4.1 数学期望

数学科学学院

电子科技大学
UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

一. 随机变量的数学期望

在一些实际问题中，除需要了解随机变量的分布函数外，我们更关心的是随机变量的某些特征。

* 评定一个班学生考试成绩好坏，最关心的是平均成绩；

* 考察成都市区居民的生活水平，我们最关心是成都市区每个家庭的年平均收入。

甲、乙两位射手的射击数据可由下图表示

甲射手

射中环数	8	9	10
次数	14	22	15

乙射手

射中环数	8	9	10
次数	13	11	14

请问哪一位射手的射击水平更高？

思路：计算其射中各环的频率n_i，再算平均环数

$$n_8=\frac{N_8}{N_8+N_9+N_{10}},\quad n_9=\frac{N_9}{N_8+N_9+N_{10}},\quad n_{10}=\frac{N_{10}}{N_8+N_9+N_{10}}$$

平均环数$\approx \dfrac{8\times N_8 + 9\times N_9 + 10\times N_{10}}{N_8 + N_9 + N_{10}}$

如果$N = N_8 + N_9 + N_{10}$足够大，利用**频率收敛到概率**的性质，可以得到

平均环数$\approx 8\times p_8 + 9\times p_9 + 10\times p_{10}$

总结：设X是射击x_i环的环数，则平均环数为$\sum_{i=1} x_i P(X = x_i)$

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设X是离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\ldots$$

若$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i<\infty$，则称

$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$为$X$的数学期望(Expectation)或者均值(Mean)

注1 定义中要求无穷级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$绝对收敛

原因：绝对收敛的级数与其更序级数收敛到同一数值

将项重新排列后的级数

因此绝对收敛,是为了保证用任何方式计算数学期望，都有唯一的数值.

定理： 设$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$条件收敛，对任意a，存在它的更序级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i'$收敛到a。

例1 设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = \frac{(-2)^i}{i}\} = \frac{1}{2^i},\ i=1,2,\ldots$$

虽然 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = -\ln 2$，

但是 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$，

因此数学期望并不存在。

通过调整分布律的顺序，可以得到下列的更序级数：

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = -\frac{\ln 2}{2}$$

例2 抽血化验的效率问题：在有很多人的单位普查一种疾病，化验方法有两种：

(1) 每个人的血分别化验；

(2) 把k个人的血混在一起化验，如果阳性，再对k个逐个化验。

假设每个人被诊断为阳性的概率均为p，且相互独立，评估两种化验方法的效率。

解：设X是用第二种方法时，k个人需要化验的总次数，则其分布列为：

X	1	$k+1$
$P\{X=x_i\}$	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

计算得到$E(X)=k+1-k(1-p)^k$，与k对比即可得到结论

2. 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量X的数学期望要怎么定义呢?

方法：离散化，再求极限。

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，先取区间$[a, b]$，作划分

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，则X在区间$[a, b]$上的均值可近似写为

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* P\{x_{i-1} < X \le x_i\} \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^* f(x_i^*)\Delta x_i$$

