



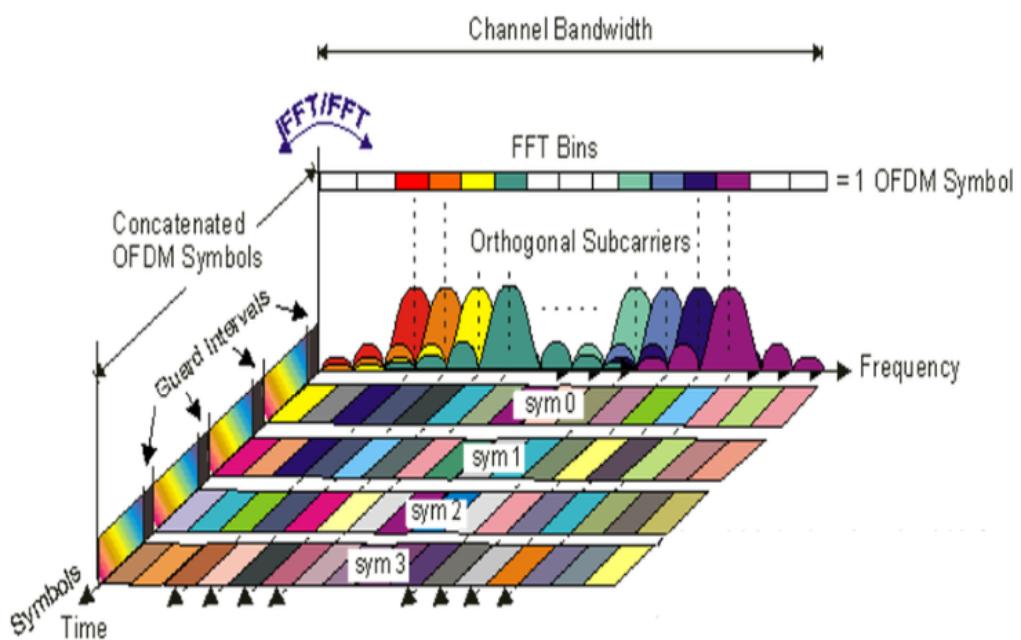
Département Sciences du Numérique

Parcours Télécommunications

Rapport du BE OFDM

HILAL Anwar

Encadré par : N. Thomas



1 Introduction

Ce BE sera effectué sous Matlab et a pour objectif que vous soyez capable d'implanter une chaîne de transmission OFDM dans un contexte de canal sélectif en fréquences et d'analyser les résultats obtenus. Il servira de base au projet télécom qui suivra.

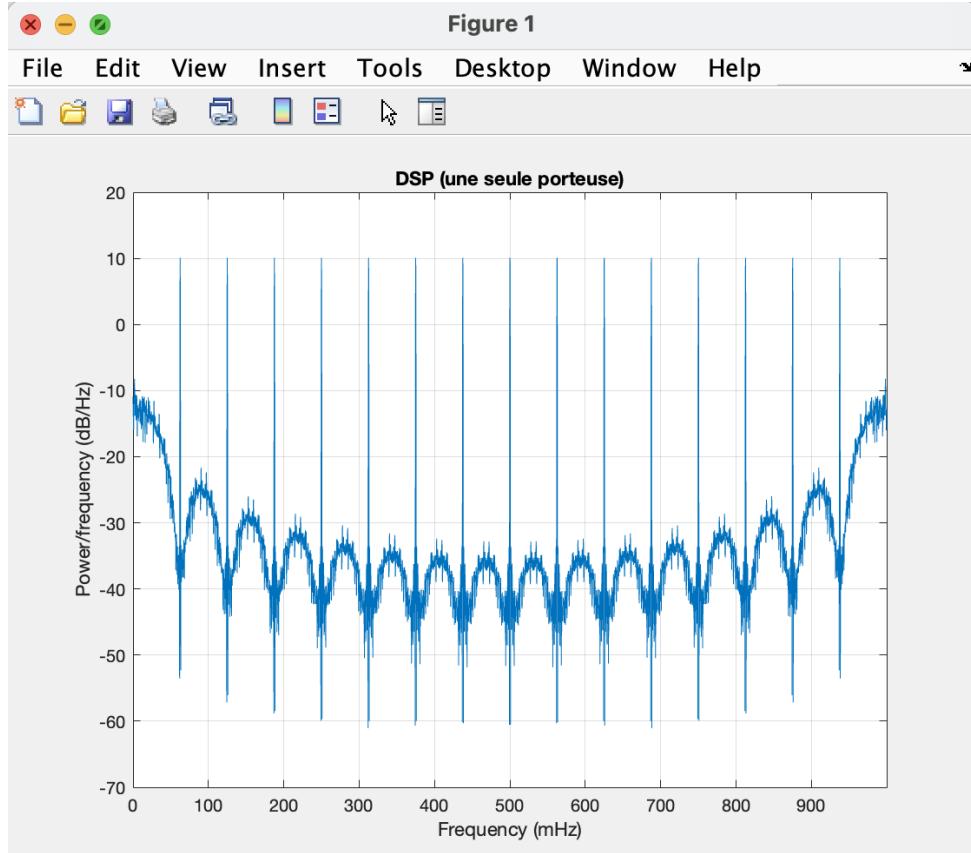
2 Implantation de la chaîne de transmission OFDM sans canal

La chaîne de transmission OFDM devra, dans un premier temps, être implantée sans canal afin de vérifier son bon fonctionnement. Le nombre de porteuses, N , pourra être choisi égal à 16. Afin de simplifier les simulations, on considérera un mapping BPSK sur chaque porteuse. La durée d'un symbole OFDM sera de NT_s , si T_s représente la durée symbole que l'on aurait en monoporteuse et donc la période d'échantillonnage de l'implantation à réaliser ici.

2.1 Emission

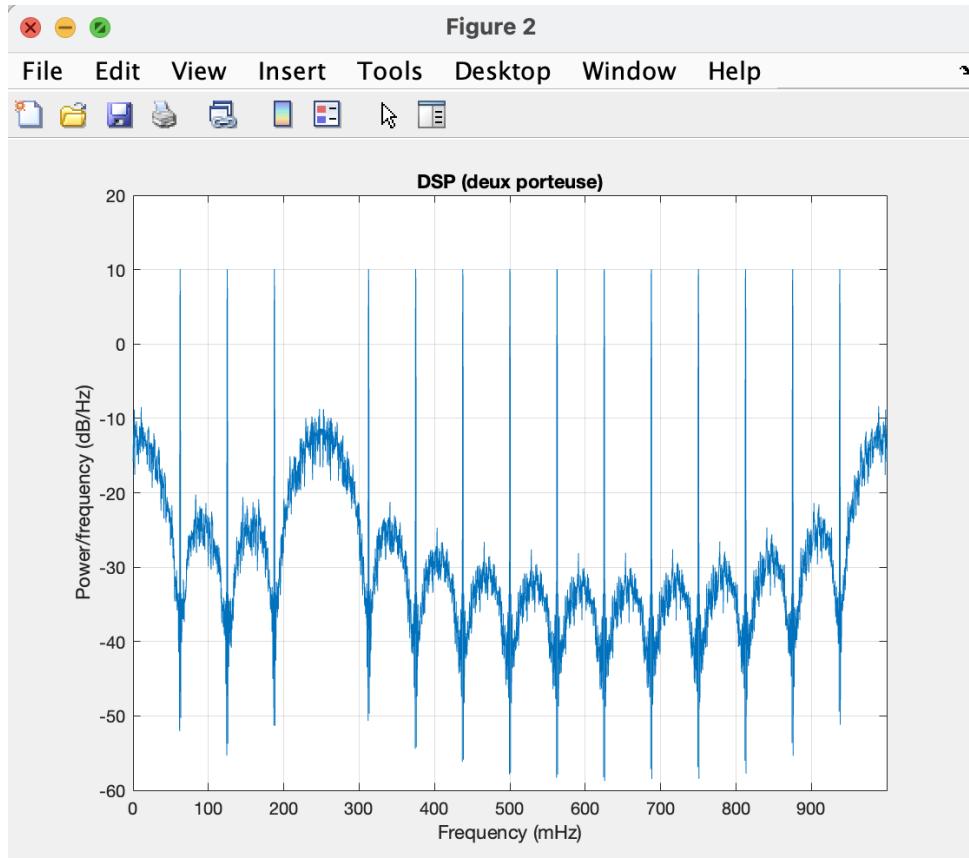
On implantera la génération du signal OFDM (en utilisant la fonction `ifft.m` de Matlab), on visualisera sa Densité Spectrale de Puissance (DSP) et on expliquera, à chaque fois, la forme obtenue pour la DSP :

1. Lorsqu'une seule porteuse parmi 16 est utilisée. Les autres seront mises à zéro.



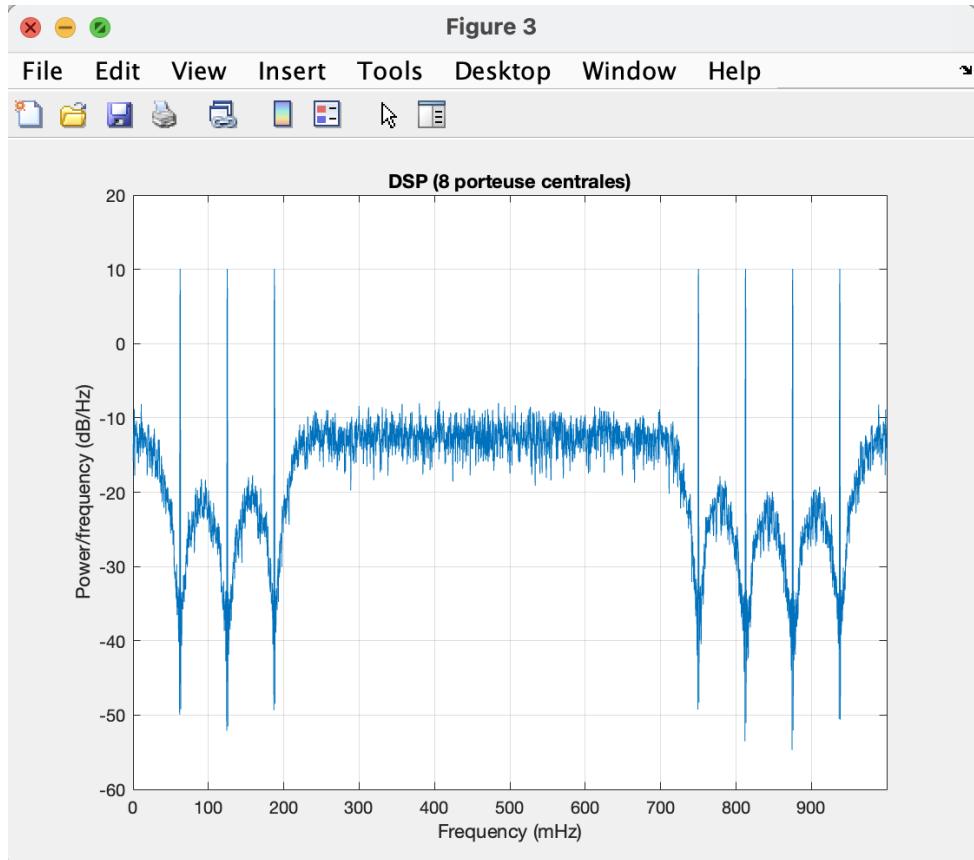
Comme on utilise une seule porteuse, le spectre est concentré autour de cette fréquence. Les lobes secondaires visibles sont dus à la fenêtre rectangulaire temporelle (durée finie NTs).

