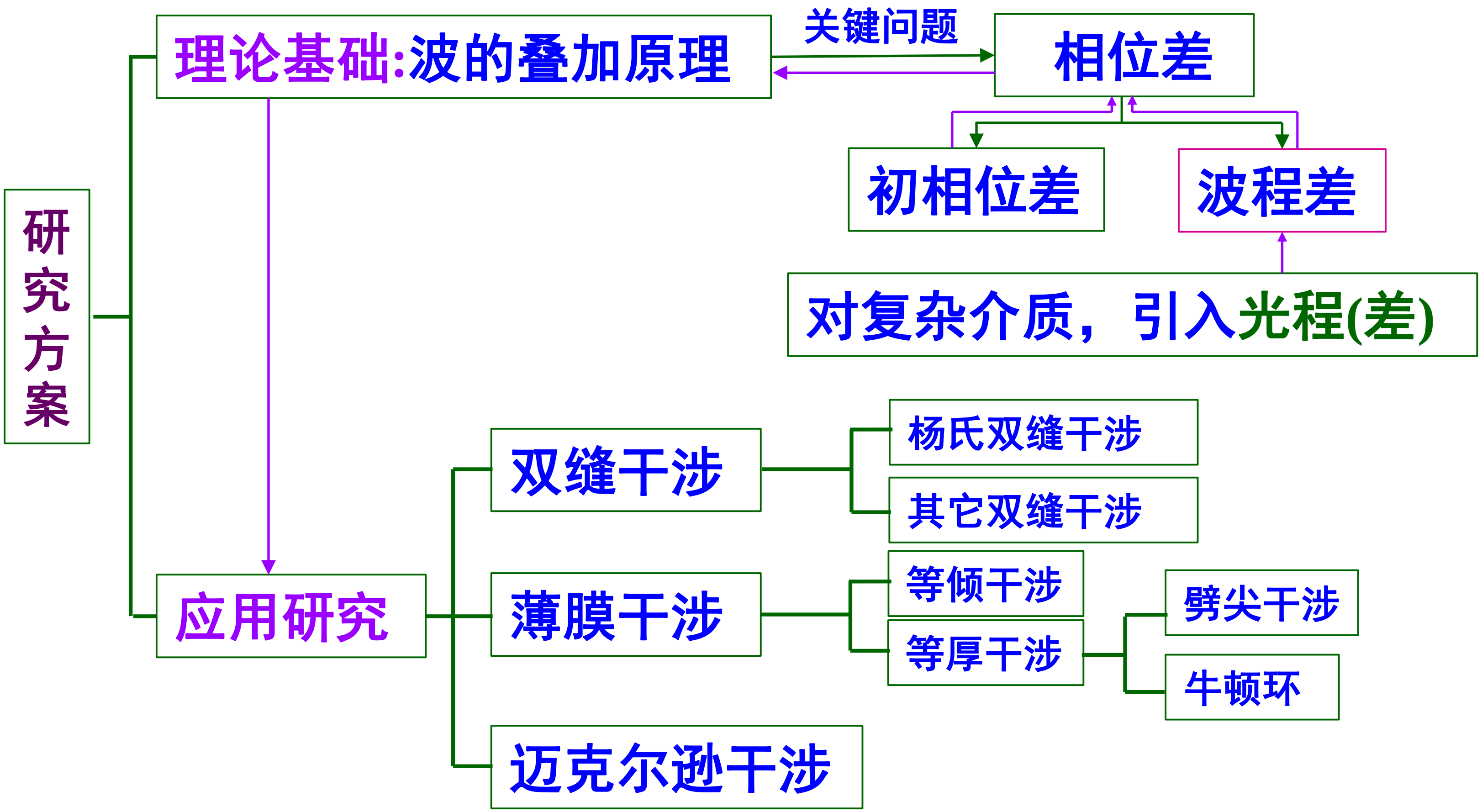
波动光学・光的衍射

授课教师　　崔海娟

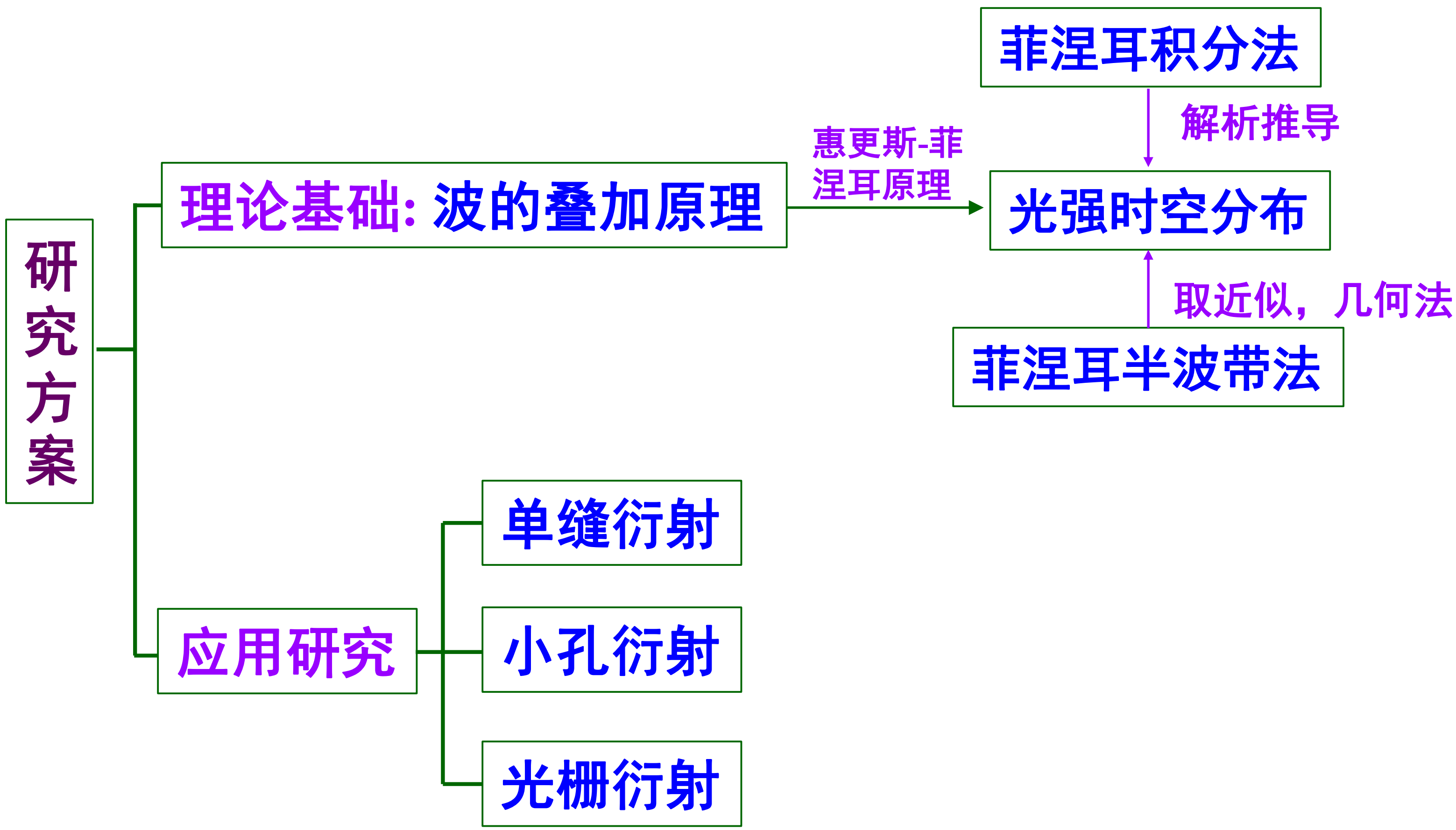
干涉问题的研究方案

研究目标:定量分析多列光波在公共叠加区域光强的时空分布



衍射问题的研究方案

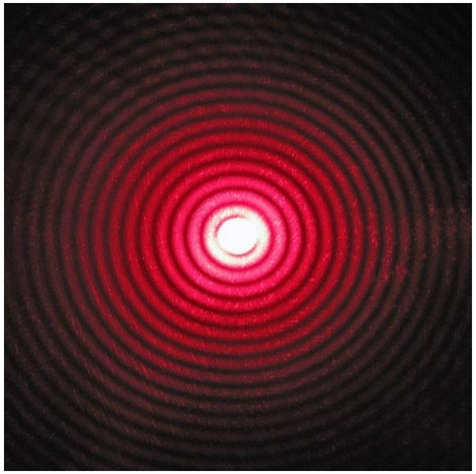
研究目标: 定量分析衍射光强的时空分布



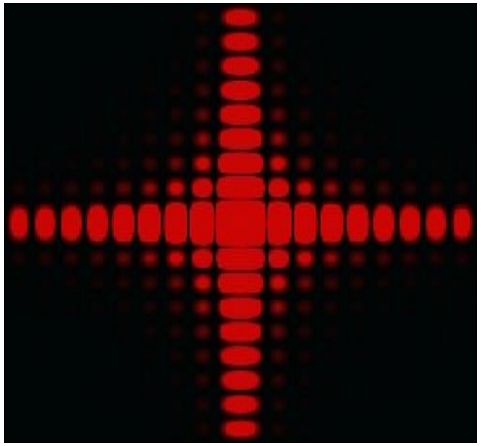
14.1 光的衍射现象 惠更斯—菲涅尔原理

1. 光的衍射现象

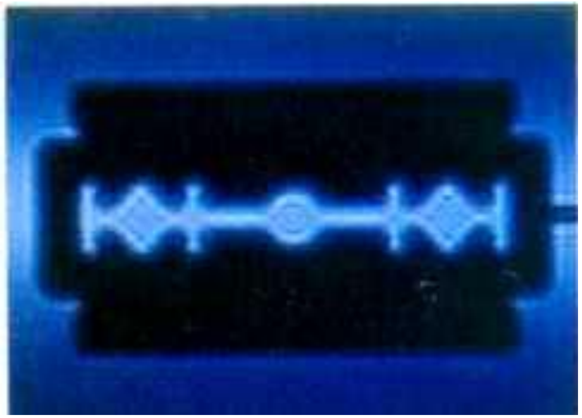
光的衍射： 光在传播过程中遇到障碍物，能够绕过障碍物的边缘偏离直线传播，并且在空间产生明暗相间的条纹。



圆屏衍射(泊松点)



矩孔衍射

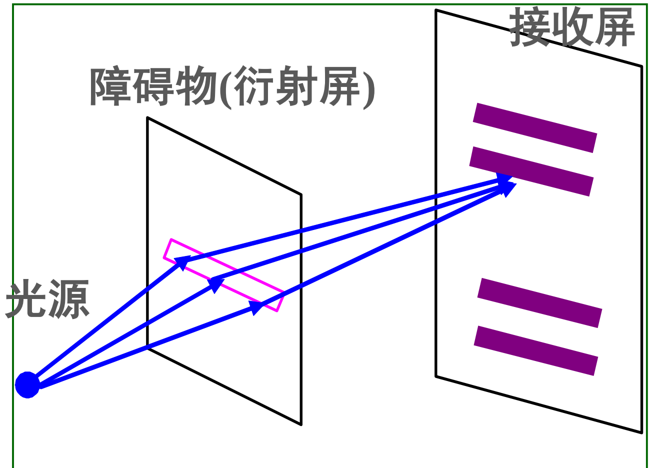


刀片边缘的衍射

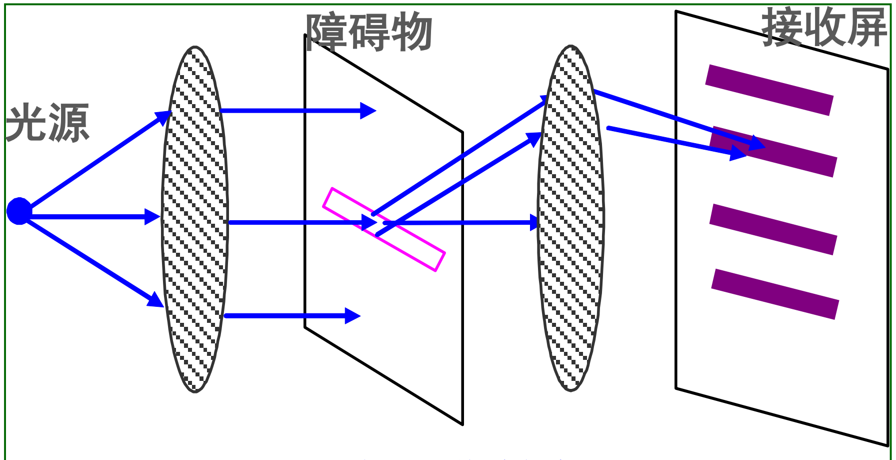
2. 衍射现象分类

菲涅耳衍射：光源 ↔ 障碍物 ↔ 接收屏距离，任一距离为有限远

夫琅禾费衍射：光源 ↔ 障碍物 ↔ 接收屏距离，均为无限远



菲涅耳单缝衍射



夫琅禾费单缝衍射

夫琅禾费衍射实际上是平行光衍射，本章只讨论夫琅禾费衍射。

3. 惠更斯一菲涅耳原理

• 任一时刻波前上各点都可作为子波的波源，向前发出子波；

• 在各子波叠加区域，质点的振动为各子波在该点引起振动的相干叠加

数学表述：

在波前S上任取一面元dS作为子波波源，波源的振动传到P点，P点的光振动：

$$\mathrm{d}E_{(P)}=C\cdot k(\alpha)\frac{\mathrm{d}s}{r}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

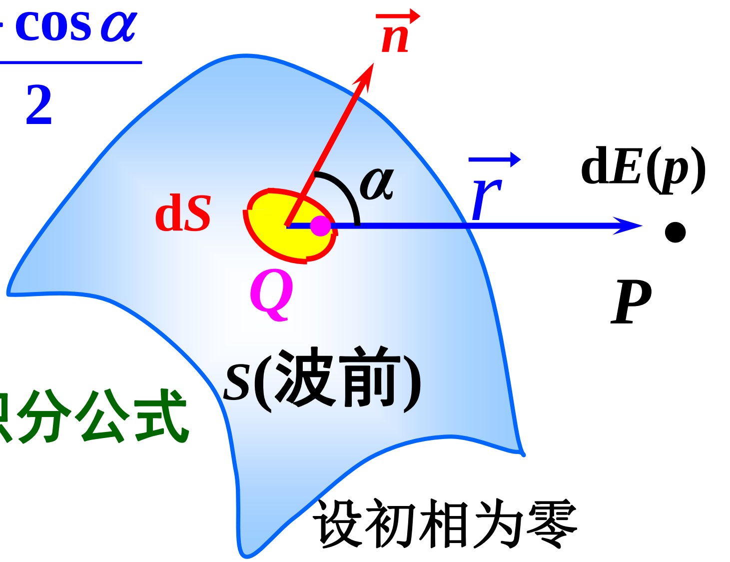
能量守恒与点源近似模型

$k(\alpha)$：倾斜因子 (方向图函数) $k(\alpha)=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

C：比例系数

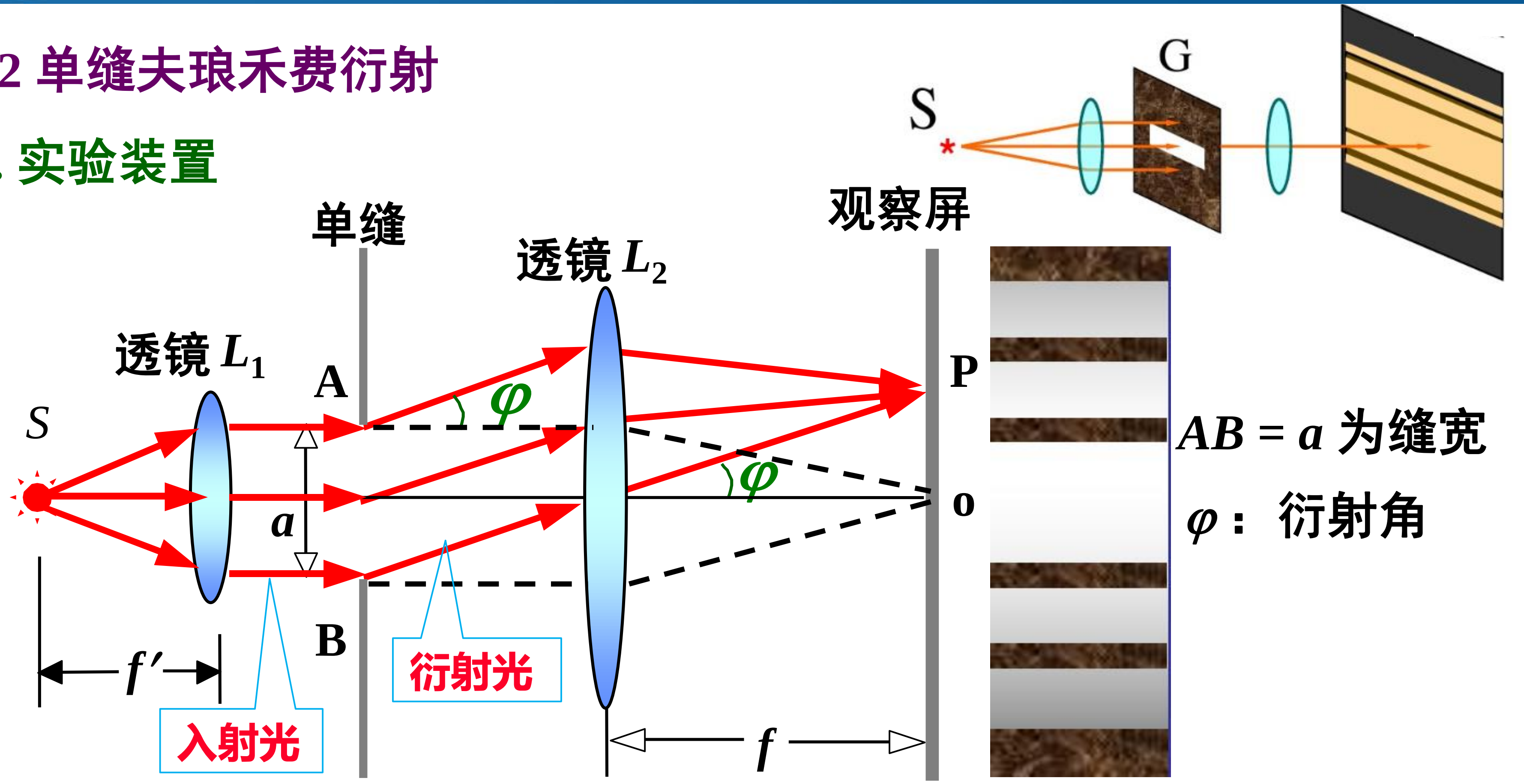
P点的合振动：

$$E=\int_s\frac{C\cdot k(\alpha)}{r}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}\right)\cdot\mathrm{d}s$$ 菲涅尔积分公式