记$\lambda=\max \Delta x_i$，在上式中令λ趋于$0(n\to\infty)$，得

X在区间$[a, b]$上的均值为 $\int_a^b xf(x)dx$

定义 设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$,

若$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$，则称

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 为X的数学期望（均值）

注1 同样，对连续型随机变量的无穷广义积分要求绝对收敛也出于相同的考虑。

注2 连续型 随机变量的数学期望仍是它的所有可能取值对取值概率的加权平均。

设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < +\infty$$

讨论X的数学期望。

容易看出 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=0$

被积函数为奇函数且积分区间关于原点对称

但是有 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx=\infty$ 故X的数学期望并不存在

二. 一维随机变量函数的数学期望

问题 设X是随机变量，$Y=g(X)$也是随机变量，如何计算$E[g(X)]$？

对于X是离散型随机变量的情况：

记$y_i=g(x_i)$，若$\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|p_i$收敛，

即使Y的分布列需要合并概率，也成立

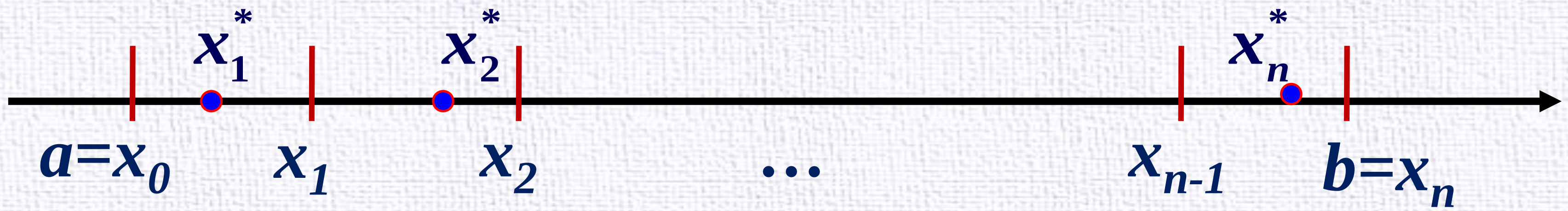
则有$E[Y]=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}y_ip_i=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$

对于X是连续型随机变量的情况：

若$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f_X(x)dx<\infty$

则有$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$

理解 设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，先取区间$[a, b]$，作划分



$g(X)$	$g(x_1^*)$	$g(x_2^*)$	…	$g(x_n^*)$
概率	$P(x_0 < X < x_1)$	$P(x_1 < X < x_2)$	…	$P(x_{n-1} < X < x_n)$

记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，则 X在区间$[a, b]$上的均值可近似写为

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\, P(x_{i-1} < X < x_i) \approx \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\, f(x_{i-1})\Delta x_i$$

记$\lambda=\max \Delta x_i$，在上式中令λ趋于 $0(n\to\infty)$，得证

定理： 设连续型随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，设函数$y=g(x)$处处可导且恒有$g'(x)>0$(或恒有$g'(x)<0$)，则$Y=g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & g(-\infty)<y<g(+\infty) \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

其中$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数

$y=h(g(x))=x$ 的导数

证明： 假设$X>0,Y>0$，$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_X[h(y)]h'(y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X[h(g(x))]h'(g(x))g'(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

例 设球的直径$X \sim U(a, b)$, 求球的体积V的数学期望$E(V)$.

解 体积$V=(\pi/6)X^3$,可得

$$f_V(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\sqrt[3]{\dfrac{2}{9\pi}}\,y^{-\frac{2}{3}}, & \dfrac{\pi}{6}a^3 \le y \le \dfrac{\pi}{6}b^3; \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

哪种简单?

则 $E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_V(y)dy=\dfrac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$

另解 $E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b \dfrac{\pi}{6}x^3 dx$

三. 二维随机变量函数的数学期望

对于(X,Y)是二维离散型随机变量的情况，

若 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则$Z=g(X,Y)$的期望存在，

且$E[Z]=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$

对于(X,Y)是二维连续型随机变量的情况，

若$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$绝对收敛，则$Z=g(X,Y)$的期望存在，

且$E[Z]=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$

例4： 设二维随机变量(*X*,*Y*)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算$E(X)$；$E(X+Y)$；$E(XY)$.

$$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy;$$

$$E(X+Y)=\int_0^1\int_0^1 (x+y)(x+y)dxdy;$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy.$$

例5 设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, x\in R,$$

试求$E[\min(|X|,1)]$.

解 $$g(x)=\min(|x|,1)=\begin{cases}|x|, & |x|<1;\\ 1, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

$$E[\min(|X|,1)]=\int_{-1}^{+1}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{2\,dx}{\pi(1+x^2)}$$

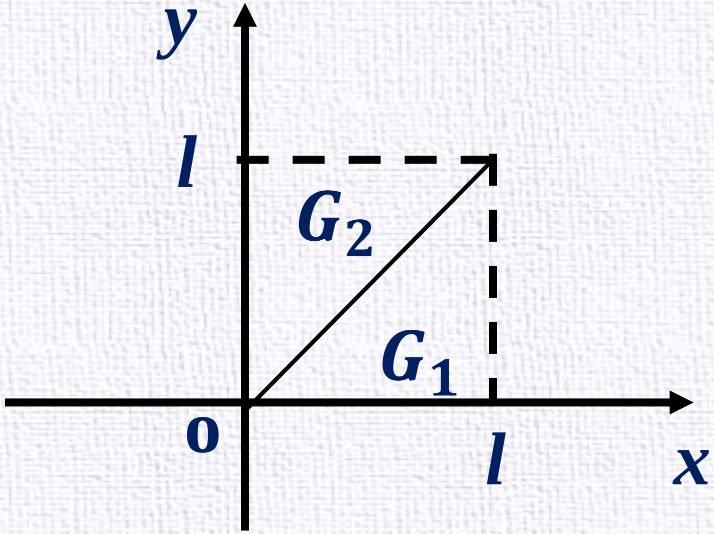
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\ln 2$$

