Matemática para pré-vestibulandos (5.1)

Vitor Lima (vitor_lp@yahoo.com)

Capítulo 1

Potenciação

1.1 Introdução

De maneira geral, quando pensamos em potências, pensamos em um produto (uma multiplicação) efetuada várias vezes, como por exemplo,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Isso é verdade em apenas alguns casos particulares, mas, se tomássemos, por exemplo, $2^{3.5}$ (dois elevado a três e meio), então teríamos que multiplicar 2 por 2 três vezes e meia? Como fazemos isto? Esta expressão faz sentido? E se tivéssemos que calcular 4^{-1} (quatro elevado a menos 1)? Teríamos que multiplicar 4 por ele próprio menos uma vez? Como?

Neste capítulo iremos responder algumas dessas perguntas e aprender a trabalhar com as potências.

1.2 Definição

Potenciação (também conhecida como exponenciação) é uma operação matemática que envolve dois números **a** e **b**, representada por

$$a^b$$

onde **a** é chamado de **base** e **b** é chamado de **expoente**. Esta operação é definida como segue:

expoente positivo:

Se $b \in \{1, 2, 3, ...\}$, ou seja, se b for um inteiro maior que zero, então

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{b\ vezes}$$

Por exemplo, para $a = 5$ e $b = 3$, temos, $a^b = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$. Ou seja, como 3 é um inteiro maior que zero, então basta multiplicarmos 5 por 5 três vezes.

expoente negativo:

Definimos uma potência com expoente negativo como:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

ou seja, retiramos o sinal de menos do b e dividimos 1 por a^b. Por exemplo, se $a = 5$ e $b = -3$, temos, $a^b = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0.008$

Exemplos:

- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- $(\frac{3}{2})^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$
- $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$ (observe o uso da regra do sinal)
- $(1.2)^3 = (1.2) \cdot (1.2) \cdot (1.2) = 1.728$
- $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
- $(\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 8$
- $(-3)^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)} = -\frac{1}{27}$ (observe o uso da regra do sinal)

1.3 Propriedades

Nesta seção iremos provar algumas propriedades das potências. Elas são muito importante para facilitar os cálculos de expressões que envolvam potências.
Por exemplo, quanto vale $3^{-1} \cdot 3^3 \cdot (\frac{1}{3^2}) - 1789^0$?
Vamos tentar calcular este valor:

$$3^{-1} \cdot 3^3 \cdot (\frac{1}{3^2}) - 1789^0 = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot \frac{1}{9} - 1789^0$$

Agora teríamos que multiplicar as frações, depois dividir, resolver a fração resultante $(\frac{27}{27})$ e subtrair 1789^0. Isso seria igual a $1 - 1789^0$...
Mas, quanto vale 1789^0?
Ou seja, depois de todo esse trabalho ainda não conseguiríamos saber quanto vale aquela expressão.
Por isso, precisamos usar as propriedades que vamos aprender agora:

Soma de expoentes: Se $n > 0$ e $m > 0$, então $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Prova: $a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n\ vezes} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a...a)}_{m\ vezes} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n+m\ vezes} = a^{n+m}$

Subtração de expoentes: Se $a \neq 0$, então $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Prova:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n\ vezes}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m\ vezes}} \quad \Leftrightarrow \textit{ separando os m primeiros termos do produto}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m\ vezes}} \cdot \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n-m\ vezes}}{1} \quad \Leftrightarrow \text{ aplicando a definição de potência}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} \cdot \frac{a^{n-m}}{1} \Leftrightarrow \quad a^m \text{ sobre } a^m \text{ dá } 1$$

$$\frac{a^n}{a^m} = 1 \cdot a^{n-m} = a^{n-m}$$

Potências de zero: Se $a \neq 0$, então $a^0 = 1$

Prova:

Primeiro note que pra todo número n, temos que $0 = n - n$ (ou seja, $2 - 2 = 0$, $3 - 3 = 0$, $4 - 4 = 0$ e assim sucessivamente).

Então,

$a^0 = a^{n-n} \Leftrightarrow$ usando o propriedade de subtração de expoentes

$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$

Produto de potências: $(a^n) \cdot (b^n) = (a \cdot b)^n$

Prova:

$$(a^n) \cdot (b^n) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n\ vezes} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdots b)}_{n\ vezes} \Leftrightarrow \quad \textit{reordenando os termos}$$

$$(a^n) \cdot (b^n) = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n\ vezes} \Leftrightarrow \quad \text{pela definição de potência}$$

$$(a^n) \cdot (b^n) = (a \cdot b)^n$$

Quociente de potências: Se $b \neq 0$, então, $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Prova:

$\frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n \cdot (\frac{1}{b})^n \Leftrightarrow$ Pela propriedade anterior

$\frac{a^n}{b^n} = (a \cdot \frac{1}{b})^n = (\frac{a}{b})^n$
Note que, nesta prova, usamos o fato de que $\frac{1}{b^n} = (\frac{1}{b})^n$. Você consegue dizer por que isto é verdade?