2. Lorsque deux porteuses parmi 16 sont utilisées. Les autres seront mises à zéro.



Puisque deux porteuses sont utilisées, le spectre est concentré autour de ces deux fréquences. Les lobes secondaires visibles sont dus à la fenêtre rectangulaire dans le domaine temporel (durée finie NTs).

3. Lorsque les 8 porteuses centrales sont utilisées. Les autres seront mises à zéro : 4 sur le bord gauche du spectre, 4 sur le bord droit.



Puisque les 8 porteuses centrales sont utilisées, le spectre occupe une bande continue centrée. Les lobes secondaires visibles sont dus à la fenêtre rectangulaire dans le domaine temporel (durée finie NTs).

2.2 Réception sans canal

En utilisant toutes les porteuses lors de la génération du signal OFDM, implanter la démodulation pour revenir aux bits transmis et calculer le taux d'erreur binaire (TEB) simulé obtenu. On vérifiera sans canal que ce TEB est bien nul.

Sans canal ni bruit, la chaîne OFDM est parfaitement réversible : l'opération FFT annule exactement l'IFFT. Les symboles BPSK émis sont donc retrouvés intacts à la réception. Le TEB simulé est par conséquent nul, ce qui valide le bon fonctionnement de l'implantation de base avant d'introduire le canal.

Remarque : nous travaillerons sur la chaîne passe-bas équivalente associée à la chaîne de transmission OFDM, donc avec les enveloppes complexes associés aux vrais signaux et le canal passe-bas équivalent associé au vrai canal de propagation. Cependant, afin de ne pas alourdir le texte et les explications, nous parlerons de signal OFDM ou de canal de propagation.

3 Implantation de la chaîne de transmission OFDM avec canal multitrajets, sans bruit

On introduira, dans la chaîne précédente, un canal de propagation sans bruit, stationnaire, multitrajets, sélectif en fréquence de type Rayleigh.

Dans ce cas, nous pouvons écrire l'enveloppe complexe associée au signal reçu de la manière suivante :

$$y_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k x_e(t - \tau_k)$$

où N représente le nombre de trajets séparables sur le canal de propagation et β_k est un coefficient complexe représentant la combinaison des trajets non séparables (avec un étalement des retards, τ_m , petit devant la durée symbole) formant chaque trajet séparable avec un délai moyen de τ_k ($|\tau_m - \tau_k| \ll T_s \forall m$) :

$$\beta_k = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m e^{-j2\pi f_p \tau_m}$$

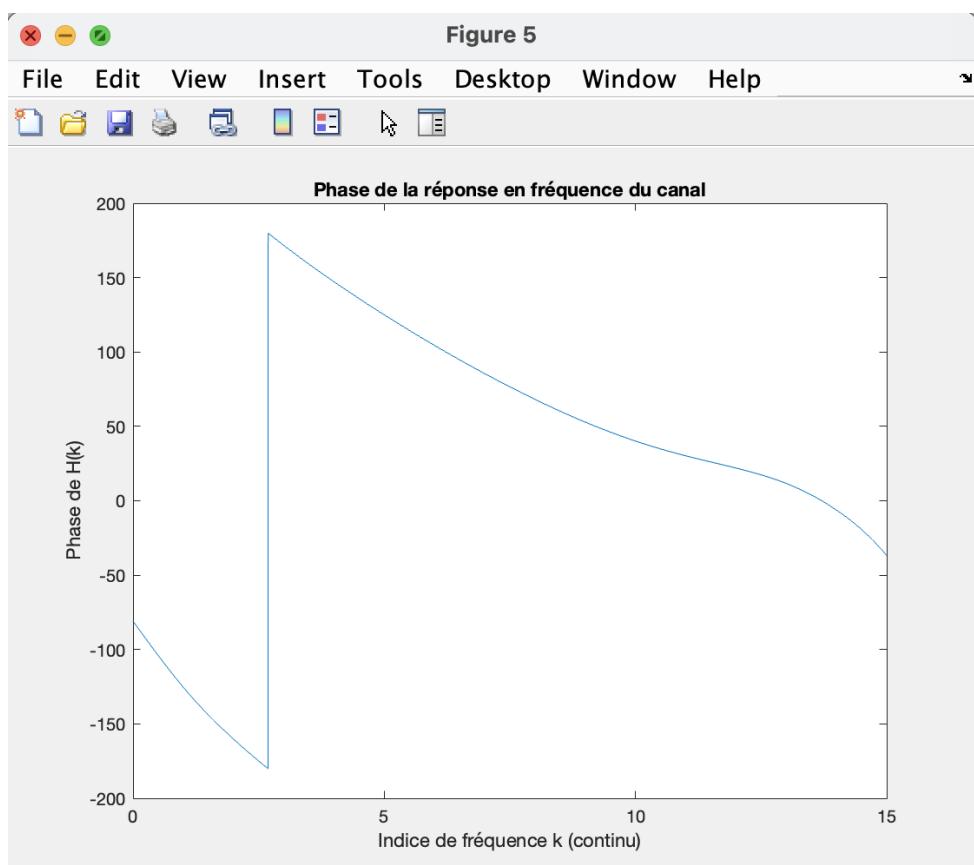
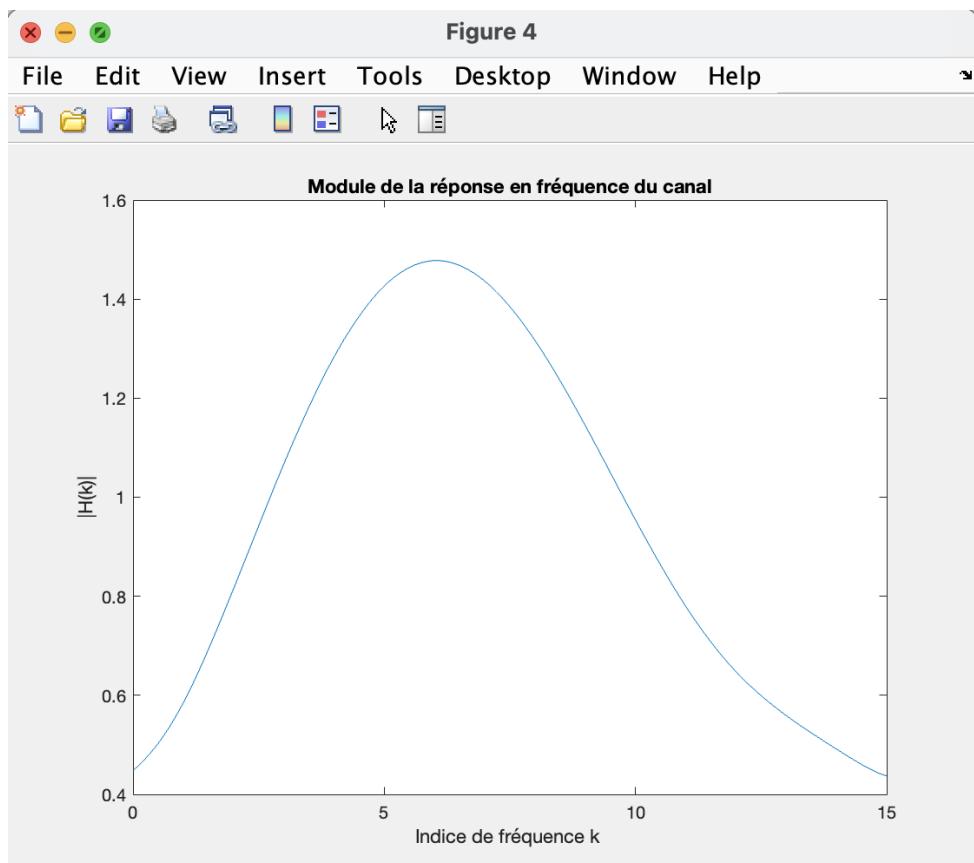
Si le coefficient β_k suit une loi gaussienne à moyenne nulle nous aurons affaire à un canal de Rayleigh. Pour le simuler, nous allons considérer un canal stationnaire avec une réponse impulsionnelle échantillonnée à T_s :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \delta(t - kT_s)$$

et des puissances des trajets séparables, $E[|\beta_k|^2]$, décroissantes quand les délais augmentent.

3.1 Implantation sans intervalle de garde

1. Implanter un canal de propagation sans bruit, stationnaire, multitrajets, sélectif en fréquence de type Rayleigh, en choisissant un nombre de trajets N et des puissances associées.
2. Tracer, sous Matlab, le module et la phase de la réponse en fréquence de votre canal de propagation.



- **Figure 4 (Module)** : Le module $|H(k)|$ varie de manière aléatoire avec l'indice de fréquence k . Cette fluctuation confirme la **sélectivité fréquentielle** du canal.
 - **Figure 5 (Phase)** : La phase $\arg(H(k))$ évolue de façon non linéaire et désordonnée, caractéristique d'un canal multitrajets.
3. Déterminer le nombre de porteuses nécessaire pour que l'ajout futur du préfixe cyclique ne représente que 20% de perte de débit utile.