例6 在长为l的线段上任意选取两点，试求两点间的平均距离

解:设两点的坐标分别为随机变量X,Y，由于独立性，二维随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{l^2}, & 0\le x\le l,\ 0\le y\le l,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

两点间的距离为$Z=|X-Y|$，需要计算$E(Z)$



$$E(Z)=\int_{G_1}(x-y)f(x,y)dxdy+\int_{G_2}(y-x)f(x,y)dxdy$$

例7 X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$, 求$E[min(X,Y)]$

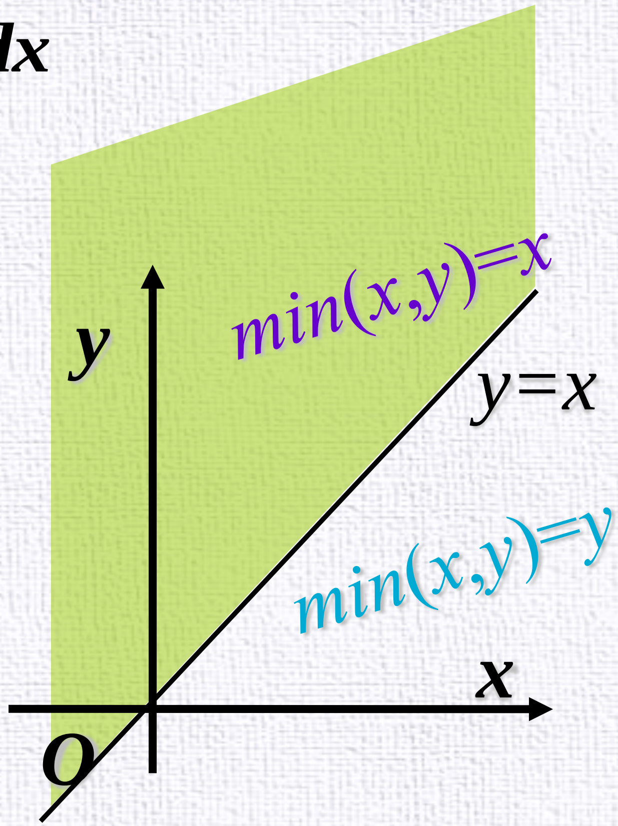
$$\text{解}:E[\min(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)f(x,y)dx]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}xf(x,y)dx\right]dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}yf(x,y)dy\right]dx$$

又$\because f(x,y)$关于x,y对称

$$\therefore E[min(X,Y)]=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}xf(x,y)dx\right]dy$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\right]dy=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



数学期望的相关性质

数学期望具有以下性质：

1)设X是随机变量，a,b是常数，则有$E(aX+b)=aE(X)+b$;

2)设X、Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

3)设X、Y是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$.

注1：性质2)，3)均可推广到多个随机变量的情形；

注2：性质2)不需要独立性的条件。(在很多题目中有妙用)。

正态分布：设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 服从$N(0,1)$.

解：$E(Y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy=0$,

利用$X=\sigma Y+\mu$，可以得到$E(X)=\mu$

例7：X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$, 求$E[min(X,Y)]$

因为 $$min(X,Y)=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$$

$$E(min(X,Y))=E\left(\frac{X+Y-|X-Y|}{2}\right)=E\left(\frac{-|X-Y|}{2}\right)$$

可以证明$-Y$服从$N(0,1)$。又因为X,Y相互独立，

因此$X,-Y$相互独立，利用可加性有$X-Y$服从$N(0,2)$

令$Z=X-Y$，已知Z服从$N(0,2)$，计算$E(|Z|)$

例：设$X\sim B(n,p)$，计算$E(X)$

解：已知二项分布满足可加性，因此$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$其中X_i相互独立，并且X_i服从参数为p的两点分布。

注意到$E(X_i)=p\times 1+(1-p)\times 0=p$

两点分布是二项分布的特例

因此$EX=EX_1+EX_2+\ldots+EX_n=np$

训练：用定义计算二项分布的期望。