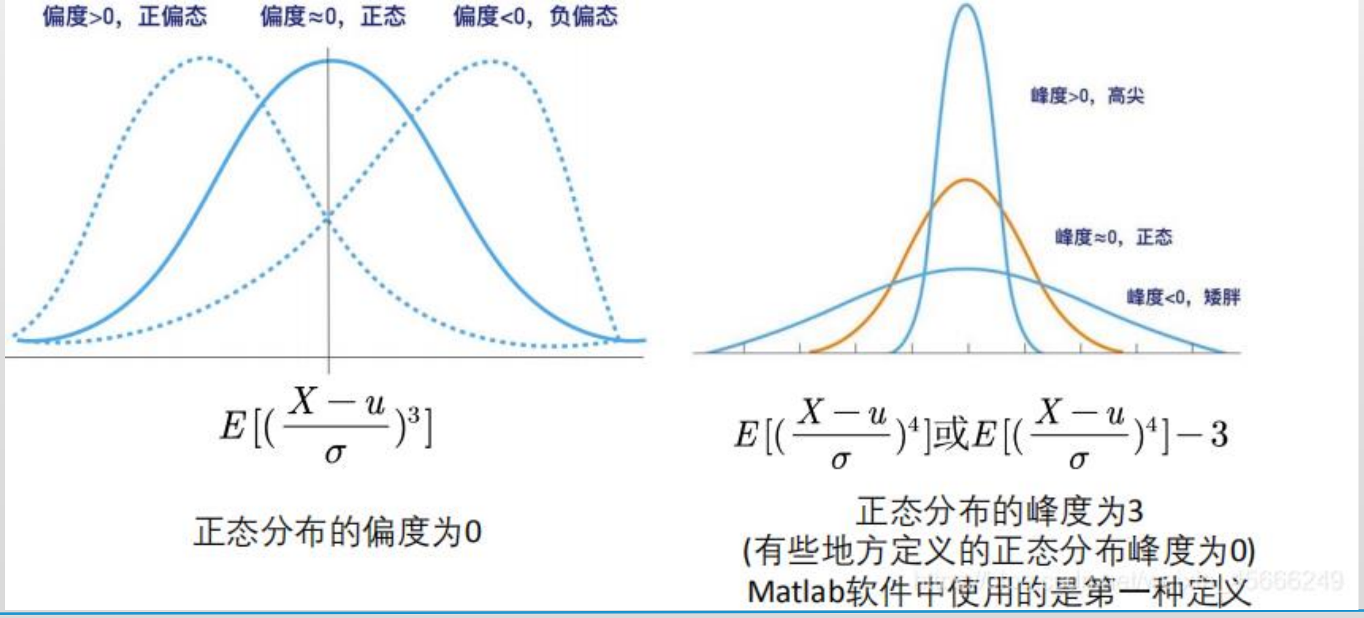
性质： 若随机变量的高阶矩存在，则低阶矩一定存在

高阶矩的例子（仅做了解）：

偏度*skewness*：刻画分布的偏向；

峰度*kurtosis*：刻画分布的峰部的尖度。

$$skew(X) = E\left\{\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)^3\right\} \qquad kurt(X) = E\left\{\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)^4\right\}$$



例： 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，计算其各阶中心矩。

解：
$$E([X-E(X)]^k)$$
$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{(\sqrt{2\sigma})^k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^k e^{-t^2}dx$$

使用分部积分推导递推关系式，
或者变量代换后使用$Gamma$函数计算

$$E([X-E(X)]^k)$$
$$=\begin{cases} 0, & k=1,3,5,\ldots \\ \sigma^k(k-1)(k-3)\ldots 1, & k=2,4,6,\ldots \end{cases}$$

一维及二维正态随机变量的已知结论

设随机变量X的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

称X服从**一维正态分布**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

1. 正态随机变量的线性函数服从正态分布

$$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

2. 正态分布的可加性：

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$相互独立,则

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]\right\}$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$均大于0，$|\rho|<1$。

称(X,Y)服从二维正态分布，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 有下述结论成立：

1. 每个分量服从正态分布

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \qquad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

2. 正态分布的数字特征：

$$E(X)=\mu_1\,,D(X)=\sigma_1^2$$

$$E(Y)=\mu_2\,,D(Y)=\sigma_2^2$$

$$cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2, \qquad \rho_{XY}=\rho$$

3. (X, Y)相互独立的充分必要条件是$\rho=0$.