Soit T_{CP} la durée du préfixe cyclique et $T'_s = NT_s$ la durée utile du symbole OFDM. La perte de débit est :

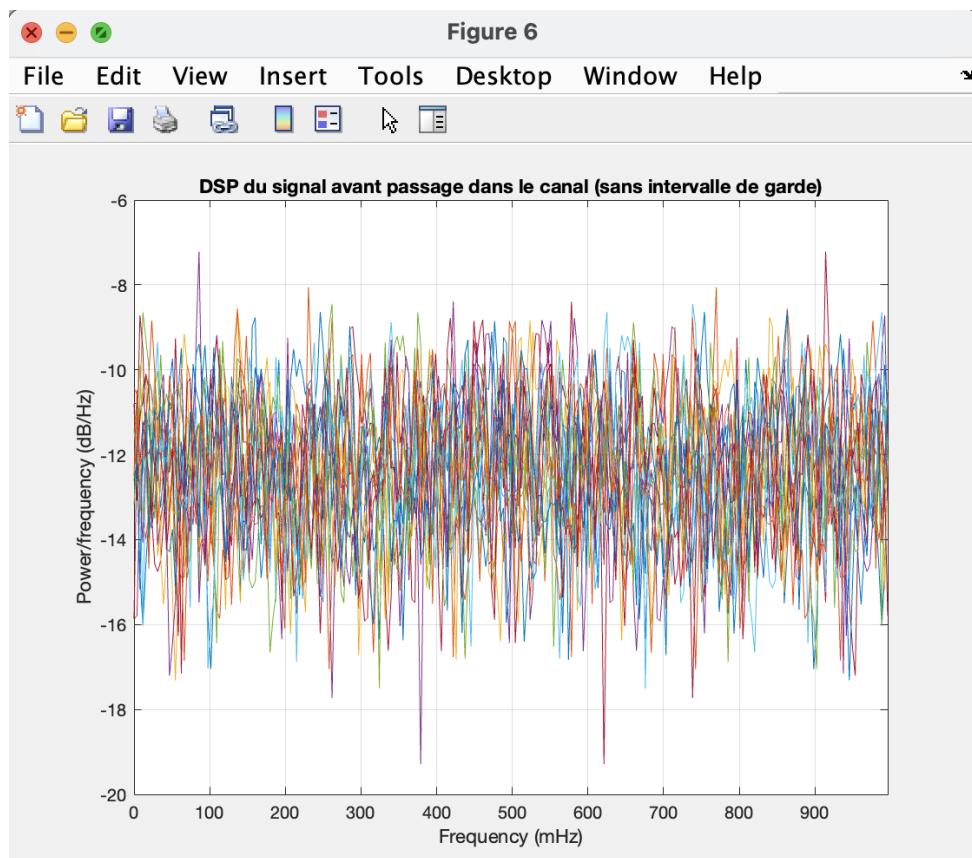
$$\frac{T_{CP}}{T'_s + T_{CP}} = 0.2 \implies T_{CP} = 0.25 T'_s.$$

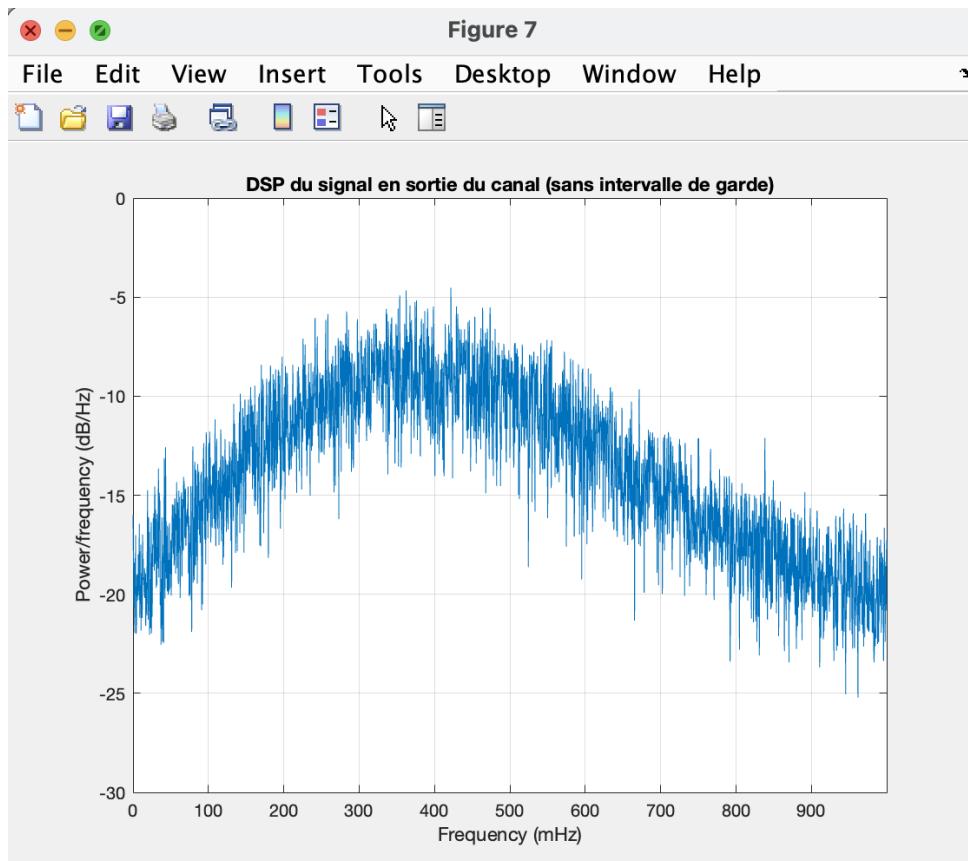
Le PC doit être supérieur à l'étalement des retards τ_{\max} . Si $T_{CP} = \tau_{\max}$, alors $T'_s = 4T_{CP}$. Avec $T'_s = NT_s$, on obtient :

$$N = \frac{T'_s}{T_s}.$$

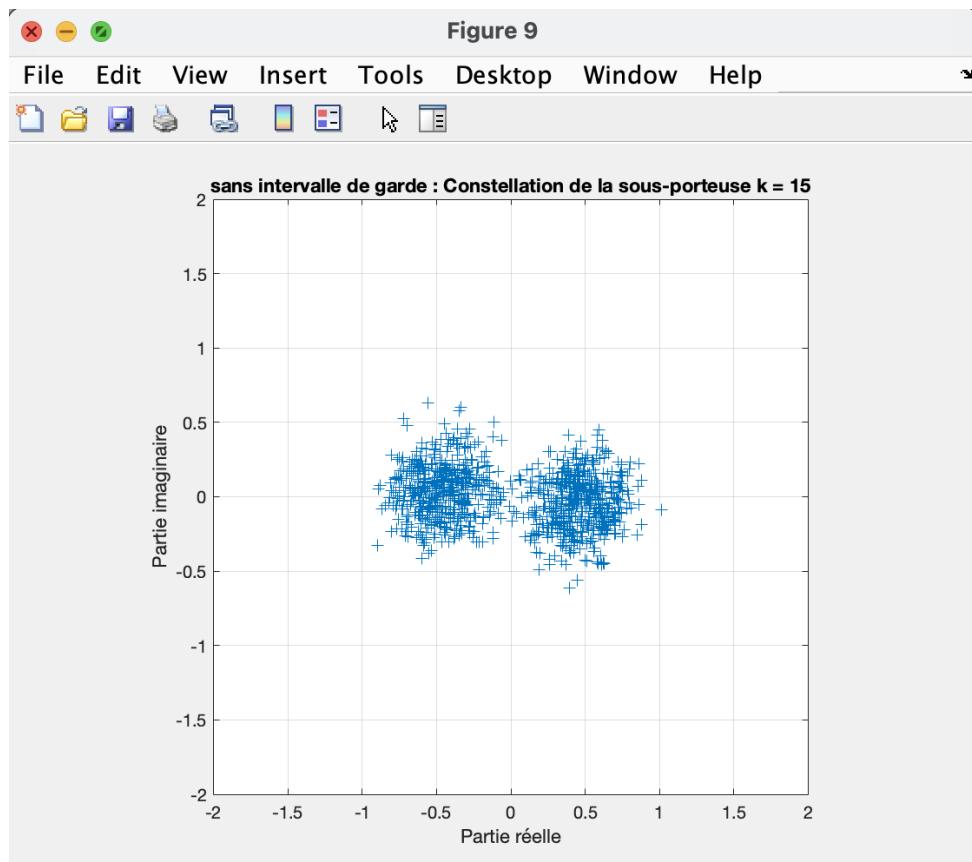
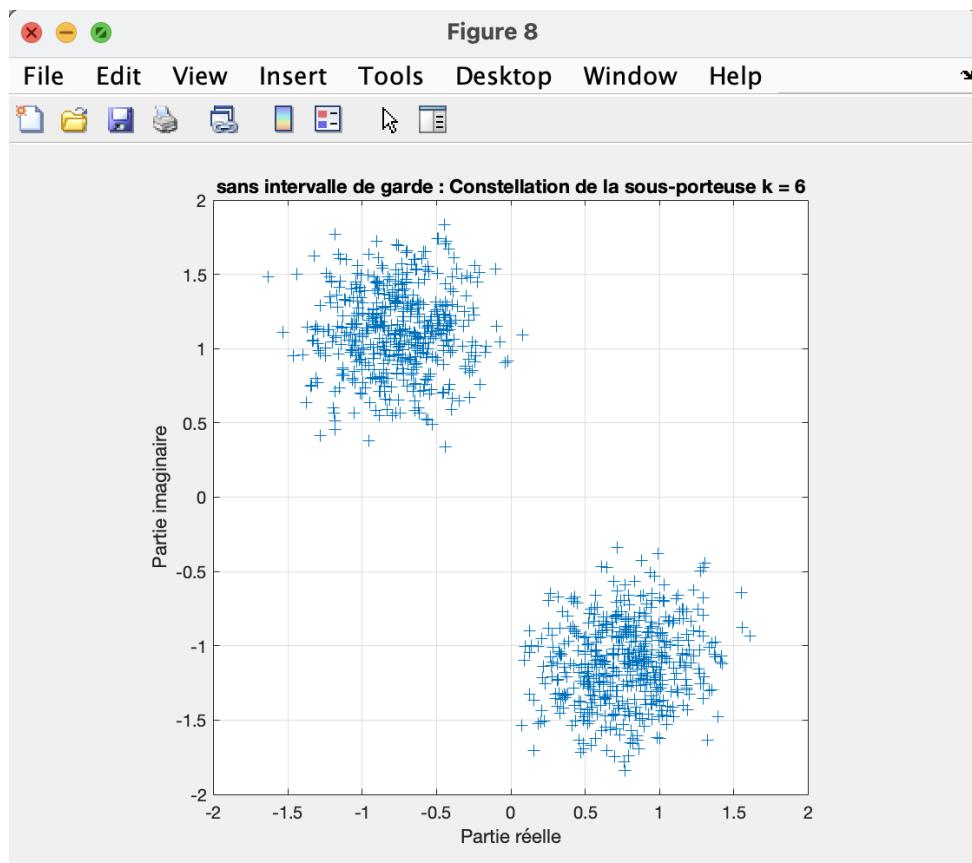
Exemple : si $\tau_{\max} = 4T_s$, alors $T_{CP} = 4T_s$, $T'_s = 16T_s$ et donc $N = 16$.

