

P4: Teoria Moderna de Portifolio de Markowitz e VaR

Raphael Marques Franco

2025-11-27

1. Carregamento de Pacotes

```
# Instalar pacotes necessários (execute uma vez):
install.packages("yfR")
install.packages("GetBCBData")
install.packages("moments")
install.packages("nortest")
install.packages("ggplot2")
install.packages("tidyr")
install.packages("dplyr")
install.packages("knitr")
install.packages("zoo")
install.packages("quadprog")
install.packages("xts")
install.packages("PerformanceAnalytics")

# Pacotes para coleta de dados financeiros
library(yfR)           # API otimizada para B3 (Brasil)
library(GetBCBData)    # Coleta de dados do Banco Central (SELIC)
library(quantmod)

# Pacotes para análise estatística
library(moments)       # Testes de assimetria e curtose
library(nortest)       # Testes de normalidade (Anderson-Darling, etc)

# Pacotes para visualização e manipulação
library(ggplot2)       # Gráficos
library(tidyr)         # Manipulação de dados
library(dplyr)         # Manipulação de dados
library(knitr)         # Tabelas formatadas
library(zoo)           # Séries temporais (para na.locf)
library(quadprog)      # Otimização quadrática (Fronteira Eficiente)
library(xts)           # Séries temporais estendidas
library(kableExtra)    # Para formatar tabelas em PDF
```

2. Definição de Parâmetros

```
# Ações a serem analisadas
acoes <- c("POM03.SA", "AURE3.SA", "BBAS3.SA", "ITUB3.SA")
nomes_acoes <- c("POM03", "AURE3", "BBAS3", "ITUB3")

# Período de análise
data_inicio <- as.Date("2024-11-18")
data_fim <- as.Date("2025-11-17")

# Parâmetros para VaR
investimento <- 100000 # R$ 100.000,00
confianca <- 0.99      # 99% de confiança
janela <- 252          # 252 dias úteis (1 ano)
```

3. Leitura dos Dados do CSV

```
# Ler o arquivo CSV
# Importante: ajustar o separador conforme o formato do arquivo
dados_csv <- read.csv("data.csv",
                      sep = ";",          # Separador de colunas
                      dec = ",",          # Separador decimal
                      stringsAsFactors = FALSE)

# Remover a primeira coluna vazia se existir
if(names(dados_csv)[1] == "" || names(dados_csv)[1] == "X") {
  dados_csv <- dados_csv[, -1]
}

# Converter coluna de Data para formato Date
dados_csv$Data <- as.Date(dados_csv$Data, format = "%d/%m/%Y")

# Converter colunas numéricas (remover vírgulas e converter para numeric)
colunas_numericas <- c("POM03", "AURE3", "BBAS3", "ITUB3", "IBOV", "SELIC")

for(col in colunas_numericas) {
  if(col %in% names(dados_csv)) {
    # Substituir vírgula por ponto e converter para numérico
    dados_csv[[col]] <- as.numeric(gsub(",", ".", dados_csv[[col]]))
  }
}

# Ordenar por data
dados_csv <- dados_csv[order(dados_csv$Data), ]

# Exibir informações sobre os dados carregados
cat("### Dados Carregados do CSV:\n\n")
```

```
## ### Dados Carregados do CSV:
```

```
cat("Total de observações:", nrow(dados_csv), "\n")
```

```
## Total de observações: 250
```

```
cat("Período:", min(dados_csv$Data), "a", max(dados_csv$Data), "\n")
```

```
## Período: 20045 a 20409
```

```
cat("Variáveis:", paste(names(dados_csv), collapse = ", "), "\n\n")
```

```
## Variáveis: Data, POMO3, AURE3, BBAS3, ITUB3, IBOV, SELIC
```

```
# Exibir primeiras linhas
kable(head(dados_csv, 10), digits = 4,
       caption = "Primeiras 10 linhas dos dados")
```

Table 1: Primeiras 10 linhas dos dados

Data	POMO3	AURE3	BBAS3	ITUB3	IBOV	SELIC
2024-11-18	6.4824	9.7349	24.0307	24.5180	127768.2	11.15
2024-11-19	6.5005	9.8243	24.1615	24.7836	128197.2	11.15
2024-11-21	6.5912	9.6653	23.6101	24.4018	126922.1	11.15
2024-11-22	6.6002	9.8739	23.9279	24.4848	129125.5	11.15
2024-11-25	6.5368	10.3110	24.0681	24.5429	129036.1	11.15
2024-11-26	6.5640	10.4997	24.4522	24.8915	129922.4	11.15
2024-11-27	6.4161	10.0726	24.0236	24.2607	127668.6	11.15
2024-11-28	5.9446	9.7349	23.3187	23.6216	124610.4	11.15
2024-11-29	5.8983	9.7945	23.5949	23.6714	125667.8	11.15
2024-12-02	5.8798	9.4667	23.4044	23.3788	125235.5	11.15

4. Preparação dos Dados para Análise

```
# Criar objetos xts para as séries temporais
# Preços das ações
precos <- xts(dados_csv[, nomes_acoes], order.by = dados_csv$Data)
colnames(precos) <- nomes_acoes

# IBOVESPA
ibovespa <- xts(dados_csv$IBOV, order.by = dados_csv$Data)
colnames(ibovespa) <- "IBOVESPA"

# SELIC (já em % a.a. no CSV)
# Converter para taxa diária equivalente
selic_anual <- dados_csv$SELIC
selic_diaria <- (1 + selic_anual/100)^(1/252) - 1

# Criar dataframe com informações da SELIC
```

```

selic_data <- data.frame(
  ref.date = dados_csv$Data,
  value = selic_anual,
  taxa_diaria = selic_diaria
)

cat("\n### Resumo dos Dados Preparados:\n\n")

##
## ### Resumo dos Dados Preparados:

cat("Taxa SELIC média (% a.a.):", round(mean(selic_anual, na.rm = TRUE), 2), "\n")

## Taxa SELIC média (% a.a.): 13.95

cat("Taxa SELIC atual (% a.a.):", tail(selic_anual, 1), "\n")

## Taxa SELIC atual (% a.a.): 14.9

cat("Taxa diária equivalente:",
    round(tail(selic_diaria, 1) * 100, 4), "%\n\n")

## Taxa diária equivalente: 0.0551 %

# Resumo dos preços
resumo_precos <- data.frame(
  Acao = nomes_acoes,
  Preco_Inicial = as.numeric(precos[1, ]),
  Preco_Final = as.numeric(precos[nrow(precos), ]),
  Retorno_Periodo = ((as.numeric(precos[nrow(precos), ]) /
    as.numeric(precos[1, ])) - 1) * 100
)

kable(resumo_precos, digits = 2,
      caption = "Resumo dos Preços das Ações")

```

Table 2: Resumo dos Preços das Ações

Acao	Preco_Inicial	Preco_Final	Retorno_Periodo
POMO3	6.48	6.33	-2.35
AURE3	9.73	11.09	13.92
BBAS3	24.03	22.50	-6.37
ITUB3	24.52	35.64	45.36

4. Visualização dos Dados Coletados

4.1 Gráficos de Preços de Fechamento

```

# Converter xts para dataframe para ggplot2
precos_df <- data.frame(Data = index(precos), coredata(precos))

# Transformar para formato longo
precos_long <- precos_df %>%
  pivot_longer(cols = -Data, names_to = "Acao", values_to = "Preco")

# Gráfico de preços
ggplot(precos_long, aes(x = Data, y = Preco, color = Acao)) +
  geom_line(linewidth = 1) +
  facet_wrap(~Acao, scales = "free_y", ncol = 2) +
  labs(title = "Evolução dos Preços de Fechamento",
       subtitle = paste0("Período: ", data_inicio, " a ", data_fim),
       x = "Data",
       y = "Preço de Fechamento (R$)") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "none",
       plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"),
       plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 10))

