4.2 数学期望、方差的相关性质

数学科学学院

电子科技大学
UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

数学期望的相关性质

数学期望具有以下性质：

1)设X是随机变量，a,b是常数，则有$E(aX+b)=aE(X)+b$;

2)设X、Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

3)设X、Y是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$.

注1：性质2)，3)均可推广到多个随机变量的情形；

注2：性质2)不需要独立性的条件。

民航机场的送客汽车载有20名乘客，从机场开出，乘客可以在10个车站下车，如果到达某一车站时无顾客下车，则在该站不停止。设随机变量X表示停车次数，假定每个乘客在各个车站下车是等可能的，求平均停车次数。

解： 记 $X_i = \begin{cases} 0, & 第i站没有人下车 \\ 1, & 第i站有人下车 \end{cases}$

则$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

$$E(X_i) = 1 - P(第i站没有人下车) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10}) = 10E(X_i)$$

注： 虽然X_i相互存在关联，但性质仍然成立。

例： 抛一枚均匀硬币直到出现k次为止，试求抛掷次数X的数学期望。

解： 令X_i为出现第i-1次正面以后，到出现第i次正面的抛掷次数。则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$

问题： X和X_i服从什么分布？可以提炼出什么结论？

结论： X服从负二项分布，X_i服从几何分布。
同参数的几何分布的独立和服从负二项分布

$$E(X_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times \frac{1}{2^n}$$ 可用错位相减法或者书上的方法求解

随机变量的方差

数学期望作为数字特征，仅说明了随机变量的平均特征.

平均值不能反映变量取值的其它特点，例如取值的范围、集中程度等.

除了关心平均成绩以外，还关心高低分差异情况；除关心平均年收入以外，还关心贫富分化程度。

现引进随机变量的方差描述随机变量取值的偏离程度.

问题：偏离哪？

方差的定义

随机变量的函数，注意到$E(X)$是一个数

定义 设X是一个随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在

则称$D(X)=E[X-E(X)]^2$为X的**方差**(Deviation/Variance)，

称$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$为X的标准差(或均方差)

与X保持量纲一致

当X是离散型随机变量时，其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\dots$$

其方差为$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i$

当X是连续型随机变量时，密度函数记为$f(x)$，

其方差为$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

性质 若$E(X^2)$存在，则X的数学期望和方差一定存在，且

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

方差常用公式

证明：仅考虑连续情形。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^2}{2}f(x)dx$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx<\infty$$

因此数学期望存在。

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$
$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

性质　若随机变量X的方差存在，则

$$D(aX+b)=a^2D(X)，D(b)=0。$$

思考：$D(-X)=?$

证明：
$$D(aX+b)=E[aX+b-E(aX+b)]^2$$
$$=E\{a[X-E(X)]\}^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}a^2[X-E(X)]^2f(x)dx$$
$$=a^2D(X)$$

性质 设随机变量X、Y的方差存在，则

$$D(X \pm Y)=D(X)+D(Y) \pm 2E\{[X-EX][Y-EY]\}$$

又若X与Y相互独立，则

$$D(X \pm Y)=D(X)+D(Y)$$

例：设$X \sim B(n,p)$，计算$D(X)$

已知二项分布满足可加性，因此$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$
其中X_i相互独立，并且X_i服从参数为p的两点分布。

注意到$D(X_i)=p-p^2=p(1-p)$

因此$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)=np(1-p)$

性质 设随机变量X的方差为零的充要条件是X以概率1取常数$E(X)$，即$P\{X=E(X)\}=1$

定理 Chebyshev(切比雪夫)不等式

设随机变量X的方差存在，则对于$\varepsilon > 0$有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

方差刻画了随机变量X关于其数学期望的偏离程度

证明： $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$

$$= \int_{\{x:|x-E(X)|\geq\varepsilon\}} f(x)dx \leq \int_{\{x:|x-E(X)|\geq\varepsilon\}} \frac{[x - E(X)]^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int [x - E(X)]^2 f(x)dx = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

性质 对任意的常数c，都有$D(X) \le E(X-c)^2$

证明： 定义函数$g(c)=E(X-c)^2$，
则有$g(c)= E(X^2)-2cE(X)+c^2$。

求导得到极值点为$c=E(X)$。

讨论二阶导可以证明$g(c)$在$E(X)$处取得最小值。

随机变量X关于自身数学期望的偏离程度比相对其它任何值的偏离程度都小.

设随机变量X的$E(X)$，$D(X)$存在， 定义 $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

可以证明$E(X^*) = 0$，$D(X^*) = 1$

称X^*为X的标准化随机变量.