4. En utilisant toutes les porteuses, implanter le passage du signal OFDM dans le canal de propagation multitrajets.
5. Visualiser la densité spectrale de puissance du signal en sortie du canal et la comparer à celle obtenue avant passage dans le canal. Le résultat obtenu est-il conforme à ce qui était attendu ?





- **Figure 6 (DSP avant canal)** : Spectre plat sur la bande des porteuses utilisées (16 ici), avec des lobes dus à la fenêtre rectangulaire.
 - **Figure 7 (DSP après canal)** : Le spectre présente des creux et des pics qui correspondent exactement au module de la réponse fréquentielle du canal (Fig. 4). Résultat attendu : la DSP de sortie est la DSP d'entrée multipliée par $|H(f)|^2$.
6. Visualiser les constellations obtenues en réception sur deux porteuses espacées dans le spectre de fréquence et expliquer les résultats obtenus.



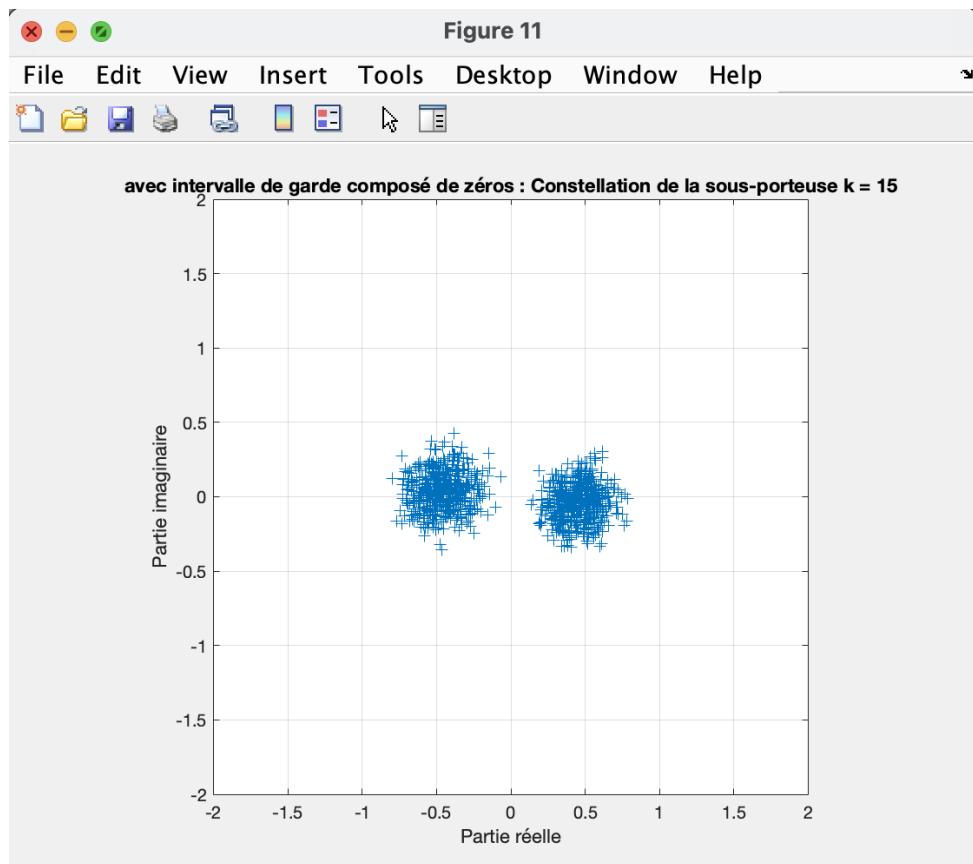
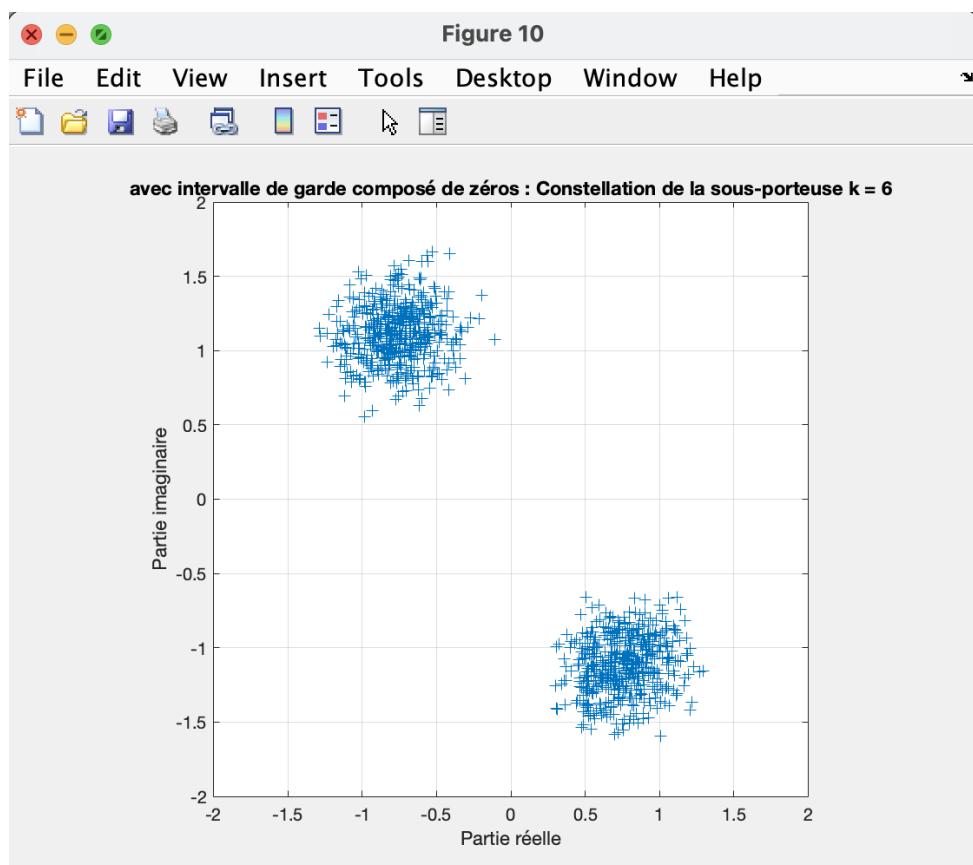
- **Figure 8 (Porteuse $k = 6$)** : Rotation et étalement des points dus à la multiplication par le coefficient complexe $H(6)$. Phase et module expliquent la rotation sans forte atténuation.
 - **Figure 9 (Porteuse $k = 15$)** : Constellation fortement atténuée (points près de l'origine) à cause d'un évanouissement profond ($|H(15)| \approx 0.4$, visible Fig. 4).
7. Déterminer le TEB simulé et expliquer le résultat obtenu (nul ou non nul et pourquoi).
- **Résultat :** $TEB = 0.417$.
 - **Explication :**
 - (a) **Interférence Inter-Symbole (ISI)** : Sans intervalle de garde, les retards du canal provoquent un chevauchement entre symboles OFDM consécutifs.
 - (b) **Interférence Inter-Porteuse (ICI)** : L'ISI détruit l'orthogonalité des sous-porteuses.
 - (c) **Évanouissement sélectif** : Certaines porteuses (ex : $k = 15$) sont fortement atténuées, rendant la décision erronée même sans bruit.

Conclusion : Sans mécanisme de garde, la transmission OFDM est inutilisable sur un canal sélectif en fréquence à cause de l'ISI/ICI et des évanouissements non compensés.

3.2 Implantation avec intervalle de garde composé de zéros

Dans cette partie, nous allons ajouter un intervalle de garde composé de zéros devant chaque symbole OFDM transmis avant passage dans le canal de propagation.

1. Tracez les constellations obtenues sur les mêmes porteuses que précédemment et expliquez les résultats obtenus.



- **Figure 10 (Porteuse $k = 6$)** : La constellation présente toujours une **rotation et un étalement des points**, similaires au cas sans intervalle de garde. Les points ne sont pas alignés avec les positions théoriques BPSK (± 1).
 - **Figure 11 (Porteuse $k = 15$)** : La constellation reste **fortement atténuée et bruitée**, avec des points dispersés autour de l'origine. L'évanouissement profond sur cette porteuse persiste.
2. Déterminez le TEB simulé et expliquez le résultat obtenu (nul ou non nul et pourquoi).
- **Résultat :** $TEB = 0.41487$.
 - **Explication :** L'intervalle de garde composé de zéros élimine l'**Interférence Inter-Symbole (ISI)** en séparant temporellement les symboles. Cependant, il ne résout pas l'**Interférence Inter-Porteuse (ICI)**. L'absence de cyclicité brise l'orthogonalité des sous-porteuses lors de la FFT, car la convolution circulaire n'est plus respectée.
3. Quel est l'intérêt d'ajouter un intervalle de garde composé de zéros devant chaque symbole OFDM ?