```

Evolução dos Preços de Fechamento

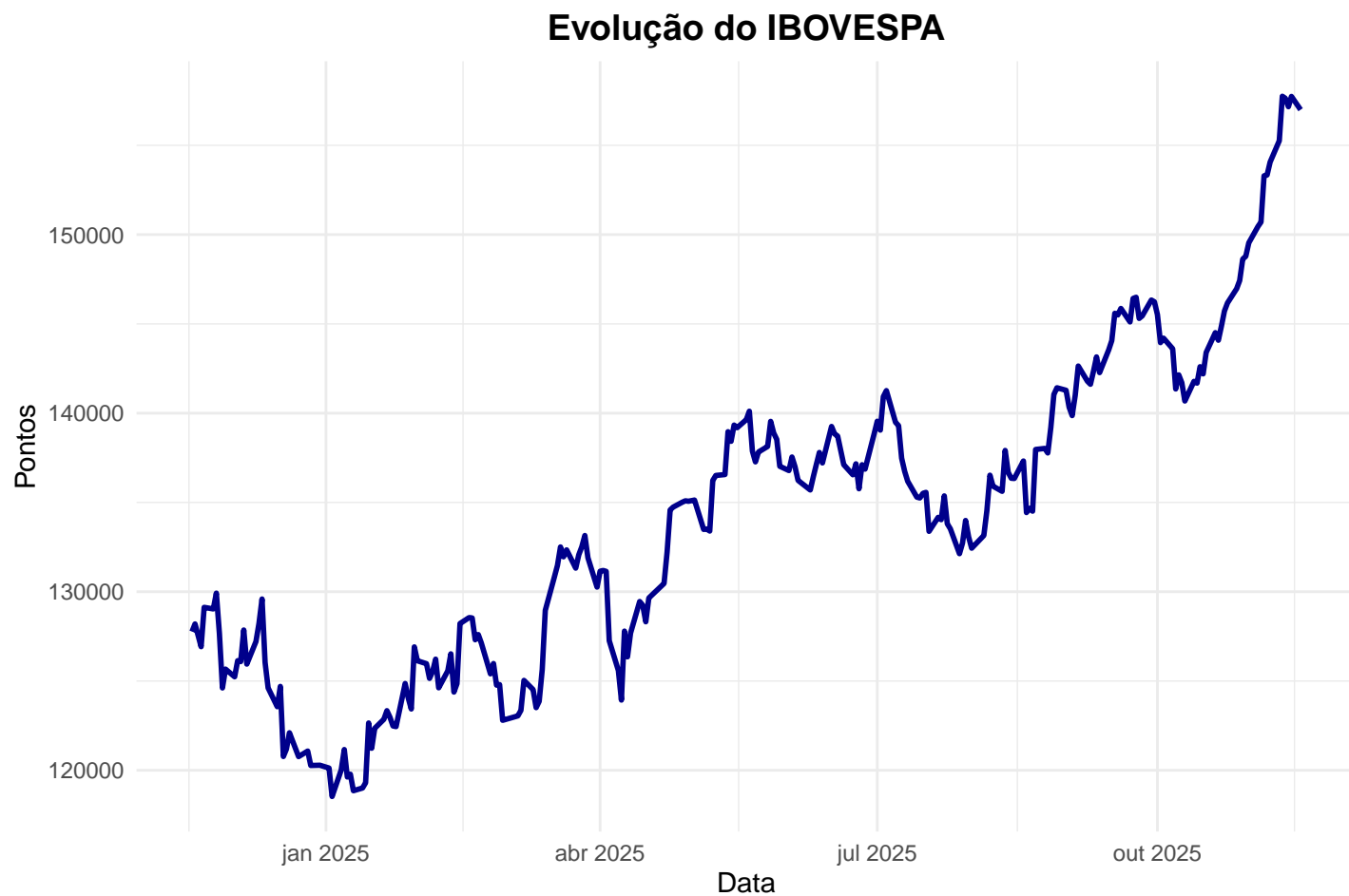
Período: 2024-11-18 a 2025-11-17



4.2 Gráfico do IBOVESPA

```
# Gráfico do IBOVESPA
ibov_df <- data.frame(Data = index(ibovespa), IBOVESPA = coredata(ibovespa))

ggplot(ibov_df, aes(x = Data, y = IBOVESPA)) +
  geom_line(color = "darkblue", linewidth = 1) +
  labs(title = "Evolução do IBOVESPA",
       x = "Data",
       y = "Pontos") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"))
```



5. Cálculo dos Retornos Logarítmicos

```
# Retornos logarítmicos das ações  
# ln(Pt/Pt-1) - mais apropriado para análise estatística  
retornos <- na.omit(diff(log(precos)))  
  
# Retorno do IBOVESPA  
retorno_ibov <- na.omit(diff(log(ibovespa)))  
colnames(retorno_ibov) <- "IBOVESPA"  
  
# Estatísticas descritivas dos retornos  
estatisticas <- data.frame(  
  Acao = nomes_acoes,  
  Media = apply(retornos, 2, mean),  
  Desvio_Padiao = apply(retornos, 2, sd),  
  Minimo = apply(retornos, 2, min),  
  Maximo = apply(retornos, 2, max),  
  Assimetria = apply(retornos, 2, skewness),  
  Curtose = apply(retornos, 2, kurtosis)
```

)

```
kable(estatisticas, digits = 4,  
      caption = "Estatísticas Descritivas dos Retornos Diários")
```

Table 3: Estatísticas Descritivas dos Retornos Diários

	Acao	Media	Desvio_Padiao	Minimo	Maximo	Assimetria	Curtose
POMO3	POMO3	-0.0001	0.0240	-0.1109	0.0720	-0.5063	5.1452
AURE3	AURE3	0.0005	0.0208	-0.0631	0.0730	0.2483	3.4995
BBAS3	BBAS3	-0.0003	0.0176	-0.1357	0.0463	-2.0902	17.2573
ITUB3	ITUB3	0.0015	0.0122	-0.0278	0.0470	0.2141	4.0322

5.1 Dataframe Completo: Dados Diários Consolidados

```
# Criar dataframe completo com todas as informações  
# Alinhar as datas (alguns dados podem ter datas diferentes)  
  
# Preparar dados das ações  
dados_completos <- data.frame(Data = index(retornos))  
  
# Adicionar preços e retornos de cada ação  
for(i in 1:length(nomes_acoes)){  
  # Preços  
  col_preco <- paste0("Preco_", nomes_acoes[i])  
  dados_completos[[col_preco]] <- as.numeric(precos[index(retornos), i])  
  
  # Retornos  
  col_retorno <- paste0("Retorno_", nomes_acoes[i])  
  dados_completos[[col_retorno]] <- as.numeric(retornos[, i])  
}  
  
# Adicionar IBOVESPA  
dados_completos$Preco_IBOVESPA <- as.numeric(ibovespa[index(retornos)])  
dados_completos$Retorno_IBOVESPA <- as.numeric(retorno_ibov)  
  
# Adicionar SELIC (fazer merge por data)  
# A SELIC pode não ter dados para todos os dias, então usamos merge  
selic_diaria <- selic_data[, c("ref.date", "taxa_diaria")]  
colnames(selic_diaria) <- c("Data", "SELIC_Diaria")  
  
dados_completos <- merge(dados_completos, selic_diaria,  
                        by = "Data", all.x = TRUE)  
  
# Preencher dias sem SELIC com última observação (forward fill)  
dados_completos$SELIC_Diaria <- zoo::na.locf(dados_completos$SELIC_Diaria,  
                                             na.rm = FALSE)  
  
# Exibir primeiras linhas  
kable(head(dados_completos, 10), digits = 6, booktabs = TRUE,
```



```
caption = "Primeiras 10 linhas do DataFrame Consolidado") %>%
kable_styling(latex_options = c("scale_down", "striped", "HOLD_position"))
```

Table 4: Primeiras 10 linhas do DataF

Data	Preco_POMO3	Retorno_POMO3	Preco_AURE3	Retorno_AURE3	Preco_BBAS3	Retorno_BBA
2024-11-19	6.500515	0.002793	9.824260	0.009142	24.16152	0.0054
2024-11-21	6.591178	0.013851	9.665323	-0.016310	23.61006	-0.0230
2024-11-22	6.600244	0.001375	9.873927	0.021353	23.92785	0.0133
2024-11-25	6.536780	-0.009662	10.311002	0.043314	24.06805	0.0058
2024-11-26	6.563979	0.004152	10.499739	0.018139	24.45223	0.0158
2024-11-27	6.416058	-0.022793	10.072598	-0.041532	24.02357	-0.0170
2024-11-28	5.944561	-0.076327	9.734858	-0.034106	23.31868	-0.0297
2024-11-29	5.898336	-0.007806	9.794459	0.006104	23.59492	0.0117
2024-12-02	5.879846	-0.003140	9.466653	-0.034041	23.40441	-0.0081
2024-12-03	5.879846	0.000000	9.556054	0.009400	23.69018	0.0121

```
# Exibir últimas linhas
kable(tail(dados_completos, 10), digits = 6, booktabs = TRUE,
caption = "Últimas 10 linhas do DataFrame Consolidado") %>%
kable_styling(latex_options = c("scale_down", "striped", "HOLD_position"))
```

Table 5: Últimas 10 linhas do Dat

	Data	Preco_POMO3	Retorno_POMO3	Preco_AURE3	Retorno_AURE3	Preco_BBAS3	Retorno
240	2025-11-04	6.55	0.012289	11.11	0.025526	22.27	
241	2025-11-05	6.58	0.004570	11.60	0.043159	22.61	
242	2025-11-06	6.38	-0.030867	11.67	0.006016	22.86	
243	2025-11-07	6.37	-0.001569	11.33	-0.029567	22.89	
244	2025-11-10	6.57	0.030914	11.55	0.019231	22.78	
245	2025-11-11	6.50	-0.010712	11.53	-0.001733	23.47	
246	2025-11-12	6.38	-0.018634	11.45	-0.006963	22.80	
247	2025-11-13	6.39	0.001566	11.28	-0.014958	22.50	
248	2025-11-14	6.46	0.010895	11.17	-0.009800	22.44	
249	2025-11-17	6.33	-0.020329	11.09	-0.007188	22.50	

```
# Salvar o dataframe completo (opcional)
# write.csv(dados_completos, "dados_completos.csv", row.names = FALSE)
```

5.2 Visualização dos Retornos Diários

```
# Preparar dados para visualização
retornos_df <- data.frame(Data = index(retornos), coredata(retornos))
retornos_long <- retornos_df %>%
  pivot_longer(cols = -Data, names_to = "Acao", values_to = "Retorno")

# Gráfico de retornos diários
```

```

ggplot(retornos_long, aes(x = Data, y = Retorno, color = Acao)) +
  geom_line(alpha = 0.6) +
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed", color = "black") +
  facet_wrap(~Acao, ncol = 2) +
  labs(title = "Retornos Logarítmicos Diários",
        subtitle = "Retorno =  $\ln(P_t / P_{t-1})$ ",
        x = "Data",
        y = "Retorno") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "none",
        plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"),
        plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 10))

```

Retornos Logarítmicos Diários

$$\text{Retorno} = \ln(P_t / P_{t-1})$$



Interpretação: Retornos com assimetria próxima de 0 e curtose próxima de 3 indicam distribuição mais próxima da normal. Assimetria negativa indica maior probabilidade de retornos negativos extremos. Curtose > 3 indica caudas pesadas (maior probabilidade de eventos extremos).

