Matemática

Vitor Lima (vitor_lp@yahoo.com)

01/03/2012

Capítulo 1

Fatoração

1.1 Introdução

Muitas vezes nos deparamos com expressões matemáticas que nos parecem muito "feias", no sentido de que parece muito difícil calcular o seu valor ou manipulá-las. Mas, em vários casos, é possível reescrever a expressão de uma forma que seja mais fácil manipula-lá. Uma destas formas é a forma fatorada, que vamos ver agora.

1.2 Definição

Fatoração é o nome que se dá aos métodos ou ao processo de reescrever uma expressão como uma expressão na forma de produtos.
Ou seja, fatorar uma expressão é deixá-lá na forma

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdots e_n$$

onde cada e_i (com $i = 1, 2, 3, 4, ..., n$) é uma outra expressão.
Chamamos cada e_i de fator.
Por exemplo, a expressão $11 \cdot x + 11 \cdot y$ pode ser reescrita como $11 \cdot (x + y)$.
Está forma consiste em um produto entre o 11 e o $(x + y)$, então, esta é a forma fatorada dela. Note que ela tem dois fatores.

1.3 Técnicas de fatoração

Há algumas técnicas já conhecidas e que valem bastante a pena conhecer:

Fator comun en evidência Trata-se de observar um valor que aparece mais de uma vez em uma expressão e reescrever a expressão como um produto deste valor e de uma outra expressão, tal que, feita a distributiva, obtenha-se novamente a expressão original.
Por exemplo:
Na expressão $13x + xn$, vemos que o x aparece duas vezes, logo, podemos colocá-lo em evidência e obter a expressão $x \cdot (13 + n)$.
Note que se fizermos a distributiva, obteremos novamente a expressão original.
Como outro exemplo, veja que colocando o a e o $-b$ em evidência, chegamos a seguinte e igualdade:

$$ax + ya - xb - yb = a \cdot (x + y) - b \cdot (x + y)$$

então, podemos tirar o $(x + y)$ em evidência e obter

$$ax + ya - xb - yb = (x + y) \cdot (a - b)$$

Trinômio quadrado perfeito . É uma forma de fatorar expressões que têm uma forma bem particular, porém, bem comum, principalmente entre exercícios de ensino médio e vestibular. Observe que:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Então, uma expressão do tipo $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ pode ser reescrita como $(a + b)^2$, que é sua forma fatorada.
O análogo acontece para o caso da diferença entre a e b:

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a \cdot (a-b) - b \cdot (a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Diferença de quadrados . Também se trata de uma expressão com uma forma bem particular, mas que é bastante comum. Veja que,

$$(a+b) \cdot (a-b) = a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 + 0 + b^2 = a^2 + b^2$$

Logo, uma expressão da forma $a^2 - b^2$ pode ser fatorada em um produto com os seguintes termos: $(a + b) \cdot (a - b)$.

1.3.1 Exemplos

1. Fatorar a expressão $36 + 12x + x^2$.
   Note que esta expressão pode ser reescrita como $6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x + x^2$ e

que ela coincide com a forma de uma trinômio quadrado perfeito (com $a = 6$ e $b = x$), portanto,

$$36 + 12x + x^2 = (6 + x)^2$$

(Faça a distributiva para verificar a corretude).

2. Fatorar a expressão $xy^2 + xa^2 - 2xay$.
   Colocando x em evidência e usando a forma do trinômio perfeito, chegamos em

$$xy^2 + xa^2 - 2xay = x \cdot (y^2 + a^2 - 2ay) = x \cdot (y^2 - 2ya + a^2) = x \cdot (y - a)^2$$

3. Fatorar a expressão $3x^2 + 6x + 7xy + 14y$.
   Colocando $3x$ e $7y$ em evidência, chegamos a seguinte igualdade:

$$3x^2 + 6x + 7xy + 14y = 3x \cdot (x + 2) + 7y \cdot (x + 2)$$

   Colocando $(x + 2)$ em evidência, chegamos em

$$3x^2 + 6x + 7xy + 14y = (x + 2) \cdot (3x + 7y)$$

4. Fatorar a expressão $9x^2 - 4$.
   Esta expressão envolve apenas uma diferença de dois elementos, além disso, há um x elevado ao quadrado, isto sugere que ele pode ser fatorada como uma diferença de quadrados.
   De fato, notando que $9x^2 = (3x)^2$ e que $4 = 2^2$, vemos que

$$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x + 2) \cdot (3x - 2)$$

5. Se $a - b = 4$ e $a \cdot b = 6$, então, quanto vale $a^2 + b^2$?
   Como somar com zero não muda o valor da expressão, podemos escrever:
   $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 0 \quad \Leftrightarrow$ Como $-2ab + 2ab = 0$
   $a^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \Leftrightarrow$ Trinômio do quadrado perfeito
   $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab \quad \Leftrightarrow$ Substituindo os valores dados
   $a^2 + b^2 = (4)^2 + 2 \cdot 6 = 16 + 12 = 28$

1.4 Exercícios

1. Fatore as seguintes expressões:
   (a) $x^2 - 2^2$
   (b) $x^2 + xy + x$
   (c) $y^2 - 1$
   (d) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$
   (e) $x^2 - w^2 - x + w$
   (f) $ax + x^2 + 2xy + ay + y^2$
   (g) $4x^2 - 12 + 4$
   (h) $a^3b - ab^3$
   (i) $(x + y) \cdot (xy + 1) - y \cdot (x^2 + 1 + xy)$
   (j) $x^4 - 1$
   (k) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
   (l) $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$
   (m) $k^2 - p^2 + k + p$
   (n) $x^2 + 8x + 16$
   (o) $30 + x^2 + 12x + 6$
   (p) $x^2 + w^2 + 2xy + y^2$
   (q) $y^4 + y^2 + \frac{1}{4}$
   (r) $-1 + x^2 + 2y - y^2$
   (s) $x^3 + 8x^2 + 16x$

2. Simplifique a expressão $\left(\frac{1}{b-a}\right) \cdot \frac{(ax-a^2-bx+b^2)}{b-a}$

3. Desenvolva as expressões a seguir (estas são formas fatoradas interessantes):
   (a) $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$
   (b) $(x + y)^3$

4. (FATEC-2002) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e que $a - b - c = 10$, com a, b e c números reais. Então, quanto vale $a + b + c$?
   (a) 1

(b) 2
(c) 4
(d) 10
(e) 20

5. (FEI-2005) Ao fatorar e simplificar a seguinte expressão algébrica

$$\frac{abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy}{ax + by}$$

com $ax + by \neq 0$, obtemos:

(a) 2
(b) 1
(c) $ax + by$
(d) $ay + bx$
(e) $ax + b$

6. (Mack-98) Se $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$, então $a + a^{-1}$ vale:

(a) $\frac{100}{9}$
(b) $\frac{83}{3}$
(c) $\frac{82}{9}$
(d) $\frac{100}{82}$
(e) $\frac{16}{9}$

7. (FUVEST-Segunda fase-Modificado) Fatorar $a^4 + a^2 + 1$.