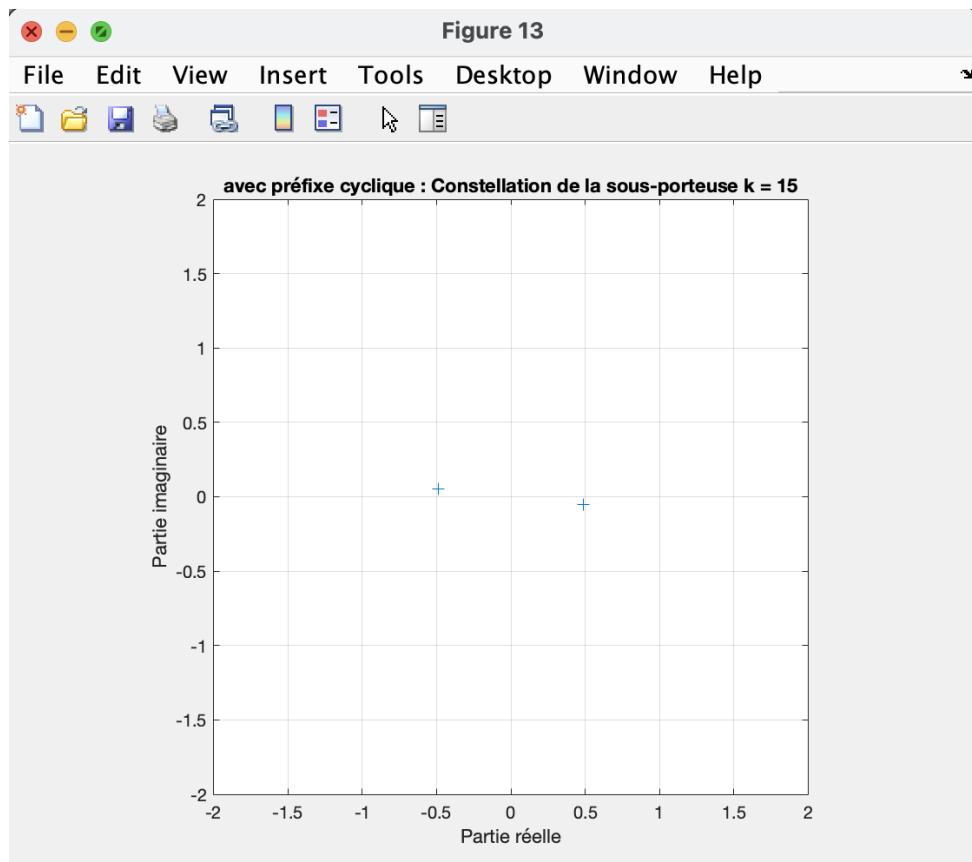
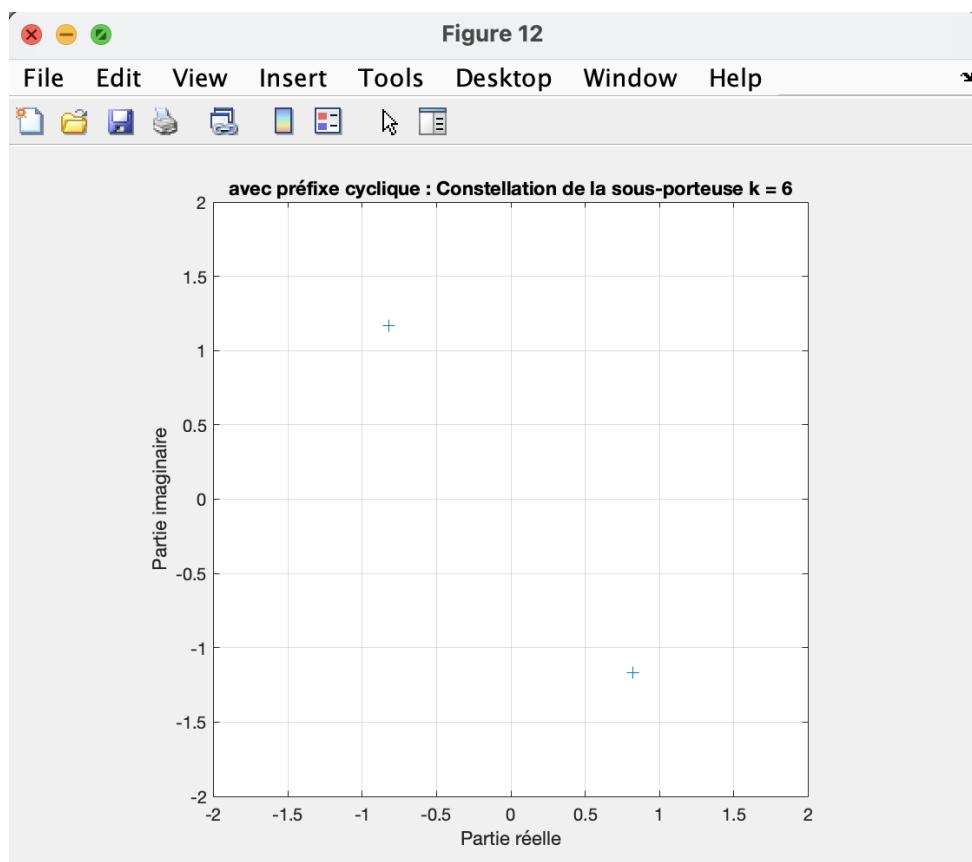
Son intérêt principal est de **supprimer l'ISI** en créant une période de silence entre symboles, s'affranchissant ainsi des trajets multiports retardés (si la durée de garde dépasse l'étalement des retards).

Cependant, cette solution est incomplète car elle introduit de l'ICI. Elle doit être combinée à d'autres techniques (comme le préfixe cyclique) pour préserver l'orthogonalité.

3.3 Implantation avec préfixe cyclique

On ajoutera maintenant un préfixe cyclique devant chaque symbole OFDM transmis avant passage dans le canal de propagation.

1. Tracez les constellations obtenues sur les mêmes porteuses que précédemment et expliquez les résultats obtenus.



- **Figure 12 (Porteuse $k = 6$)** : Deux points nets et bien séparés sur l'axe réel, correspondant aux positions BPSK (± 1) mais avec une **rotation constante** due à la phase fixe de $H(6)$.
 - **Figure 13 (Porteuse $k = 15$)** : Deux points nets mais **fortement atténués** (proches de l'origine), alignés sur l'axe réel. L'atténuation est due au faible module $|H(15)|$ (évanouissement profond).
2. Déterminez le TEB simulé et expliquez le résultat obtenu (nul ou non nul et pourquoi).
- **Résultat** : $TEB = 0.375$.
 - **Explication** :
 - (a) Le PC transforme la convolution linéaire en **convolution circulaire**, éliminant ISI et ICI. Après FFT : $Y(k) = H(k) \cdot X(k)$.
 - (b) **Sans égalisation**, les symboles subissent une rotation/atténuation fixe par $H(k)$, ce qui décale les points de la constellation.
 - (c) Les **évanouissements profonds** ($|H(k)| \approx 0.4$) rendent la décision très fragile, même sans bruit.
3. Quel est l'intérêt d'ajouter un préfixe cyclique devant chaque symbole OFDM ?

- **Élimination de l'ISI et de l'ICI** : Préserve l'orthogonalité des sous-porteuses après FFT.
- **Simplicité de l'égalisation** : L'effet du canal devient une multiplication complexe par sous-porteuse, permettant une égalisation simple (ex : ZF : $\hat{X}(k) = Y(k)/H(k)$).
- **Inconvénient** : Introduit une perte de débit et de puissance. Sa longueur doit dépasser l'étalement des retards du canal.

3.4 Implantation avec préfixe cyclique et égalisation

En considérant que le canal est connu du récepteur, on ajoutera à la chaîne précédente (avec préfixe cyclique) un égaliseur. Deux égaliseurs seront à tester :

- Un égaliseur de type ZFE (Zero Forcing Equalizer), de réponse en fréquences

$$H_{eg} = [H_{eg}(0) \ H_{eg}(1) \ \dots \ H_{eg}(N-1)], \text{ avec } H_{eg}(k) = 1/H(k) \text{ pour } k = 0 \dots N-1$$

- Un égaliseur de type ML (Maximum Likelihood), de réponse en fréquences

$$H_{eg} = [H_{eg}(0) \ H_{eg}(1) \ \dots \ H_{eg}(N-1)], \text{ avec } H_{eg}(k) = H^*(k) \text{ pour } k = 0 \dots N-1$$

où $H(k)$ est le coefficient représentant l'impact du canal de transmission sur la k -ième porteuse et N le nombre de porteuses utilisées. La figure 1 présente la chaîne complète avec égalisation.

Dans chaque cas, tracez, après égalisation, les constellations obtenues sur les mêmes porteuses que précédemment et déterminez le TEB simulé. Expliquez les résultats obtenus. Voyez-vous une différence entre les résultats obtenus pour les deux égalisations proposées ? Dans quel contexte pourrait-on trouver un intérêt à utiliser l'un ou l'autre des égaliseurs ?