Potência de potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Prova:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdots (a^m)}_{n\ vezes}$$

Usando a propriedade de soma dos expoentes, teremos

$$(a^m)^n = a^{\overbrace{m+m+m+...+m}^{n\ somas}} = a^{m \cdot n}$$

Potência de expoente par: Seja n um inteiro par. Então $(-a)^n = a^n$.
Prova:
Primeiro, note que se um número n é par, então ele pode ser escrito como $2k$, para algum k.
Por exemplo, $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 2 \cdot 4$, $20 = 2 \cdot 10$, $-14 = 2 \cdot (-7)$, etc. Então, tomando $n = 2 \cdot k$, temos que,
$(-a)^n = (-a)^{2 \cdot k} \quad \Leftrightarrow \quad$ usando a propriedade de potência de potência
$(-a)^n = [(-a)^2]^k \quad \Leftrightarrow \quad$ como $(-a)^2 = a^2$ (regra do sinal)
$(-a)^n = (a^2)^k \quad \Leftrightarrow \quad$ novamente, propriedade de potência de potência
$(-a)^n = a^{2 \cdot k} = a^n$

1.4 Exemplos

1. Calcular $(3^2 \cdot 3^{-2})^3$
   Usando a propriedade de soma de expoentes, temos que
   $(3^2 \cdot 3^{-2})^3 = (3^{2-2})^3 \quad \Leftrightarrow$ como $2 - 2 = 0$
   $(3^2 \cdot 3^{-2})^3 = (3^0)^3 \quad \Leftrightarrow$ como $3^0 = 1$
   $(3^2 \cdot 3^{-2})^3 = 1^3 = 1$

2. Seja $y = \frac{(-2)^8 \cdot 4^4}{(8^2) \cdot 2^{12}}$. É verdade que y é maior que 2?
   Levando em consideração que $(-2)^8 = 2^8$ (propriedade de expoente par), temos
   $y = \frac{2^8 \cdot 4^4}{(8^2) \cdot 2^{12}} \Leftrightarrow$ como $4 = 2^2$

   $y = \frac{2^8 \cdot (2^2)^4}{(8^2) \cdot 2^{12}} \Leftrightarrow$ como $8 = 2^3$

$y = \frac{2^8 \cdot (2^2)^4}{[(2^3)^2] \cdot 2^{12}}$ $\Leftrightarrow$ propriedade de potência de potência

$y = \frac{2^8 \cdot 2^8}{(2^6) \cdot 2^{12}}$ $\Leftrightarrow$ propriedade de soma de expoentes

$y = \frac{2^{8+8}}{2^{6+12}}$ $\Leftrightarrow$ efetuando as somas

$y = \frac{2^{16}}{2^{18}}$ $\Leftrightarrow$ subtraindo os expoentes

$y = 2^{-2}$ $\Leftrightarrow$ definição de potência

$y = \frac{1}{4} = 0.25$

Sendo assim, $y < 2$, ou seja, não é verdade que $y > 2$.

1.5 Erros comuns

Tome cuidado para não cometer estes erros:

Sinal da base Tome muito o cuidade de verificar se o sinal está incluido na base ou não. Por exemplo:
$-3^2 = -(3) \cdot (3) = -9$, ou seja, neste caso temos "menos quadrado de três", a base é 3 e não -3.
Mas,
$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, pois temos "o quadrado de menos três", ou seja, a base é -3.

Multplicar expoentes Tome cuidado ao usar a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
Note o seguinte:
2^{3^2} é o mesmo que "dois elevado a ao quadrado de três", que dá $2^9 = 512$ (se usássemos a regra de multiplicação dos expoentes, obteríamos $2^{3^2} = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$, o que é errado, já que o resultado correto é 512).
Porém, $(2^3)^2$ é o mesmo que "o quadrado de dois ao cubo", que dá $(2 \cdot 2 \cdot 2)^2 = 8^2 = 64$.
Observe que neste caso poderíamos usar a propriedade de multiplicar os expoentes (teríamos $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$).

Quadrado da soma Outro erro comum é achar que o quadrado de uma soma é igual a soma dos quadrados.
Por exemplo:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$ .... **ERRADO**.
$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2 \cdot ab + b^2$ .... **CORRETO**.
Temos que multiplicar a expressão entre parênteses por ela própria fazendo a distributiva (veja a parte de fatoração para mais detalhes sobre este exemplo).

Expoente negativo Em uma potência com **expoente negativo**, quando retiramos o sinal de menos do expoente, não o colocamos na frente do resultado.

ERRADO): $2^{-3} = -2^3 = -8$
ERRADO |: $2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$
CORRETO (: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

1.6 Exercícios

1. Calcule as seguintes expressões envolvendo potências:

   a. $3^1 + 3^{-1} - \frac{3}{9}$
   b. $\frac{2^{3+2}}{2^3} \cdot \frac{1}{2}$
   c. $\frac{5^{25}}{125 \cdot 125 \cdot 5^{20}} \cdot 5 - 17923^0$
   d. $(-2)^3 \cdot (\frac{3}{2})^2$
   e. $\frac{1}{3^{-3}}$
   f. $\frac{3^2 \cdot 4^4}{2^8 \cdot 9^1} - \frac{6^3}{2^3 \cdot 3^3}$
   g. $\frac{1978^1}{235817^0} - \frac{1978^5}{1978^2 \cdot 1978^2}$
   h. $(2^5 \cdot 2^{-3}) \cdot 2^{-5} \cdot (-2)^2$
   i. $\frac{(3+2)^5}{5^3} - 10^1 \cdot 10^0 - 5^2 + 25$
   j. $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{-6} \cdot (-1)\right]^{1978}$
   k. $3^2 \cdot \frac{(7^9 + 6 \cdot 7^9)}{7^8} \cdot (\frac{1}{7})^2 \cdot 3^{-1} \cdot \frac{1}{7^{-1}}$
   l. $\left(2^{3^2} \cdot 2 - \frac{1024^{10}}{(2^{10})^9}\right) \cdot 67$

2. Em um tempo remoto, um sábio salvou um rei usando de sua inteligência para montar uma ótima estratégia de guerra. O rei, para agradecer este feito, disse ao sábio que lhe daria o que quisesse. Então,

o sábio pediu ao rei que pegasse um tabuleiro de xadrez e colocasse dois gramas de ouro na primeira casa, quatro na segunda, oito na terceira, e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade, e no fim desse a ele a quantidade de ouro que estivesse no tabuleiro.
O rei achou muito pouco, mas resolveu atender o pedido.
Você acha que o rei conseguiu fazer o que o sábio pediu? Por que?
(Observação: um tabuleiro de xadrez tem 64 casas).

