Ruben Felgenhauer,
Alexander Hildebrandt,
Leonhard Reichenbach

Übungen Formale Grundlagen der Informatik II
Blatt 2

Übungsaufgabe 2.3:

2.3.1:

$$\begin{aligned} L(A_n) = &\Big((ab)^0 d(ba)^0 + \ldots + (ab)^{\frac{n}{2}} d(ba)^{\frac{n}{2}}\Big) \\ &+ \Big((ab)^0 ada(ba)^0 + \ldots + (ab)^{\frac{n}{2}-1} ada(ba)^{\frac{n}{2}-1}\Big) \\ &+ (ab)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

2.3.2:

$$\begin{aligned} L(A_n) = &\{ab\}^0 \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^0 \cup \ldots \cup \{ab\}^{\frac{n}{2}} \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}} \\ &\cup \{ab\}^0 \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^0 \cup \ldots \cup \{ab\}^{\frac{n}{2}-1} \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}-1} \\ &\cup \{ab\}^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

2.3.3:

$$\begin{aligned} Z.zg.: L(A_n) = &\{ab\}^0 \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^0 \cup \ldots \cup \{ab\}^{\frac{n}{2}} \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}} \\ &\cup \{ab\}^0 \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^0 \cup \ldots \cup \{ab\}^{\frac{n}{2}-1} \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}-1} \\ &\cup \{ab\}^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Diesen Block nennen wir im folgenden der Übersicht halber $M(A_n)$

Ruben Felgenhauer,
Alexander Hildebrandt,
Leonhard Reichenbach

„ $\Rightarrow$ “ : Sei $w \in L(A_n)$.
Dann wird w von A_n akzeptiert. A_n hat zwei Endzustände Z_1 und Z_{2n}. Nun gibt es drei Möglichkeiten welche Form w haben kann.
Form 1:
Um den Endzustand Z_{2n} zu erreichen muss w aus $\frac{n}{2}$ vielen Aneinanderreihungen von ab bestehen. Also $w = \{ab\}^{\frac{n}{2}}$ und damit auch $w \in M(A_n)$.
Form 2:
Um den Endzustand Z_1 zu erreichen gibt es zwei Möglichkeiten, hier die erste. Der direkte Weg zu Z_1 ist immer über $w = d$ vorhanden, für $n \geq 2$ kommt nun die Möglichkeit hinzu im Automaten einen Bogen zu „laufen“. Das funktioniert wie folgt: zuerst liest man bis zu $\frac{n}{2}$ viele ab, dann ein d um nach „unten“ zu kommen und anschließend liest man $\frac{n}{2}$ viele ba um in Z_1 zu landen. w kann also alle Formen zwischen $\{ab\}^0 \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^0$ und $\{ab\}^{\frac{n}{2}} \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}}$ annehmen. Auch hier gilt $w \in M(A_n)$.
Form 3:
Funktioniert analog zu Form 2: zuerst liest man bis zu $\frac{n}{2} - 1$ viele ab, dann noch ein a, dann d um nach „unten“ zu kommen und anschließend liest man noch ein a und $\frac{n}{2} - 1$ viele ba um in Z_1 zu landen. w kann also alle Formen zwischen $\{ab\}^0 \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^0$ und $\{ab\}^{\frac{n}{2}-1} \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}-1}$ annehmen. Auch hier gilt wieder $w \in M(A_n)$.
Also ist $w \in M(A_n)$ und $L(A_n) \subseteq M(A_n)$.