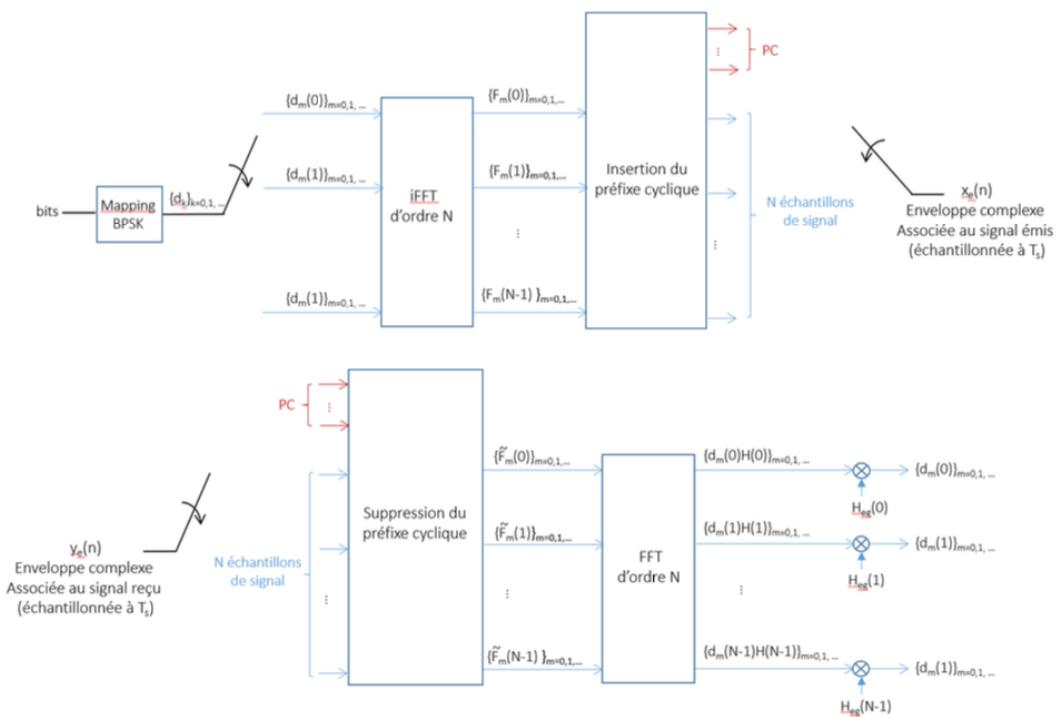
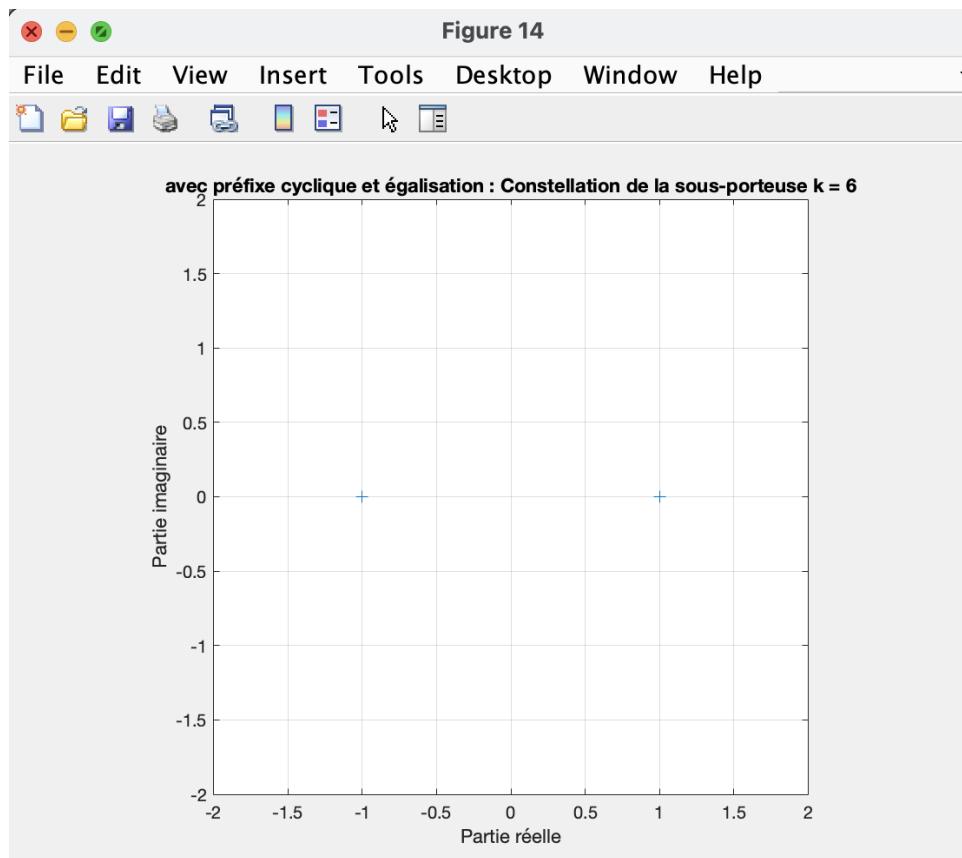
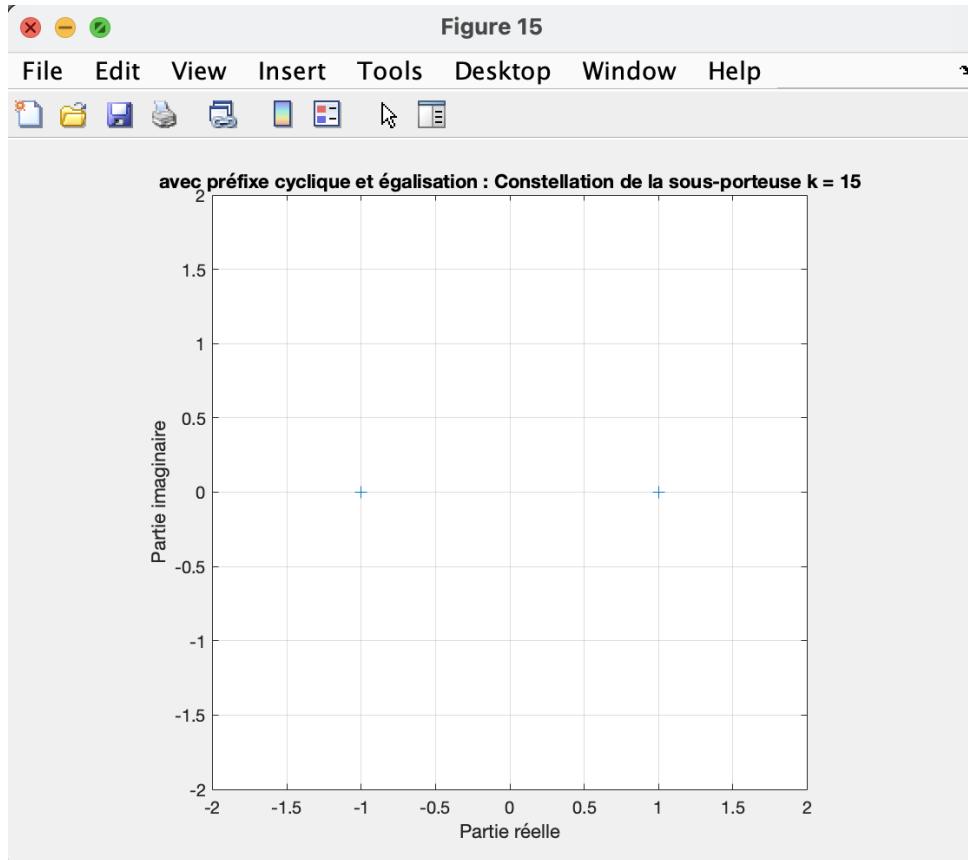


FIGURE 1 – Chaine de transmission OFDM sans bruit.





- **Figure 14 (Porteuse $k = 6$)** : Deux points parfaitement alignés sur l'axe réel aux positions ± 1 . L'égalisation a compensé la rotation et l'atténuation du canal.
- **Figure 15 (Porteuse $k = 15$)** : Deux points parfaitement alignés sur l'axe réel aux positions ± 1 . L'égalisation a compensé la rotation et l'atténuation du canal.

Le TEB sera **nul ou extrêmement proche de zéro** en l'absence de bruit, que l'on utilise l'égaliseur ZF ou ML.

- **ZF (Zero Forcing)** : $H_{eq}(k) = 1/H(k)$
 - Avantage : Élimine parfaitement la distorsion du canal.
 - Inconvénient : Amplifie fortement le bruit sur les porteuses atténuées ($|H(k)| \approx 0.4$).
- **ML (Maximum Likelihood)** : $H_{eq}(k) = H^*(k)$
 - Optimal en présence de bruit (maximise le SNR après combinaison).
 - Ne supprime pas complètement l'atténuation, mais minimise l'amplification du bruit.

En l'absence de bruit, les deux donnent un TEB nul. Visuellement, ZF restaure des constellations parfaites ; ML laisse une distorsion résiduelle mais sans erreur (en BPSK).

Conclusion : Avec égalisation et sans bruit, l'OFDM sur canal sélectif fonctionne parfaitement (TEB nul). Le choix de l'égaliseur devient critique en présence de bruit, où il faut arbitrer entre suppression du canal et amplification du bruit.

4 Impact d'une erreur de synchronisation horloge

On va s'intéresser ici à l'impact d'une erreur de synchronisation horloge (on parle aussi de désalignement de la fenêtre de la FFT).

Dans la partie implantation de la transmission avec préfixe cyclique, on a supposé que l'on était capable, en réception, de supprimer parfaitement l'interférence inter blocs (inter symboles OFDM) en alignant correctement la fenêtre de la FFT. Ce cas de figure est représenté dans la figure 4, avec un préfixe cyclique (PC) surdimensionné, c'est-à-dire plus long que l'étalement des retards introduits par le canal, noté τ_{max} .

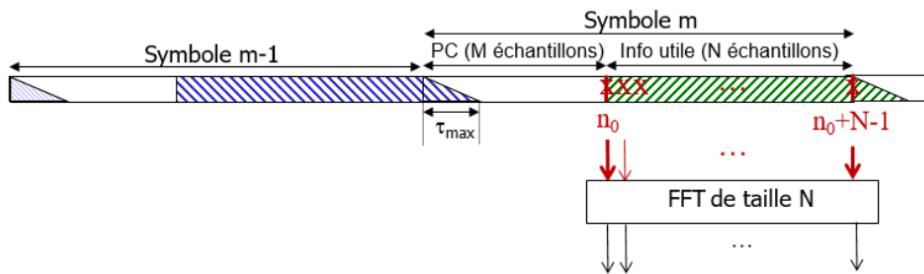


FIGURE 2 – Suppression du préfixe cyclique, synchronisation idéale.

Afin d'observer ce qui se passe en présence d'une erreur de synchronisation horloge, on commencera par reprendre la chaîne construite avec préfixe cyclique pour en tripler la taille (surdimensionnement du préfixe cyclique). A partir de là il s'agira de simuler les 3 cas d'erreurs présentés dans les figures 3, 4 et 5, en supposant, pour simplifier, que le retard ou les avances simulés, τ , sont un nombre entier d'échantillons.

En observant les constellations sur deux porteuses 6 et 15, on vérifiera tout d'abord qu'il n'y a que dans le cas 2 (figure 4) que l'erreur de synchronisation n'introduit pas d'interférences. On expliquera pourquoi et pourquoi les interférences restent présentes dans les cas 1 (figure 3) et 3 (figure 5).

En se plaçant dans le cas 2 (figure 4), on observera les constellations sur les deux mêmes porteuses que précédemment pour différentes valeurs du retard τ . Que constatez-vous ? Quelle(s) opération(s) faut-il effectuer dans le récepteur pour retrouver les mêmes performances que dans le cas de la synchronisation idéale (figure 4) ?