3. Sabendo que $(x+2)^2 = 2$, quanto vale $[2 \cdot (x+2)]^{10} \cdot \left(\frac{1}{4^4}\right)^2$?

4. Se $x \in \mathbb{R}$, tal que $0 < x < 1$ (ou seja, x é um número real, maior que zero e menor que 1), então a expressão x^n fica cada vez mais próxima de que número quando tomamos valores grandes de n?
(Dica: avalie a expressão para $n = 2$, depois para $n = 3$, depois para valores maiores de n e tente observar os resultados).

Capítulo 2

Radiciação

2.1 Introdução

No ano de 1202, um matemático italiano chamado *Leonardo Fibonacci* escreveu, em seu livro “ *Líber Abbaci*”[1] (o livro foi escrito em latim. Uma boa tradução é ”Livro do Cálculo”) a seguinte frase:

> “Radix quadratum 16 aequalis 4”

Ela pode ser traduzida como “*o lado de um quadrado de 16 é igual a 4*”. O que ele queria dizer é que, se um quadrado tem uma área igual a 16, então o lado desse quadrado é igual a 4.
As pessoas passaram a escrever *radix quadratum n* para se referir ao lado de um quadrado de área igual a n. Depois, com o passar do tempo, estavam escrevendo simplesmente *radix n*. O tempo foi passando e se tornou comum escrever somente rn.
Com o passar do tempo (e a ajuda da caligrafia ruim das pessoas) esse r foi mudando até virar o símbolo tão conhecido por todos, que é

$$\sqrt{n}$$

É daí que vem o nome da famosa operação *raíz quadrada*.
O que a expressão $\sqrt{n}$ diz então, é: *qual é o lado de uma quadrado que tem área igual a n?*.
Com a evolução da matemática, este conceito foi generalizado, e hoje temos também raíz cúbica, raíz quarta, e assim por diante.

[1]Este livro é muito importante na história da matemática e da humanidade. Ele foi uma das principais influencias para que os europeus parassem de utilizar os algarismos romanos e passassem a ultilizar os algarismos arábicos (0,1,2,4,5,6,7,8,9)

Neste capítulo vamos estudar essas operações, suas propriedades e suas relações com a potênciação. Esta área da matemática, que estuda as operações de raízes quadradas, cúbicas e todas as outras, se chama *radiciação.* Neste capítulo e no restante do livro, assumiremos que as **propriedades de potências com expoentes inteiros valem também para expoentes racionais**[2]. Com isso, podemos fazer, por exemplo, $2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2} = 2^1$.

2.2 Raíz quadrada

A raíz quadrada é o caso mais simples da radiciação. Tem uma interpretação geométrica (como descrito na introdução) e é bastante utilizada, pricipalmente pelo fato de ser necessária para resolver *equações de segundo grau.*

2.2.1 Definição

Definimos a raíz quadrada de um número a como um número b, maior ou igual a zero, tal que o multiplicando-se b por b obtemos a.
Ou seja,

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Por exemplo,
$\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;
$\sqrt{121} = 11$, pois $11^2 = 121$.

2.2.2 Propriedades da raíz quadrada

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
O que esta propriedade nos diz é que a raíz quadrada de um número é o mesmo que aquele número elevado a meio.
Vamos provar que isto é verdade.
Usando a propriedade de *potência de potência*, temos:

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

Ou seja, $a^{\frac{1}{2}}$ é um número que multiplicado por ele mesmo (elevado ao quadrado) resulta no próprio a. Então, pela definição de raíz quadrada, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

[2] Na verdade aquelas propriedades demonstradas no capítulo de Potenciação valem para qualquer expoente real, mas, infelizmente, para provarmos que isto é verdade temos que usar conhecimentos avançados de matemática

Teorema 1 (Inexistência de raíz de um número negativo)**.** *Se* $a < 0$*, então, não existe* $\sqrt{a}$

Demonstração. Seja a um número menor que zero.
Se a raíz de a existir, teremos $\sqrt{a} = b$, então $b^2 = a$
mas todo número ao quadrado é maior que zero, então, b^2 não pode ser igual a a, ou seja, não é possível que exista $\sqrt{a}$. □

2.3 Raíz cúbica

A raíz cúbica é muito parecida com a quadrada, também tem uma interpretação geométrica (raíz cúbica de n pode ser entendida como o lado de um cubo de volume n) e também é bastante utilizada na matemática.

2.3.1 Definição

Definimos a raíz cúbica de um número a com um número b, tal que se multiplicarmos b por b três vezes, obtemos a.
Ou seja,

$$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$$

Por exemplo,
$\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$
$\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5^3 = 125$
$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, pois $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$.