5.3 Comparação: Retornos vs IBOVESPA

```
# Combinar retornos das ações com IBOVESPA
retornos_completo <- merge(retornos, retorno_ibov)
retornos_comp_df <- data.frame(Data = index(retornos_completo),
```

```

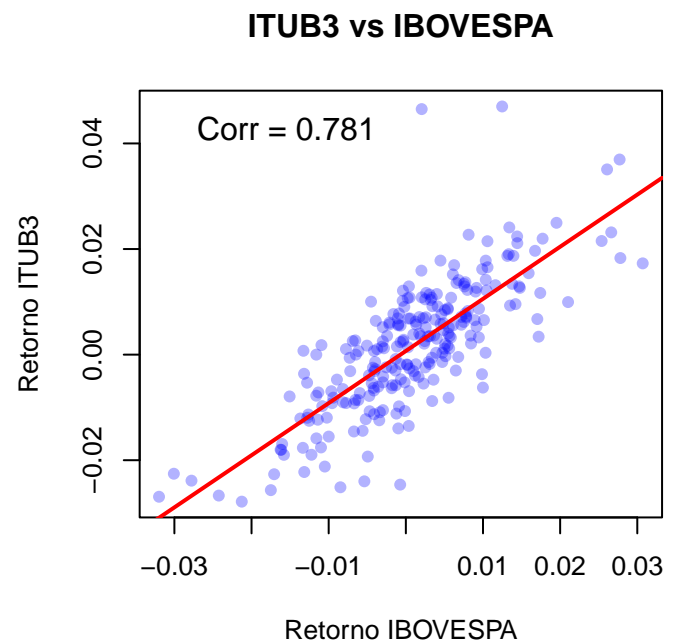
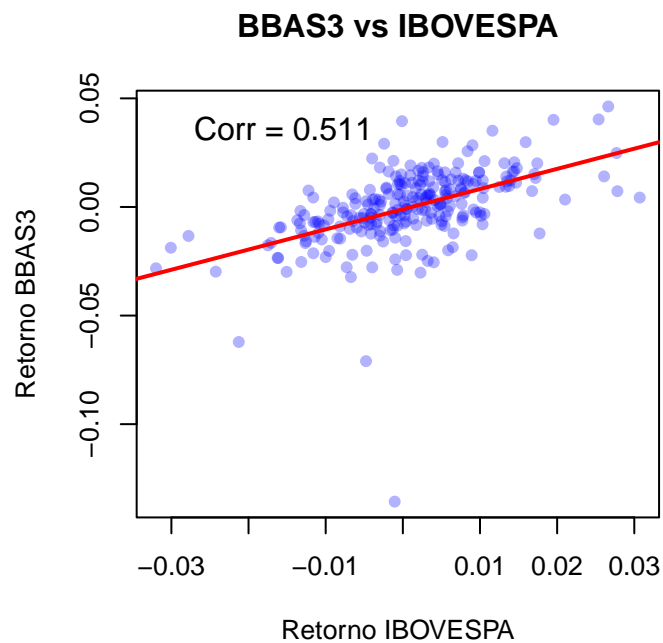
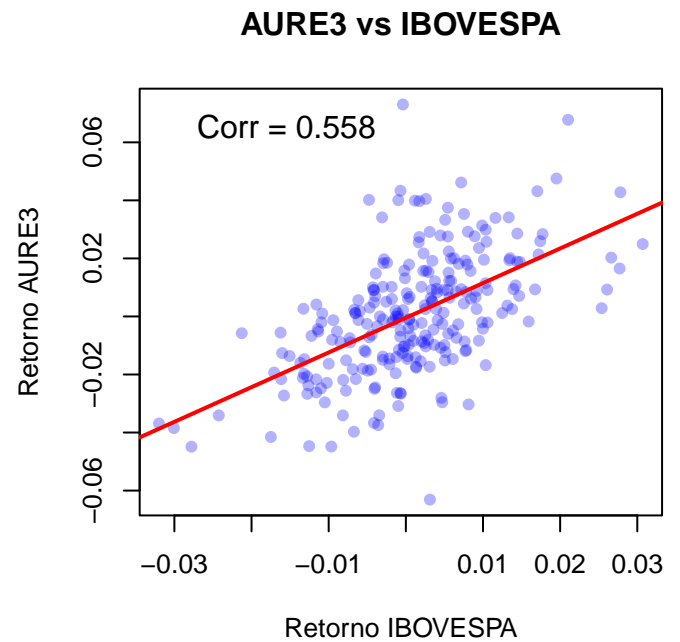
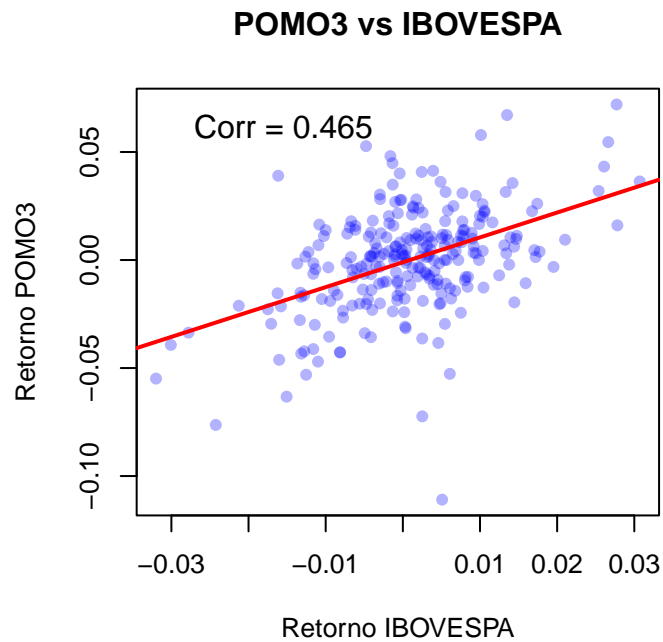
                                coredata(retornos_completo))

# Gráficos de dispersão: Ação vs IBOVESPA
par(mfrow = c(2, 2))
for(i in 1:length(nomes_acoes)){
  plot(retornos_comp_df$IBOVESPA, retornos_comp_df[, nomes_acoes[i]],
       main = paste(nomes_acoes[i], "vs IBOVESPA"),
       xlab = "Retorno IBOVESPA",
       ylab = paste("Retorno", nomes_acoes[i]),
       pch = 16, col = rgb(0, 0, 1, 0.3))

  # Linha de regressão
  abline(lm(retornos_comp_df[, nomes_acoes[i]] ~ retornos_comp_df$IBOVESPA),
        col = "red", lwd = 2)

  # Calcular correlação
  cor_val <- cor(retornos_comp_df[, nomes_acoes[i]],
                retornos_comp_df$IBOVESPA)
  legend("topleft", legend = paste("Corr =", round(cor_val, 3)),
        bty = "n", cex = 1.2)
}

```



6. Testes de Normalidade

```
# Função para realizar múltiplos testes de normalidade
testar_normalidade <- function(dados, nome){
  cat("\n### Testes de Normalidade para", nome, "\n\n")
}
```

```

# Teste de Shapiro-Wilk (mais poderoso para amostras pequenas)
# H0: dados seguem distribuição normal
# p-valor < 0.05: rejeita H0 (dados NÃO são normais)
sw <- shapiro.test(as.numeric(dados))
cat("**Shapiro-Wilk:**\n")
cat("  Estatística W =", round(sw$statistic, 4), "\n")
cat("  p-valor =", format.pval(sw$p.value, digits = 4), "\n")
cat("  Conclusão:", ifelse(sw$p.value > 0.05,
                          "Não rejeita normalidade",
                          "Rejeita normalidade"), "\n\n")

# Teste de Anderson-Darling (sensível às caudas)
ad <- ad.test(as.numeric(dados))
cat("**Anderson-Darling:**\n")
cat("  Estatística A =", round(ad$statistic, 4), "\n")
cat("  p-valor =", format.pval(ad$p.value, digits = 4), "\n")
cat("  Conclusão:", ifelse(ad$p.value > 0.05,
                          "Não rejeita normalidade",
                          "Rejeita normalidade"), "\n\n")

# Teste de Jarque-Bera (baseado em assimetria e curtose)
jb <- jarque.test(as.numeric(dados))
cat("**Jarque-Bera:**\n")
cat("  Estatística JB =", round(jb$statistic, 4), "\n")
cat("  p-valor =", format.pval(jb$p.value, digits = 4), "\n")
cat("  Conclusão:", ifelse(jb$p.value > 0.05,
                          "Não rejeita normalidade",
                          "Rejeita normalidade"), "\n\n")

return(c(SW = sw$p.value, AD = ad$p.value, JB = jb$p.value))
}

# Aplicar testes para cada ação
resultados_testes <- data.frame()
for(i in 1:ncol(retornos)){
  p_valores <- testar_normalidade(retornos[,i], nomes_acoes[i])
  resultados_testes <- rbind(resultados_testes, p_valores)
}

```

```

##
## ### Testes de Normalidade para POM03
##
## **Shapiro-Wilk:**
##   Estatística W = 0.9723
##   p-valor = 0.0000896
##   Conclusão: Rejeita normalidade
##
## **Anderson-Darling:**
##   Estatística A = 1.6133
##   p-valor = 0.0003722
##   Conclusão: Rejeita normalidade
##
## **Jarque-Bera:**