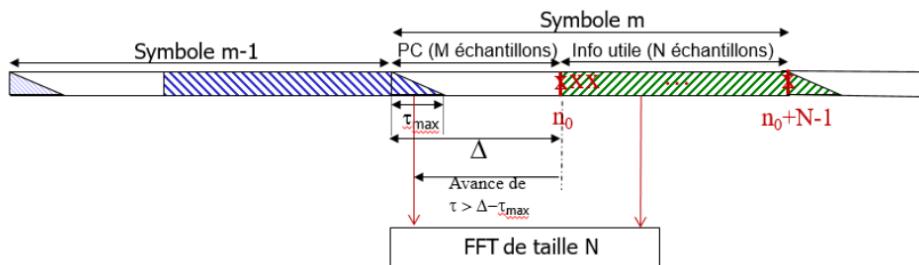


FIGURE 3 – Suppression du préfixe cyclique, problème de synchronisation, cas 1.

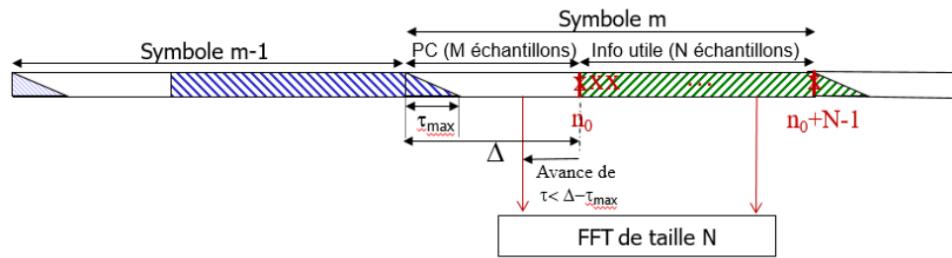


FIGURE 4 – Suppression du préfixe cyclique, problème de synchronisation, cas 2.

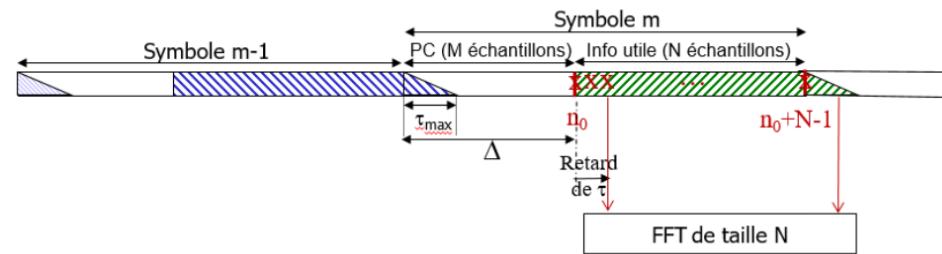
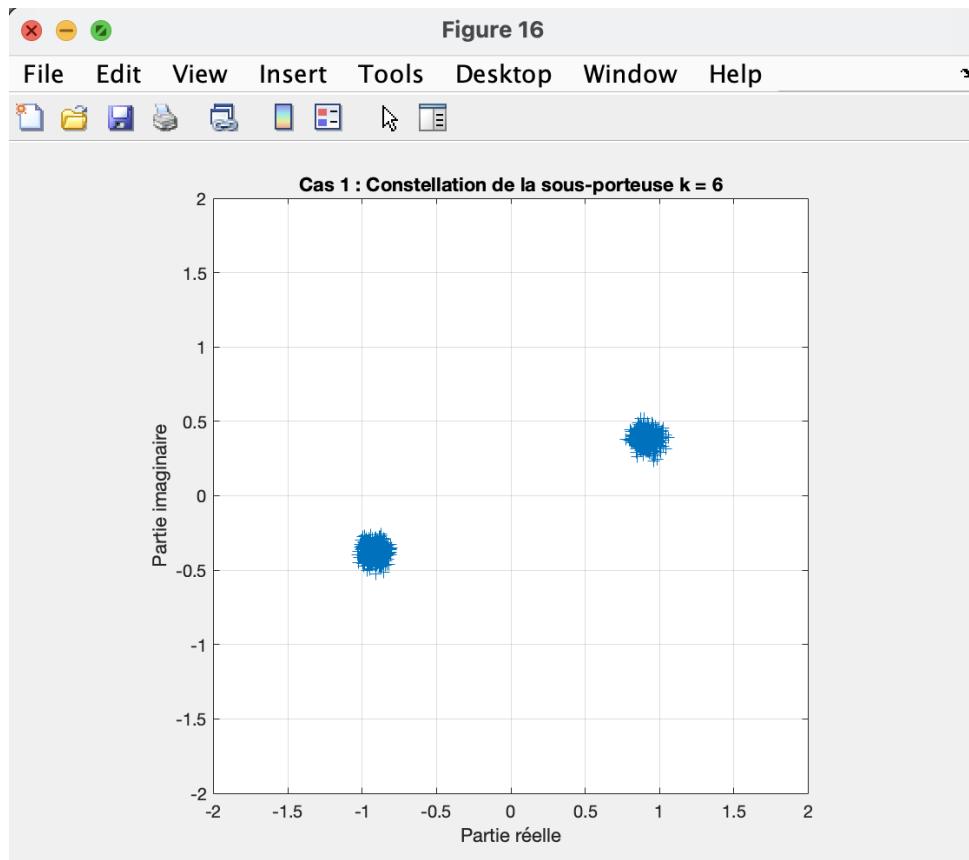
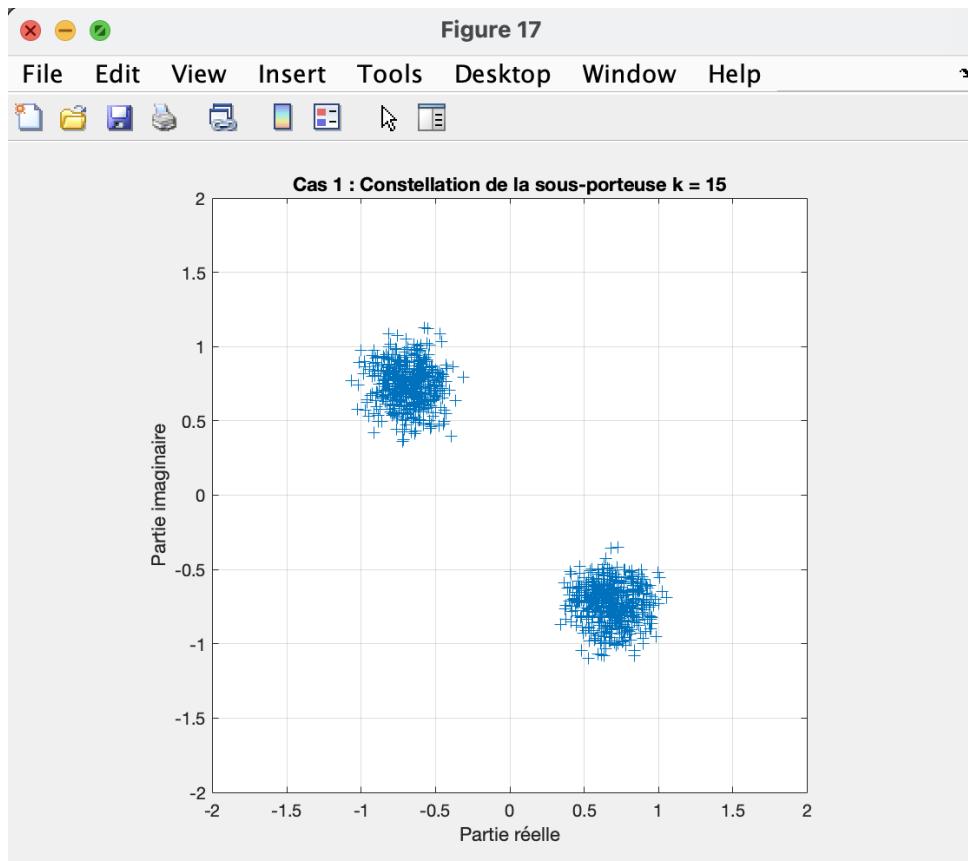
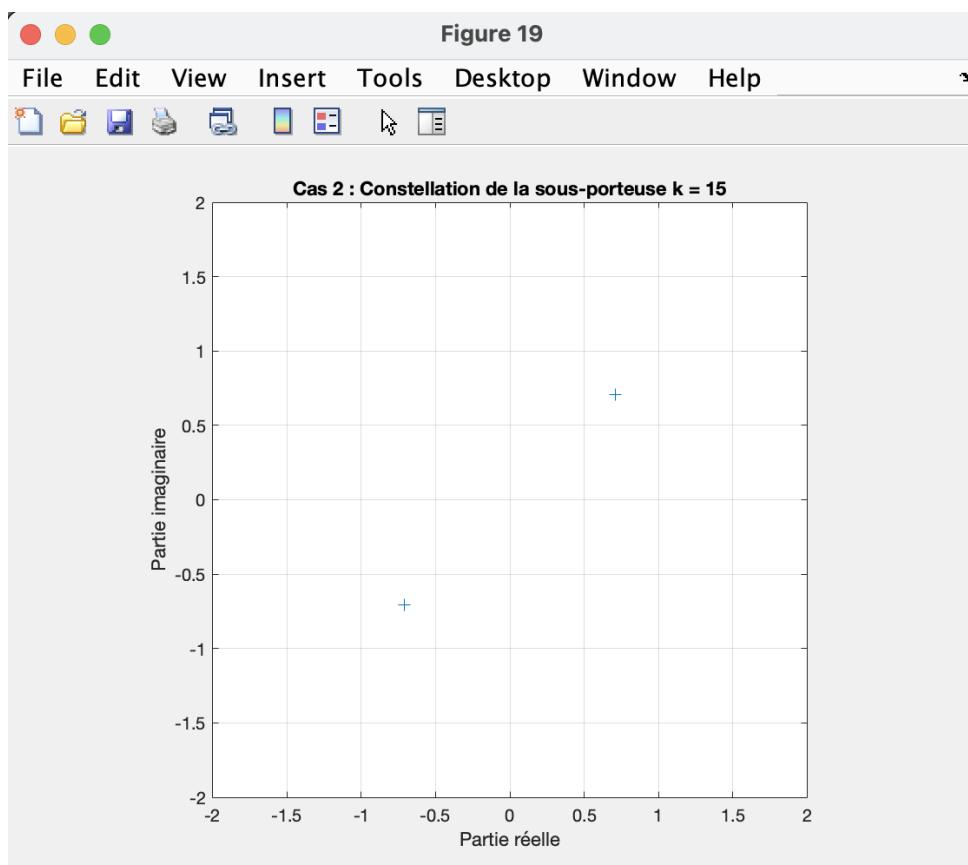
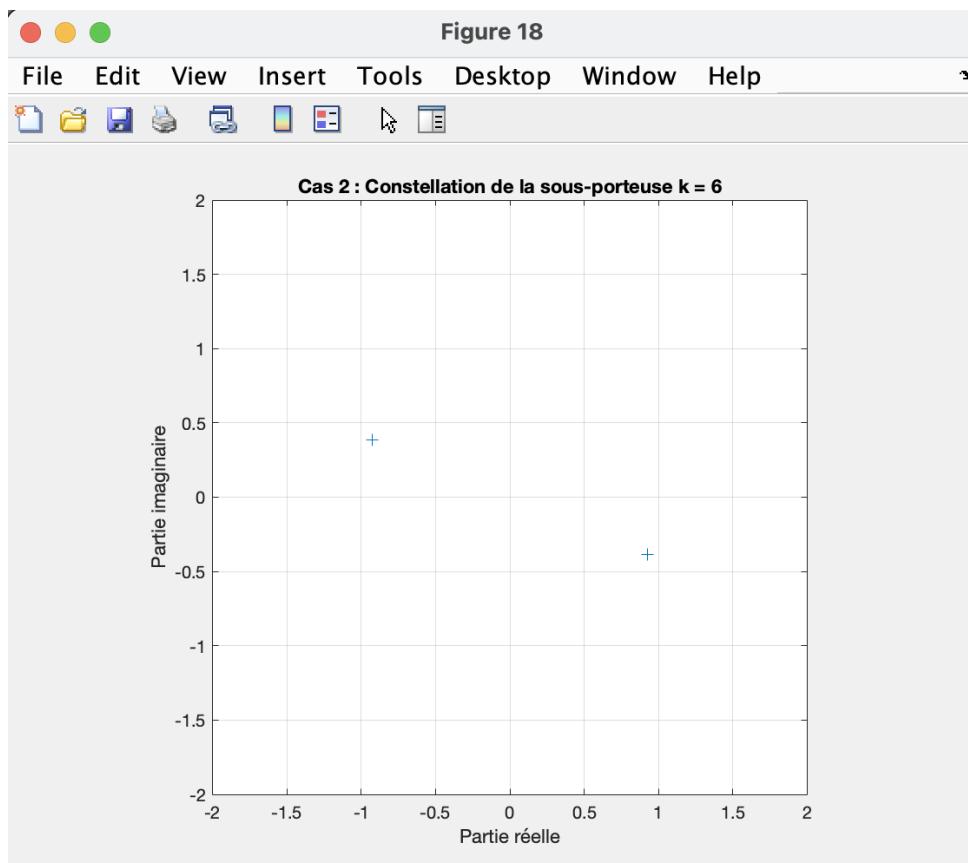