2.3.2 Propriedades da raíz cúbica

A raíz cúbica de um número negativo, ao contrário da raíz quadrada, existe.
Tomemos como exemplo o número -64. A raíz cúbica de -64 é igual a -4, pois $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 16 \cdot (-4) = -64$.
Veremos agora um teorema que diz que a raíz cúbica de um número é igual aquele número elevado a um terço:

Teorema 2. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

Demonstração.

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

Assim, $a^{\frac{1}{3}}$ é um número que se elevado ao cubo resulta em a, logo, é igual a raíz cúbica de a. □

2.4 Raíz n-ésima

A raíz n-ésima é uma generalização das raízes quadradas e cúbicas. Isso quer dizer que, tudo o que estudaremos nesta seção vale para raíz quadrada e para raíz cúbica (bastando trocar o n por 2 ou por 3).

2.4.1 Definição

A raíz n-ésima de um número a é um número b, tal que se multiplicarmos b por b n vezes, obtemos o número a. Em linguagem matemática:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Por exemplo,
$\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$
$\sqrt[5]{-243} = -3$, pois $(-3)^5 = -243$
$\sqrt[3]{-1} = -1$, pois $(-1)^3 = -1$.

2.4.2 Propriedades da raíz n-ésima

Teorema 3 (Relação com potências racionais)**.** *A raíz n-ésima de um número x, maior ou igual a zero, é igual ax elevado a* $\frac{1}{n}$.

Demonstração.

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

Ou seja, $x^{\frac{1}{n}}$ é um número que elevado a n resulta em x, logo, $x^{\frac{1}{n}}$ é igual a raíz n-ésima de x. □

Note que quando $n = 2$ ou $n = 3$, caímos nos casos das raízes quadradas ou cúbicas que provamos acima.
Este teorema nos diz que uma raíz pode ser escrita como uma potência. Isto é útil pelo fato de podermos usar todas as propriedades de potências estudadas no outro capítulo.
Com o uso deste teorema e das propriedades de potências já estudadas, chegamos as seguintes propriedades para a operação de radiciação:

Produto de raízes $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Note que está propriedade é análoga a propriedade de produto de potências. E, de fato, ela tem origem nesta propriedade, pois:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Raíz de uma potência $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

Prova:

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Note que essa propriedade se assemelha apropriedade de potência de potência (e a utilizamos para chegar provar esta propriedade).

Quociente de raízes Se b é diferente de zero, então $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Precisamos tomar b diferente de zero pelo fato de não podermos dividir por zero.

Raíz de um $\sqrt[n]{1} = 1$

Prova:

$$1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n \ vezes} = 1$$

Portanto, 1 é a raíz n-ésima de 1, pois 1 elevado a n é igual a 1.
(Isso quer dizer que a raíz quadrada, a raíz cúbica, a raíz quarta ou qualquer outra raíz do 1 vale 1).

Como você viu, estas propriedades são análogas as propriedades de potências. Sendo assim, não há a necessidade de decorá-las. Toda vez que vocâ quiser usar uma propriedade e não se lembrar, transforme a raíz em uma potência e use as propriedades de potência que você conhece.
Há outras propriedades, mas resolvi mostrar apenas estas, pois o objetivo é que você pense e consiga resolver os problemas sem ficar decorando várias fórmulas e propriedades.

2.4.3 Exemplos

1. Calcular $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{625}$.
Observe que $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ e que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, logo, a raíz cúbica de 27 é 3 e a raíz quarta de 625 é 5. Portanto,
$$\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$$
2. Quanto vale $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}}$?
Podemos usar a propriedade de produto de raíz para chegar na seguinte igualdade:
$$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{10 \cdot 2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}}$$
Dividindo raíz de vinte por raíz de vinte e usando a propriedade de quocientes, obtemos:
$$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$
Portanto, aquela espressão vale dois.
3. Mostre que $8^{0.333333333...}$ é igual a 2
Primeiro notemos que
$$0.333333... = \frac{1}{3}$$
Então,
$$8^{0.3333333...} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

2.5 Erros comuns

Raíz quadrada de um número ao quadrado Algumas pessoas, quando veem uma expressão como $\sqrt{7^2}$, gostam de "cortar" o quadrado de dentro da raíz (o expoente do sete) com o sinal da raíz, obtendo o resultado 7.
Neste caso (7^2), isso dá certo, mas se tomarmos $(-2)^2$?
Se cortássemos o expoente 2 com o sinal da raíz obterímos como resultado o valor -2. Mas isto está correto?
Vejamos:
$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4} = 2$$

Ou seja, o resultado correto é 2 e não -2.
Por que isto ocorre? Por que a regra de "cortar" deu certo com o 7, mas não deu certo com o -2?
Na verdade, com todo número maior ou igual a zero esta regra de "cortar" o sinal da raíz com o expoente 2 dá certo. Mas quando temos um número negativo, devemos retirar o sinal de menos do resultado ao "cortar".
Por exemplo:
$\sqrt{(-6)^2} = 6$ (retiramos o sinal de menos do -6).

