Matemática

Vitor Lima (vitor_lp@yahoo.com)

15/03/2012

Capítulo 1

Radiciação

1.1 Introdução

No ano de 1202, um matemático italiano chamado *Leonardo Fibonacci* escreveu, em seu livro " *Líber Abbaci*"[1] (o livro foi escrito em latim. Uma boa tradução é "Livro do Cálculo") a seguinte frase:

> "Radix quadratum 16 aequalis 4"

Ela pode ser traduzida como "*o lado de um quadrado de 16 é igual a 4*". O que ele queria dizer é que, se um quadrado tem uma área igual a 16, então o lado desse quadrado é igual a 4.
As pessoas passaram a escrever *radix quadratum n* para se referir ao lado de um quadrado de área igual a n. Depois, com o passar do tempo, estavam escrevendo simplesmente *radix n*. O tempo foi passando e se tornou comum escrever somente rn.
Com o passar do tempo (e a ajuda da caligrafia ruim das pessoas) esse r foi mudando até virar o símbolo tão conhecido por todos, que é

$$\sqrt{n}$$

É daí que vem o nome da famosa operação *raíz quadrada*.
O que a expressão $\sqrt{n}$ diz então, é: *qual é o lado de uma quadrado que tem área igual a n?*.
Com a evolução da matemática, este conceito foi generalizado, e hoje temos também raíz cúbica, raíz quarta, e assim por diante.

[1] Este livro é muito importante na história da matemática e da humanidade. Ele foi uma das principais influencias para que os europeus parassem de utilizar os algarismos romanos e passassem a ultilizar os algarismos arábicos (0,1,2,4,5,6,7,8,9)

Neste capítulo vamos estudar essas operações, suas propriedades e suas relações com a potênciação. Esta área da matemática, que estuda as operações de raízes quadradas, cúbicas e todas as outras, se chama *radiciação*. Neste capítulo e no restante do livro, assumiremos que as **propriedades de potências com expoentes inteiros valem também para expoentes racionais**[2]. Com isso, podemos fazer, por exemplo, $2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2} = 2^1$.

1.2 Raíz quadrada

A raíz quadrada é o caso mais simples da radiciação. Ela tem uma interpretação geométrica (como descrito na introdução) e é bastante utilizada, principalmente pelo fato de ser necessária para resolver *equações de segundo grau*.

1.2.1 Definição

Definimos a raíz quadrada de um número a como um número b, maior ou igual a zero, tal que o multiplicando-se b por b obtemos a.
Ou seja,

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Por exemplo,
$\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;
$\sqrt{121} = 11$, pois $11^2 = 121$.

1.2.2 Propriedades da raíz quadrada

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
O que esta propriedade nos diz é que a raíz quadrada de um número é o mesmo que aquele número elevado a meio.
Vamos provar que isto é verdade.
Usando a propriedade de *potência de potência*, temos:

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

Ou seja, $a^{\frac{1}{2}}$ é um número que multiplicado por ele mesmo (elevado ao quadrado) resulta no próprio a. Então, pela definição de raíz quadrada, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

[2] Na verdade aquelas propriedades demonstradas no capítulo de Potenciação valem para qualquer expoente real, mas, infelizmente, para provarmos que isto é verdade temos que usar conhecimentos avançados de matemática

Teorema 1 (Inexistência de raíz de um número negativo). *Se $a < 0$, então, não existe* $\sqrt{a}$

Demonstração. Seja a um número menor que zero.
Se a raíz de a existir, teremos $\sqrt{a} = b$, então $b^2 = a$
mas todo número ao quadrado é maior que zero, então, b^2 não pode ser igual a a, ou seja, não é possível que exista $\sqrt{a}$. □

1.3 Raíz cúbica

A raíz cúbica é muito parecida com a quadrada, também tem uma interpretação geométrica (raíz cúbica de n pode ser entendida como o lado de um cubo de volume n) e também é bastante utilizada na matemática.

1.3.1 Definição

Definimos a raíz cúbica de um número a é um número b, tal que se multiplicarmos b por b três vezes, obtemos a.
Ou seja,

$$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$$

Por exemplo,
$\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$
$\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5^3 = 125$
$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, pois $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$.

1.3.2 Propriedades da raíz cúbica

A raíz cúbica de um número negativo, ao contrário da raíz quadrada, existe.
Tomemos como exemplo o número -64. A raíz cúbica de -64 é igual a -4, pois $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 16 \cdot (-4) = -64$.
Veremos agora um teorema que diz que a raíz cúbica de um número é igual aquele número elevado a um terço:

Teorema 2. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

Demonstração.

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

Assim, $a^{\frac{1}{3}}$ é um número que se elevado ao cubo resulta em a, logo, é igual a raíz cúbica de a. □

1.4 Raíz n-ésima

A raíz n-ésima é uma generalização das raízes quadradas e cúbicas. Isso quer dizer que, tudo o que estudaremos nesta seção vale para raíz quadrada e para raíz cúbica (bastando trocar o n por 2 ou por 3).

1.4.1 Definição

A raíz n-ésima de um número a é um número b, tal que se multiplicarmos b por b n vezes, obtemos o número a. Em linguagem matemática:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Por exemplo,
$\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$
$\sqrt[5]{-243} = -3$, pois $(-3)^5 = -243$
$\sqrt[3]{-1} = -1$, pois $(-1)^3 = -1$.