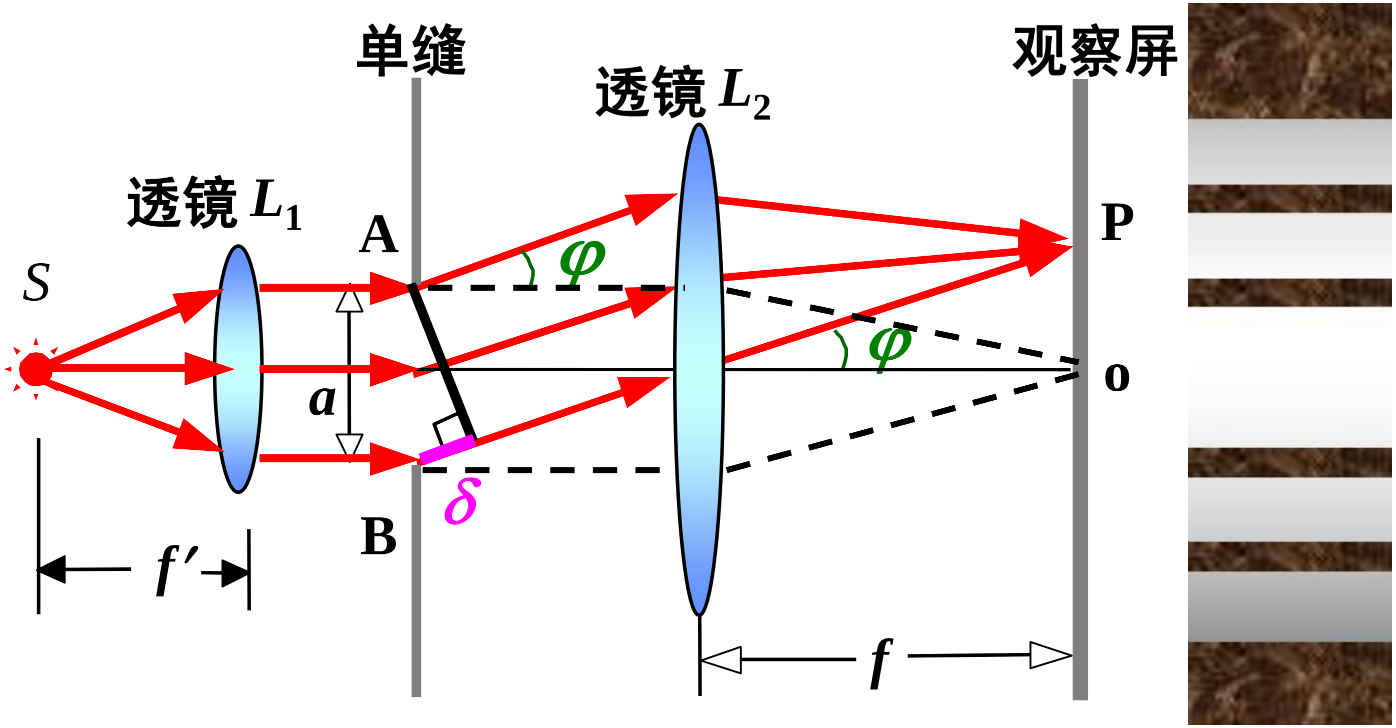
14.2 单缝夫琅禾费衍射

1. 实验装置



- 惠更斯-菲涅耳原理：屏上任一点的光强是入射光在单缝处波阵面上无数多子波发出的光在P点相干叠加的结果
- 夫琅禾费衍射中，具有相同衍射角φ的衍射光线会聚到焦平面上同一点(线)
- 在接收屏上可观察到一组平行于缝的直条纹，其中中央亮纹最宽最亮

14.2.1 菲涅耳半波带法

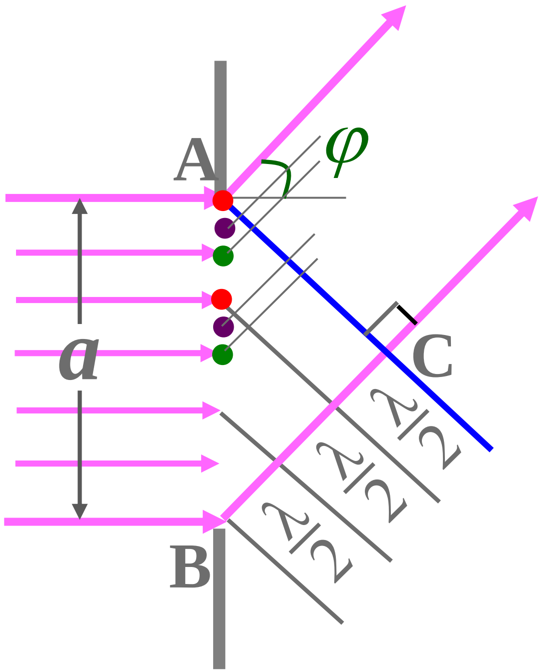


O点：衍射角 $\varphi = 0$，$\delta = 0$ (等光程) -----中央亮纹

P点：衍射角 $\varphi \neq 0$，该方向衍射光的最大光程差为：

$A \rightarrow P$ 和 $B \rightarrow P$ 的光程差 $\delta = a\sin\varphi$

$\delta = a\sin\varphi = BC$



- 平行于AC作一系列相距λ/2的平面，

  这些平面把缝AB上的波阵面分割成许多等宽的窄带——菲涅耳半波带

- 假设相邻两波带各子波在观察点有近似相等的振幅

- 相邻波带上对应点发出的平行光线会聚时的光程差都是λ/2，因而总是相干相消。

- 因此两个相邻波带所发出的光线会聚于屏幕上时全部干涉相消。

结论：

如果单缝被分成偶数个半波带，屏幕上对应点P出现暗纹

如果单缝被分成奇数个半波带，屏幕上对应点P出现亮纹

1. 单缝衍射亮、暗纹的中心位置

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2}$$ 暗纹 (k=1,2,3,…)

$$a\sin\varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 亮纹 (k=1,2,3,…)

波带数

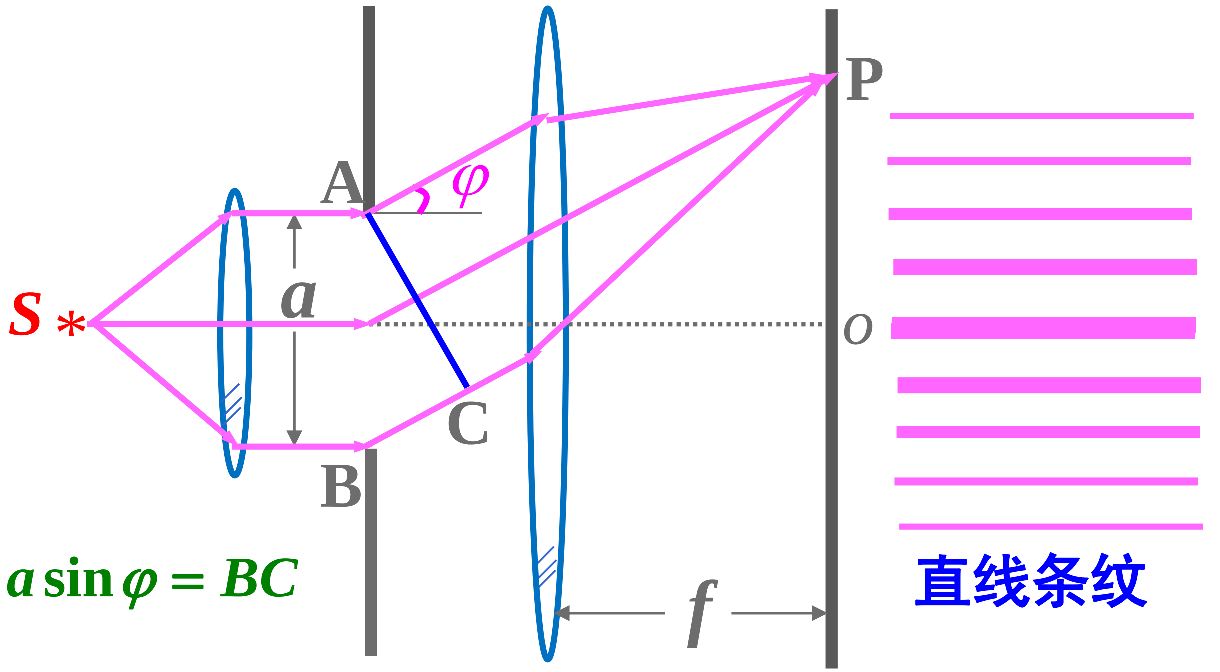
$$\varphi = 0$$ 零级(中央)亮纹

注意：

1.k与波带数的关系

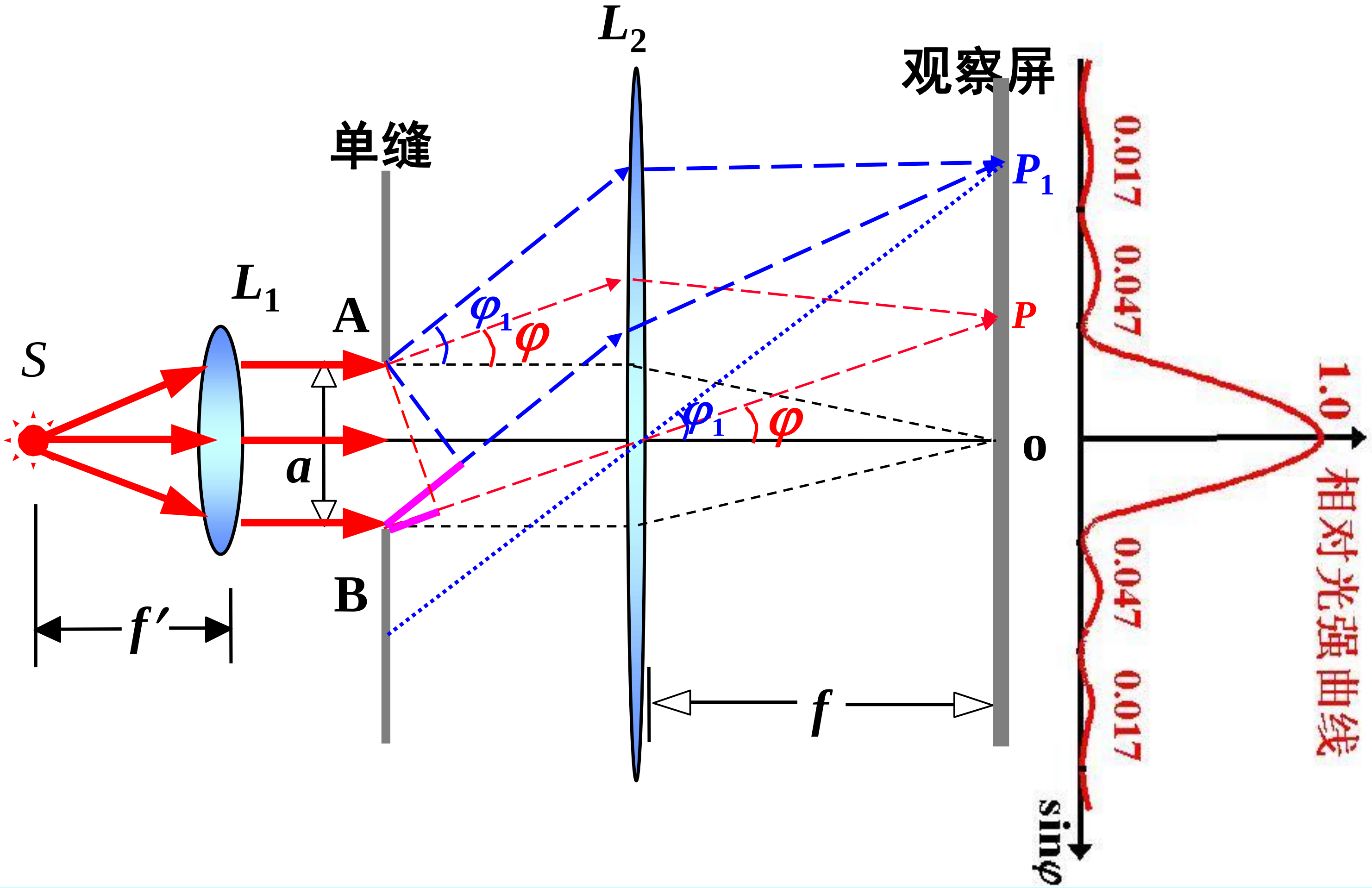
2.明暗…

3. $k\neq 0$



$$\delta = a\sin\varphi = BC$$

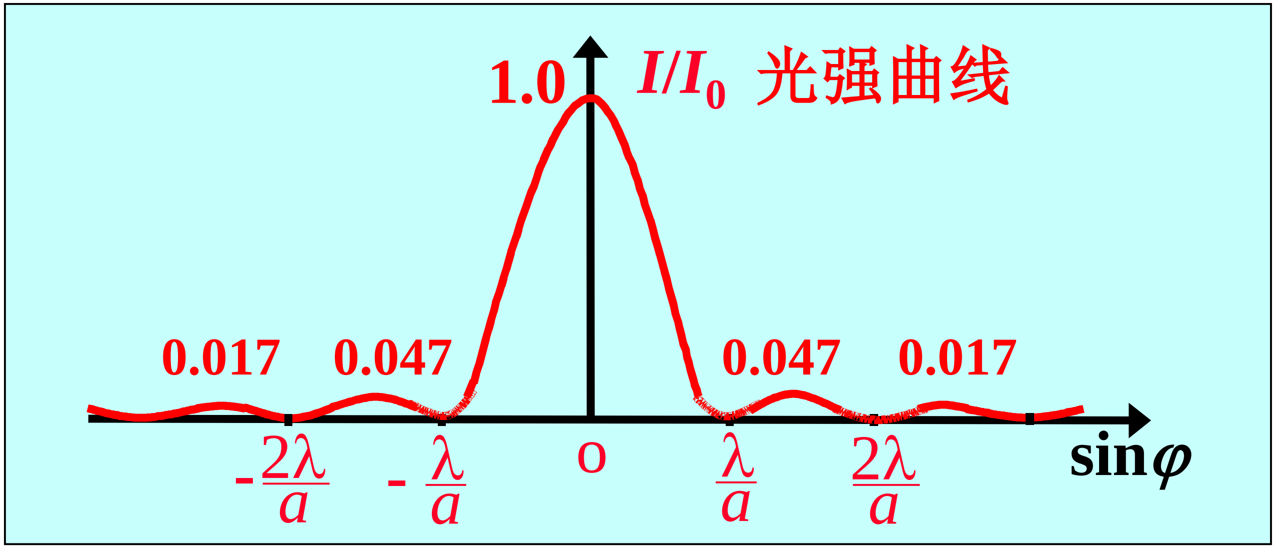
直线条纹



衍射光传播方向角	汇聚至屏上位置	最大光程差	波阵面所分波带数	对应条纹
0°	O	0		中央明纹
φ	P	$2\times(\lambda/2)$	2	1级暗纹
φ_1	P_1	$5\times(\lambda/2)$	5	2级明纹

2. 条纹特点

(1)光强分布



暗纹

亮纹 $-\frac{5\lambda}{2a}$ $-\frac{3\lambda}{2a}$ $\frac{3\lambda}{2a}$ $\frac{5\lambda}{2a}$