2.6 Exercícios

1. Calcule os valores das seguintes expressões:

   (a) $\sqrt{81}$

   (b) $\sqrt[3]{125}$

   (c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

   (d) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81}$

   (e) $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{216}}$

   (f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

   (g) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{81^2}}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$

   (h) $\frac{\sqrt[6]{6^4} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{6}}$

   (i) $\sqrt[1543]{1}$

   (j) $\sqrt[22]{-1}$

   (k) $\sqrt[271]{-1}$

   (l) $\sqrt[3]{-16 \cdot \sqrt{64}}$

   (m) $\sqrt[5]{179^5} + \sqrt[3]{-189^3} - \sqrt[7]{(-10)^7}$

   (n) $\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}{\sqrt[8]{3}} - 4$

   (o) $\sqrt[142]{0}$

   (p) $\frac{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{2 \cdot (2+\sqrt{4})}}}{\sqrt{3}}$

   (q) $\sqrt{(-3)^2}$

(r) $\sqrt[4]{(-4)^4}$

(s) $\sqrt[3]{(-5)^3} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^3$

2. Sabendo que $\beta^5 = 2$, determine o valor da expressão

$$\left(\sqrt{\beta} \cdot \sqrt[4]{\beta} \cdot \sqrt[8]{\beta} \cdot \sqrt[16]{\beta}\right)^{16}$$

3. Quanto vale

$$\sqrt{\sqrt[3]{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} + \left(\frac{4^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 - \frac{8^7}{(2^7)^3}$$

Capítulo 3

Fatoração

3.1 Introdução

Muitas vezes nos deparamos com expressões matemáticas que nos parecem muito "feias", no sentido de que parece muito difícil calcular o seu valor ou manipulá-las. Mas, em vários casos, é possível reescrever a expressão de uma forma que seja mais agradável ou conveniente. Uma destas formas é a forma fatorada, que vamos ver agora.

3.2 Definição

Fatoração é o nome que se dá aos métodos ou ao processo de reescrever uma expressão como uma expressão na forma de produtos.
Ou seja, fatorar uma expressão é deixá-lá na forma

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdots e_n$$

onde cada e_i (com $i = 1, 2, 3, 4, ..., n$) é uma outra expressão.
Chamamos cada e_i de fator.
Por exemplo, a expressão $11 \cdot x + 11 \cdot y$ pode ser reescrita como $11 \cdot (x + y)$. Está forma consiste em um produto entre o 11 e o $(x + y)$, então, esta é a forma fatorada dela. Note que ela tem dois fatores.

3.3 Técnicas de fatoração

Apresentamos, a seguir, algumas técnicas de fatoração:

Fator comun em evidência Trata-se de observar um valor que aparece mais de uma vez em uma expressão e reescrever a expressão como um produto deste valor e de uma outra expressão, tal que, feita a distributiva, obtenha-se novamente a expressão original.
Por exemplo:
Na expressão $13x+xn$, vemos que o x aparece duas vezes, logo, podemos colocá-lo em evidência e obter a expressão $x \cdot (13+n)$.
Note que se fizermos a distributiva, obteremos novamente a expressão original.
Como outro exemplo, veja que colocando o a e o $-b$ em evidência, chegamos a seguinte e igualdade:

$$ax + ya - xb - yb = a \cdot (x+y) - b \cdot (x+y)$$

então, podemos tirar o $(x+y)$ em evidência e obter

$$ax + ya - xb - yb = (x+y) \cdot (a-b)$$

Trinômio quadrado perfeito . É uma forma de fatorar expressões que têm uma forma bem particular, porém, bem comum, principalmente entre exercícios de ensino médio e vestibular. Observe que:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b) = a^2+a\cdot b+b\cdot a+b^2 = a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

Então, uma expressão do tipo $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ pode ser reescrita como $(a+b)^2$, que é sua forma fatorada.
O análogo acontece para o caso da diferença entre a e b:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)-b\cdot(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

Diferença de quadrados . Também se trata de uma expressão com uma forma bem particular, mas que é bastante comum. Veja que,

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2+0+b^2 = a^2+b^2$$

Logo, uma expressão da forma a^2-b^2 pode ser fatorada em um produto com os seguintes termos: $(a+b) \cdot (a-b)$.

3.3.1 Exemplos

1. Fatorar a expressão $36 + 12x + x^2$.
   Note que esta expressão pode ser reescrita como $6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x + x^2$ e

que ela coincide com a forma de uma trinômio quadrado perfeito (com $a = 6$ e $b = x$), portanto,

$$36 + 12x + x^2 = (6 + x)^2$$

(Faça a distributiva para verificar a corretude).

2. Fatorar a expressão $xy^2 + xa^2 - 2xay$.
Colocando x em evidência e usando a forma do trinômio perfeito, chegamos em

$$xy^2 + xa^2 - 2xay = x \cdot (y^2 + a^2 - 2ay) = x \cdot (y^2 - 2ya + a^2) = x \cdot (y - a)^2$$

3. Fatorar a expressão $3x^2 + 6x + 7xy + 14y$.
Colocando $3x$ e $7y$ em evidência, chegamos a seguinte igualdade:

$$3x^2 + 6x + 7xy + 14y = 3x \cdot (x + 2) + 7y \cdot (x + 2)$$

Colocando $(x + 2)$ em evidência, chegamos em

$$3x^2 + 6x + 7xy + 14y = (x + 2) \cdot (3x + 7y)$$

4. Fatorar a expressão $9x^2 - 4$.
Esta expressão envolve apenas uma diferença de dois elementos, além disso, há um x elevado ao quadrado, isto sugere que ele pode ser fatorada como uma diferença de quadrados.
De fato, notando que $9x^2 = (3x)^2$ e que $4 = 2^2$, vemos que

$$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x + 2) \cdot (3x - 2)$$

5. Se $a - b = 4$ e $a \cdot b = 6$, então, quanto vale $a^2 + b^2$?
Como somar com zero não muda o valor da expressão, podemos escrever:
$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 0 \quad \Leftrightarrow$ Como $-2ab + 2ab = 0$
$a^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \Leftrightarrow$ Trinômio do quadrado perfeito
$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab \quad \Leftrightarrow$ Substituindo os valores dados
$a^2 + b^2 = (4)^2 + 2 \cdot 6 = 16 + 12 = 28$