FIGURE 5 – Suppression du préfixe cyclique, problème de synchronisation, cas 3.

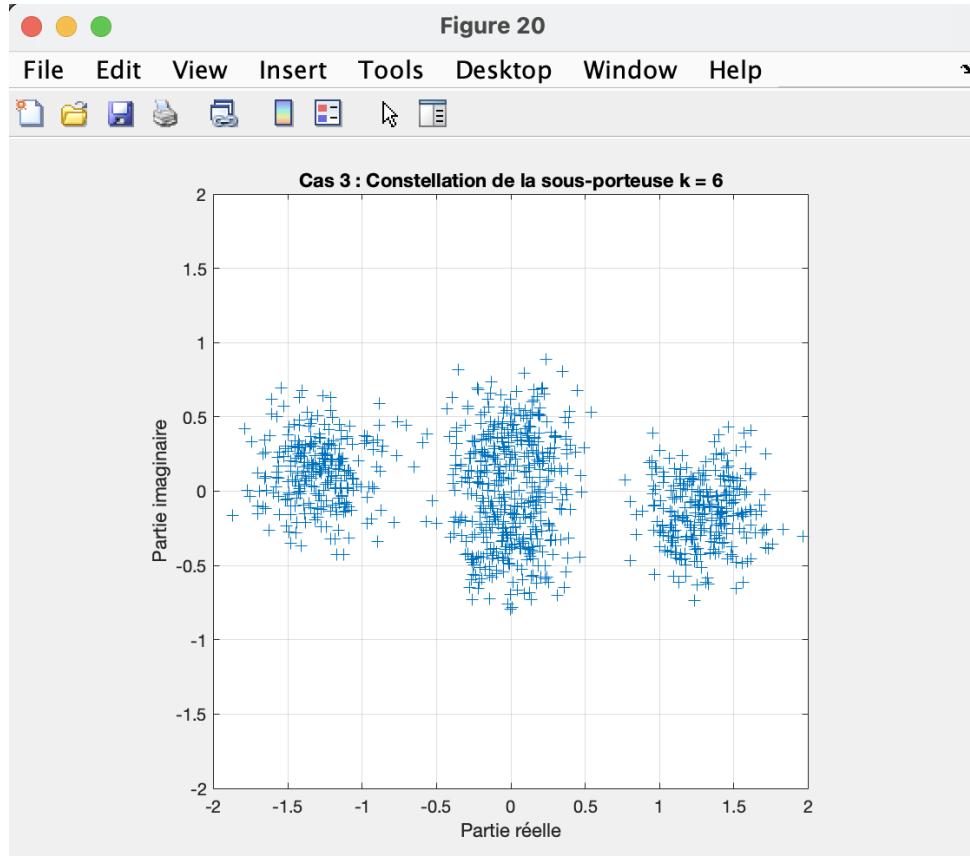


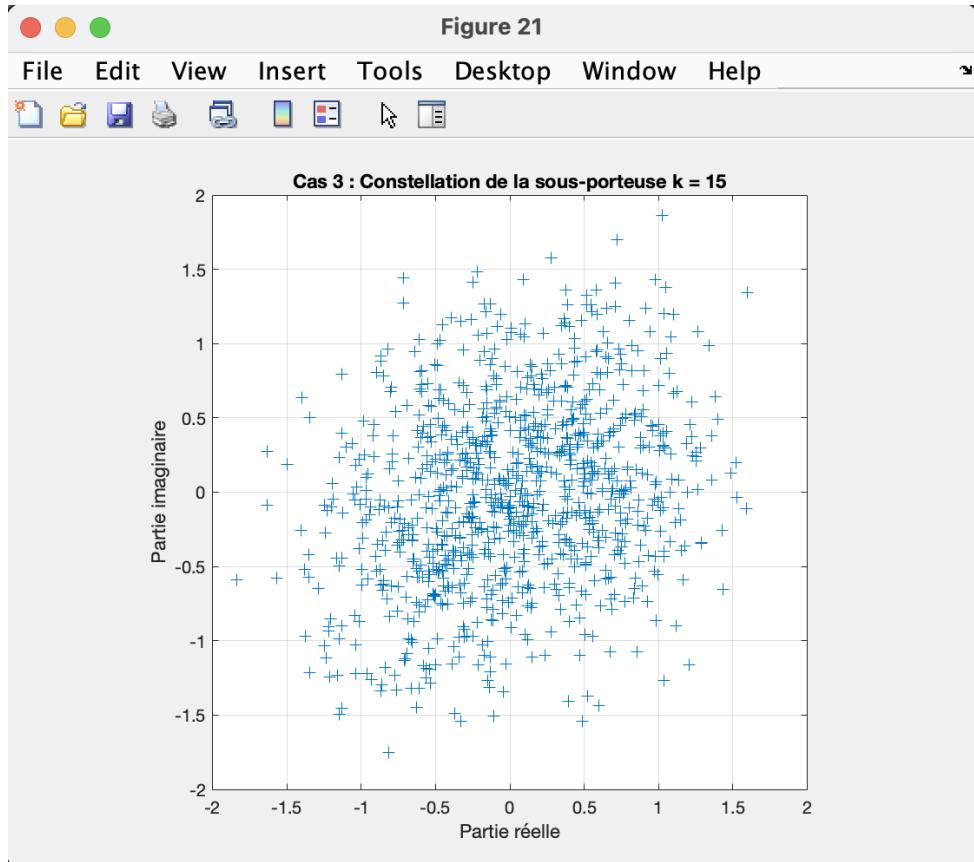


- **Résultat :** $TEB = 0.50062$.
- **Porteuse $k = 6$ (Fig. 16) :** Dispersion \rightarrow ICI présente.
- **Porteuse $k = 15$ (Fig. 17) :** Forte dispersion \rightarrow ICI forte.
- **Explication :** Fenêtre inclut du PC courant, manque la fin du symbole \rightarrow convolution non circulaire \rightarrow ICI.



- Résultat : $TEB = 0.49425$.
- Porteuse $k = 6$ (Fig. 18) : Deux points nets avec rotation → Pas d'ICI.
- Porteuse $k = 15$ (Fig. 19) : Deux points atténués avec rotation → Pas d'ICI.
- Explication : Retard τ entier dans le PC → fenêtre capture une période circulaire complète → orthogonalité préservée.





- Résultat : $TEB = 0.50287$.
- Porteuse $k = 6$ (Fig. 20) : Dispersion \rightarrow ICI présente.
- Porteuse $k = 15$ (Fig. 21) : Forte dispersion \rightarrow ICI forte.
- Explication : Fenêtre inclut du symbole suivant \rightarrow convolution non circulaire \rightarrow ICI.

Le Cas 2 correspond à un décalage entier τ à l'intérieur du PC surdimensionné. La fenêtre FFT capture toujours N échantillons consécutifs d'une **période circulaire complète** du symbole OFDM. La convolution avec le canal reste donc **circulaire**, ce qui préserve l'orthogonalité des sous-porteuses (pas d'ICI). Seule une rotation de phase linéaire apparaît.

Pour différents τ entiers :

- Constellations montrent **deux points nets** (BPSK).
- **Rotation de phase** différente sur chaque porteuse : $Y'(k) = e^{-j2\pi k\tau/N} \cdot H(k) \cdot X(k)$.
- Amplitude inchangée (module de $H(k)$ non affecté par un décalage entier).

Pour compenser le retard τ et retrouver le cas idéal :

$$H_{eq}(k) = \frac{e^{j2\pi k\tau/N}}{H(k)} \quad (\text{pour ZF})$$

ou estimation/compensation de la phase via pilotes. Sans correction, la rotation de phase peut causer des erreurs de décision.