„ $\Leftarrow$ “ : Sei $w \in M(A_n)$.
Wir unterteilen w in drei Fälle.
Fall 1:
$w = \{ab\}^{\frac{n}{2}}$
Daraus ergibt sich folgende Kantenrelation:
$\delta(Z_0, \quad \{ab\}^{\frac{n}{2}}) \mapsto \delta(Z_2, \quad \{b\} \cdot \{ab\}^{\frac{n}{2}-1}) \mapsto \delta(Z_4, \quad \{ab\}^{\frac{n}{2}-1}) \mapsto \ldots \mapsto \delta(Z_{2n}, \lambda)$
D.h. bei Eingaben dieser Form landet der Automat immer in Z_{2n}. Dies ist ein Endzustand.
Fall 2:
$w \in \{ab\}^0 \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^0 \cup \ldots \cup \{ab\}^{\frac{n}{2}} \cdot \{d\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}}$
Dann hat w die Form $w = u \cdot \{d\} \cdot v \mid u = \{ab\}^x$ und $v = \{ba\}^x$ wobei $x \in (0, \frac{n}{2})$
Daraus ergibt sich folgende Kantenrelation:
$\delta(Z_0, \quad u \cdot \{d\} \cdot v) \mapsto \ldots \mapsto \delta(Z_{4x}, \quad \{d\} \cdot v) \mapsto \delta(Z_{4x+1}, \quad v) \mapsto \ldots \mapsto \delta(Z_1, \lambda)$
D.h. bei Eingaben dieser Form landet der Automat immer in Z_1. Dies ist ein Endzustand.
Fall 3:
$w \in \{ab\}^0 \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^0 \cup \ldots \cup \{ab\}^{\frac{n}{2}-1} \cdot \{ada\} \cdot \{ba\}^{\frac{n}{2}-1}$
Dann hat w die Form $w = u \cdot \{ada\} \cdot v \mid u = \{ab\}^x$ und $v = \{ba\}^x$ wobei $x \in (0, \frac{n}{2} - 1)$
Daraus ergibt sich folgende Kantenrelation:
$\delta(Z_0, \quad u \cdot \{ada\} \cdot v) \mapsto \ldots \mapsto \delta(Z_{4x}, \quad \{ada\} \cdot v) \mapsto \delta(Z_{4x+2}, \quad \{da\} \cdot v) \mapsto \delta(Z_{4x+3}, \quad \{a\} \cdot v) \mapsto \delta(Z_{4x+1}, \quad v) \mapsto \ldots \mapsto \delta(Z_1, \lambda)$
D.h. auch bei Eingaben dieser Form landet der Automat immer in Z_1. Dies ist ein Endzustand.
Also ist $w \in L(A_n)$ und $M(A_n) \subseteq L(A_n)$.

$\square$

Ruben Felgenhauer,
Alexander Hildebrandt,
Leonhard Reichenbach

2.3.4:

Die Sprache $L(A_n)$ ist regulär, da sie als regulärer Ausdruck geschrieben werden kann.
Siehe 1.3.1

Übungsaufgabe 2.4:

2.4.1:

1. Die Menge der Start- und Endzustände wird vertauscht bzw. $Q_0' := F$ und $F' := \{q_0\}$
2. Alle Kanten werden umgekehrt bzw. $\delta' := \{(p, w, q) \mid (q, w, p) \in \delta\}$
3. Aus dem nun entstandenen NFA wird mittels Potenzautomatenkonstruktion ein DFA erstellt.
4. Der entstandene DFA wird ggf. vollständig gemacht.

2.4.2:

Z.zg.: $L(A) = \Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^* \mid \Sigma = \{r, e, d\}$

„ $\Rightarrow$ “ : Sei $w \in L(A)$.
Dann wird w von A akzeptiert. Dazu muss w in q_4 enden, da dies der einzige Endzustand ist. Am Anfang ist der Automat in q_0. Um zu q_4 zu gelangen, muss man durch die restlichen drei Zustände gehen. Die einzige Zeichenkette, die Richtung q_4 führt ist *reed*. Falls dieses Wort mit anderen Buchstaben unterbrochen wird, geht man zurück in Richtung q_0. Sobald man in q_4 angekommen ist, kann man alle Zeichen in Σ lesen und bleibt im Endzustand. D.h. w hat die Form $u \cdot reed \cdot v \mid u, v \in \Sigma^*$.
Also ist $w \in \Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^*$ und $L(A') \subseteq \Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^*$.

