FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Präsenzlösung 4 : LTL

Präsenzteil am 2./3. 11. – Abgabe am 9./10. 11. 2015

Präsenzaufgabe 4.1:

1. Betrachte das TS aus Abb. 2.8. Betrachte die ω-Sprache $L = y^\omega$ mit $y = (s_0 s_1 s_2 s_4)$. Gib die Ettikettensprache $E_S(L)$ an!

   Lösung: $E_S(L) = z^\omega$ mit $z = (\{\}\ \{\alpha_1\}\ \{\alpha_1, \alpha_2\}\ \{\})$

2. Betrachte das TS aus Abb. 2.8. Definiere die Aussagen α_4 = „In der Tasse ist Tee." und α_5 = „In der Tasse ist Kaffee.". Modifiziere das TS so, dass diese beiden Aussagen sinnvoll integriert werden. Gib eine LTL-Formel an, die Folgendes beschreibt: Immer, wenn Kaffee ausgewählt wurde, befindet sich kurz danach auch Kaffee in der Tasse (und nicht etwa Tee!).

   Lösung: Zwischen s_4 und s_0 wird ein weiterer Zustand s_6 eingefügt, der über die Aktionen „Tee einfüllen" erreicht und über eine neue Aktionen „Tasse entnehmen" verlassen werden kann. Analog wird zwischen s_5 und s_0 ein Zustand s_7 eingefügt, der die Kaffee-Entnahme modelliert. Mit $E_S(s_6) = \{\alpha_4\}$ und $E_S(s_7) = \{\alpha_5\}$ sind die beiden Aussagen integriert.

   Zwei verschiedene Interpretationen der Aufgabenstellung könnten als LTL-Formeln folgenderma-ßen aussehen:

   $\Box(\alpha_3 \Longrightarrow (\neg\alpha_4\ \mathbf{U}\ \alpha_5))$ betont die Bedingung, dass zwischen dem Wählen von Kaffee und dem In-der-Tasse-Befinden des Kaffees sich auf keinen Fall Tee in der Tasse befinden darf.

   $\Box(\alpha_3 \Longrightarrow \bigcirc\bigcirc\alpha_5)$ betont das *kurz danach*, indem genau zwei Zustände später der Kaffee in der Tasse sein muss.

3. Sei $AP = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Geben Sie die Menge $L^\omega(f)$ (vgl. Def. 3.3) für folgende LTL-Formeln an! (Beachten Sie, dass die Sprache $L^\omega(f)$ völlig unabhängig vom TS aus Abb. 2.8 ist.)

   (a) $f = \Box\alpha_2$

   (b) $f = \Diamond(\alpha_1 \wedge \bigcirc\neg\alpha_2)$

   Sie können dabei die folgenden Mengen verwenden ($\alpha \in AP$ und $A \subseteq AP$):

   $$\begin{aligned} \text{Obermengen}(A) &:= \{X \subseteq AP \mid A \subseteq X\} \\ \text{Obermengen}(\alpha) &:= \text{Obermengen}(\{\alpha\}) \\ \text{Obermengen}(\neg\alpha) &:= \{X \subseteq AP \mid \alpha \notin X\} \end{aligned}$$

   Rechnen Sie die Mengen für die konkreten, von Ihnen benötigten α_i aus.

   Lösung: $L^\omega(f)$ ist hier eine unendliche Folgensprache über den logischen Atomen AP, d.h. eine Teilmenge von $\mathcal{P}(AP)^\omega$.

   (a) Es ist $L^\omega(\Box\alpha_2) = \text{Obermengen}(\alpha_2)^\omega = (\{\{\alpha_2\}, \{\alpha_2, \alpha_1\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3\}\})^\omega$. (Der Lösungsansatz steht auch auf der letzten Vorlesungsfolie des LTL-Abschnitts.)

   (b) Es ist $L^\omega(\Diamond(\alpha_1 \wedge \bigcirc\neg\alpha_2)) = \mathcal{P}(AP)^* \cdot \text{Obermengen}(\alpha_1) \cdot \text{Obermengen}(\neg\alpha_2) \cdot \mathcal{P}(AP)^\omega$
   $= (\{\{\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\})^*$
   $\cdot\{\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\} \cdot \{\{\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}\}$
   $\cdot(\{\{\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\})^\omega$

Präsenzaufgabe 4.2: Beweisen Sie die Äquivalenzen in LTL:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}f & \equiv & \mathit{True}\,\mathbf{U}f \\ \mathbf{G}f & \equiv & \neg(\mathbf{F}\neg f) \end{array}$$