```

```

##  Estatística JB = 58.3806
##  p-valor = 0.0000000000002103
##  Conclusão: Rejeita normalidade
##
##
##  ### Testes de Normalidade para AURE3
##
##  **Shapiro-Wilk:**
##  Estatística W = 0.9931
##  p-valor = 0.2996
##  Conclusão: Não rejeita normalidade
##
##  **Anderson-Darling:**
##  Estatística A = 0.4199
##  p-valor = 0.3233
##  Conclusão: Não rejeita normalidade
##
##  **Jarque-Bera:**
##  Estatística JB = 5.1469
##  p-valor = 0.07627
##  Conclusão: Não rejeita normalidade
##
##
##  ### Testes de Normalidade para BBAS3
##
##  **Shapiro-Wilk:**
##  Estatística W = 0.8705
##  p-valor = 0.000000000001113
##  Conclusão: Rejeita normalidade
##
##  **Anderson-Darling:**
##  Estatística A = 3.2295
##  p-valor = 0.00000004122
##  Conclusão: Rejeita normalidade
##
##  **Jarque-Bera:**
##  Estatística JB = 2290.238
##  p-valor = < 0.0000000000000022
##  Conclusão: Rejeita normalidade
##
##
##  ### Testes de Normalidade para ITUB3
##
##  **Shapiro-Wilk:**
##  Estatística W = 0.9823
##  p-valor = 0.003477
##  Conclusão: Rejeita normalidade
##
##  **Anderson-Darling:**
##  Estatística A = 0.6738
##  p-valor = 0.0776
##  Conclusão: Não rejeita normalidade
##
##  **Jarque-Bera:**

```

```
## Estatística JB = 12.9568
## p-valor = 0.001536
## Conclusão: Rejeita normalidade
```

```
rownames(resultados_testes) <- nomes_acoes
kable(resultados_testes, digits = 4,
      caption = "P-valores dos Testes de Normalidade")
```

Table 6: P-valores dos Testes de Normalidade

	X0.0000895999492476336	X0.000372231682844326	X0.000000000000210276240864005
POMO3	0.0001	0.0004	0.0000
AURE3	0.2996	0.3233	0.0763
BBAS3	0.0000	0.0000	0.0000
ITUB3	0.0035	0.0776	0.0015

Critérios de Interpretação:

- **p-valor > 0.05:** Não rejeitamos H_0 , dados podem ser considerados normais (ao nível de 5%)
- **p-valor > 0.10:** Evidência fraca contra normalidade - dados razoavelmente normais
- **p-valor entre 0.01 e 0.05:** Evidência moderada contra normalidade
- **p-valor < 0.01:** Forte evidência contra normalidade - dados claramente não normais

Consenso: Se pelo menos 2 dos 3 testes tiverem p-valor > 0.05, podemos considerar que a hipótese de normalidade é razoável para fins práticos.

6. Visualização da Distribuição

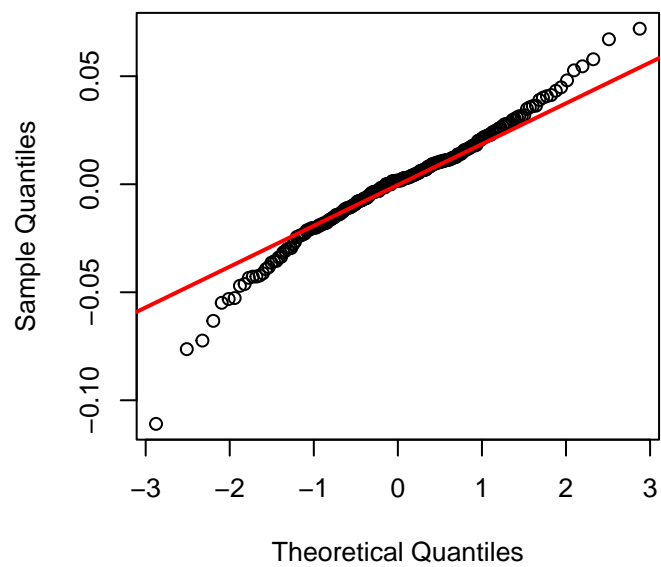
```
par(mfrow = c(2, 2))

for(i in 1:ncol(retornos)){
  # Q-Q Plot (comparação com distribuição normal)
  qqnorm(retornos[,i], main = paste("Q-Q Plot -", nomes_acoes[i]))
  qqline(retornos[,i], col = "red", lwd = 2)

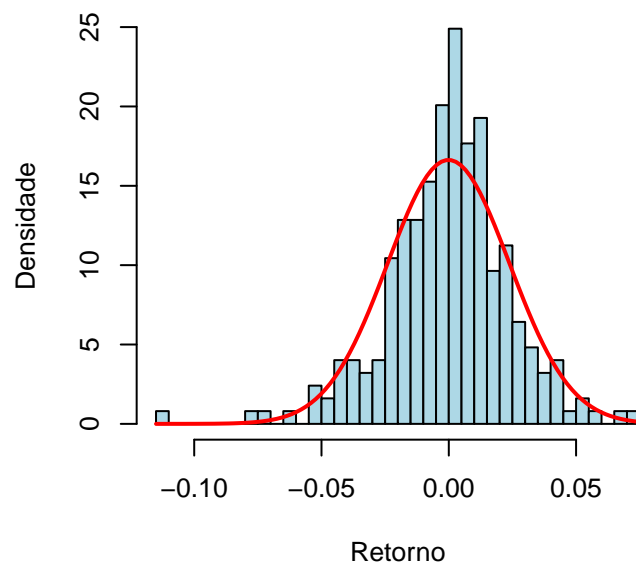
  # Histograma com curva normal sobreposta
  hist(retornos[,i], breaks = 30, probability = TRUE,
       main = paste("Histograma -", nomes_acoes[i]),
       xlab = "Retorno", ylab = "Densidade", col = "lightblue")

  # Curva normal teórica
  curve(dnorm(x, mean = mean(retornos[,i]), sd = sd(retornos[,i])),
       add = TRUE, col = "red", lwd = 2)
}
```