特别地，若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$X^* \sim N(0, 1)$

例：设盒中有a个红球，b个白球。有放回的进行摸球，定义

$$X_k=\begin{cases}1, & 第k次摸到红球\\ 0, & 第k次摸到白球\end{cases}$$

计算$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)/n$的均值和方差

解：$E(X_k)=\dfrac{a}{a+b}$，　$D(X_k)=\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{a}{a+b},D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{ab}{n(a+b)^2}$$

结论：把n次试验结果平均之后，方差降低。

类似场景：多次测量取平均可以降低偏差

本质：频率趋向于概率

7. 试证: 若取非负整数值的随机变量 ξ 的数学期望存在, 则

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\geqslant k\}$$

证

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\geqslant k\}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P\{\xi=j\}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}P\{\xi=j\}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}jP\{\xi=j\}\\&=E\xi\end{aligned}$$

对j的要求：$j\geq k$

换序后

对k的要求：$k\leq j$

8. 若随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$, 试证:

$$E\xi=\int_0^{\infty}[1-F(x)]\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}F(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地, 若 ξ 取非负值, 则

$$E\xi=\int_0^{\infty}[1-F(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$E(X)=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{x}dy\,f(x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\int_y^{\infty}f(x)dx\right]dy=\int_0^{\infty}P(X\ge y)dy$$

y的范围：$y\le x$，换序后，x的范围：$x\ge y$

常见分布的均值和方差：

1. 二项分布：设$X\sim B(n,p)$，则$E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$.

2. 泊松分布：设$X\sim P(\lambda)$，则$E[X(X-1)]=\lambda^2$.

进一步，可以证明$E[X(X-1)\ldots(X-k+1)]=\lambda^k$.

$$
\begin{aligned}
&E[X(X-1)\ldots(X-k+1)]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\\
&=\lambda^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}e^{-\lambda}}{(n-k)!}=\lambda^k.
\end{aligned}
$$

3. 几何分布：注意下图的pq定义和常规的相反

设随机变量ξ服从几何分布：$P(\xi=k)=pq^{k-1}(q=1-p),k=1,2,3,\dots$，求$E(\xi),D(\xi)$.

解：$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=p\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\right)'_x\right]_{x=q}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2P\{\xi=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k^2q^{k-1}$$

$$=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1-1)q^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)q^{k-1}-p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}$$

$$=p\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k+1}\right)''_x\right]_{x=q}-\frac{1}{p}=p\frac{2}{p^3}-\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(2-p)}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

4. 均匀分布：设$X\sim U(a,b)$，则

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

可以证明：$Y=\dfrac{X-a}{b-a}$ 服从$U(0,1)$

$$E(Y^k)=\frac{1}{k+1},\quad E(Y)=\frac{1}{2},\quad D(Y)=\frac{1}{12}.$$

$$E(X)=a+(b-a)E(Y)=\frac{a+b}{2},\quad D(Y)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 指数分布：设$X \sim E(\lambda)$，则

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

注意到：$E(X^n) = \int_0^{\infty} \lambda x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{n!}{\lambda^n}.$

伽马函数定义：$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$

伽马函数重要性质：$\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha-1)$，$\Gamma(n) = (n-1)!.$

6. 正态分布：设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 服从$N(0,1)$

解：
$$E(Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy=0,$$
$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1,$$

利用$X=\sigma Y+\mu$，可以得到$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.

34. 令 X 和 Y 为独立的离散型随机变量, 且在 $\{0, 1, \cdots$

$$Z_n \equiv X + nY \pmod K,$$

研究 Z_n 的独立性和两两独立性.

35. 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求系数 A;

(2) X 与 Y 是否独立;

(3) 求 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$;

(4) 试求 $P(X > 0.5 | X + Y = 1)$.

36. 设随机向量 (X,Y) 服从 $\{(x,y) : |x+y| \leqslant 1, |x-y| \leqslant 1\}$ 内的均

(1) 试求出 X 和 Y 的边缘分布.

定义连续型随机变量的条件分布函数会遇到什么问题？

回顾： 研究一个随机变量的取值对另一个随机变量取值的影响。

定义 给定 $y \in R$，若对任意 $\Delta y > 0$ 有

$$P\{y < Y \le y + \Delta y\} > 0$$

且对任意 $x \in R$，极限

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} P\{X \le x \mid y < Y \le y + \Delta y\}$$

存在，称此极限函数为在 $Y = y$ 的条件下，随机变量 X 的**条件分布函数**.

记作 $F_{X|Y}(x|y)$.