Lösung: Mit Definition 3.3 (S. 35) gilt:

$$\begin{array}{lll} & \alpha \models \mathbf{F}f & \text{Def. 3.3.8} \\ \Leftrightarrow & \exists k \geq 0 : \alpha^k \models f & g \equiv (g \wedge \top) \\ \Leftrightarrow & \exists k \geq 0 : ((\alpha^k \models f) \wedge \top) & \top \equiv (\forall 0 \leq j < k : \alpha^j \models \top) \\ \Leftrightarrow & \exists k \geq 0 : ((\alpha^k \models f) \wedge (\forall 0 \leq j < k : \alpha^j \models \top)) & \text{Def. 3.3.10} \\ \Leftrightarrow & \alpha \models \top\mathbf{U}f & \\ \text{und:} & & \\ & \alpha \models \mathbf{G}f & \text{Def. 3.3.9} \\ \Leftrightarrow & \forall k \geq 0 : \alpha^k \models f & g \equiv \neg\neg g \\ \Leftrightarrow & \neg\neg(\forall k \geq 0 : \alpha^k \models f) & \neg\forall g \equiv \exists\neg g \\ \Leftrightarrow & \neg(\exists k \geq 0 : \alpha^k \not\models f) & \text{Def. 3.3.4} \\ \Leftrightarrow & \neg(\exists k \geq 0 : \alpha^k \models \neg f) & \text{Def. 3.3.8} \\ \Leftrightarrow & \alpha \not\models \mathbf{F}\neg f & \text{Def. 3.3.4} \\ \Leftrightarrow & \alpha \models \neg\mathbf{F}\neg f & \end{array}$$

Beachten Sie, dass einige der auf der rechten Seite angegebenen benutzten Äquivalenzen sich nicht auf die LTL Formel beziehen, sondern sozusagen auf die Metaebene. So bezieht sich bspw. die im zweiten Schritt bei der zweiten Formel benutzte Äquivalenz $g \equiv \neg\neg g$ darauf, dass die ganze Formel $\forall k \geq 0 : \alpha^k \models f$ wahr oder falsch sein kann und somit als aussagenlogische Formel interpretiert werden kann. Für diese gilt dann die Äquivalenz.

Übungsaufgabe 4.3: Betrachten Sie das Transitionssystem TS_{cell}, welches das Systemverhalten eines gebrauchten Handys beschreibt. Leider gibt es keine Reset-Funktion, so dass in einem Fehlerfall – in dem das System nicht mehr gestartet werden kann – zum Zurücksetzen des Geräts die Batterie entfernt werden muss. Zum Glück treten Fehler nicht sehr oft auf. Sie treten nur dann auf, wenn gerade telefoniert wird. Die Transitionsbezeichner und negierten Aussagen in den Etiketten sind optional und dienen nur zur Veranschaulichung der Vorgänge und Zustände.

von
6

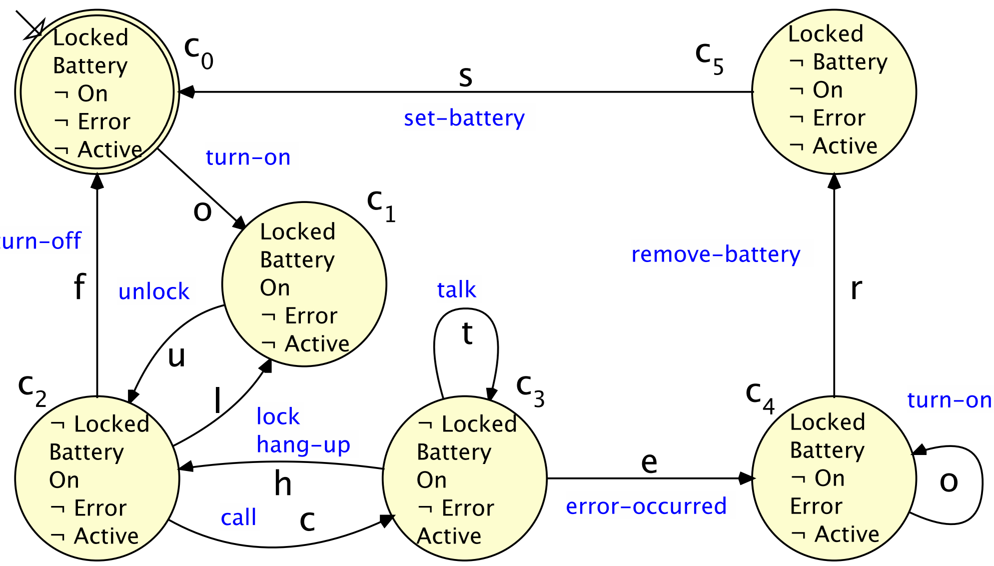
1. Betrachten Sie TS_{cell} ohne Etiketten als Büchi-Automat mit c_0 als einzigem Endzustand und Alphabet $\Sigma = \{o, u, l, f, c, h, t, e, r, s\}$. Geben Sie die Mengen $L(TS_{cell})$ bzw. $L^\omega(TS_{cell})$ als regulären bzw. ω-regulären Ausdruck an.

