FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Präsenzlösung 12 : Prozeßalgebra: BPA, Normalformen

Präsenzteil am 11./12. 1. – Abgabe am 18./19. 1. 2016

nur der Präsenzaufgabenteil!
Hausaufgaben sind ab Montag verfügbar.

Präsenzaufgabe 12.1: Betrachten Sie die folgenden Prozessausdrücke:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= a((b+b)d) + (ab)c + (ab)(d+d) \\
t_2 &= (ab + (a+a)b)(d+d) + a(bc)
\end{aligned}
$$

1. Konstruieren Sie für die Prozessausdrücke jeweils den Prozessgraphen!

   Lösung:

$$
\begin{tikzcd}
 & a((b+b)d) + (ab)c + (ab)(d+d) \arrow[dl, "a"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, "a"] & \\
(b+b)d \arrow[d, "b"] & bc \arrow[d, "b"] & b(d+d) \arrow[d, "b"] \\
d \arrow[d, "d"] & c \arrow[d, "c"] & d+d \arrow[d, "d"] \\
\surd & \surd & \surd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (ab + (a+a)b)(d+d) + a(bc) \arrow[dl, "a"] \arrow[d, "a"] \\
b(d+d) \arrow[d, "b"] & bc \arrow[d, "b"] \\
d+d \arrow[d, "d"] & c \arrow[d, "c"] \\
\surd & \surd
\end{tikzcd}
$$

2. Identifizieren Sie alle bisimilaren Knoten in den beiden Prozessgraphen.

   Lösung: Für t_1 und t_2 gilt: Es ist $d \underline{\leftrightarrow} (d+d)$, $(d+d) \underline{\leftrightarrow} (d+d)$ und $c \underline{\leftrightarrow} c$. Damit ist auch $(b+b)d \underline{\leftrightarrow} b(d+d)$ und $b(d+d) \underline{\leftrightarrow} b(d+d)$ sowie $bc \underline{\leftrightarrow} bc$. Und schließlich $t_1 \underline{\leftrightarrow} t_2$.

3. Sind t_1 und t_2 bisimilar?

   Lösung: Ja, s.o.

4. Konstruieren Sie für t_2 mit den BPA-Transitionsregeln die Ableitungen so vieler Zustandsübergänge zur Aktion a wie möglich!. Geben Sie die in jedem Schritt verwendete Transitionsregel und die Variableninstanziierung an!

Lösung: Wir betrachten nur einen Übergang. Es gilt:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{a \xrightarrow{a} \surd}\;A_0, \sigma_1}{ab \xrightarrow{a} b}\;T_\cdot^{\surd}, \sigma_2}{(ab + (a+a)b) \xrightarrow{a} b}\;T_{+R}, \sigma_3}{(ab + (a+a)b)(d+d) \xrightarrow{a} b(d+d)}\;T_\cdot, \sigma_4}{t_2 = (ab + (a+a)b)(d+d) + a(bc) \xrightarrow{a} b(d+d)}\;T_{+R}, \sigma_5}{}$$

$$\sigma_1: \; v \mapsto a \qquad \sigma_2: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & a, \\ y & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_3: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & ab, \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & (a+a)b \end{array}$$

$$\sigma_4: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & (ab+(a+a)b), \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & (d+d) \end{array} \qquad \sigma_5: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & (ab+(a+a)b)(d+d), \\ x' & \mapsto & b(d+d), \\ y & \mapsto & a(bc) \end{array}$$

Präsenzaufgabe 12.2: Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie ihre Antwort!

1. Wenn Prozessgraphen isomorph sind, dann sind sie auch bisimilar. (Isomorphie gilt, wenn beide Graphen durch Umbenennung der Knoten gleich werden. Formal: Zu den Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $E_i \subseteq V_i \times A \times V_i$ muss es eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ geben, welche zu $\varphi(E_1) = E_2$ führt.)

   Lösung: Wenn zwei Prozessgraphen gleich oder isomorph sind, dann sind sie auch bisimilar, denn zu jedem Zustand kann im anderen Graphen ein passender bisimilarer Partner angegeben werden: $\mathcal{B} = \{(x, x) \mid x \in V_1 = V_2\}$ bzw. $\mathcal{B} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in V_1\}$.

2. Wenn Prozessgraphen bisimilar sind, dann sind sie auch isomorph.

   Lösung: Die Aussage gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt: Die beiden Prozessgraphen zu den Termen ab und $ab + a(b + b)$ sind nicht isomorph, obwohl die Terme bisimilar sind (da $b \leftrightarrow b + b$ gilt):

   $$ab \xrightarrow{a} b \xrightarrow{b} \surd \qquad \text{und} \qquad ab + a(b+b) \begin{cases} \xrightarrow{a} \; b \xrightarrow{b} \surd \\ \xrightarrow{a} \; (b+b) \xrightarrow{b} \surd \end{cases}$$

3. Alice sagt: „Im BPA-Kalkül (S. 203) kann nur $s = t$ bewiesen werden, nicht aber $s \neq t$.“
   Bob sagt: „Im BPA-Ersetzungskalkül (S. 204) kann sogar $s \neq t$ bewiesen werden.“

Lösung: Beide Aussagen stimmen. Grundsätzlich gilt in Kalkülen, dass sie zur Ableitung von Positivbeispielen geeignet sind, im Falle des BPA-Kalküls also von gültigen Äquivalenzen $s = t$. Dass Nicht-Ableiten-Können eines Beispiels stellt aber keinen zulässigen Beweis dar – es muss außerhalb des Kalküls argumentiert werden, warum so eine Ableitung *unmöglich* ist.

Der Ersetzungskalkül zur Normalformbildung liefert solch eine Argumentation für den BPA-Kalkül, da die AC-Äquivalenz von Normalformen in endlicher Zeit überprüft werden kann (es gibt nur endlich viele Permutationen der Summanden innerhalb eines Terms).

4. Alice sagt: „Das Tolle an Normalformen ist, dass man von der Gleichheit (modulo AC) auf die Bisimilarität schließen kann.“

   Bob sagt: „Viel besser ist noch, dass man von der *Un*gleichheit (modulo AC) der Normalformen auf die *Un*gültigkeit der Bismilarität schließen kann.“

   Lösung: Beide Aussagen stimmen. Diese beiden Aussagen ergänzen vorigen beiden Aussagen um den Zusammenhang zwischen BPA-Äquivalenzen und Bisimilarität.

5. Angenommen wir interpretieren Prozessterme nicht durch Prozessgraphen, sondern durch die rationalen Zahlen, wobei $x+y$ wie üblich die Summe und $x \cdot y$ das Produkt beschreibt. Anstelle von Bisimilarität verwenden wir die arithmetische Gleichheit der ausgerechneten Ausdrücke. Haben wir dann auch ein Modell, für das die Axiome des BPA-Kalküls gelten, ist also der BPA-Kalkül korrekt und/oder vollständig bezüglich der arithmetischen Interpretation?

   Lösung: Die rationalen Zahlen sind kein mögliches Modell, denn die Axiome A1 bis A5 sind für die arithmetische Interpretation weder vollständig noch korrekt. Das Axiom A3 ($x+x = x$) gilt beispielsweise nicht für $x = 1$, daher ist der BPA-Kalkül nicht korrekt. Der Kalkül ist auch nicht vollständig, da $2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ ist (beide Ausdrücke ergeben die Zahl 14), dies aber durch die Axiome und Schlußregeln des BPA-Kalküls nicht hergeleitet werden kann.

Bisher erreichbare Punktzahl: 132