1.4.2 Propriedades da raíz n-ésima

Teorema 3 (Relação com potências racionais)**.** *A raíz n-ésima de um número x, maior ou igual a zero, é igual a x elevado a $\frac{1}{n}$.*

Demonstração.

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

Ou seja, $x^{\frac{1}{n}}$ é um número que elevado a n resulta em x, logo, $x^{\frac{1}{n}}$ é igual a raíz n-ésima de x. □

Note que quando $n = 2$ ou $n = 3$, caímos nos casos das raízes quadradas ou cúbicas que provamos acima.
Este teorema nos diz que uma raíz pode ser escrita como uma potência. Isto é útil pelo fato de podermos usar todas as propriedades de potências estudadas no outro capítulo.
Com o uso deste teorema e das propriedades de potências já estudadas, chegamos as seguintes propriedades para a operação de radiciação:

Produto de raízes $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Note que está propriedade é análoga a propriedade de multiplicação de expoentes. E, de fato, ela tem origem nesta propriedade. Pois:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Raíz de uma potência $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

Prova:

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Note que essa propriedade se assemelha apropriedade de potência de potência (e a utilizamos para chegar provar esta propriedade).

Quociente de raízes Se b é diferente de zero, então $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Prova:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Precisamos tomar b diferente de zero pelo fato de não podermos dividir por zero.

Raíz de um $\sqrt[n]{1} = 1$

Prova:

$$1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n\ vezes} = 1$$

Portanto, 1 é a raíz-enésima de 1, pois 1 elevado a n é igual a 1.
(Isso quer dizer que a raíz quadrada, raíz cúbica, quarta ou qualquer outra raíz do 1 vale 1).

Como você viu, estas propriedades são análogas as propriedades de potências. Sendo assim, não há a necessidade de decorá-las. Toda vez que você quiser usar uma propriedade e não se lembrar, transforme a raíz em uma potência e use as propriedades de potência que você conhece.
Há muitas outras propriedades, mas resolvi mostrar apenas estas, pois o objetivo é que você pense e consiga resolver os problemas sem ficar decorando várias fórmulas e propriedades.

1.4.3 Exemplos

E1 - Calcular $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{625}$.

Veja que $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ e que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, logo, a raíz quarta de 625 é 5 e a raíz cúbica de 27 é 3. Assim,

$$\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$$

E2 - Quanto vale $\frac{\sqrt{8}\sqrt{10}\sqrt{2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}}$?

Podemos usar a propriedade de produto de raízes para chegar na igualdade:

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{10}\sqrt{2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{10 \cdot 2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}}$$

Dividindo raíz de vinte por raíz de vinte e usando a propriedade da quociente de raízes, obtemos:

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{10}\sqrt{2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Portanto, aquela expressão vale dois.

E3 - Quanto vale $8^{0.666666666...}$?

Primeiro notemos que

$$0.666666... = \frac{2}{3}$$

Dessa forma, temos que

$$8^{0.666666...} = 8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

1.4.4 Erros comuns

Raíz quadrada de um número ao quadrado Algumas pessoas, quando veem uma expressão como $\sqrt{7^2}$, gostam de "cortar" o quadrado de dentro da raíz (a potência do sete) com o sinal da raíz, obtendo o resultado 7.

Neste caso (7^2), isso dá certo, mas se tomarmos $\sqrt{(-2)^2}$?

Se "cortássemos" o expoente 2 com o sinal da raíz, obteríamos como resultado o valor -2. Mas isto está correto?

Vejamos:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4} = 2$$

Ou seja, o resultado correto é 2 e não -2.
Por que isto ocorre? Por que a regra de "cortar" deu certo com o 7, mas não deu certo com o -2?
Na verdade, com todo número maior ou igual a zero esta regra de "cortar" o sinal da raíz com o expoente 2 dá certo. Mas quando temos um número negativo, devemos retirar o sinal de menos do resultado ao "cortar".
Por exemplo:
$\sqrt{(-6)^2} = 6$ (retiramos o sinal de menos do -6)

1.4.5 Exercícios

1. Calcule os seguintes valores:

   a. $\sqrt{81}$

   b. $\sqrt[3]{125}$

   c. $\sqrt{33}$

   d. $\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{81}$

   e. $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{125}}$

   f. $\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot 2^{\frac{-1}{3}}}$

   g. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

   h. $\frac{\sqrt[6]{6^4} \cdot 6^{\frac{3}{6}}}{\sqrt[6]{6}}$

   i. $\sqrt[1427]{1}$

   j. $\sqrt[3]{\sqrt{-64}}$

   k. $\sqrt[5]{163^5}$

   l. $\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}{\sqrt[8]{3}} - 4$

   m. $\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

   n. $\sqrt[3126]{0}$

   o. $\frac{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{2 \cdot (2+\sqrt{4})}}}{\sqrt{3}}$

   p. $\sqrt{(-3)^2}$

   q. $\sqrt[4]{(-5)^4}$

2. Sabendo que $\beta^5 = 2$, determine o valor da expressão

$$\left(\sqrt{\beta}\cdot\sqrt[4]{\beta}\cdot\sqrt[8]{\beta}\cdot\sqrt[16]{\beta}\right)^{16}$$

3. Calcule a seguinte expressão:

$$\sqrt{\sqrt[3]{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{6}} + \left(\frac{4^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 - \frac{8^7}{(2^7)^3}$$