3.4 Exercícios

1. Fatore as seguintes expressões:

   (a) $x^2 - 2^2$

   (b) $x^2 + xy + x$

   (c) $y^2 - 1$

   (d) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

   (e) $x^2 - w^2 - x + w$

   (f) $ax + x^2 + 2xy + ay + y^2$

   (g) $4x^2 - 12 + 4$

   (h) $a^3b - ab^3$

   (i) $(x + y) \cdot (xy + 1) - y \cdot (x^2 + 1 + xy)$

   (j) $x^4 - 1$

   (k) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

   (l) $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$

   (m) $k^2 - p^2 + k + p$

   (n) $x^2 + 8x + 16$

   (o) $30 + x^2 + 12x + 6$

   (p) $x^2 + w^2 + 2xy + y^2$

   (q) $y^4 + y^2 + \frac{1}{4}$

   (r) $-1 + x^2 + 2y - y^2$

   (s) $x^3 + 8x^2 + 16x$

2. Simplifique a expressão $\left(\frac{1}{b-a}\right) \cdot \frac{(ax-a^2-bx+b^2)}{b-x+a}$

3. Desenvolva as expressões a seguir (estas são formas fatoradas interessantes):

   (a) $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$

   (b) $(x + y)^3$

4. (FATEC-2002) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e que $a - b - c = 10$, com a, b e c números reais. Então, quanto vale $a + b + c$?

   (a) 1

(b) 2
(c) 4
(d) 10
(e) 20

5. (FEI-2005) Ao fatorar e simplificar a seguinte expressão algébrica

$$\frac{abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy}{ax + by}$$

com $ax + by \neq 0$, obtemos:

(a) 2
(b) 1
(c) $ax + by$
(d) $ay + bx$
(e) $ax + b$

6. (Mack-98) Se $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$, então $a + a^{-1}$ vale:

(a) $\frac{100}{9}$
(b) $\frac{83}{3}$
(c) $\frac{82}{9}$
(d) $\frac{100}{82}$
(e) $\frac{16}{9}$

7. (FUVEST-Segunda fase-Modificado) Fatorar $a^4 + a^2 + 1$.

Capítulo 4

Equações Lineares

4.1 Introdução

Durante o dia a dia, muitas vezes nos encontramos em situações nas quais queremos descobrir algum valor a partir de outros. Como por exemplo, quando fazemos uma compra de, digamos, 85 reais e pagamos com uma nota de 100 reais, queremos saber quanto é o troco.
Ou quando alguém lhe diz a idade e você quer descobrir em que ano a pessoa nasceu...
Estes são exemplos de equações (muito simples) e este é o objeto de estudo deste capítulo.

4.2 O que é uma equação

Todos nós sabemos o que é uma igualdade: algo que envolve duas expressões matemárica, separadas por um sinal de igual, e que nos diz que ambas têm o mesmo valor.
Como $5 = 3 + 2$ ou $7 + 8 = 2 \cdot 7 + 1$.
Nestes dois exemplos, é possível avaliar se a igualdade é verdadeira ou falsa (3 mais 2 é realmente igual a 5, logo, a primeira igualdade é verdadeira e sete mais oito é igual a quinze, assim como dois vezes sete mais um também é igual a quinze, logo, a segunda igualdade também é verdadeira).
Mas, estas são igualdade muito simples, digamos que nós tivéssimos a seguinte igualdade:

$$6 + x = 9$$

ela é verdadeira ou falsa?
A resposta é: depende do valor de x. Se $x = 1$, então ela é falsa (pois 7 é

diferente de 9), mas se $x = 3$, então ela é verdadeira.
Este tipo de igualdade (envolvendo variáveis, também conhecidas como *icógnitas*) é o que chamamos de equação.
Resolver uma equação é achar os valores que podemos atribuir às icógnitas para tornar a igualdade verdadeira.
Por exemplo:

$2 \cdot x + 4 = 8$ é verdadeira para $x = 2$.

$x^2 - 2 = 14$ é verdadeira para $x = 4$ e para $x = -4$.

$2^x = 32$ é verdadeira para $x = 5$.

$x^4 = -1$ não é verdadeira para qualquer x real. Isto quer dizer que ela não tem solução (se estivermos trabalhando com números reais).

Nestes exemplos, vimos vários tipos de equações, com uma solução, duas soluções ou nenhuma solução.
Mas como achar as soluções de uma equação?
Para resolvermos uma equação, podemos efetuar operações sobre os dois lados da igualdade, isto é, somar, subtrair, multiplicar, dividir, etc, até que a icógnita apareça sozinha em um dos lados da equação e não apareça no outro lado.
Por exemplo, para resolver a equação $3x = 9$, podemos dividir os dois lados da equação por 3, obtendo $x = \frac{9}{3} = 3$.
Logo, $x = 3$ é a solução dessa equação.
Já na equação $x^3 + 2 = 10$, podemos subtrair 2 de ambos os lados e obter $x^3 = 8$, da qual vemos que a solução é $x = 2$, pois $2^3 = 8$.
Agora, vamos nos focar em um tipo particular de equação, as equações do primeiro grau.