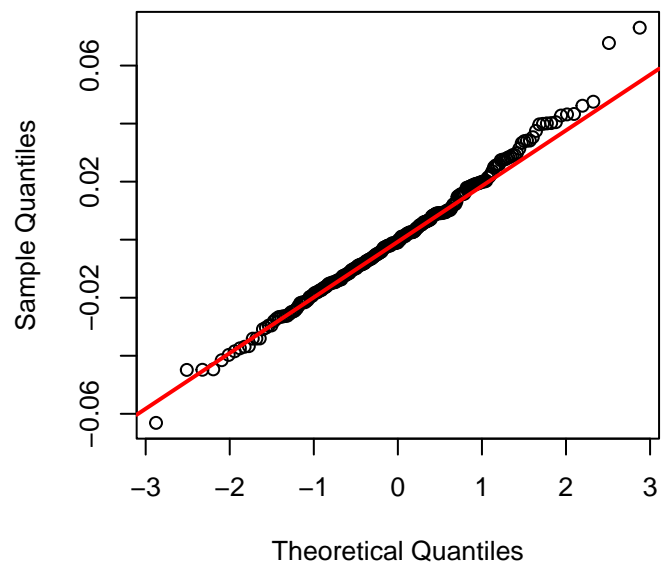

Q-Q Plot – POMO3



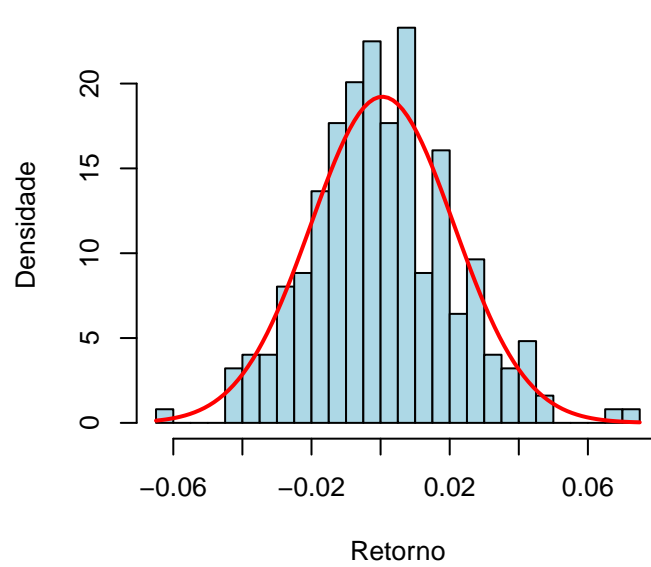
Histograma – POMO3

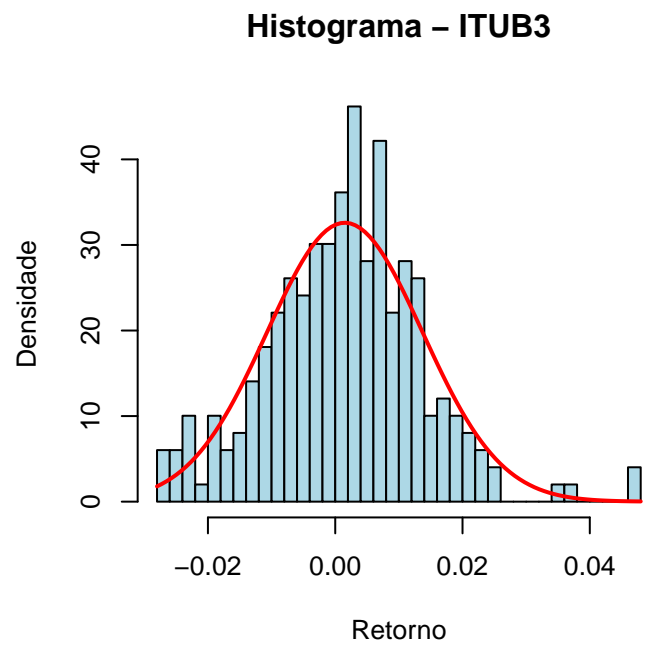
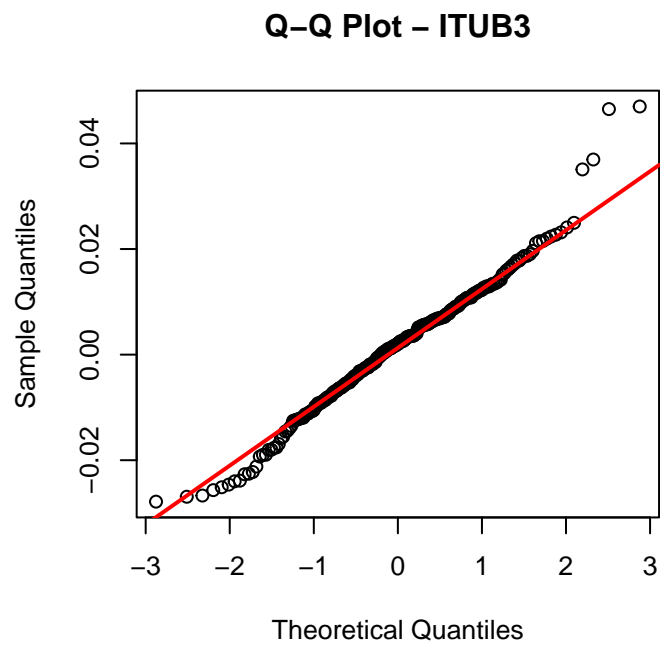
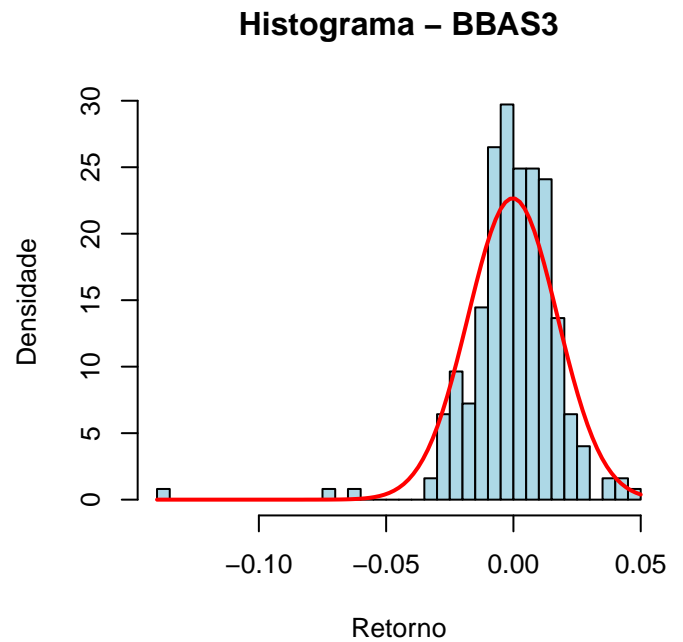
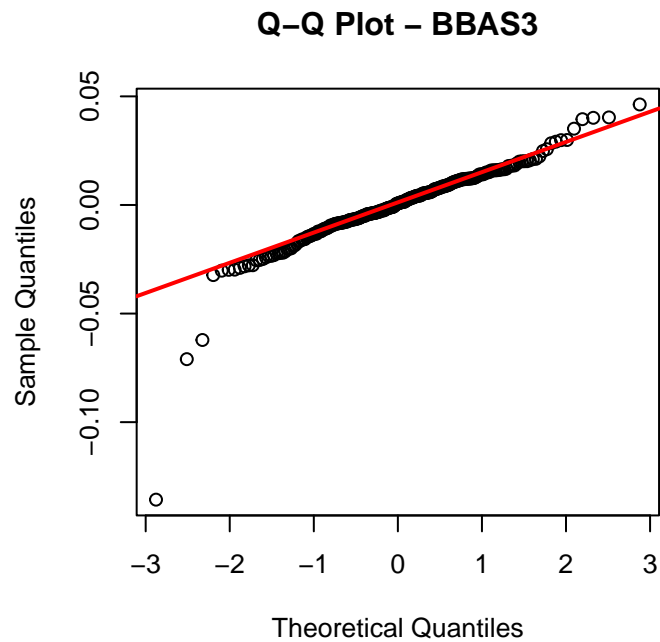


Q-Q Plot – AURE3



Histograma – AURE3





Interpretação Q-Q Plot: Pontos próximos à linha vermelha indicam normalidade. Desvios nas caudas indicam caudas mais pesadas (curtose) ou assimétricas.

8. Fronteira Eficiente (Markowitz)

```
# Pacote para otimização de portfólio
library(quadprog)

# Matriz de covariância dos retornos
cov_matrix <- cov(retornos)

# Vetor de retornos médios
retornos_medios <- colMeans(retornos)

# Função para calcular portfólio de variância mínima
calc_portfolio <- function(retornos_alvo, retornos_medios, cov_matrix){
  n <- length(retornos_medios)

  # Matriz D (2x covariância para função quadrática)
  Dmat <- 2 * cov_matrix

  # Vetor d (zeros para minimização de variância)
  dvec <- rep(0, n)

  # Restrições
  # 1. Soma dos pesos = 1
  # 2. Retorno esperado = retorno alvo
  # 3. Pesos >= 0 (sem venda a descoberto)
  Amat <- cbind(rep(1, n), retornos_medios, diag(n))
  bvec <- c(1, retornos_alvo, rep(0, n))

  # Resolver problema de otimização quadrática
  resultado <- tryCatch({
    solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq = 2)
  }, error = function(e){
    return(NULL)
  })

  if(is.null(resultado)) return(NULL)

  # Retornar pesos, retorno e risco
  pesos <- resultado$solution
  retorno <- sum(pesos * retornos_medios)
  risco <- sqrt(t(pesos) %*% cov_matrix %*% pesos)

  return(list(pesos = pesos, retorno = retorno, risco = as.numeric(risco)))
}

# Gerar fronteira eficiente
# Retornos alvo: do mínimo ao máximo possível
retorno_min <- min(retornos_medios)
retorno_max <- max(retornos_medios)
retornos_alvo <- seq(retorno_min, retorno_max, length.out = 100)

# Calcular portfólios para cada retorno alvo
fronteira <- data.frame()
```

```

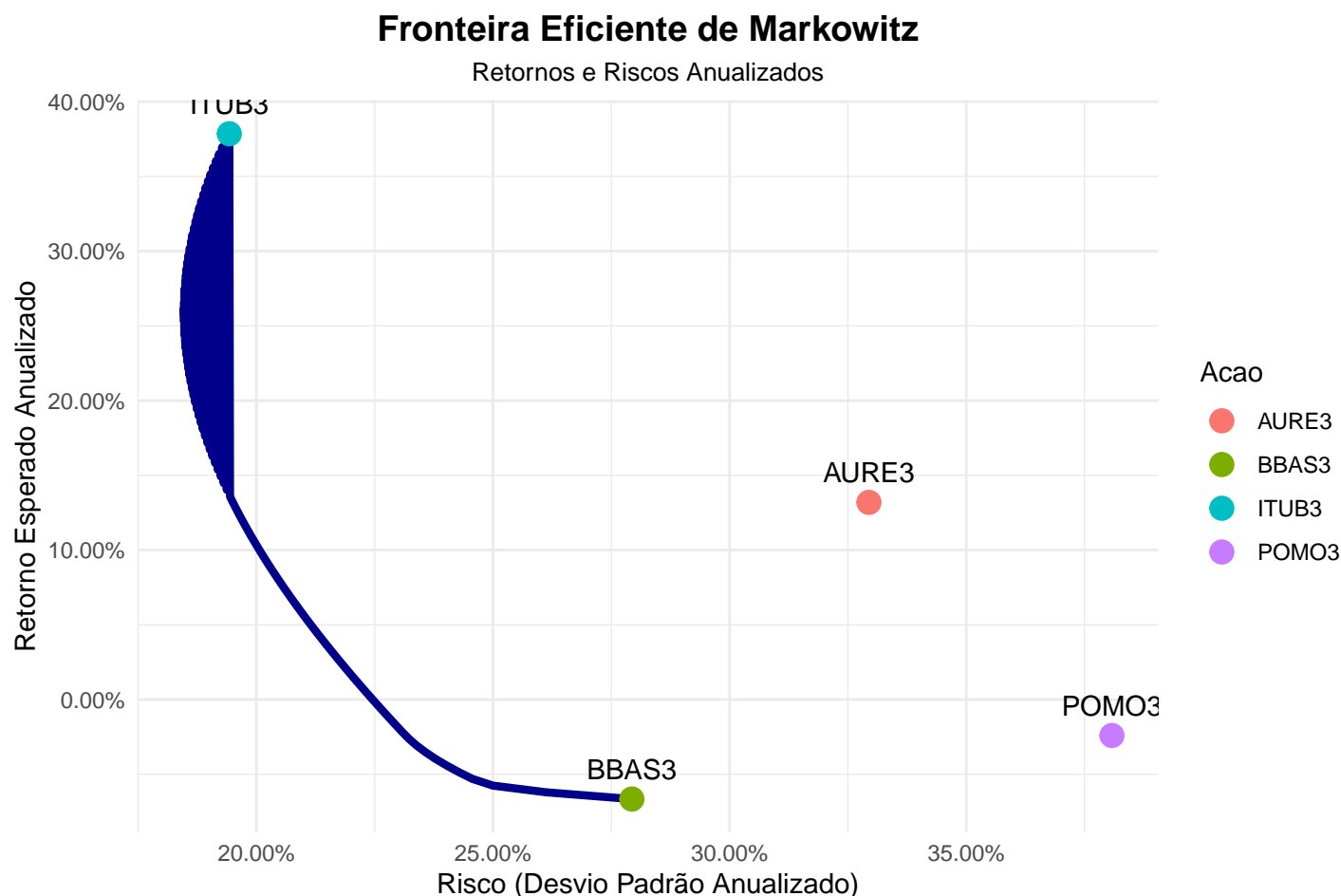
for(ret_alvo in retornos_alvo){
  portfolio <- calc_portfolio(ret_alvo, retornos_medios, cov_matrix)

  if(!is.null(portfolio)){
    fronteira <- rbind(fronteira, data.frame(
      Retorno = portfolio$retorno * 252, # Anualizar (252 dias úteis)
      Risco = portfolio$risco * sqrt(252) # Anualizar
    ))
  }
}

# Adicionar pontos das ações individuais (anualizados)
acoes_individuais <- data.frame(
  Acao = nomes_acoes,
  Retorno = retornos_medios * 252,
  Risco = apply(retornos, 2, sd) * sqrt(252)
)

# Gráfico da Fronteira Eficiente
ggplot() +
  # Fronteira eficiente
  geom_line(data = fronteira, aes(x = Risco, y = Retorno),
    color = "darkblue", linewidth = 1.5) +
  # Ações individuais
  geom_point(data = acoes_individuais, aes(x = Risco, y = Retorno, color = Acao),
    size = 4) +
  geom_text(data = acoes_individuais, aes(x = Risco, y = Retorno, label = Acao),
    vjust = -1, size = 4) +
  # Formatação dos eixos para Porcentagem com 2 casas decimais
  scale_x_continuous(labels = scales::percent_format(accuracy = 0.01)) +
  scale_y_continuous(labels = scales::percent_format(accuracy = 0.01)) +
  labs(title = "Fronteira Eficiente de Markowitz",
    subtitle = "Retornos e Riscos Anualizados",
    x = "Risco (Desvio Padrão Anualizado)",
    y = "Retorno Esperado Anualizado") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"),
    plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 10),
    legend.position = "right")