- 中央亮纹又亮又宽(约为其它亮纹宽度的2倍)
- 中央两侧各级亮纹的亮度随着级次的增大迅速减小

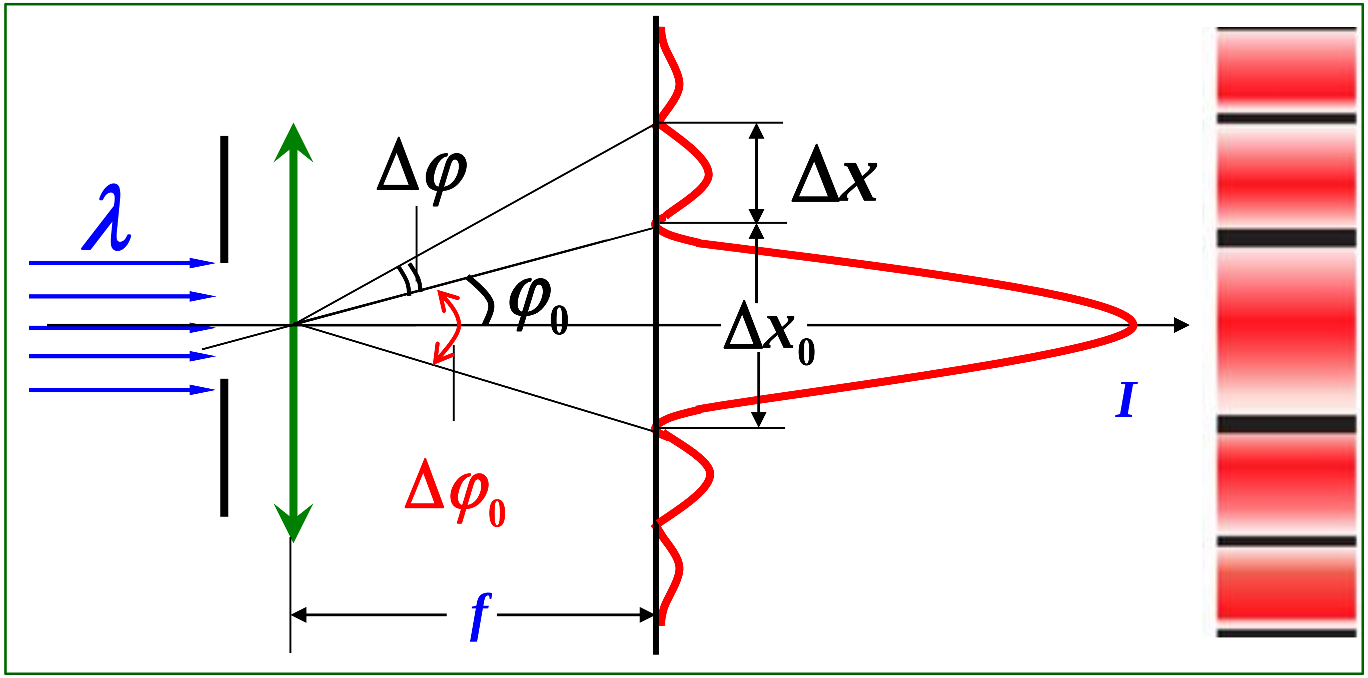
  (对亮度有贡献的半波带面积为$1/(2k+1)$)

(2) 条纹角宽度

角宽度：条纹对透镜中心所张的角度

明条纹角宽度：相邻两级暗条纹中心对透镜中心所张角度

暗条纹角宽度：相邻两级明条纹中心对透镜中心所张角度

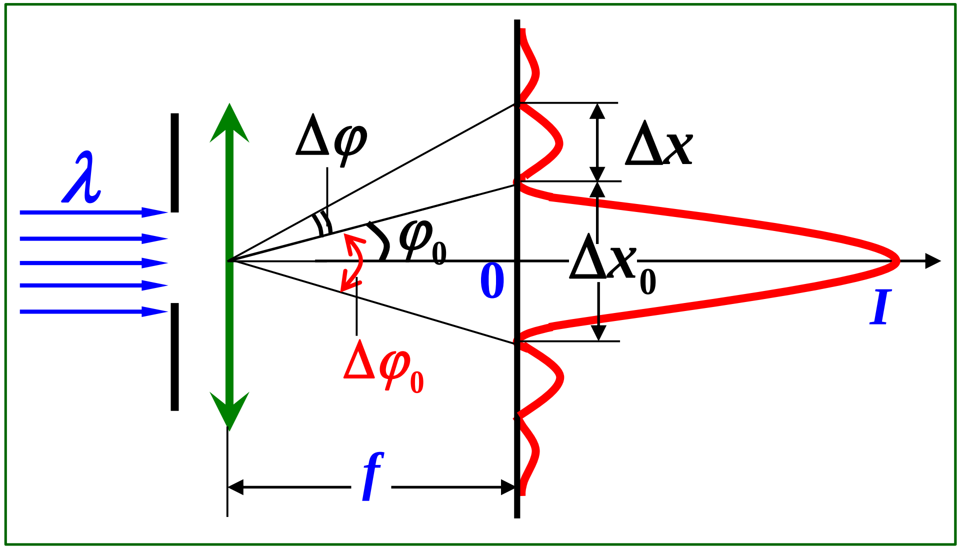


A 中央明纹角宽度

正负一级暗纹中间的区域为中央明纹范围

$$-\lambda < a\sin\varphi < \lambda$$

$$\because \sin\varphi \approx \varphi, \quad \therefore -\frac{\lambda}{a} < \varphi < \frac{\lambda}{a}$$



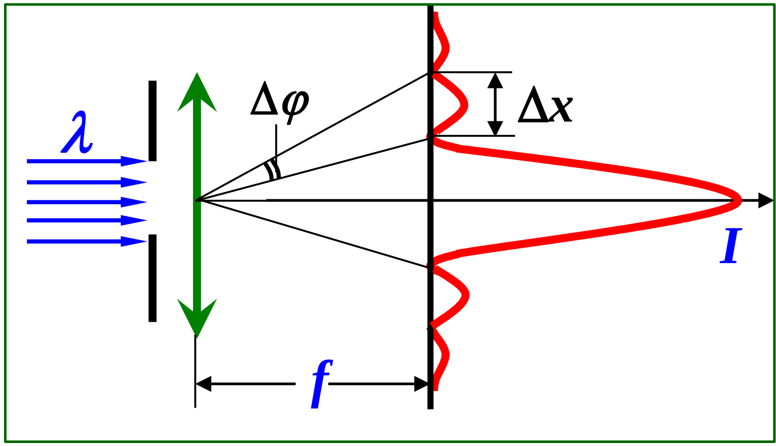
$\Rightarrow$ 角宽度为 $\Delta\varphi_0 = \dfrac{2\lambda}{a}$

半角宽度为 $\varphi_0 = \dfrac{\lambda}{a}$

设透镜的焦距为 f，中央亮条纹线宽度

$$\Delta x_0 = 2f\tan(\varphi_0) \approx 2f\frac{\lambda}{a} = f\Delta\varphi_0$$

B k 级明纹角宽度



暗纹 $a\sin\varphi = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$

明纹 $a\sin\varphi = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} = \pm(k\lambda + \dfrac{\lambda}{2})$

在k级和$k+1$级暗纹之间为k级明纹 $k\lambda < a\sin\varphi < (k+1)\lambda$

角宽度 $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda}{a}$ 线宽度 $\Delta x \approx f\dfrac{\lambda}{a}$

- 中央亮条纹的宽度为其它亮条纹宽度的两倍

(3)缝宽对条纹的影响

$$\Delta x_0 = 2f\frac{\lambda}{a},\quad \Delta x = f\frac{\lambda}{a} \propto \frac{\lambda}{a}$$

•当缝宽 a 减小，条纹宽度增加，衍射现象显著（衍射反比定律）

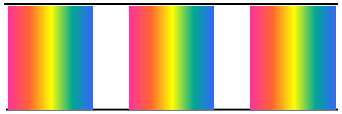
$$\Delta x_0 = 2f\frac{\lambda}{a},\quad \Delta x = f\frac{\lambda}{a} \propto \frac{\lambda}{a}$$

$$a\uparrow \qquad \frac{\lambda}{a} \to 0 \qquad \Delta x \to 0$$

- 当$a >> \lambda$时，$\varphi \to 0$，衍射效应变弱，光线表现为直线传播(缝宽)
- 各级条纹向中央靠拢，只显出中央单一的明条纹，
- 这是光直线传播的结果，即衍射现象消失
- 几何光学是波动光学在 $a >> \lambda$ 时的极限情况。

(4)波长对条纹宽度的影响

- 衍射条纹角宽度与波长有关
- 用白光做光源，中央为白色明条纹，其两侧各级都为彩色条纹。



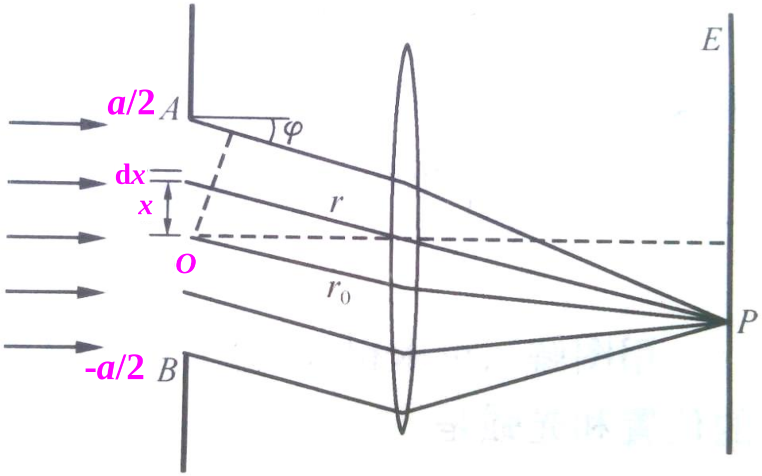
衍射光谱

k=3 k=2 k=1

14.2.2 单缝夫琅禾费衍射光强分布

1. 根据惠更斯-菲涅耳原理求光强

- 将单缝处的波阵面AB划分为无数多条宽度为dx的窄带(子波源)，设每个窄带发出的光在P点引起的光振动的振幅近似相等(忽略光程、倾斜因子引起的振幅变化)



- x处的窄带dx在P点引起的光振动:

$$\mathrm{d}E = A_0 \frac{\mathrm{d}x}{a}\cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

式中A_0为通过整个单缝光能的振幅

$r = r_0 + x\sin\varphi$，r_0是缝中心O点到P点的光程

$$\mathrm{d}E = A_0 \frac{\mathrm{d}x}{a}\cos[\frac{2\pi x\sin\varphi}{\lambda} + (\frac{2\pi r_0}{\lambda} - \omega t)]$$

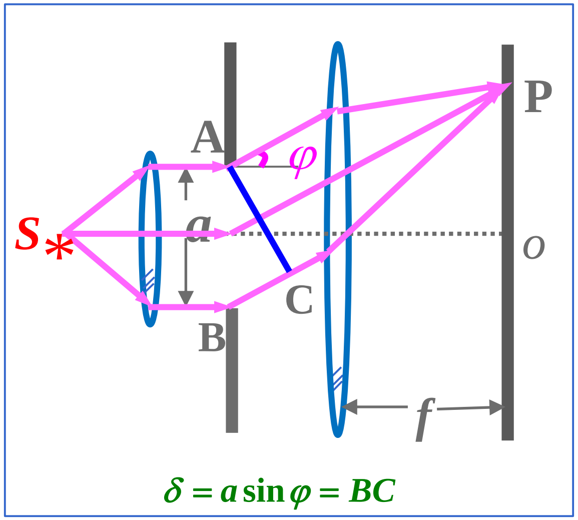
- 将缝上所有窄带在P点的光振动求和，就是P点的光振动

$$E=\int_{-a/2}^{a/2}A_0\frac{\mathrm{d}x}{a}\cos[\frac{2\pi x\sin\varphi}{\lambda}+(\frac{2\pi r_0}{\lambda}-\omega t)]$$

$$=\frac{A_0}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\cos(\frac{2\pi x\sin\varphi}{\lambda})\cos(\frac{2\pi r_0}{\lambda}-\omega t)\mathrm{d}x$$

$$-\frac{A_0}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\sin(\frac{2\pi x\sin\varphi}{\lambda})\sin(\frac{2\pi r_0}{\lambda}-\omega t)\mathrm{d}x$$

$$=A_0\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda}}\cos(\omega t-\frac{2\pi r_0}{\lambda})$$



$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi\qquad\alpha=\frac{\Delta\varphi}{2}$$

P点的光振动:

$$E=A_0\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda}}\cos(\omega t-\frac{2\pi r_0}{\lambda})$$

令 $\alpha=\dfrac{\pi a\sin\varphi}{\lambda}$

$\Downarrow$

振幅 $A(\varphi)=A_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

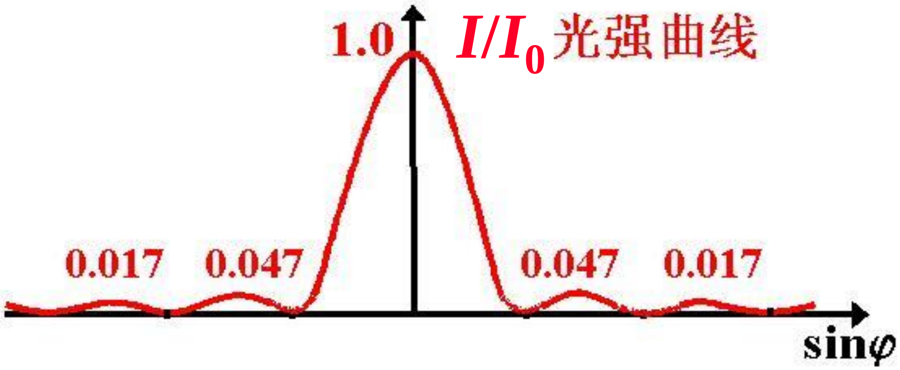
$\Downarrow$

光强 $I(\varphi)=I_0(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha})^2$

2. 光强分布

P点的光强(单缝衍射光强):

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda}$$



(1) 中央亮纹(主极大)

当$\varphi=0$时，$\alpha=0$ ⇨ $I=I_0$，光强最大

零级(中央)亮纹

中央主极大亮纹

(2) 暗条纹(极小)

当$\alpha=\pm k\pi$, $k=1,2,3\ldots$时，$\sin\alpha=0$ ⇨ $I=0$，光强最小，为各级暗纹；

此时 $a\sin\varphi=\pm k\lambda,\quad k=1,2,3\cdots$

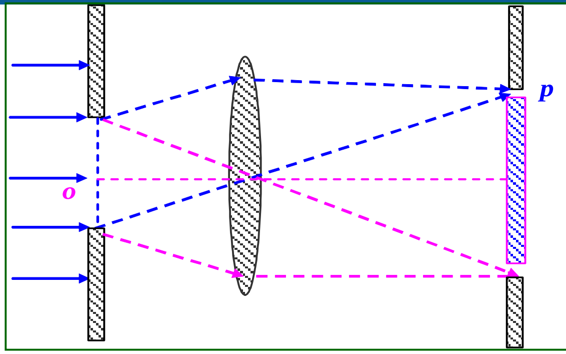
与半波带法所得结论一致

(3) 各级亮纹(次极大)

令 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=0 \Rightarrow \tan\alpha=\alpha$

得 $a\sin\varphi=\pm1.43\lambda,\pm2.46\lambda,\pm3.47\lambda\cdots$

与半波带法所得结论略有差异，但随级次增加误差越来越小。



例14.2.1： 已知 λ=6328 Å，a =0.1 mm，f=40 cm

求： (1) 中央明条纹的线宽度

(2) 第一级明条纹中心的位置

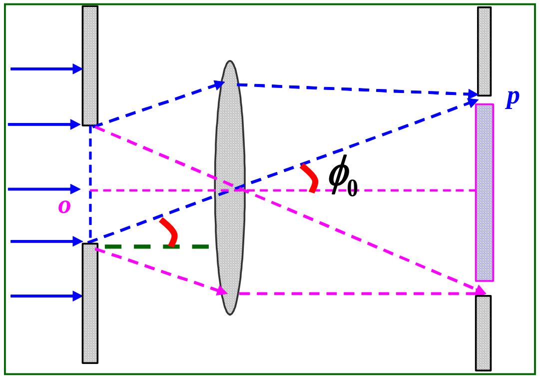
解： (1) $\Delta x_0 = 2f\tan(\phi_0) \approx 2f\dfrac{\lambda}{a} \Rightarrow \Delta x_0 \approx 2f\dfrac{\lambda}{a} = 5.1$ (mm)

(2) 第一级明条纹出现的条件为

$$\left.\begin{aligned} a\sin\phi_1 &= \frac{3}{2}\lambda \\ x_1 &= f\tan(\phi_1) \approx f\sin(\phi_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \pm f\frac{3\lambda}{2a} = \pm 3.8 \text{ (mm)}$$

例14.2.2：入射光为可见光，a=0.6 mm，f=40 cm，屏上距离中心 o 点 x=1.4 mm 处 p 点恰为一明条纹

求：(1) 该入射光波的波长; (2) p 点条纹的级次； (3) 从 p 点看，对该光波而言，狭缝处被分为多少个半波带?