2. Betrachten Sie TS_{cell} mit Etiketten als Kripke-Struktur M_{cell}. Bestimmen Sie die Menge $SS(M_{cell})$ aller Pfade (Def. 2.18) als ω-regulären Ausdruck. Es reicht hier die Indices zu benutzen, da alle Zustandsbezeichner gleich anfangen Das Alphabet dieses Ausdrucks ist also $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Geben Sie zunächst die Etiketten ($E_S(c_i)$) für die einzelnen Zustände (c_i) an. Bestimmen Sie die Etikettensprache $E_S(SS(M_{cell}))$ (Def. 2.18 und Def. 2.19) und geben Sie diesen als ω-regulären Ausdruck an. Das Alphabet dieses Ausdrucks besteht also aus den Etiketten der Zustände.

4. Betrachten Sie jetzt die Kripkestruktur M_{cell}:

   Für eine Formel ϕ sei $Sat(\phi)$ die Menge der Zustände, in denen ϕ gilt. Bestimmen Sie $Sat(Error)$, $Sat(\neg Battery)$ sowie $Sat(On)$. Geben Sie eine natürlichsprachliche Beschreibung für die Formel



TS_{cell}

$$f = \mathbf{G}(Error \Longrightarrow ((\mathbf{X}\neg Battery) \Longrightarrow \mathbf{F}On))$$

an. Prüfen Sie dann, ob die LTL-Formel im Anfangszustand c_0 gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung, d.h. entweder die Gültigkeit beweisen oder eine Rechnung als Gegenbeispiel angeben.

5. Prüfen Sie ebenso, ob die LTL-Formel

$$g = \mathbf{G}(Error \Longrightarrow (\mathbf{F}Active))$$

im Anfangszustand c_0 gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung, d.h. entweder die Gültigkeit beweisen oder eine Rechnung als Gegenbeispiel angeben. Geben Sie zudem einen Pfad π an, für den diese Formel gilt, d.h. für den $M_{cell}, \pi \models g$ gilt.

von
6

Übungsaufgabe 4.4: Betrachten Sie wieder die Kripkestruktur M_{cell} aus Aufgabe 4.3 und den unendlichen Zustandspfad $\pi = (c_0c_1c_2c_3c_2)^\omega$.

1. Geben Sie an, ob für die folgenden LTL-Formeln f jeweils $M_{cell} \models f$ bzw. $M_{cell}, \pi \models f$ gilt. Begründen Sie Ihre Aussage.

   Anmerkung: Wie im Skript werden hier die temporalen Operatoren in der Form $\bigcirc, \Diamond$ und $\Box$ benutzt, da Sie auf beide Formen auch in der Literatur treffen werden.

f	$M_{cell} \models f$	$M_{cell}, \pi \models f$
$\Diamond\Box(Active)$		
$\Box\Diamond(Active)$		
$\Box(\bigcirc Active \Longrightarrow On)$		
$\Box\Diamond(Active \Longrightarrow \bigcirc\bigcirc\neg On)$		
$\Box\Diamond(\neg Battery \vee Active \vee \neg On \vee Error)$		
$\bigcirc\bigcirc\bigcirc Active$		

2. Formulieren Sie LTL Formeln für die folgenden Aussagen und geben Sie die erwarteten Antworten an ($True$ oder ein Gegenbeispiel):

(a) Das Gerät kann niemals angeschaltet sein wenn keine Batterie eingelegt ist.

(b) Das Gerät ist immer mal wieder angeschaltet.

(c) Das Gerät befindet sich nur im Fehlerzustand, wenn vorher das Gerät aktiv war.

(d) Es gilt immer, dass das Gerät angeschaltet ist oder ein Fehler aufgetreten ist oder dass es im nächsten Schritt wieder angeschaltet wird.

Bonusaufgabe 4.5: Erstellen Sie eine neue Olat-Frage für den aktuellen Lesestoff der 4. Woche entsprechend den bisherigen Anforderungen.

von
1

Bisher erreichbare Punktzahl: 48