```



```
# Tabela com informações das ações
kable(acoes_individuais, digits = 4,
      caption = "Retorno e Risco Anualizados das Ações")
```

Table 7: Retorno e Risco Anualizados das Ações

	Acao	Retorno	Risco
POMO3	POMO3	-0.0241	0.3808
AURE3	AURE3	0.1319	0.3294
BBAS3	BBAS3	-0.0666	0.2793
ITUB3	ITUB3	0.3786	0.1943

Interpretação da Fronteira Eficiente:

A curva azul representa a combinação ótima de ativos que maximiza o retorno para cada nível de risco. Pontos acima da fronteira são impossíveis de alcançar com os ativos disponíveis, enquanto pontos abaixo da fronteira são ineficientes, pois existe uma combinação melhor que oferece maior retorno para o mesmo risco ou menor risco para o mesmo retorno. Investidores devem escolher portfólios ao longo da fronteira de acordo com sua tolerância ao risco, sendo que cada ponto da fronteira representa uma alocação ótima específica entre os quatro ativos analisados.

8.2 Fronteira Eficiente com ETF IBOVESPA

```
# Agora vamos expandir a análise incluindo o IBOVESPA como um ativo adicional
# Isso simula a possibilidade de investir em um ETF que replica o índice

# Combinar retornos das ações com o IBOVESPA
retornos_com_etf <- merge(retornos, retorno_ibov)
colnames(retornos_com_etf) <- c(nomes_acoes, "IBOVESPA")

# Recalcular matriz de covariância e retornos médios com ETF incluído
cov_matrix_etf <- cov(retornos_com_etf)
retornos_medios_etf <- colMeans(retornos_com_etf)

cat("\n### Matriz de Correlação com ETF IBOVESPA:\n")
```

```
##
## ### Matriz de Correlação com ETF IBOVESPA:
```

```
cor_matrix_etf <- cor(retornos_com_etf)
kable(round(cor_matrix_etf, 3),
      caption = "Matriz de Correlação: Ações + ETF IBOVESPA")
```

Table 8: Matriz de Correlação: Ações + ETF IBOVESPA

	POMO3	AURE3	BBAS3	ITUB3	IBOVESPA
POMO3	1.000	0.316	0.211	0.386	0.465
AURE3	0.316	1.000	0.281	0.440	0.558
BBAS3	0.211	0.281	1.000	0.447	0.511
ITUB3	0.386	0.440	0.447	1.000	0.781
IBOVESPA	0.465	0.558	0.511	0.781	1.000

```
# Função para calcular portfólio com ETF incluído
calc_portfolio_etf <- function(retornos_alvo, retornos_medios, cov_matrix){
  n <- length(retornos_medios)

  Dmat <- 2 * cov_matrix
  dvec <- rep(0, n)

  # Restrições: soma = 1, retorno = alvo, pesos >= 0
  Amat <- cbind(rep(1, n), retornos_medios, diag(n))
  bvec <- c(1, retornos_alvo, rep(0, n))

  resultado <- tryCatch({
    solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq = 2)
  }, error = function(e){
    return(NULL)
  })

  if(is.null(resultado)) return(NULL)
```

```

pesos <- resultado$solution
retorno <- sum(pesos * retornos_medios)
risco <- sqrt(t(pesos) %*% cov_matrix %*% pesos)

return(list(pesos = pesos, retorno = retorno, risco = as.numeric(risco)))
}

# Gerar nova fronteira eficiente com ETF
retorno_min_etf <- min(retornos_medios_etf)
retorno_max_etf <- max(retornos_medios_etf)
retornos_alvo_etf <- seq(retorno_min_etf, retorno_max_etf, length.out = 100)

fronteira_etf <- data.frame()

for(ret_alvo in retornos_alvo_etf){
  portfolio <- calc_portfolio_etf(ret_alvo, retornos_medios_etf, cov_matrix_etf)

  if(!is.null(portfolio)){
    fronteira_etf <- rbind(fronteira_etf, data.frame(
      Retorno = portfolio$retorno * 252,
      Risco = portfolio$risco * sqrt(252)
    ))
  }
}

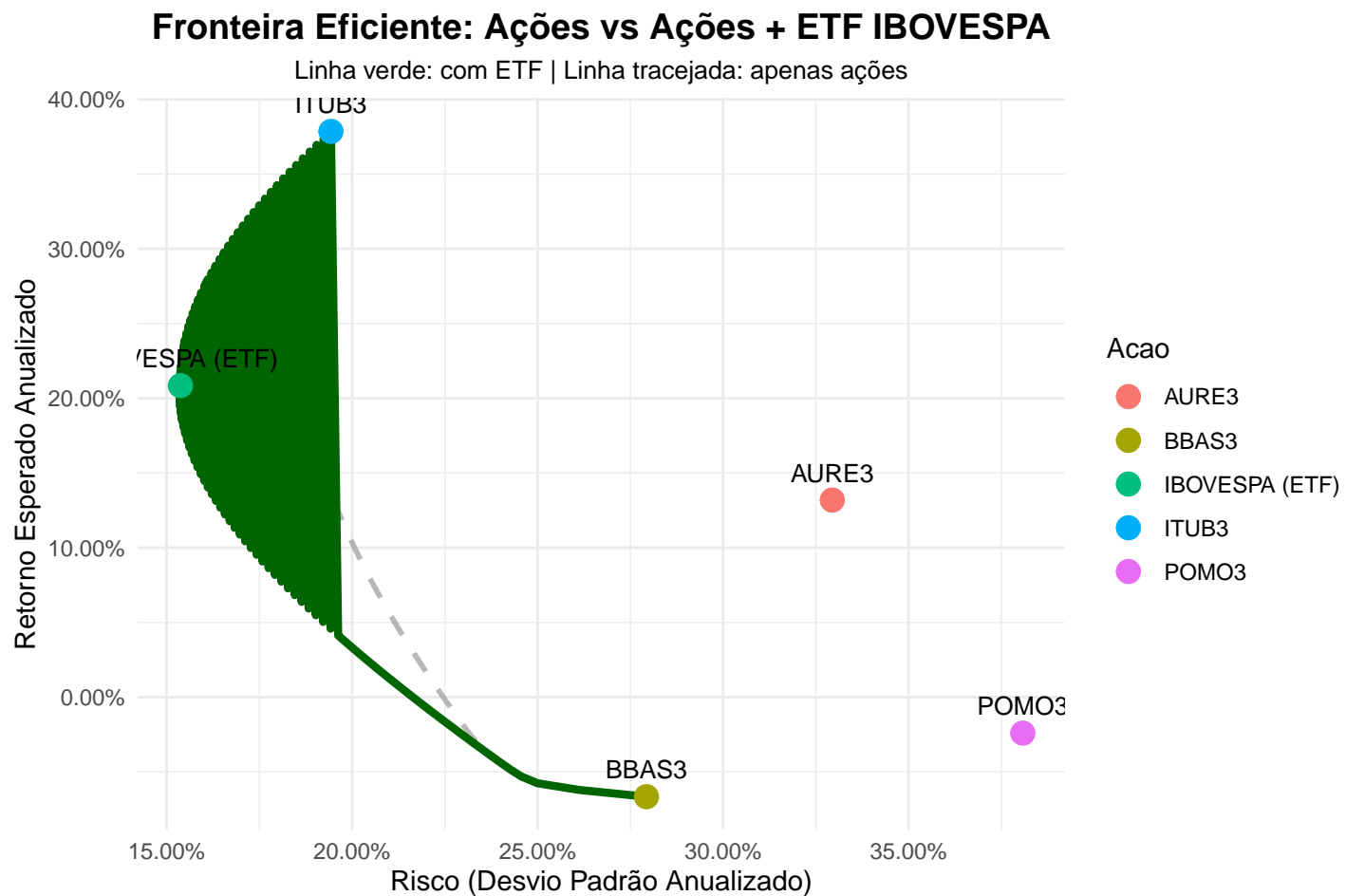
# Adicionar ponto do ETF IBOVESPA
etf_ponto <- data.frame(
  Acao = "IBOVESPA (ETF)",
  Retorno = retornos_medios_etf["IBOVESPA"] * 252,
  Risco = sd(retorno_ibov) * sqrt(252)
)

# Combinar com ações individuais
todos_ativos <- rbind(acoes_individuais, etf_ponto)

# Gráfico comparando as duas fronteiras
ggplot() +
  # Fronteira original (só ações)
  geom_line(data = fronteira, aes(x = Risco, y = Retorno),
    color = "gray60", linewidth = 1, linetype = "dashed",
    alpha = 0.7) +
  # Nova fronteira (ações + ETF)
  geom_line(data = fronteira_etf, aes(x = Risco, y = Retorno),
    color = "darkgreen", linewidth = 1.5) +
  # Todos os ativos individuais
  geom_point(data = todos_ativos, aes(x = Risco, y = Retorno, color = Acao),
    size = 4) +
  geom_text(data = todos_ativos, aes(x = Risco, y = Retorno, label = Acao),
    vjust = -1, size = 3.5, check_overlap = TRUE) +
  scale_x_continuous(labels = scales::percent_format(accuracy = 0.01)) +
  scale_y_continuous(labels = scales::percent_format(accuracy = 0.01)) +
  labs(title = "Fronteira Eficiente: Ações vs Ações + ETF IBOVESPA",
    subtitle = "Linha verde: com ETF | Linha tracejada: apenas ações",