从而 二维正态随机变量不相关等价于独立

多维正态随机变量

定义 设 n 维随机变量 $(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 联合概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{det(C)}} exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

其中 $C=(\sigma_{ij})$ 是 n 阶对称正定矩阵， $det(C)$ 是其行列式，

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \qquad \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$$

称 $(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 服从 n 维正态分布，记为 $(X_1, X_2,\ldots, X_n) \sim N(\mu, C)$

二维密度函数的向量表示

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$$

记

$$Z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad \mu=\begin{pmatrix}E(X)\\E(Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$$

均值向量

$$C=\begin{pmatrix}D(X) & cov(X,Y)\\cov(X,Y) & D(Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

协方差矩阵

则

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{det(C)}}exp\left\{-\frac{1}{2}(Z-\mu)^TC^{-1}(Z-\mu)\right\}$$

记为 $(X,Y)\sim N(\mu,C)$

参数分别为向量和矩阵

性质 1. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是概率密度；

证明 C是对称正定阵，故存在正交矩阵T使

$$D = T^T C T = \begin{bmatrix} c_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_1^2 \end{bmatrix}, c_i^2 > 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

因此 $C = TDT^T, D^{-1} = TC^{-1}T^T$

$\det(C) = \det(D)$,
为什么

令 $X - \mu = TY$,有

$$\iint_{R^n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \iint_{R^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(C)}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(C)}} \iint\limits_{R^n} e^{-\frac{1}{2}Y^T\Lambda^{-1}Y} dy_1 \dots dy_n$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = T$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}c_i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_i^2}{2c_i^2}} dy_i = 1$$

注 若式中行列式为零, n维概率密度无意义

2. $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$是$(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$的均值向量

3. $C=(\sigma_{ij})$是$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的协方差矩阵，即

$$\sigma_{ij} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

n维正态随机变量的分布由一, 二阶矩完全确定.

练习： 设 $(X,Y)\sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$

证明其概率密度函数可写成

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]\right\}$$

注： $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{det(C)}}exp\left\{-\dfrac{1}{2}(X-\mu)^TC^{-1}(X-\mu)\right\}$

定理 设$(X_1, X_2,\dots, X_n)$服从n维正态分布，且$D(X_i)>0$，$i=1,2,\dots,n$，以下命题等价：

1. $X_1, X_2,\dots, X_n$相互独立；

2. $X_1, X_2,\dots, X_n$两两不相关，即 $\rho_{ij}=0, i\neq j,; i,j=1,2,\cdots,n$

3. $X_1, X_2,\dots, X_n$的协方差矩阵是对角矩阵.

$$\sigma_{ij}=0, i\neq j,; i,j=1,2,\cdots,n$$

注： 常规情况下三者肯定不等价。

证明 $1\Rightarrow 3$

$X_1, X_2,\dots, X_n$相互独立则两两独立，故

$$\sigma_{ij}=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\}$$
$$=E\{[X_i-E(X_i)]\}E\{[X_j-E(X_j)]\}=0.$$

$\boxed{2\Leftrightarrow 3}$ 因 $$\rho_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{D(X_i)}\sqrt{D(X_i)}}$$

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ 因有 $$C=\begin{bmatrix} D(X_1) & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & D(X_n) \end{bmatrix}$$

$X_1, X_2,\ldots, X_n$联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{D(X_1)}}exp\left\{-\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{D(X_i)}\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_1)$$

即有$X_1, X_2,\ldots, X_n$相互独立.

定理 设$X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$服从n维正态分布$N(\mu,C)$，$B=(B_{jk})_{m\times n}$是任意矩阵，则BX^T服从m维正态分布$N(B\mu, BCB^T)$.

上述定理称为**正态随机变量的线性不变性**

推论 若$(X_1, X_2,\dots, X_n)$服从n维正态分布，则它的任何一个非零线性组合

$$\sum_{i=1}^{n} l_i X_i$$

服从一维正态分布.