解：由单缝衍射的明条纹公式

$$a\sin\phi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\sin\phi \approx \tan\phi = \frac{x}{f}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2ax}{f(2k+1)} = \frac{4.2\times10^{-6}}{2k+1} \quad \text{(m)}$$

对可见光范围，

当 k =3，λ =6000 Å， 此时，单缝处被分为 7 个半波带

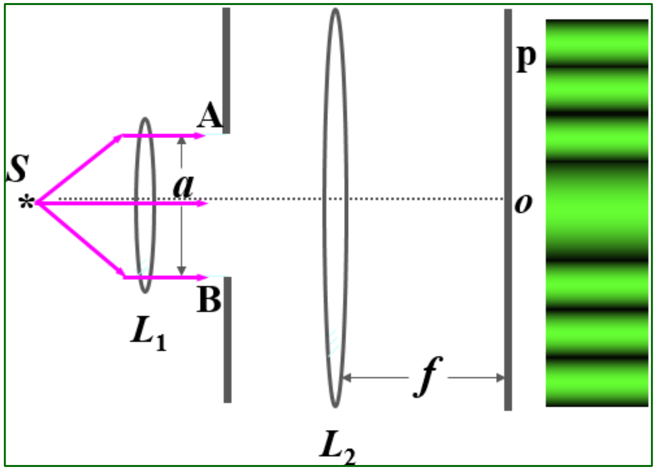
当 k=4， λ =4667 Å，此时，单缝处被分为 9 个半波带

思考：在单缝夫琅和费衍射的观测中，令单缝、透镜、光源上下移动，屏上的衍射图样是否发生改变？

(1) 令单缝在纸面内垂直透镜L_2的光轴上、下移动

答： 不会改变。

光线仍然垂直入射到单缝上。对透镜来说，垂直入射的平行光都将汇聚在它的主焦点上。

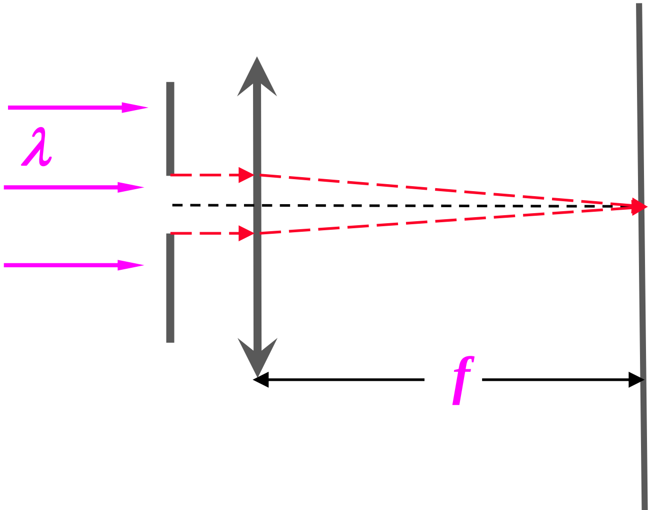


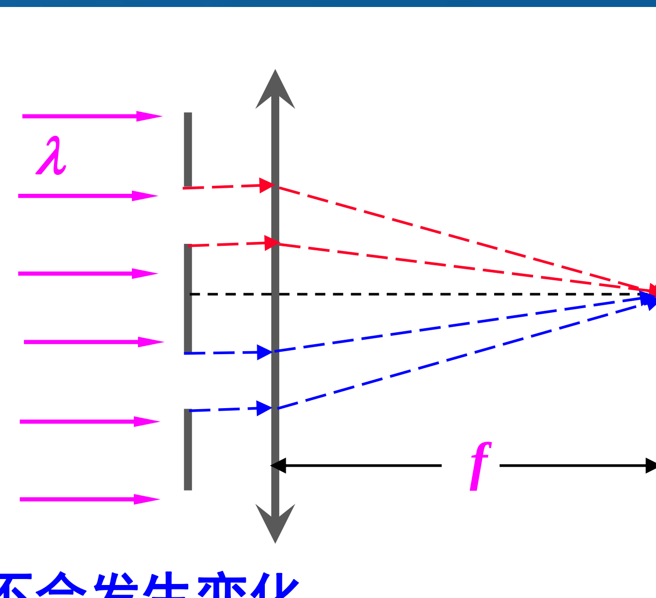
(2) 透镜L_2上下移动又如何？

答：衍射图样随着透镜上下平移。

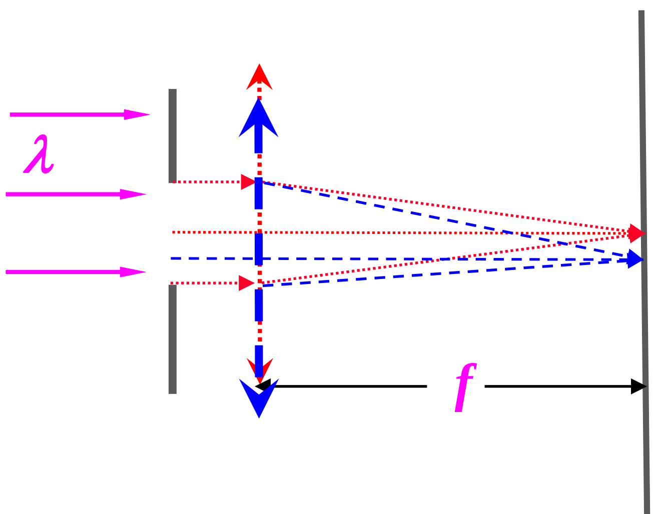
(3) 令光源垂直透镜L_1的光轴上、下移动

答：光源上移，入射光向下斜入射，衍射图样将向下平移；
光源下移，衍射图样将向上平移。

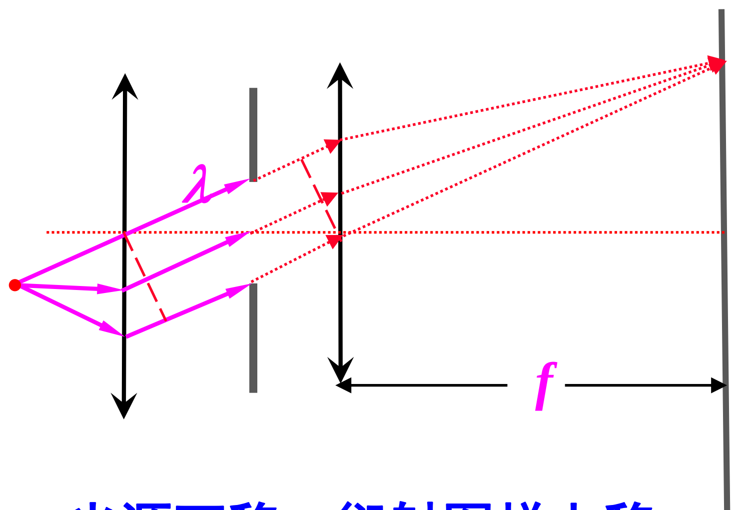




狭缝位置上下移动，衍射图样不会发生变化



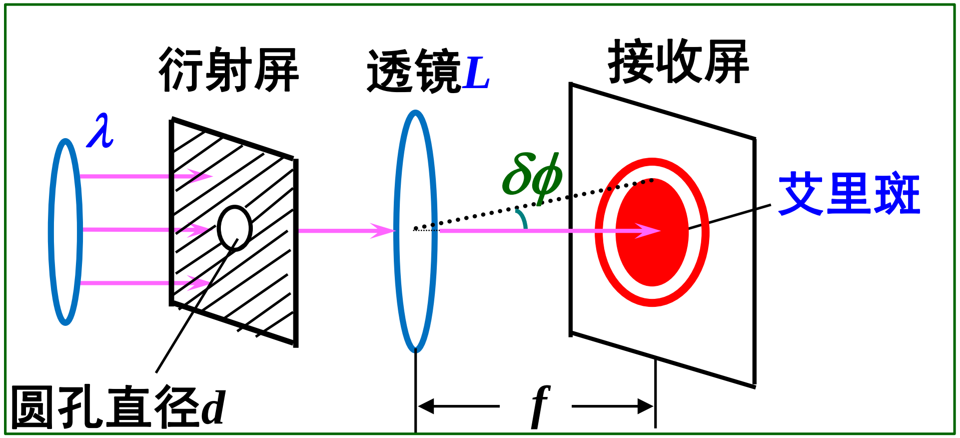
透镜下移，衍射图样下移

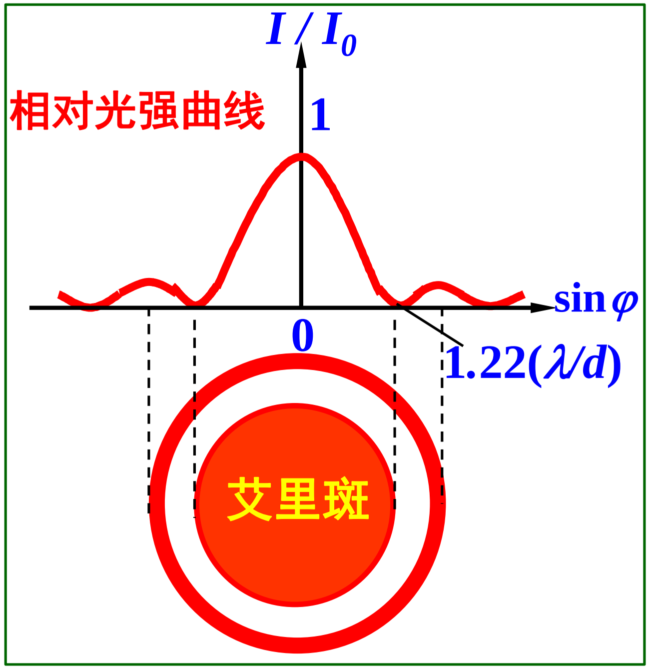


光源下移，衍射图样上移

14.3 圆孔夫琅禾费衍射

14.3.1 圆孔衍射的艾里斑





艾里斑：圆孔衍射形成的中央亮斑

艾里斑的半角宽度： $\delta\phi = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$

- 增大波长，减小孔径，艾里斑变大，衍射现象更明显
- 减小波长，增大孔径，艾里斑变小，当 $\dfrac{\lambda}{d}\to 0$ 时，图样收缩为一个点
- 几何光学是在 $\dfrac{\lambda}{d}\to 0$ 时的波动光学的极限

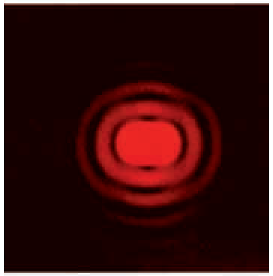
14.3.2 光学仪器的分辨本领

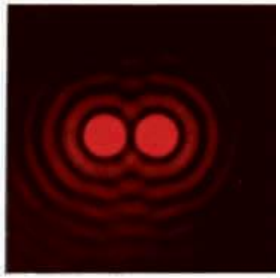
1. 光的衍射对仪器分辨本领的限制

透镜：一方面起汇聚光线作用，一方面起限制光线的圆孔作用

几何光学: 一个物点通过透镜形成像点

衍射观点: 一个物点通过透镜形成像斑

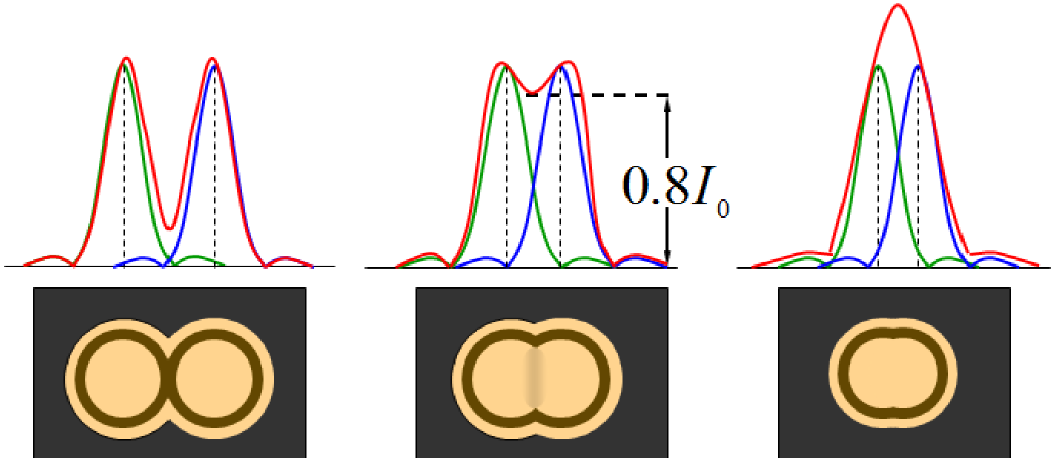




2. 光学成像仪成像能够分辨的瑞利判据

瑞利判据:

两个不相干的等光强的物点，若一个物点所成像斑（衍射图样）的中央最大处恰好与另一个物点像斑的第一极小处相重合，则这两个物点恰能被分辨。

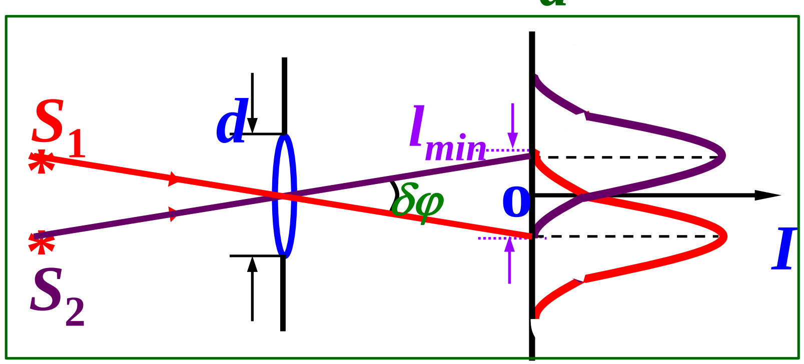


分辨清晰　　恰能分辨　　不能分辨

最小分辨角：

S_1、S_2刚好能被分辨时，两像斑中心对透镜中心所张的角(等于艾里斑半角宽度)

$$\theta_{\min} = \delta\phi = 1.22\frac{\lambda}{d}$$



$$\delta\varphi = \frac{l_{\min}}{f}$$

3. 光学成像仪的分辨率

- 望远镜的分辨率：等于最小分辨角的倒数

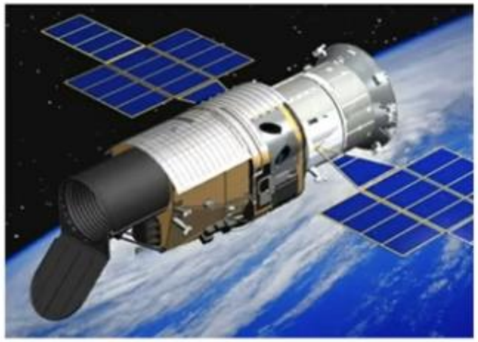
$$R = \frac{1}{\theta_{\min}} = \frac{d}{1.22\lambda}$$

500m口径球面射电望远镜

- 望远镜中：

  物镜（会聚光线、限制光线的圆孔）

  目镜（放大物镜成的像）



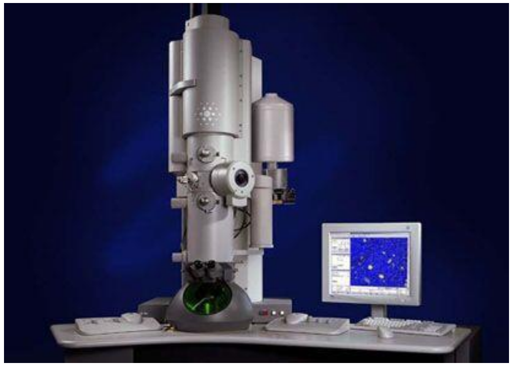
巡天空间望远镜

- 提高望远镜分辨率的途径：

  增大物镜的口径d（制造大口径望远镜的原因）

- 提高光学、电子显微镜分辨率的途径

  减小波长 λ

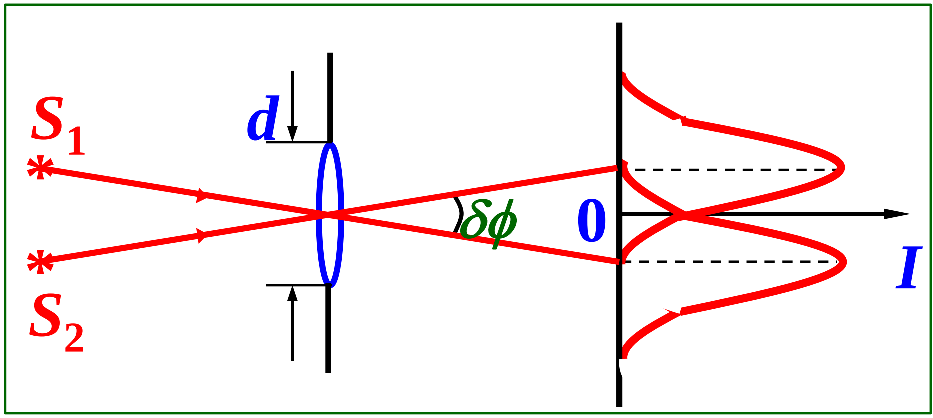


电子显微镜

例14.3.1：正常人瞳孔直径为 2.5 mm，鹰的瞳孔直径为 6.2 mm，

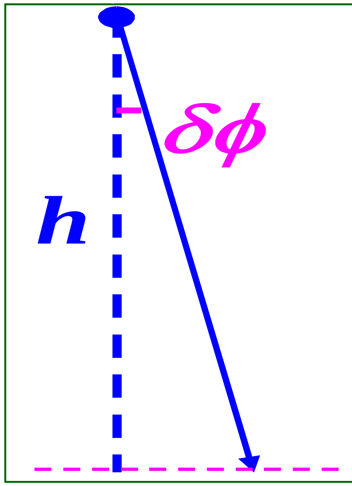
λ=5550 Å

求：人与鹰同在距地面 h=3000 m 高度时，能分辨地面上物体的最小距离分别是多少？



解： $$\theta_{\min} = \delta\phi = 1.22\frac{\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow l_{\min} = \delta\phi \cdot h$$