```

```
x = "Risco (Desvio Padrão Anualizado)",
y = "Retorno Esperado Anualizado") +
theme_minimal() +
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"),
      plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 10),
      legend.position = "right")
```



Interpretação da Diversificação com ETF:

A inclusão do ETF IBOVESPA na análise expande o conjunto de oportunidades de investimento, representado pela fronteira eficiente verde. Observe que esta nova fronteira domina a fronteira original (linha tracejada cinza) em praticamente todos os pontos, demonstrando que a adição do ETF oferece combinações superiores de risco e retorno. Isto ocorre porque o ETF IBOVESPA, sendo uma cesta diversificada de ações, apresenta características de risco e retorno que complementam as ações individuais, permitindo que o investidor alcance níveis de diversificação que seriam impossíveis usando apenas as quatro ações isoladamente.

8.3 Composição Ótima: Ações + ETF


```

# Encontrar o portfólio de variância mínima com ETF
portfolio_min_var_etf <- fronteira_etf[which.min(fronteira_etf$Risco), ]

ret_alvo_min_etf <- portfolio_min_var_etf$Retorno / 252
portfolio_otimo_etf <- calc_portfolio_etf(ret_alvo_min_etf, retornos_medios_etf,
                                          cov_matrix_etf)

if(!is.null(portfolio_otimo_etf)){
  composicao_etf <- data.frame(
    Ativo = c(nomes_acoes, "IBOVESPA (ETF)"),
    Peso_Percentual = portfolio_otimo_etf$pesos * 100,
    Valor_Investido = portfolio_otimo_etf$pesos * investimento
  )

  # Filtrar apenas ativos com peso significativo (> 0.1%)
  composicao_etf_filtrada <- composicao_etf[composicao_etf$Peso_Percentual > 0.1, ]

  cat("\n### PORTFÓLIO ÓTIMO: AÇÕES + ETF IBOVESPA\n\n")
  kable(composicao_etf_filtrada, digits = 2, row.names = FALSE,
        caption = "Composição Ótima com ETF (Variância Mínima)")

  cat("\n**Características do Portfólio Ótimo com ETF:**\n")
  cat("- Retorno esperado anualizado:",
        round(portfolio_otimo_etf$retorno * 252 * 100, 2), "%\n")
  cat("- Risco (desvio padrão anualizado):",
        round(portfolio_otimo_etf$risco * sqrt(252) * 100, 2), "%\n")
  cat("- Sharpe Ratio (assumindo SELIC como taxa livre de risco):",
        round((portfolio_otimo_etf$retorno * 252 - mean(selic_data$value)/100) /
              (portfolio_otimo_etf$risco * sqrt(252)), 3), "%\n\n")
}

```

```

##
## ### PORTFÓLIO ÓTIMO: AÇÕES + ETF IBOVESPA
##
##
## **Características do Portfólio Ótimo com ETF:**
## - Retorno esperado anualizado: 20.32 %
## - Risco (desvio padrão anualizado): 15.35 %
## - Sharpe Ratio (assumindo SELIC como taxa livre de risco): 0.415

```

A composição ótima que minimiza a variância mostra como o investidor deve distribuir seus recursos entre as ações individuais e o ETF IBOVESPA. Note que a otimização matemática considera não apenas o retorno esperado e o risco de cada ativo, mas também as correlações entre eles, buscando combinações que maximizem o benefício da diversificação. Ativos com peso próximo de zero ou zero indicam que, do ponto de vista da eficiência de média-variância, eles não contribuem significativamente para melhorar a relação risco-retorno do portfólio neste ponto específico da fronteira.

8.4 Linha de Alocação de Capital (CAL) - Portfólio com Ativo Livre de Risco

```
# A Linha de Alocação de Capital conecta o ativo livre de risco (SELIC)  
# ao portfólio tangente na fronteira eficiente  
# Este é o portfólio de maior Índice de Sharpe
```

```
# Taxa livre de risco (SELIC média anualizada)  
taxa_livre_risco <- mean(selic_data$value) / 100
```

```
cat("\n### CONSTRUÇÃO DA LINHA DE ALOCAÇÃO DE CAPITAL\n\n")
```

```
##  
## ### CONSTRUÇÃO DA LINHA DE ALOCAÇÃO DE CAPITAL
```

```
cat("Taxa Livre de Risco (SELIC média):", round(taxa_livre_risco * 100, 2), "% a.a.\n\n")
```

```
## Taxa Livre de Risco (SELIC média): 13.95 % a.a.
```

```
# Função para calcular o Índice de Sharpe  
calcular_sharpe <- function(retorno, risco, rf){  
  return((retorno - rf) / risco)  
}  
  
# Encontrar o portfólio tangente (maior Sharpe Ratio)  
fronteira_etf$Sharpe <- sapply(1:nrow(fronteira_etf), function(i){  
  calcular_sharpe(fronteira_etf$Retorno[i], fronteira_etf$Risco[i],  
    taxa_livre_risco)  
})
```

```
# Portfólio tangente  
idx_tangente <- which.max(fronteira_etf$Sharpe)  
portfolio_tangente <- fronteira_etf[idx_tangente, ]
```

```
cat("**Portfólio Tangente (Ótimo de Sharpe):**\n")
```

```
## **Portfólio Tangente (Ótimo de Sharpe):**
```

```
cat("- Retorno esperado:", round(portfolio_tangente$Retorno * 100, 2), "% a.a.\n")
```

```
## - Retorno esperado: 37.86 % a.a.
```

```
cat("- Risco:", round(portfolio_tangente$Risco * 100, 2), "% a.a.\n")
```

```
## - Risco: 19.43 % a.a.
```

```
cat("- Índice de Sharpe:", round(portfolio_tangente$Sharpe, 3), "\n\n")
```

```
## - Índice de Sharpe: 1.231
```

```
# Calcular composição do portfólio tangente
ret_alvo_tangente <- portfolio_tangente$Retorno / 252
portfolio_tangente_composicao <- calc_portfolio_etf(ret_alvo_tangente,
                                                    retornos_medios_etf,
                                                    cov_matrix_etf)

if(!is.null(portfolio_tangente_composicao)){
  composicao_tangente <- data.frame(
    Ativo = c(nomes_acoes, "IBOVESPA (ETF)",
    Peso_Percentual = portfolio_tangente_composicao$pesos * 100,
    Valor_Investido_100k = portfolio_tangente_composicao$pesos * investimento
  )

  # Filtrar ativos com peso > 0.1%
  composicao_tangente_filtrada <- composicao_tangente[
    composicao_tangente$Peso_Percentual > 0.1,
  ]

  kable(composicao_tangente_filtrada, digits = 2, row.names = FALSE,
        caption = "Composição do Portfólio Tangente (Máximo Sharpe)")
}
```

Table 9: Composição do Portfólio Tangente (Máximo Sharpe)