4.3 Definição

Uma equação do primeiro grau é uma igualdade da forma (ou que pode ser escrita na forma)

$$a \cdot x + b = 0$$

com a diferente de zero e x sendo a icógnita.
Este tipo de equação também é conhecido como equação linear.

4.4 Propriedades

Uma equação do primeiro grau sempre tem solução e a solução é única.
Note que, como ela é da forma $ax + b = 0$ e a é diferente de zero, podemos subtrair b de ambos os lados e obter

$$ax = -b$$

para depois dividir ambos os lados por a, ficando com

$$x = -\frac{b}{a}$$

ou seja, a solução sempre vai ter esta forma.

4.5 Exemplos

1. $3 \cdot x + 5 = 9$ é uma equação do primero grau, pois pode ser reescrita como $3x - 4 = 0$

2. $x^2 - 8 = 15$ não é do 1º grau, pois a icógnita está elevada a 2.

3. $x + x = 2$ é de primeiro grau, pois pode ser reescrita como $2x - 2 = 0$

4. Vamos resolver um exercício do vestibular de 1995, da FATEC:
   "Uma pessoa, que pesa atualmente 70kg, deseja voltar a pesar 56kg. Suponha que uma dieta alimentar resulte em um emagrecimento de exatamente 200g por semana, então, fazendo esta dieta, a pessoa alcançará seu objetivo ao fim de quantas semanas?"
   Resolução:
   Este é um problema que pode ser resolvido com uma equação do primeiro grau.
   Antes de começarmos de fato, note que os dados estão em unidades de medidas diferentes (devemos sempre nos atentar a isto. Na matemática isto não é tão comum, mas na física...), então, vamos converter todas para gramas:
   $1kg = 1000g$, então $70kg = 70 \cdot (1000g) = 70000g$ e $56kg = 56000g$.
   Agora, se a pessoa emagrece 200g por semana, então, chamando de x a quantidade de semanas passadas até que a pessoa obtenha os 56kg, temos que

   $$70000 - 200x = 56000$$

   ou seja, o peso atual, menos 200 vezes a quantidade de semanas necessárias é igual ao peso desejado.

Como vemos, está é uma equação de primeiro grau, então, agora é só resolvê-la:
Subtraindo 70000 de ambos os lados, obtemos:

$-200x = 56000 - 70000 \Leftrightarrow$ resolvendo o lado direito

$-200x = -14000 \Leftrightarrow$ multiplicando ambos os lados por -1

$200x = 14000 \Leftrightarrow$ dividindo ambos os lados por 200

$x = \frac{14000}{200} \Leftrightarrow$ resolvendo o quociente

$x = 70$
Assim, ela obterá o peso desejado em 70 semanas (é, vai demorar um pouquinho hehehe).

4.6 Exercícios

1. Diga se as equações abaixo são do primeiro grau ou não (em caso afirmativo, diga quais são os valores de a e de b, em caso negativo, justifique sua resposta).

   (a) $3x + 5 = 0$
   (b) $3x + 5x = x$
   (c) $x + \frac{1}{x} = 0$
   (d) $x^3 = x^2$
   (e) $2^x = 1$
   (f) $\frac{x}{3} + 5 = 1$
   (g) $5x = 0$
   (h) $y^2 \cdot x + 6 = 2$, onde y é uma constante.

2. Resolva as seguintes equações:

   (a) $2x + 3 = x$
   (b) $-3 + 8x - 1 = 2x + 2$
   (c) $x + 1 = 2x + 2 + x$
   (d) $5x + 5 = x - 1 - x$

3. Considere a equação

$$3 \cdot (4x + n) - n \cdot (2 + x) = 4$$

na qual x é a icógnita.
Ache o valor de n para qual o valor -1 é solução desta equação.

4. (UEL) Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando 4.300 reais. Cada calça de tamanho pequeno custou 50 reais e cada calça de tamanho médio custou 60 reais. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?

   (a) 30 e 50
   (b) 37 e 43
   (c) 40 e 40
   (d) 43 e 37
   (e) 50 3 30

Capítulo 5

Equações de Segundo Grau

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar um tipo diferente de equações: as equações do segundo grau.
Elas diferem das equações lineares pelo fato de que a icógnita aparece elevada ao quadrado.
Só isto já torna este tipo de equação muito mais interessante (alguns vão dizer mais difíceis, mas eu discordo dos que dizem isto).
Também é um tipo de equação muito comum nos vestibulares.

5.2 Definição

Uma equação do segundo grau (também conhecida como equação quadrática) é uma equação da forma (ou que pode ser escrita na forma)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

com $a \neq 0$ e x sendo a icógnita.

5.3 Propriedades

Diferente de uma equação do primeiro grau, uma equação quadrática nem sempre tem solução, isto quer dizer que as vezes não existem um valor real que a satisfaça.
Por exemplo, se considerarmos a equação

$$x^2 = -9$$

Como não há nenhum valor real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo, esta equação não tem solução (neste caso, dizemos que o conjunto solução é vazio).
Mas, se retirássemos o sinal de menos, ficando com a equação

$$x^2 = 9$$

então, poderíamos tirar a raíz dos dois lados e obter

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

ou seja, os valores 3 e -3 seriam solução. [1].
Neste caso, a equação tem duas soluções distintas.
Além disto, como veremos mais adiante, ainda pode acontecer de haver apenas uma solução para uma equação do segundo grau.
Assim, notamos a primeira propriedade interessante de uma equação quadrática:

Uma equação do segundo grau pode ter duas, uma ou nenhuma solução.