于是，对人 $l_{\min}$=0.81 m

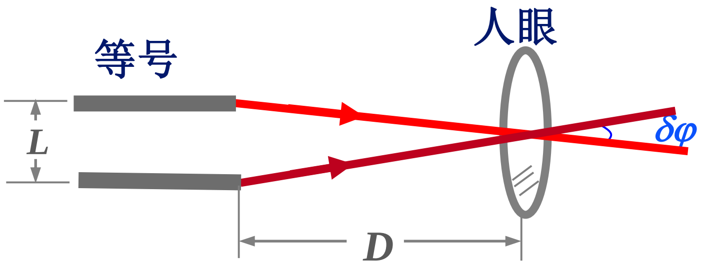
对鹰 $l_{\min}$=0.33 m

例14.3.2：通常亮度下人眼瞳孔的直径d=2.5mm, 可见光波长λ=5500Å, 人眼的最小分辨角为1′,

求：同学们最多坐多远，才不会把黑板上写的相距1cm的等号“=”号看成是减号“–”？

解：只需“=”号对人眼所张的角≥最小分辨角就行。

$$\frac{L}{D}=\delta\phi=1.22\frac{\lambda}{d}$$



$$\frac{L}{D}=\delta\phi=1.22\frac{\lambda}{d}=2.2\times10^{-4}\,\mathrm{rad}\approx1'$$

由上式算得：D =45.5m。

14.4 光栅衍射

14.4.1 光栅的相关概念

广义光栅：结构或光学性能具有空间周期性的衍射屏

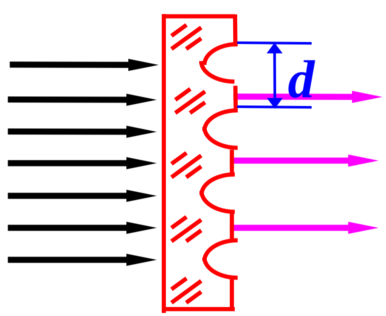
光栅：大量等宽的平行狭缝等距离地排列而形成的光学器件

光栅常数：一个透光缝宽度 a 与一个相邻的不透光宽度 b 之和

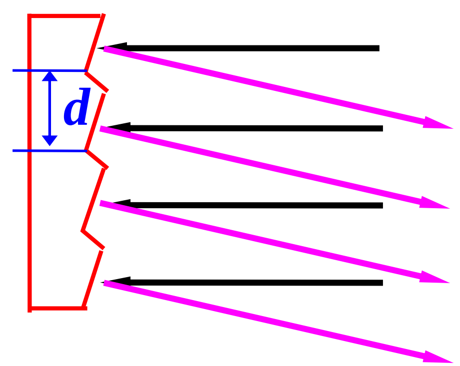
$d=a+b$　　(通常为10^{-5}~10^{-6} m)

光栅的种类

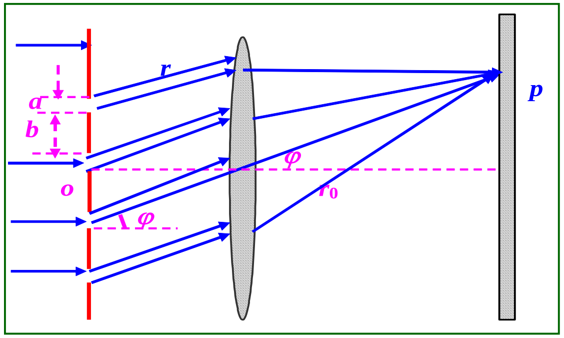
透射光栅



反射光栅



14.4.2 光栅衍射特点

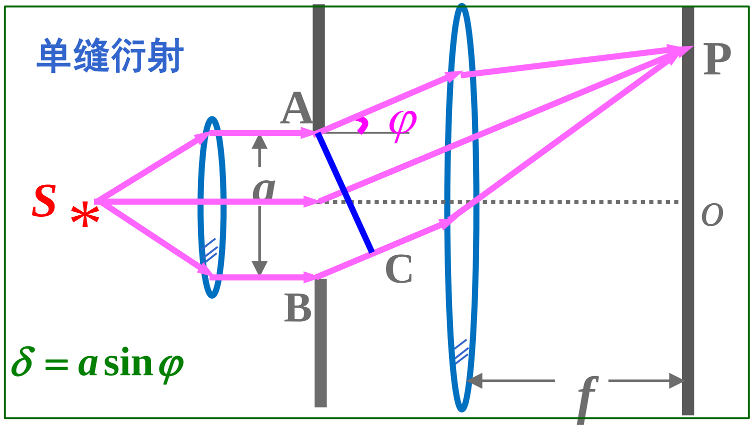


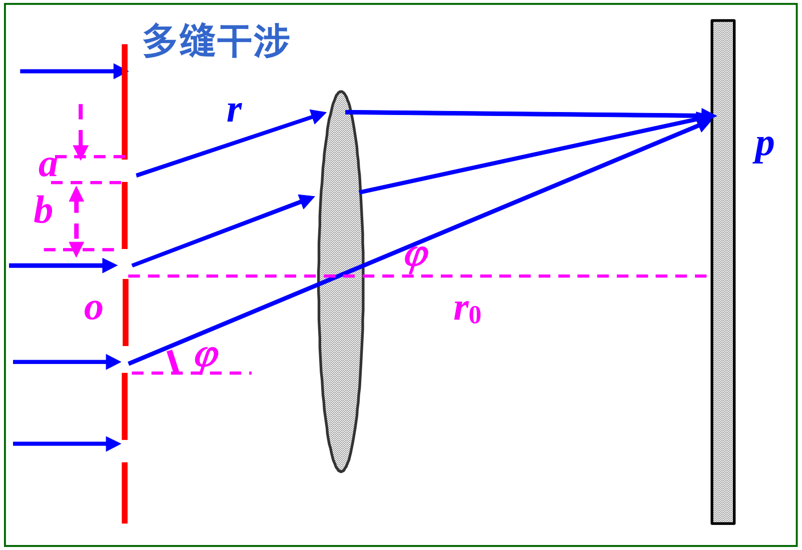
I 各缝相同衍射角φ的光线在成像屏上汇聚于同一点

II 光栅衍射成象是单缝衍射和多缝干涉合成的结果

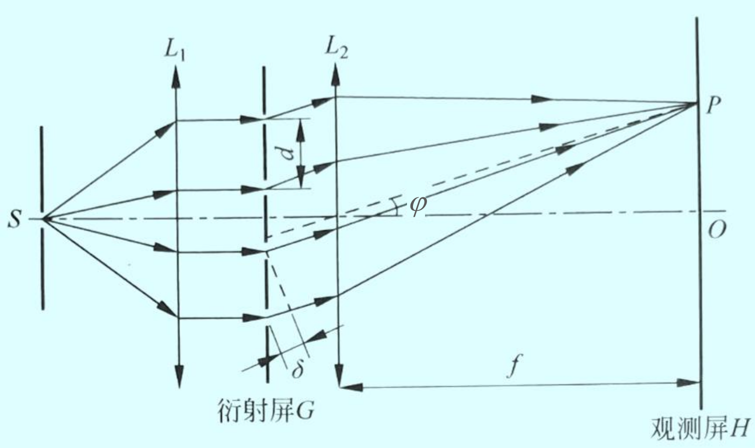
- 将来自同一条缝的沿φ方向的衍射光叠加，求出由单缝引起的P点的振动
- 将N条缝引起的N个振动相干叠加

III 多缝干涉各缝发出光的光强由该缝衍射光光强决定





14.4.3 多缝干涉



衍射屏上有N条平行、等距、等宽的狭缝

相干光：衍射屏G从垂直照射的平面波波阵面分出N束光，具有相同振幅、相位

光程差：

N个狭缝射出的沿同一φ方向的平行光，通过L_2会聚到屏上P点而相干叠加，相邻两束光的光程差：

$$\delta = d\sin\varphi$$

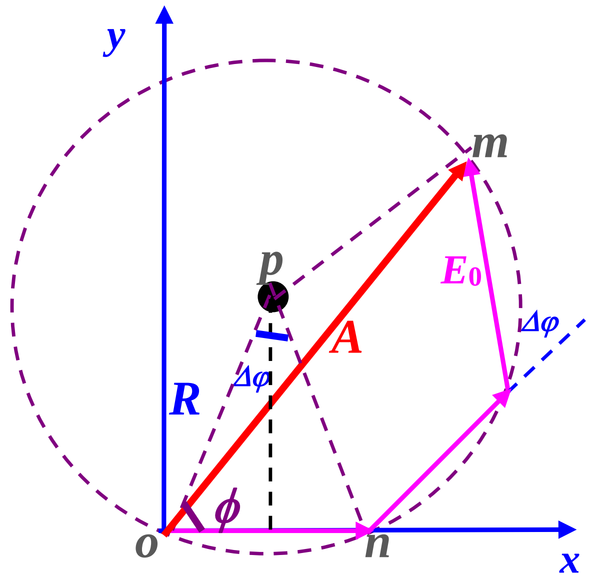
对应的相位差：$\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} d\sin\varphi$

复习：已知N个同偏振、同振幅、同频率，相位依次相差$\Delta\varphi$的简谐振动

求：它们的合振动

解： N 个简谐振动的振动方程可写为

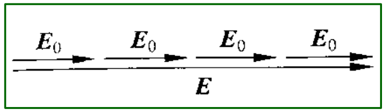
$$\left.\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos \omega t \\ E_2 &= E_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= E_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = A\cos(\omega t + \phi)$$

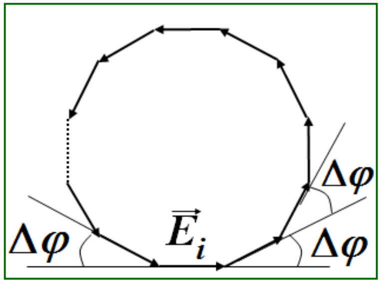


由旋转矢量法得，合振动的相位和振幅

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2}(\pi - \Delta\varphi) - \frac{1}{2}(\pi - N\Delta\varphi) = \frac{N-1}{2}\Delta\varphi \\ E_0 &= 2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = E_0 \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} \cdot \cos\left[\omega t + \frac{(N-1)\Delta\varphi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\Delta\varphi = 2k\pi \quad k = 0, \pm1, \pm2\cdots \quad A_{\max} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} E_0 \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} = NE_0 \\ &\text{当各分振动构成一个封闭的多边形时，合振幅为零} \\ &\Delta\varphi = \frac{2k'\pi}{N} \quad k' \neq Nk, k = \pm1, \pm2\cdots \quad A_{\min} = \lim_{n\to\infty} E_0 \frac{\sin(k'\pi)}{\sin(k'\pi/N)} = 0 \end{aligned}\right.$$

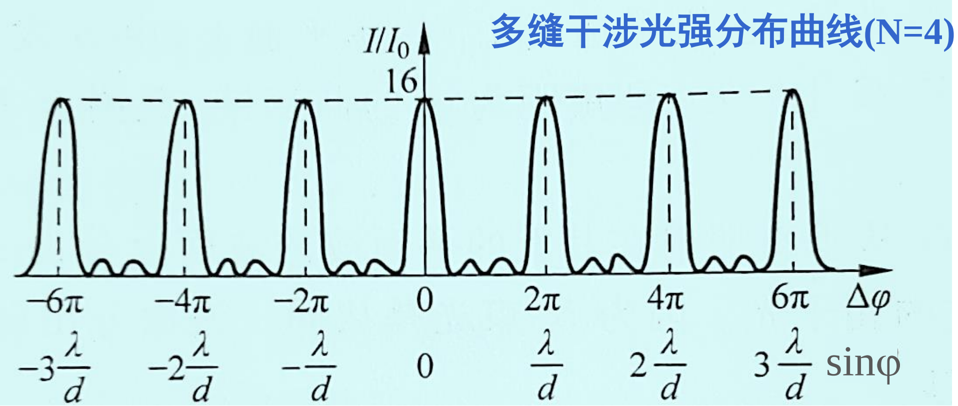




令 $\beta = \dfrac{\Delta\varphi}{2} = \dfrac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$ $\Rightarrow$ 振幅 $A(\varphi) = E_0 \dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}$ $\Rightarrow$ 光强 $I(\varphi) = I_0 \left(\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$

1. 多缝干涉光强分布

$$I = I_0\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \quad \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\varphi}{\lambda}$$



(1) 明条纹(主极大)

当相邻两束光的光程差满足：

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda \qquad k=0,1,2\ldots \Rightarrow I = N^2 I_0 \qquad \text{光强主极大}$$

- 缝间干涉加强，*P*点的光强达到极大值，称为主极大亮纹
- 光强正比于光栅缝隙数的平方

主极大角位置：$\sin\varphi = 0,\ \pm\frac{\lambda}{d},\ \pm\frac{2\lambda}{d}$ 和*N*无关

- 明条纹是平行于缝的直条纹，均匀对称排列
- 两明纹之间的角间距为λ/d, 条纹线间距为$f\lambda/d$

$$I = I_i\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \qquad \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\varphi}{\lambda}$$

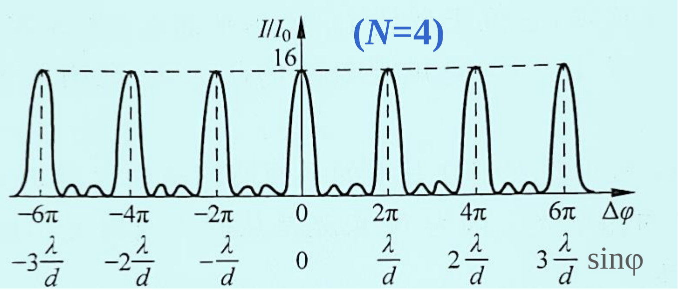
(2) 暗条纹（极小）

N束衍射光在P点干涉相消，P点为暗纹

$$\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = 0 \Rightarrow \sin N\beta = 0,\ \sin\beta \neq 0 \Rightarrow d\sin\varphi = \pm\frac{k'}{N}\lambda$$

$$(k' = 1, 2, \cdots N-1, N+1, \cdots \text{且} k' \neq Nk)$$

极小值角位置：$\sin\varphi = \pm\dfrac{k'}{N}\dfrac{\lambda}{d} \quad (k' \neq 0, N, 2N \ldots)$



- 在相邻两个主极大间，有 N-1个极小
- 暗纹角间距 $\Delta\varphi = \dfrac{1}{N}\dfrac{\lambda}{d}$

下页以N=4，用振幅矢量图分析光强为零的原因

(3) 各级亮纹（次极大）

由微积分中的洛尔定理，相邻主极大谱线间有 N-2 条次极大

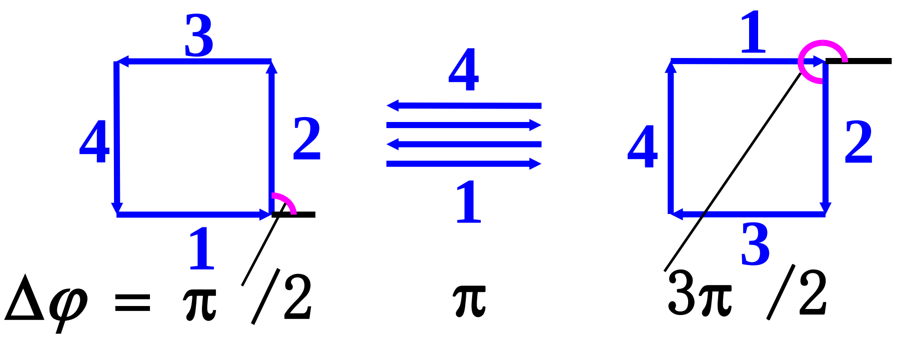
例 $N=4$：光强曲线 如图所示

在 0 级和 1 级亮纹之间 k' 可取1, 2, 3，得三个极小角位置：

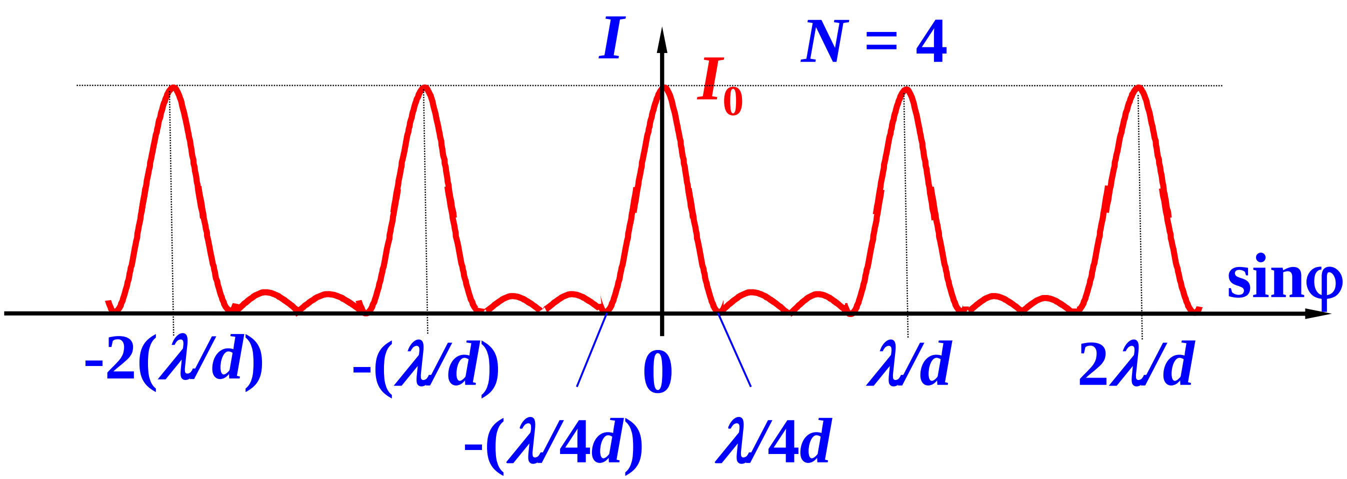
$$\sin\varphi=\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda}{d}\ (k'=1)\ ,\quad \frac{2}{4}\cdot\frac{\lambda}{d}\ (k'=2)\ ,\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda}{d}\ (k'=3)$$