„ $\Leftarrow$ “ : Sei $w \in \Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^*$.
Dann gilt $w = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \mid x_1, x_3 \in \Sigma^* \quad \text{und} \quad x2 = reed$.
Daraus ergibt sich folgende Kantenrelation:
$\delta(q_0, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \mapsto \delta(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \quad x_2 \cdot x_3) \mapsto \delta(q_4, \quad x_3) \mapsto \delta(q_4, \lambda)$
D.h. bei Eingaben dieser Form landet der Automat immer in q_4. q_4 ist ein Endzustand.
Also ist $w \in L(A)$ und $\Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^* \subseteq L(A')$.

$\square$

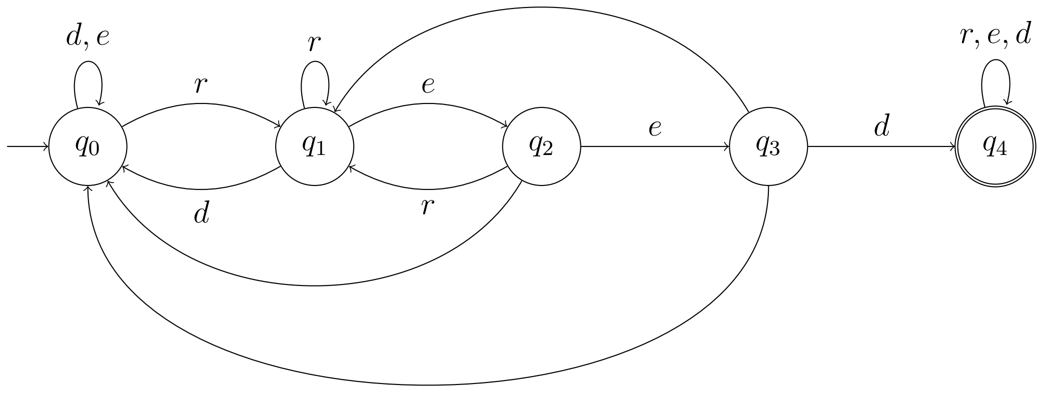
2.4.3:

Der reguläre Ausdruck zu $\Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^*$ lautet $\Sigma^* \cdot reed \cdot \Sigma^*$.

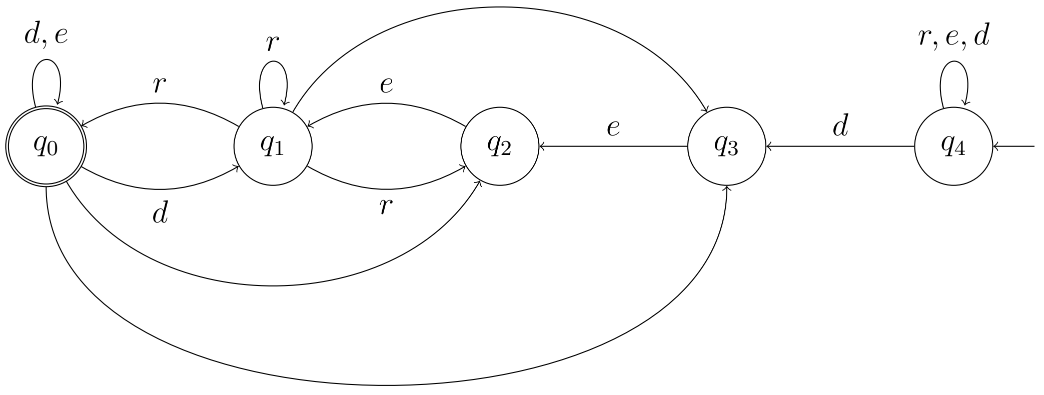
Ruben Felgenhauer,
Alexander Hildebrandt,
Leonhard Reichenbach

2.4.4:

1. Der Ursprüngliche Automat:

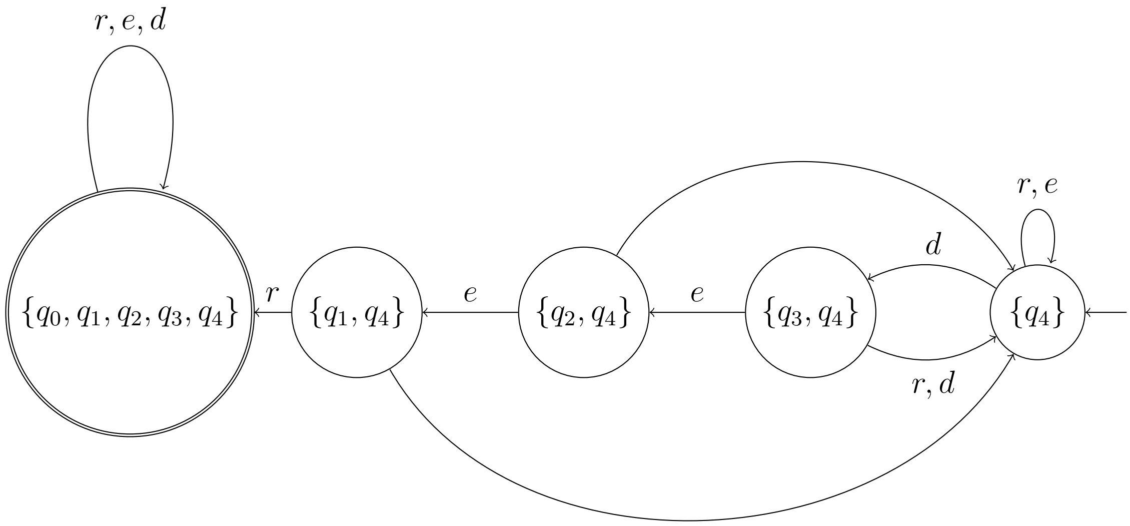


2. Kanten umkehren:



Ruben Felgenhauer,
Alexander Hildebrandt,
Leonhard Reichenbach

3. Potenzautomaten konstruieren:
   A':



4. Vollständig machen: Der Automat ist bereits vollständig!

2.4.5:

Z.zg.: $L(A') = \{w^{rev} \mid w \in L(A)\} = \{w^{rev} \mid w \in \Sigma^* \cdot \{reed\} \cdot \Sigma^*\} = \Sigma^* \cdot \{deer\} \cdot \Sigma^*$

„ $\Rightarrow$ “ : Sei $w \in L(A')$.
Dann wird w von A akzeptiert. Dazu muss w in q_0 enden, da dies der einzige Endzustand ist. Am Anfang ist der Automat in q_4. Um zu q_0 zu gelangen, muss man durch die restlichen drei Zustände gehen. Die einzige Zeichenkette, die Richtung q_0 führt ist *deer*. Falls dieses Wort mit anderen Buchstaben unterbrochen wird, geht man zurück in Richtung q_4. Sobald man in q_0 angekommen ist, kann man alle Zeichen in Σ lesen und bleibt im Endzustand. D.h. w hat die Form $u \cdot deer \cdot v \mid u, v \in \Sigma^*$
Also ist $w \in \Sigma^* \cdot \{deer\} \cdot \Sigma^*$ und $L(A') \subseteq \{w^{rev} \mid w \in L(A)\}$.

„ $\Leftarrow$ “ : Sei $w \in \Sigma^* \cdot \{deer\} \cdot \Sigma^*$.
Dann gilt $w = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \mid x_1, x_3 \in \Sigma^* \quad \text{und} \quad x_2 = deer$.
Daraus ergibt sich folgende Kantenrelation:
$\delta(q_4, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \mapsto \delta(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \quad x_2 \cdot x_3) \mapsto \delta(q_0, \quad x_3) \mapsto \delta(q_0, \lambda)$
D.h. bei Eingaben dieser Form landet der Automat immer in q_0. q_0 ist ein Endzustand.
Also ist $w \in L(A')$ und $\{w^{rev} \mid w \in L(A)\} \subseteq L(A')$.

$\square$