5.4 Resolvendo

Sabemos reconhecer uma equação do 2º grau, sabemos que ela pode ou não ter solução, mas como é que encontramos essas soluções?
Em geral, usamos a famosa *fórmula de Baskara*:
Considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com a diferente de zero.
Se divirmos ambos os lados por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Agora, notando que $1 = \frac{2}{2}$, podemos multiplicar o segundo termo por essa fração sem alterar a igualdade:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

[1] Em uma equação do segundo grau, sempre que tiramos a raíz de ambos os lados, temos que colocar os sinais de mais e menos ($\pm$), pois tanto o valor negativo quanto o positivo é solução.

Podemos então completar um quadrado, somando $(\frac{b}{2a})^2$ em ambos os lados:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = (\frac{b}{2a})^2$$

Assim, usando a fatoração do quadrado perfeito, obtemos

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = (\frac{b}{2a})^2$$

Que equivale a

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$$

Simplificando a parte esquerda (multiplicando e dividindo $\frac{c}{a}$ por $4a$ e somando)

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Tirando a raíz quadrada, obtemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Subtraindo $\frac{b}{2a}$ de ambos os lados, chegamos finalmente em

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que nos diz que existem dois valores possíveis para o x: um somando a raíz e outro subtraindo.
Portanto, nos casos em que esta raíz dá zero (ou seja, quando $b^2 - 4ac = 0$), o x assume apenas um valor (pois iremos somar ou subtrair zero). Este é o único caso em que a equação quadrática tem apenas uma solução.
Por conveniência, muitos fazem $\Delta = b^2 - 4ac$ e escrevem a fórmula de Baskara como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

5.5 Exemplos

1. **Vamos resolver a equação $3x^2 + x - 4 = 0$:**
   Comecemos identificando os coeficientes: neste caso $a = 3$, $b = 1$ e $c = -4$.
   Agora, calculemos o discriminante:

   $$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 1 + 48 = 49$$

Assim, as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+7}{2\cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$$

e

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-7}{2\cdot 3} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

2. **Quais são as soluções da equação $x^2 + 2x = 0$?**
Neste caso, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 0$.
Assim, temos $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 0 = 4$.
Portanto, as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

e

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{-2-2}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Ou seja, as soluções desta equação são os valores 0 e -2.
Poderíamos ainda resolver esta equação sem o uso da fórmula de Baskara, colocando o x em evidência e usando o fato de que, quando um produto dá zero, então um de seus fatores é zero.
Ou seja,

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

Então, $x = 0$ ou $x + 2 = 0$, que implica $x = -2$.
Logo, as soluções são $\{0, -2\}$ (note que são as mesmas de quando resolvemos com a fórmula de Baskara).

5.6 Dicas

É possível resolver algumas equações do 2º grau sem usar a fórmula de Baskara, economizando tempo na resolução.
Quando a equação é da forma

$$ax^2 + bx = 0$$

ou seja, quando ela tem $c = 0$, podemos resolver simplesmente colocando x em evidência, conforme fizemos no exemplo anterior, obtendo então

$$x = 0 \quad ou \quad x = -\frac{b}{a}$$

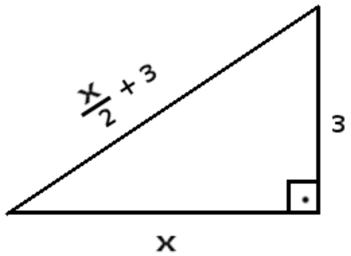


Figura 5.1: Triângulo retângulo.

Quando a equação é da forma

$$ax^2 + c = 0$$

ou seja, com $b = 0$, basta passar o c para o outro lado e tirar a raíz, obtendo

$$x = \pm\sqrt{-c}$$

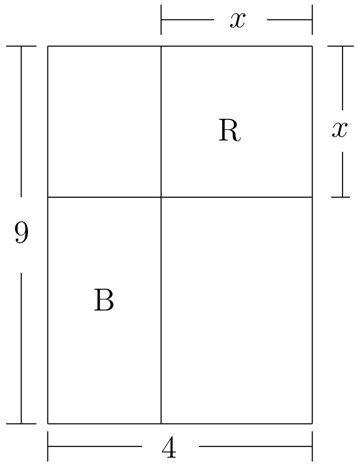
5.7 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações do segundo grau (não é necessário usar a fórmula de Baskara em todas):

   (a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$
   (b) $2x^2 - 2x - 4 = 0$
   (c) $x^2 + x - 12 = 0$
   (d) $x^2 - 16 = 0$
   (e) $4x^2 - 16x = 0$
   (f) $x^2 + 3x + 2 = 0$
   (g) $3x^2 - 20 = 1 + 6$

2. Usando o teorema de Pitágoras, descubra o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo.

3. Sartre e Mariane vão dividir os 2 quartos que têm em 4 quartos, pois eles adotaram duas crianças, Beethoven e Russel, e precisam de dois novos quartos para os dois.
   Os quartos serão divididos conforme a figura, onde x é a largura e ao mesmo tempo o comprimento do quarto que será de Russel.



Legenda:

R: Quarto do Russel

B: Quarto do Beethoven

.

Como Beethoven adora tocar piano, seu quarto precisa ser maior, já que um piano ocupa muito espaço.
Assim, Russel, que é muito bom em matemática, encontrou um valor para x que fizesse com que o seu quarto ficasse com aproximadamente metade da área do quarto de Beethoven. Que valor foi esse?

(a) 25
(b) 6
(c) 4
(d) 12