$$\Delta\varphi=\frac{2k'\pi}{N}$$
$$k'\neq Nk,\ k=\pm1,\pm2\cdots$$

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}$$



光强曲线



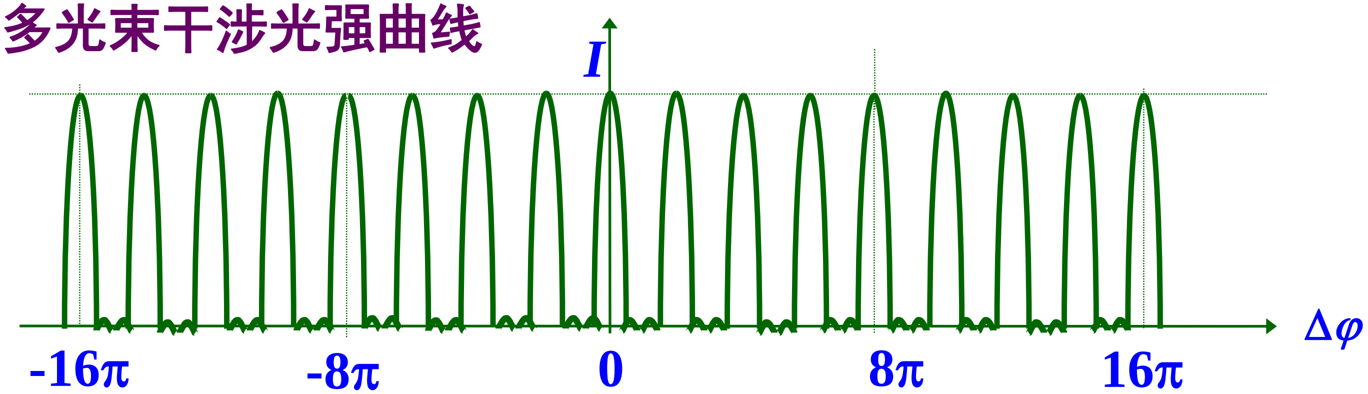
- N增大时光强向主极大集中，使条纹亮而窄

$$d\sin\varphi=\pm\frac{k'}{N}\lambda$$

2. 多缝干涉条纹的特点

- 干涉主极大角宽度：$\Delta\varphi_0 = \dfrac{2}{N}\dfrac{\lambda}{d}$ 相邻主极大的角间距：$\delta\varphi = \dfrac{\lambda}{d}$
- 相邻暗纹的角间距：$\Delta\varphi = \dfrac{1}{N}\dfrac{\lambda}{d}$
- 狭缝数目N越大，明纹光强增加，条纹越细越亮、间距不变，其间暗纹数目增多
- 若波长增加，则明纹相距越远
- 若光栅常数d增加，明纹越细，明纹间距减小

多光束干涉光强曲线



14.4.4 光栅衍射

思考：光栅衍射时，各缝在屏上P点的衍射光强是否相同？

1. 各狭缝相对透镜中心的上下位置不同，但在屏上各点的光强分布相同 $I(\varphi)$

2. 不同的缝发出的相同衍射角的光距离屏上各点的光程差稍有不同，

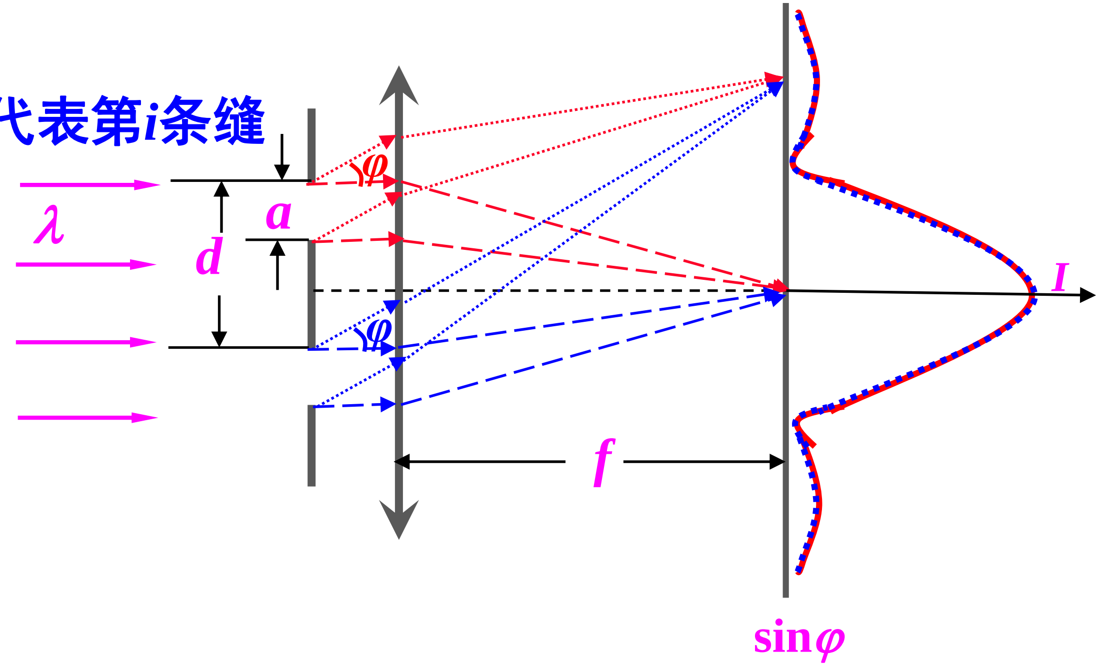
实际分析时忽略该光程差对振幅的影响。

每条缝在屏上的衍射光强，i代表第i条缝

$$I_i = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda}$$

$$E_i = A_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$



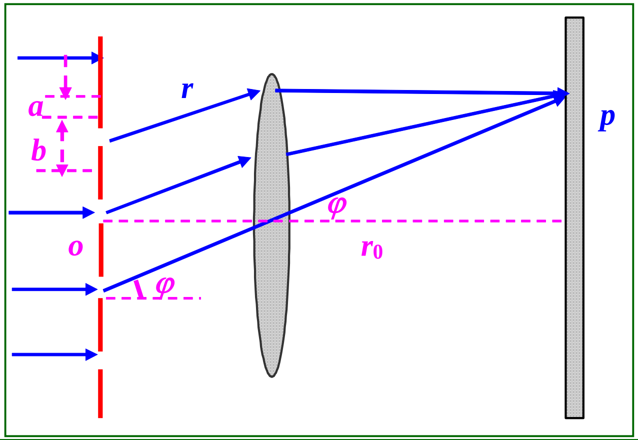
1. 光栅衍射的光强计算

(1) 单缝衍射

从第i个缝发出的衍射光强

$$I_i = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad (\alpha = \frac{\pi a\sin\varphi}{\lambda})$$

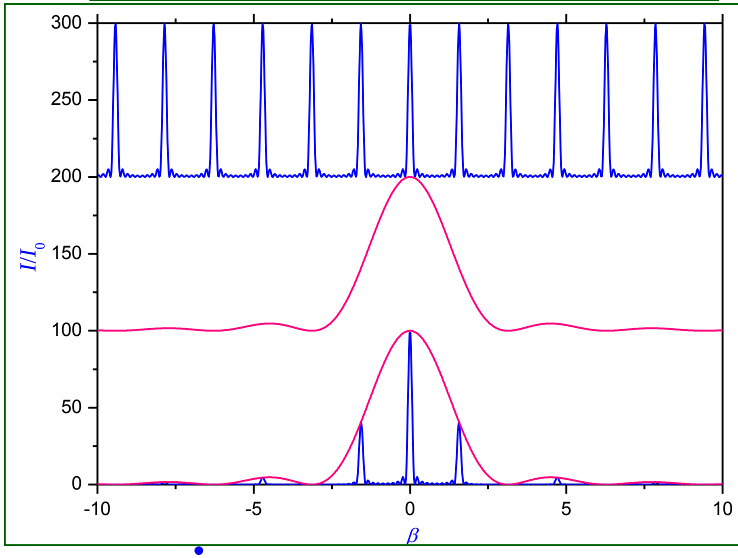
I_0 是单缝在φ=0 时的光强，(i=1,2,…,N)



(2) 多缝干涉

$$I = I_i(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2 \qquad (\beta = \frac{\pi d\sin\varphi}{\lambda})$$

⇨



(3) 光栅衍射光强

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

单缝衍射因子 $(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$

缝间干涉因子 $(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta})^2$

2. 光栅衍射条纹的位置分布

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$$

(1)缝间干涉因子的作用

- 由于N很大，光栅衍射图样中明暗纹主要取决于缝间干涉因子
- 缝间干涉因子决定了主极大、极小、次极大的分布(和多缝干涉条纹分布相同)

A 干涉因子决定主极大亮纹位置

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$\boxed{\text{光栅方程}}$

$\boxed{\text{光栅衍射出现主极大亮纹的必要条件}}$

B 干涉因子决定暗纹位置

$$d\sin\varphi = \pm\frac{k'}{N}\lambda \quad (k' = 1,2,\cdots N-1, N+1,\cdots,\ \text{但}k' \neq Nk)$$

C 干涉因子决定次极大亮纹位置

次极大光强介于主极大和极小之间,相邻两个极小之间有一个次极大

(2)单缝衍射因子的作用

受到单缝衍射的调制,

- 各主极大亮纹的强度不再相等,
- 且在某些主极大位置光强为零(缺级现象)。

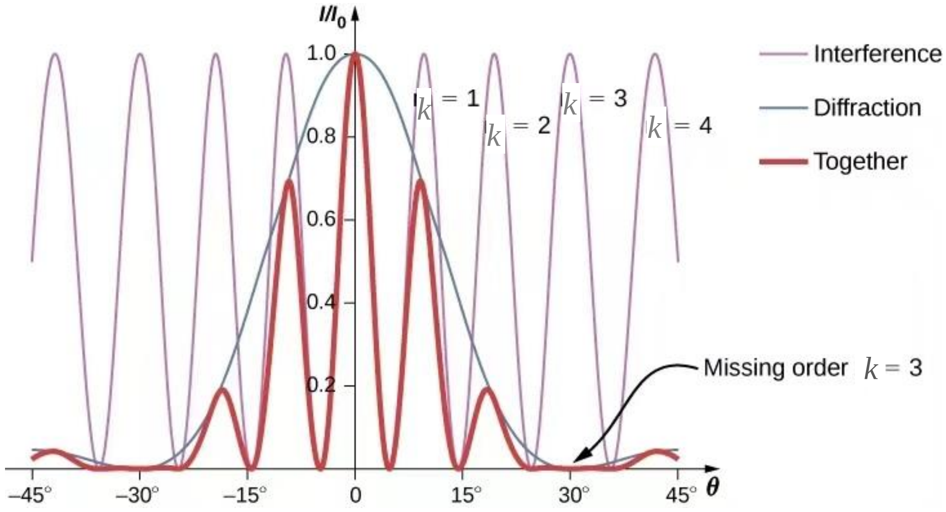
光栅方程:

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

单缝衍射暗纹:

$$a\sin\varphi = \pm k'\lambda, \quad k' = 1, 2, 3, \cdots$$

缺级位置:



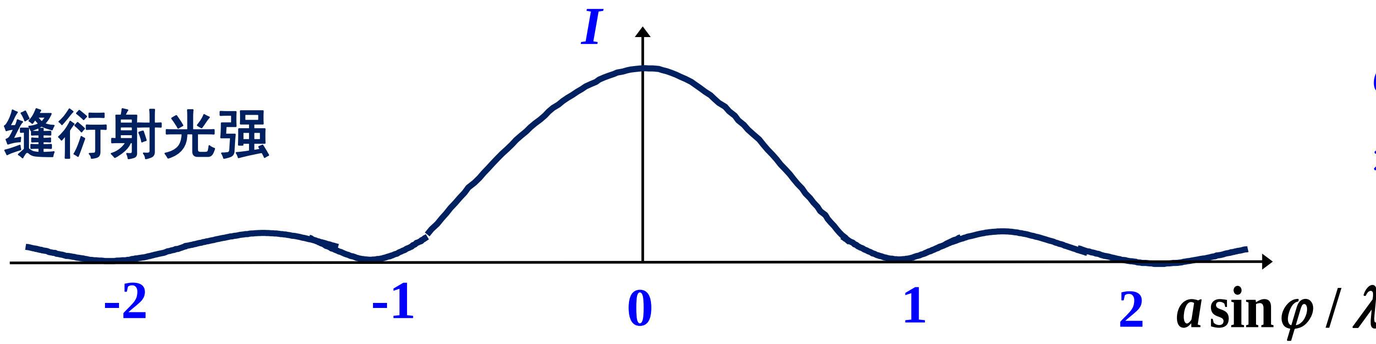
既是光栅衍射的主极大, 又是单缝衍射的暗条纹的φ方向缺级

可得所缺的级次:

$$k = \pm k'\frac{d}{a}, \quad k' = 1, 2, 3, \cdots$$

3. 光栅衍射

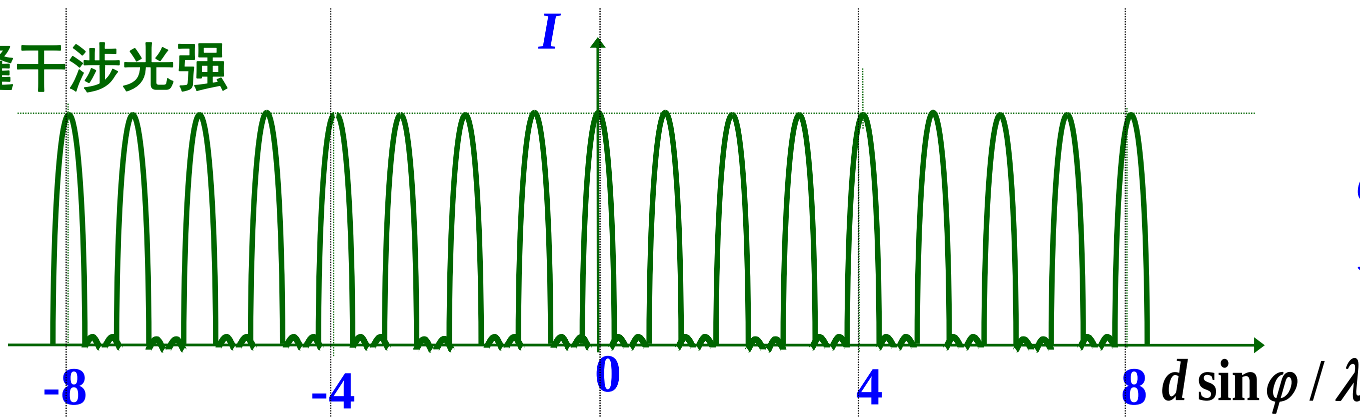
单缝衍射光强



$a\sin\varphi = k'\lambda$,

衍射暗纹

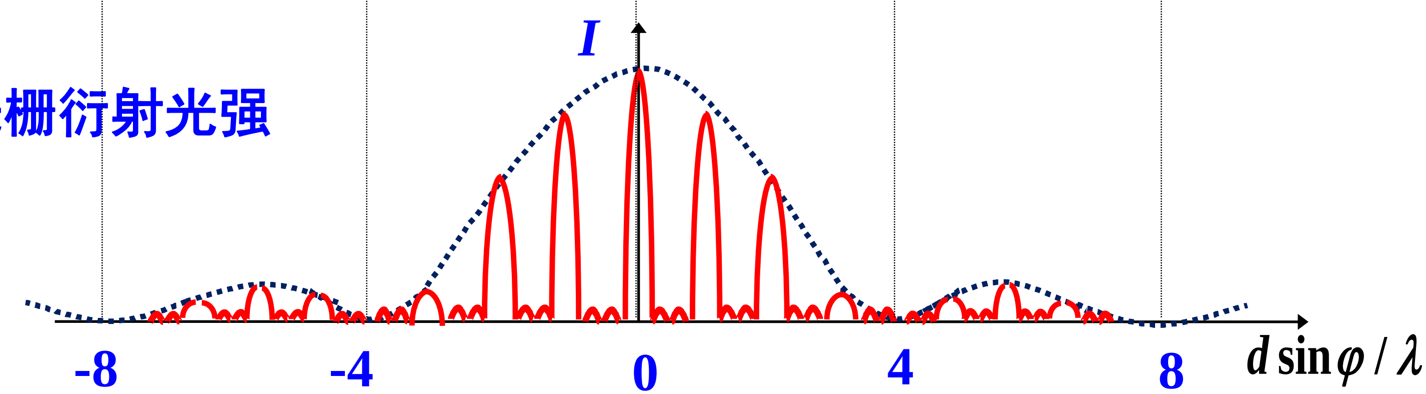
多缝干涉光强



$d\sin\varphi = k\lambda$,

干涉主极大

光栅衍射光强



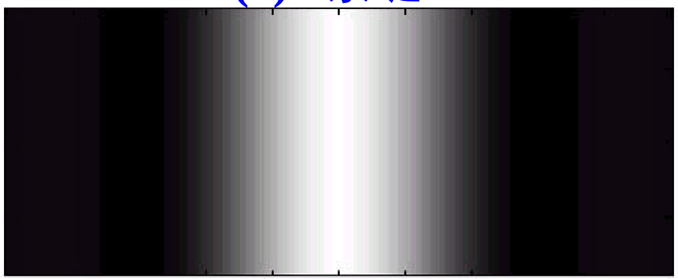
缺级条件：

$$k = \pm\frac{d}{a}k'$$

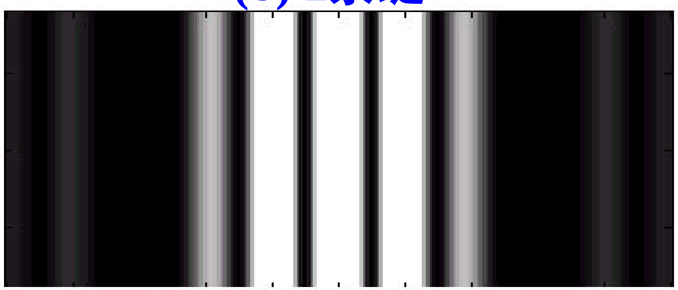
$$k' = 1, 2, 3, \cdots$$

➢光栅中狭缝条数越多，明纹(主极大亮纹)越细

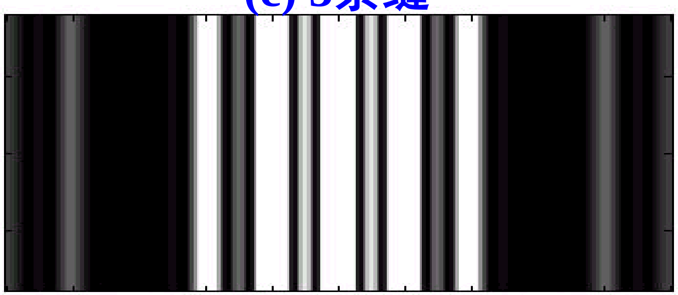
(a) 1条缝



(b) 2条缝

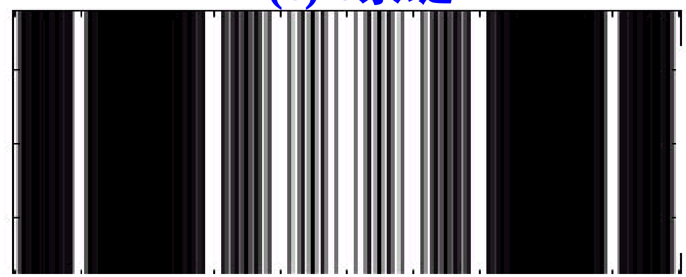


(c) 3条缝

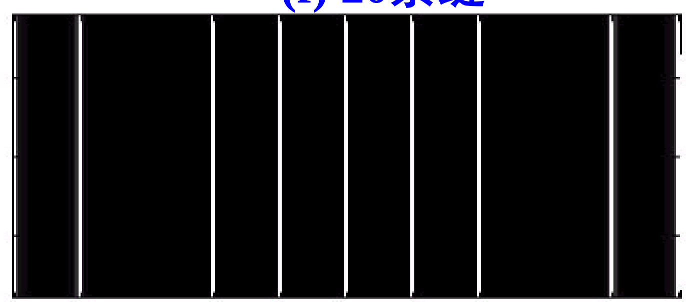


(d) 5条缝

(e) 6条缝



(f) 20条缝



干涉主极大角宽度：$\Delta\varphi_0 = 2\lambda/dN$

相邻暗纹的角间距：$\Delta\varphi = \lambda/dN$

相邻主极大的角间距： $\delta\varphi = \lambda/d$

4. 光栅衍射条纹随λ、 d 、a的变化

光栅方程： $d\sin\varphi = \pm k\lambda$， $k = 0, 1, 2, \cdots$ 　 $\dfrac{\lambda}{d}$ 干涉主极大的的间距

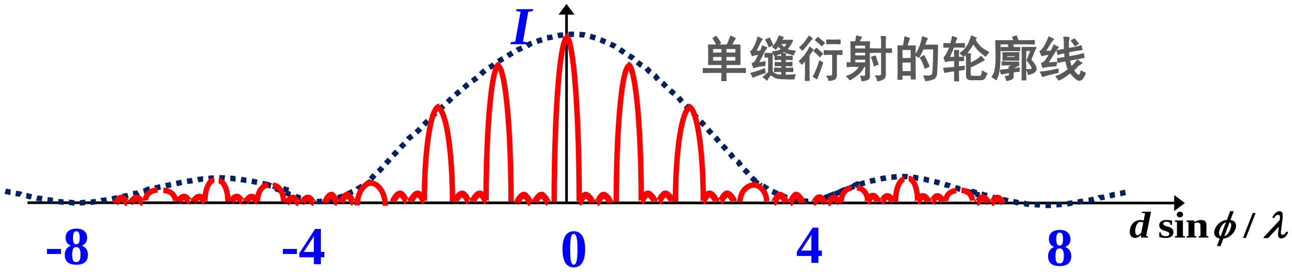
单缝衍射暗纹： $a\sin\varphi = \pm k'\lambda$， $k' = 1, 2, 3, \cdots$ 　 $2\dfrac{\lambda}{a}$ 衍射中央明纹的宽度

(1) 随波长λ变化

- λ增加，主极大将向φ增大的方向移动，且间距变大，条纹变稀
- 白光入射，不同色光产生一套衍射图样，同级条纹不同波长位置错开

(2) 随光栅常数d、 缝宽a变化

- a减小(d不变)，单缝衍射的轮廓线变扁平，中央部分变宽，包含的主极大个数增加
- d减小(a不变)，主极大间距变大，中央部分包含的主极大个数减小



例14.4.1：已知 λ=6000 Å，垂直入射一光栅上，测得第二级主极大的衍射角为 30^0，且第三级是缺级

求：(1) 光栅常数　(2) a 的最小宽度

(3) a, d 确定后，屏幕上可能呈现的全部主极大的级次

解：(1) 由光栅方程 $d\sin\varphi = \pm k\lambda \;\; (k=2, \varphi = 30^o) \Rightarrow d = 2.4\times10^{-4}(\text{cm})$

(2) 由缺级条件　$k = \pm\dfrac{d}{a}k' \quad , k' = 1,2,3,\cdots$　　k=3缺级

$$k' = 1\text{时} \Rightarrow a_{\min} = \frac{d}{k}k' = \frac{d}{3} = 0.8\times10^{-4} \quad (\text{cm})$$

(3) 由光栅方程　$d\sin\varphi = \pm k\lambda$

衍射光在屏上出现的条件　$\sin\varphi < 1 \;\; (\varphi < \dfrac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda} < \frac{d}{\lambda} \quad (d/\lambda = 4)$$

$$\Rightarrow k < 4$$

- 如果不出现缺级，屏幕上有 $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ 等 7 条主极大条纹
- 由缺级条件 $k = \pm\dfrac{d}{a}k'$　$k' = 1,2,3,\cdots$　d/a=3可得 $k = \pm3, \pm6, \pm9\cdots$

实际出现主极大条纹有　$k = 0, \pm1, \pm2$

例14.4.2： 已知 λ=5461 Å，先后垂直入射到 (1) 500 条/厘米的光栅

(2) 10000 条/厘米的光栅上

求： 分别经过两种光栅后第一级与第二级明条纹的衍射角

解： 设第一级、第二级明条纹的衍射角分别为 φ_1、φ_2，

由光栅方程 $d\sin\varphi = \pm k\lambda$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \pm\arcsin\frac{\lambda}{d}(k=1),\ \ \varphi_2 = \pm\arcsin\frac{2\lambda}{d}(k=2)$$

(1) $d = 1/500\text{cm},\ \ \varphi_1 = \pm 1^\circ 34'$(第一级), $\varphi_2 = \pm 3^\circ 8'$(第二级)

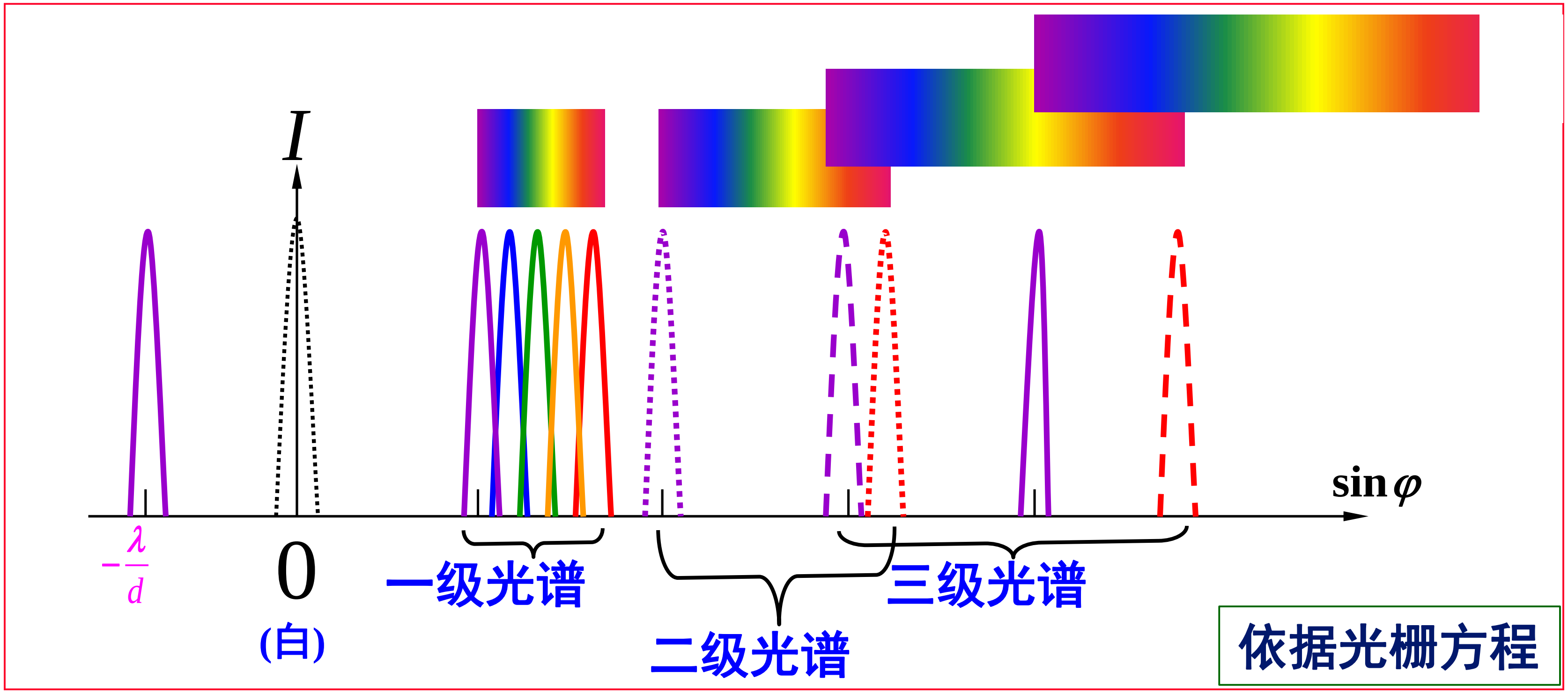
(2) $d = 10^{-4}\text{cm},\ \varphi_1 = \pm 33^\circ 6'$(第一级), $\sin(\varphi_2) > 1$(第二级)

光栅单位长度中缝数愈少(d大)，明条纹角间距(λ/d)愈小，愈不容易分辨

14.4.5 光栅光谱

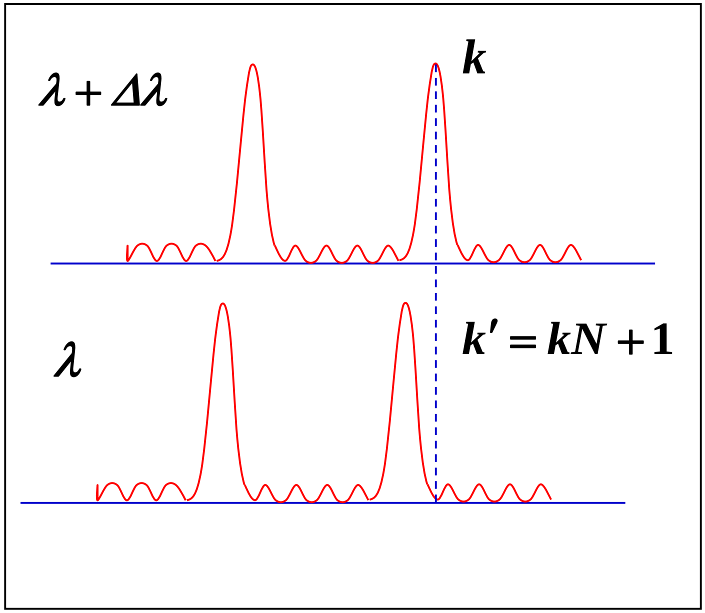
光栅光谱： 白光经光栅衍射后，不同波长的同级条纹的位置将错开，构成某级衍射光谱，这些条纹称做谱线。（光栅具有分光的作用）

光栅光谱仪： 用来观察光栅光谱的仪器称为光栅光谱仪



依据光栅方程

◆ 光栅光谱仪的分辨本领



(1) 光栅分辨本领 R 的定义

$$R\equiv\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

λ是两条谱线的平均波长

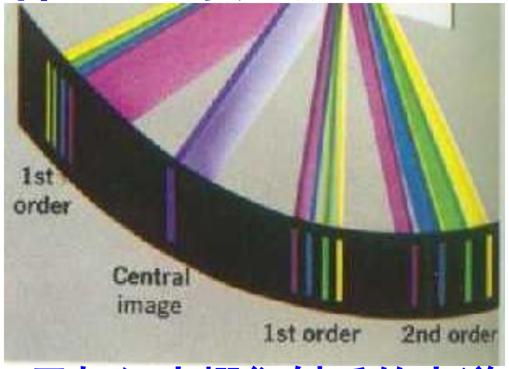
$\Delta\lambda$是恰能分辨的两条谱线的波长差。

(2) 光栅衍射中光线恰能被分辨的瑞利判据

第k级谱线中，波长为 $\lambda+\Delta\lambda$ 的第 k 级主极大中心位置恰好与波长为 λ 的 最临近的极小位置重合，则称两条谱线恰可分辨

由光栅方程和暗纹方程：

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi &= k(\lambda+\Delta\lambda) \\ d\sin\varphi &= \frac{k'}{N}\lambda=\frac{kN+1}{N}\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$$



汞灯经光栅衍射后的光谱

例14.4.3： 钠黄光 λ=5893 Å，钠双线波长差 $\Delta\lambda$＝6 Å，光栅常数 d=1/500 mm

问： (1) 光线以 30^0 角倾斜入射光栅时，谱线的最高级次是多少？

(2) 如在第三级次恰能分辨出钠双线，光栅缝数必须为多少？

解： (1) 设斜入射角为 θ，相邻缝衍射角同为 φ 光线的光程差

$$\delta = d(\sin|\theta| + \sin|\varphi|)$$

光栅方程
$\delta = d\sin\varphi = \pm k\lambda$
光相对光栅垂直入射

用它代替光栅方程中的相应光程差,并结合光栅法线方向确定 θ 和 φ 的正负

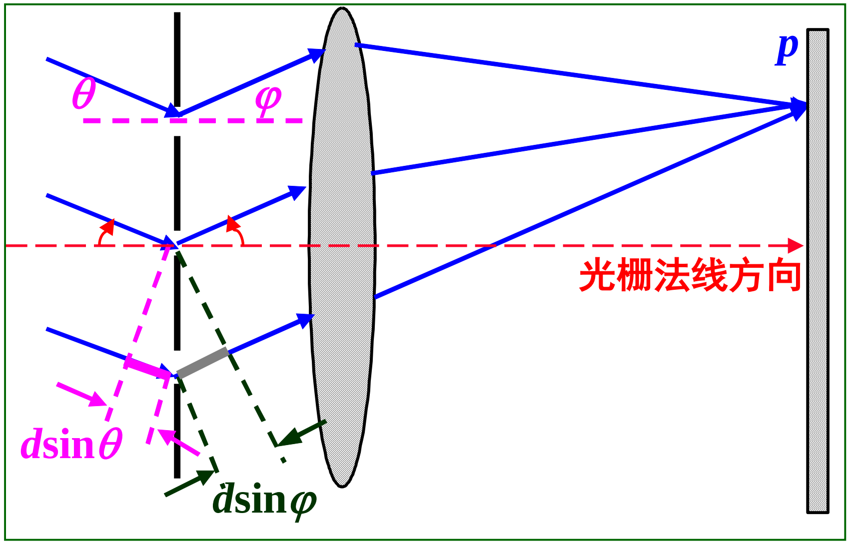
得倾斜入射的光栅方程 $d(\sin\varphi - \sin\theta) = k\lambda$ k=0,±1, ±2,... (θ= -30°, φ为正)

出现最高级次谱线的条件 $|\sin\varphi| < 1$

$$k = \frac{d(\sin\varphi - \sin\theta)}{\lambda}$$

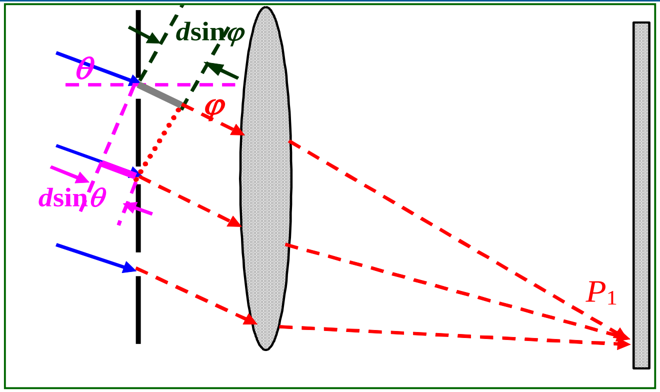
φ为正 $\sin\varphi < 1$

$$k < \frac{d(1-\sin\theta)}{\lambda} = 5.1 \qquad k_{max}=5$$



(2) 由分辨本领计算公式 $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

可得：N=327 条，光栅缝数至少为 327 条



讨论：

(1) 取红色虚线所示衍射光线，谱线最高级次?