练习：利用定理给出该一维正态分布的参数

例 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 3^2; 0, 4^2; -0.5)$，并且 $Z = \dfrac{X}{3} + \dfrac{Y}{2}$，试求

(1) Z 的数学期望和方差；

(2) X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

(3) X 与 Z 是否相互独立？

解 (1) $E(Z) = \dfrac{E(X)}{3} + \dfrac{E(Y)}{2} = \dfrac{1}{3} + 0 = \dfrac{1}{3}$

$$D(Z) = \frac{D(X)}{3^2} + \frac{D(Y)}{2^2} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \rho_{XY} \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= \frac{3^2}{3^2} + \frac{4^2}{2^2} + \frac{1}{3} \times (-0.5) \times 3 \times 4 = 3$$

(2) 为计算X与Z的相关系数ρ_{XZ}, 先求协方差

$$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$$

$$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3})+Cov(X,\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-0.5)\times 3\times 4=0$$

因而 $\rho_{XZ}=0.$

(3) 由二维正态 (X, Y) 的线性组合构成的随机向量 (X, Z), 也服从二维正态分布.

二维正态分布相互独立的充分必要条件是其相关系数为零,

因 $\rho_{XZ} = 0$, 故 X 与 Z 相互独立.

*13. 若 ξ_1, ξ_2 相互独立，均服从 $N(\mu, \sigma^2)$，试证:

$$E\max(\xi_1,\xi_2)=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

证　设 $\eta_1=\dfrac{\xi_1-\mu}{\sigma}$, $\eta_2=\dfrac{\xi_2-\mu}{\sigma}$, 则 η_1, η_2 是相互独立的标准正态变量，且

$$\max(\xi_1,\xi_2)=\max(\sigma\eta_1+\mu,\sigma\eta_2+\mu)=\sigma\max(\eta_1,\eta_2)+\mu$$

记 $X=\max(\eta_1,\eta_2)$，其分布函数为

$$F_X(x)=P\{\max(\eta_1,\eta_2)<x\}=P\{\eta_1<x,\eta_2<x\}=[\Phi(x)]^2$$

得 $X=\max(\eta_1,\eta_2)$ 的密度函数

$$p_X(x)=2\Phi(x)\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

由此得

$$E\max(\eta_1,\eta_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)d\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

从而

$$E\max(\xi_1,\xi_2)=\sigma E\max(\eta_1,\eta_2)+\mu=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

*35. 设 (ξ,η) 服从二元正态分布，$E\xi = E\eta = 0$，$D\xi = D\eta = 1$，$r_{\xi\eta} = \rho$，试证

$$E\max(\xi,\eta) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

证

$$\max(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta + |\xi - \eta|)$$

$$E\max(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(E\xi + E\eta + E|\xi - \eta|\right) = \frac{1}{2}E|\xi - \eta|$$

利用多维正态变量的性质可知 $\xi - \eta \sim N(0,\ 2(1-\rho))$，所以

$$E|\xi - \eta| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1-\rho)}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4(1-\rho)}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1-\rho)}}\int_{0}^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4(1-\rho)}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi(1-\rho)}}\frac{4(1-\rho)}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4(1-\rho)}}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

因此有 $E\max(\xi,\eta) = \sqrt{\dfrac{1-\rho}{\pi}}$.

设随机变量$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n}(n > m)$是独立的，有相同的分布并且有有限的方差，试求$S = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$与 $T = \xi_{m+1} + \xi_{m+2} + \cdots + \xi_{m+n}$ 两和之间的相关系数。

证明： 记$U = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m$,

$$V = \xi_{m+1} + \xi_{m+2} + \cdots + \xi_n,$$

$$W = \xi_{n+1} + \xi_{n+2} + \cdots + \xi_{m+n},$$

因此$S = U + V,\ T = V + W$

所以有$cov(S,T) = cov(U,V) + cov(U,W) + cov(V,V) + cov(V,W)$

$$= cov(V,V) = D(V)$$

设 A,B,C 为三个事件，且 A,B 相互独立，则以下结论中不正确的是 （ D ）

（A）若 $P(C)=1$，则 AC 与 BC 也独立

（B）若 $P(C)=1$，则 $A\bigcup C$ 与 B 也独立

（C）若 $P(C)=0$，则 $A\bigcup C$ 与 B 也独立

（D）若 $C\subset B$，则 A 与 C 也独立

4. 关于随机变量的分布，下列说法中，正确的个数为（ B ）

①若存在有限对 (x,y)，使得 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，则 X,Y 不独立；

②二维正态分布的边缘分布是正态分布，二维均匀分布的边缘分布是均匀分布；

③设 X,Y 均服从正态分布，则 $X+Y$ 不一定服从正态分布；

④连续型随机变量的分布函数为连续函数，概率密度函数不一定为连续函数.

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个