光栅方程 $d(\sin\varphi - \sin\theta) = k\lambda$ k=0,±1, ±2,... (其中θ为负, φ为负)

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{d(\sin\theta + \sin\varphi)}{\lambda} \\ \varphi\text{为负} \quad \sin\varphi > -1 \end{array}\right\} \Rightarrow k > \dfrac{d(\sin\theta - 1)}{\lambda} = -1.7 \qquad k_{max} = -1$$

(2) 实验条件相同的时,垂直入射和倾斜入射哪种情况可以看到更高级次的谱线?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{垂直入射时，由光栅方程} & d\sin\varphi = k\lambda \\ \text{以及出现最高级次条件} & \sin\varphi < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow k = \dfrac{d\sin\varphi}{\lambda} < \dfrac{d}{\lambda} = 3.4$$

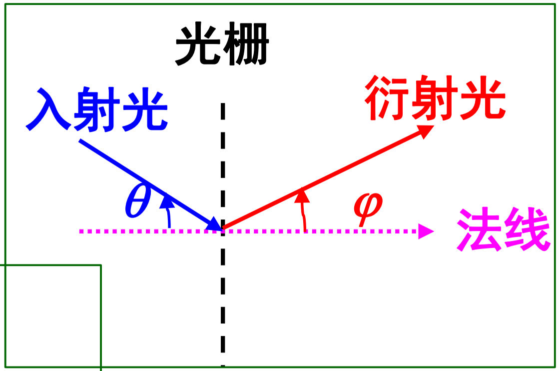
$$k_{max} = 3$$

倾斜入射沿着光入射方向可以看到更高级次的谱线

(3) 光源从上方斜入射时，中央条纹移动方向?

取k=0时， $d\sin\varphi = d\sin\theta > 0$ 即光源从上方斜入射时，中央零级条纹下移

1.光线斜入射时的光栅方程：



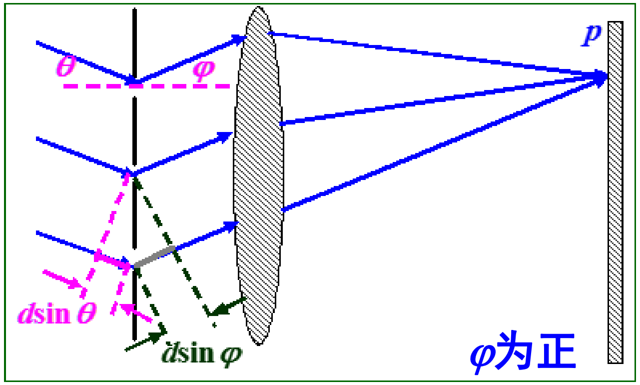
光线以 θ 角倾斜入射到光栅时，光栅方程

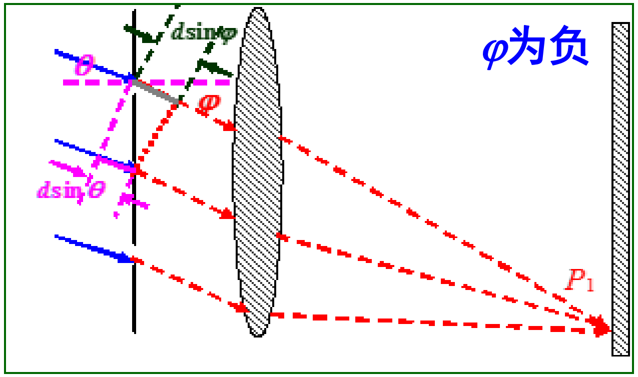
$$d(\sin\varphi - \sin\theta) = k\lambda \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

角度符号的规定：

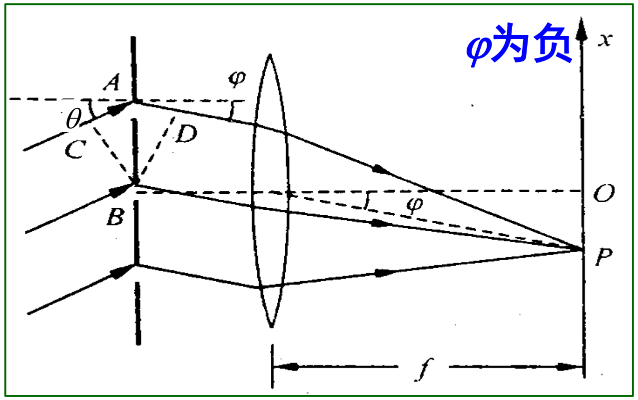
由法线转向光线，逆时针方向为正，顺时针方向为负

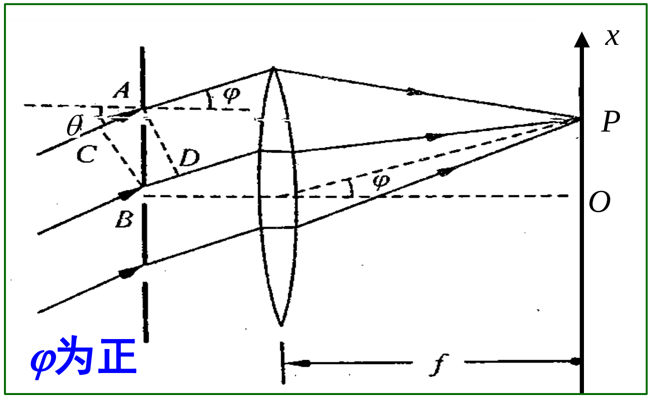
θ为负



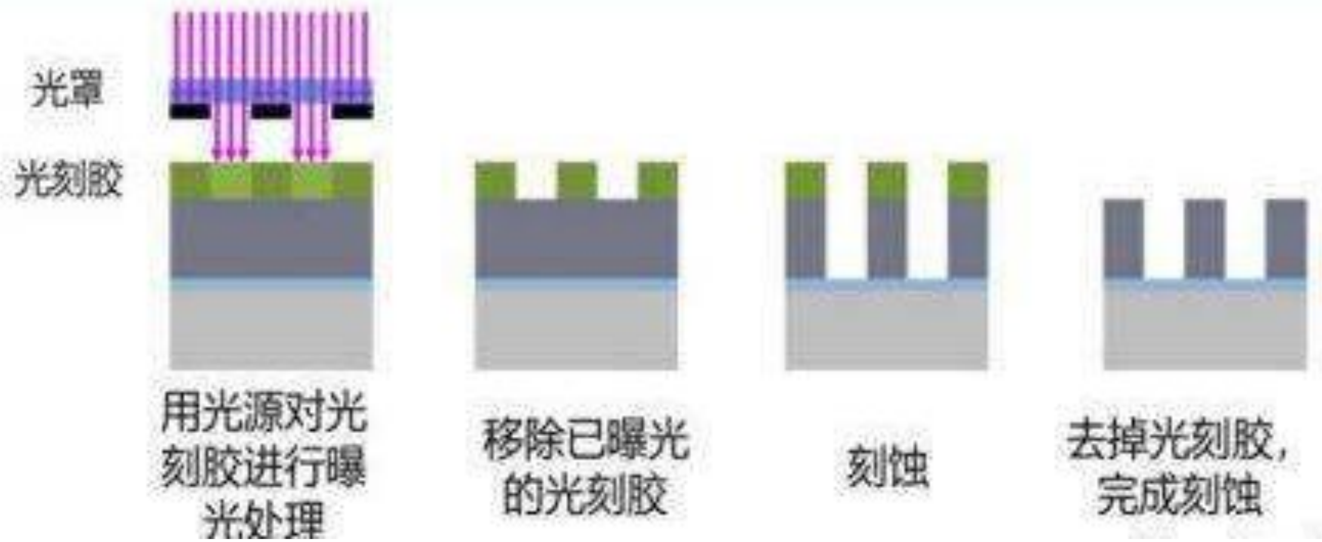


θ为正

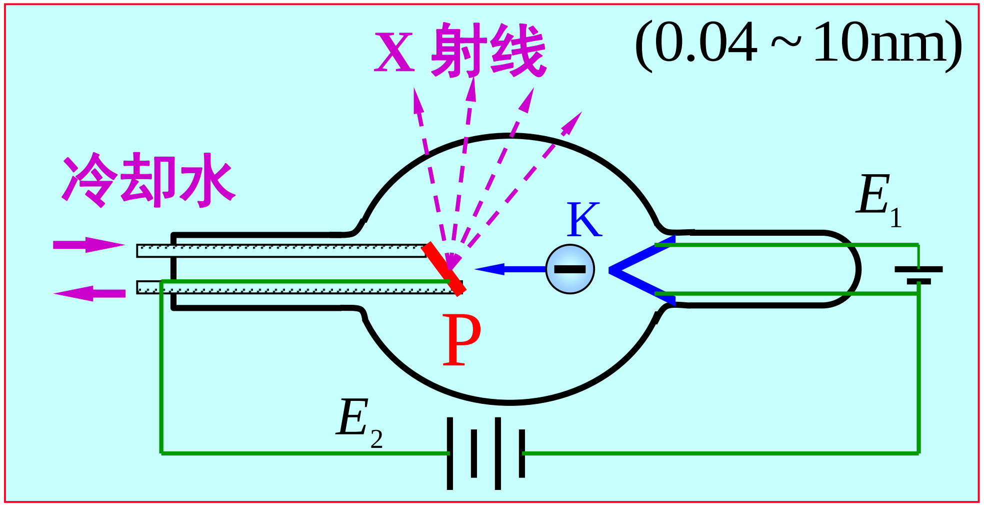


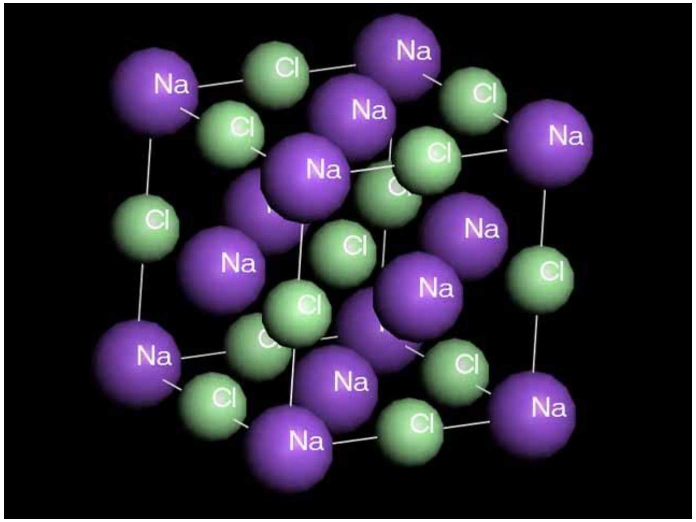


光栅加工工艺流程



14.5 晶体的X射线衍射





2.48埃

- 晶格衍射实质：点间散射光的干涉

$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cdot \sin\theta$$

θ：掠射角

d：晶面间距

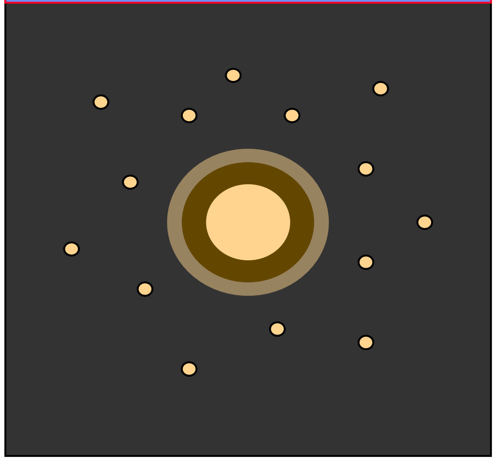
(晶格常数)

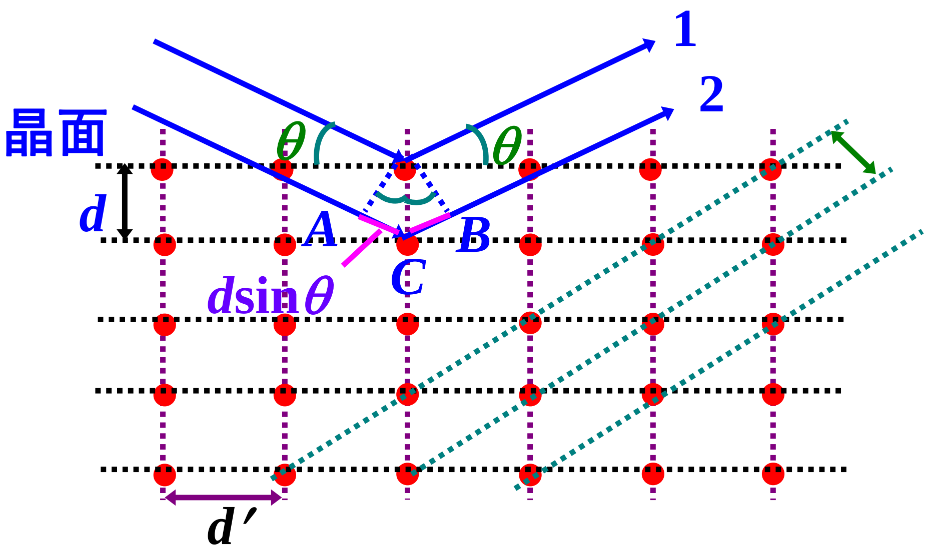
散射光干涉加强条件：

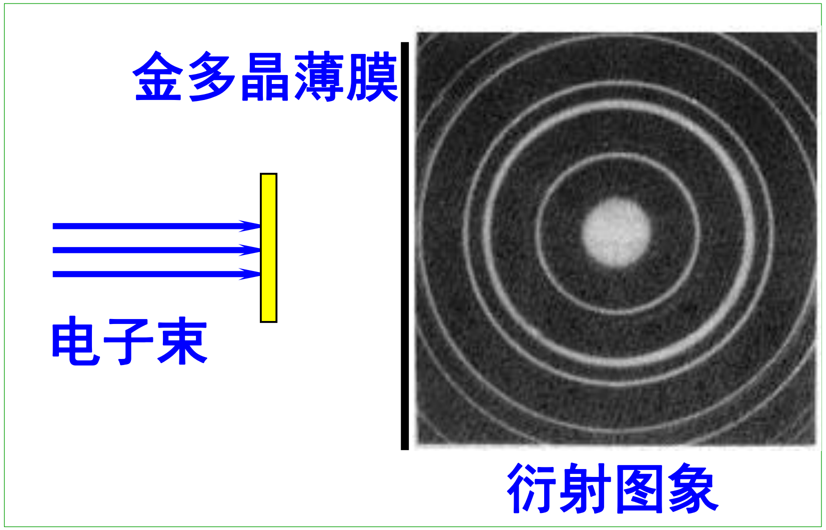
$$2d \cdot \sin\theta = k\lambda \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

晶体衍射的布喇格公式

劳 厄 斑 点







本章小结

1.惠更斯—菲涅耳原理

$$E_{(P)}=\iint_S \mathrm{d}E(P)=C\iint_S \frac{k(\theta)}{r}\cos(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda})\mathrm{d}S$$

2.单缝夫琅禾费衍射

2.1菲涅耳半波带法

$$\begin{cases} a\sin\varphi=\pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹 } (k=1,2,3,\ldots) \\ a\sin\varphi=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{亮纹 } (k=1,2,3,\ldots) \\ \varphi=0 & \text{零级(中央)亮纹} \end{cases}$$

2.2单缝衍射光强

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}$$

2.3中央亮纹宽度

中央亮纹半角宽度： $\varphi_1 = \arcsin\frac{\lambda}{a}$

中央亮纹的线宽度： $\Delta x_0 = 2f\tan\varphi_1 \approx 2f\frac{\lambda}{a}$

衍射反比定律: $\frac{\lambda}{a} \to 0 \quad \Delta x \to 0$

3.圆孔夫琅禾费衍射

艾里斑的半角宽度： $\delta\varphi = 1.22\frac{\lambda}{d}$

光学成像仪的分辨率 $R = \frac{1}{\theta_{\min}} = \frac{d}{1.22\lambda}$

4.光栅衍射

4.1光栅衍射光强

$$I = I_i\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\left(\alpha = \frac{\pi a\sin\phi}{\lambda} \qquad \beta = \frac{\pi d\sin\phi}{\lambda}\right)$$

4.2光栅方程

光垂直入射 $d\sin\varphi = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ 主极大亮纹

光斜入射 $d(\sin\theta + \sin\varphi) = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (θ和φ角有正负之分)

注：入射光从上方斜入射，θ为正设

4.光栅衍射

4.1光栅衍射光强

$$I = I_i\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\left(\alpha = \frac{\pi a\sin\phi}{\lambda} \qquad \beta = \frac{\pi d\sin\phi}{\lambda}\right)$$

4.2光栅方程

光垂直入射 $d\sin\varphi = k\lambda \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ 主极大亮纹

光斜入射 $d(\sin\varphi - \sin\theta) = k\lambda \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$（注意$\theta$和$\varphi$角的正负)

缺级： $k = \pm k'\dfrac{d}{a}, \quad k' = 1, 2, 3, \cdots$

4.3光栅的分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$