Ativo	Peso_Percentual	Valor_Investido_100k
ITUB3	100	100000

```
# Criar pontos da Linha de Alocação de Capital
# CAL:  $E(R_p) = R_f + (E(R_t) - R_f) / t * p$ 
# onde  $R_t$  é o retorno do portfólio tangente

risco_cal <- seq(0, max(frenteira_etf$Risco) * 1.2, length.out = 100)
retorno_cal <- taxa_livre_risco +
  (portfolio_tangente$Retorno - taxa_livre_risco) / portfolio_tangente$Risco *
  risco_cal

linha_cal <- data.frame(Risco = risco_cal, Retorno = retorno_cal)

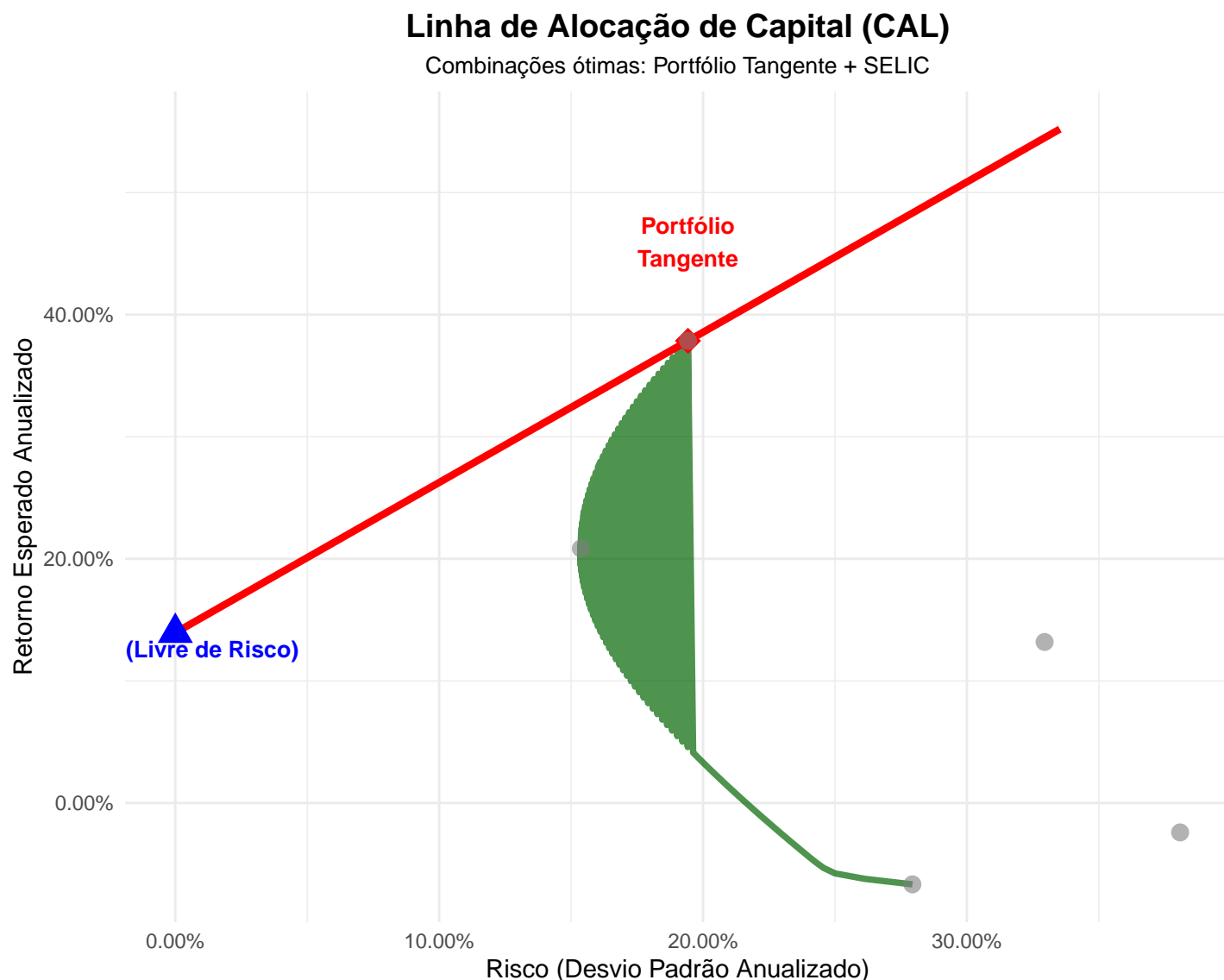
# Ponto do ativo livre de risco
ponto_rf <- data.frame(
  Risco = 0,
  Retorno = taxa_livre_risco,
  Label = "SELIC (Livre de Risco)"
)

# Gráfico com CAL
ggplot() +
```

```

# Fronteira eficiente
geom_line(data = fronteira_etf, aes(x = Risco, y = Retorno),
          color = "darkgreen", linewidth = 1.3, alpha = 0.7) +
# Linha de Alocação de Capital
geom_line(data = linha_cal, aes(x = Risco, y = Retorno),
          color = "red", linewidth = 1.5) +
# Portfólio tangente
geom_point(data = portfolio_tangente, aes(x = Risco, y = Retorno),
           color = "red", size = 5, shape = 18) +
geom_text(data = portfolio_tangente, aes(x = Risco, y = Retorno),
          label = "Portfólio\nTangente", vjust = -1.5, hjust = 0.5,
          color = "red", fontface = "bold", size = 3.5) +
# Ativo livre de risco
geom_point(data = ponto_rf, aes(x = Risco, y = Retorno),
           color = "blue", size = 5, shape = 17) +
geom_text(data = ponto_rf, aes(x = Risco, y = Retorno, label = Label),
          vjust = 1.5, color = "blue", fontface = "bold", size = 3.5) +
# Ativos individuais
geom_point(data = todos_ativos, aes(x = Risco, y = Retorno),
           color = "gray50", size = 3, alpha = 0.6) +
scale_x_continuous(labels = scales::percent_format(accuracy = 0.01),
                   limits = c(0, NA)) +
scale_y_continuous(labels = scales::percent_format(accuracy = 0.01)) +
labs(title = "Linha de Alocação de Capital (CAL)",
     subtitle = "Combinações ótimas: Portfólio Tangente + SELIC",
     x = "Risco (Desvio Padrão Anualizado)",
     y = "Retorno Esperado Anualizado") +
theme_minimal() +
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"),
      plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 10))

```



Interpretação da Linha de Alocação de Capital:

A linha vermelha representa a Linha de Alocação de Capital, que mostra todas as combinações possíveis entre o ativo livre de risco (SELIC) e o portfólio tangente. Esta linha é fundamental porque domina toda a fronteira eficiente, exceto no ponto de tangência. Isso significa que, para qualquer nível de risco desejado, um investidor sempre obtém um retorno esperado maior investindo parte do capital na SELIC e parte no portfólio tangente, em vez de escolher qualquer outro ponto da fronteira eficiente.

O ponto de tangência (losango vermelho) representa o portfólio de ativos com risco que possui o maior Índice de Sharpe, ou seja, oferece a melhor recompensa por unidade de risco assumido acima da taxa livre de risco. Investidores mais conservadores devem alocar maior proporção na SELIC e menor no portfólio tangente, posicionando-se mais à esquerda da linha. Investidores mais arrojados fazem o oposto, podendo inclusive usar alavancagem para se posicionar além do portfólio tangente, mais à direita na linha.

8.5 Alocações Estratégicas ao Longo da CAL

```
# Vamos calcular algumas alocações específicas ao longo da CAL
# para diferentes perfis de investidores

cat("\n### ESTRATÉGIAS DE ALOCAÇÃO COM R$ 100.000,00\n\n")

##
## ### ESTRATÉGIAS DE ALOCAÇÃO COM R$ 100.000,00

# Função para calcular alocação na CAL dado um nível de risco alvo
calcular_alocacao_cal <- function(risco_alvo, ret_tangente, risco_tangente,
                                taxa_rf, investimento_total){

  # Peso no portfólio tangente
  w_tangente <- risco_alvo / risco_tangente

  # Peso no ativo livre de risco
  w_rf <- 1 - w_tangente

  # Retorno esperado
  retorno_esperado <- w_rf * taxa_rf + w_tangente * ret_tangente

  return(list(
    peso_rf = w_rf,
    peso_tangente = w_tangente,
    valor_rf = w_rf * investimento_total,
    valor_tangente = w_tangente * investimento_total,
    retorno_esperado = retorno_esperado,
    risco = risco_alvo
  ))
}

# Diferentes perfis de risco (em termos de desvio padrão anualizado)
perfis <- data.frame(
  Perfil = c("Conservador", "Moderado", "Arrojado", "Muito Arrojado"),
  Risco_Alvo = c(0.05, 0.10, 0.15, 0.20) # 5%, 10%, 15%, 20% de volatilidade
)

resultados_perfis <- data.frame()

for(i in 1:nrow(perfis)){
  alocacao <- calcular_alocacao_cal(
    perfis$Risco_Alvo[i],
    portfolio_tangente$Retorno,
    portfolio_tangente$Risco,
    taxa_livre_risco,
    investimento
  )

  resultados_perfis <- rbind(resultados_perfis, data.frame(
    Perfil = perfis$Perfil[i],
    Risco_Alvo = perfis$Risco_Alvo[i] * 100,
```

```

    Peso_SELIC = alocao$peso_rf * 100,
    Peso_Portfolio_Tangente = alocao$peso_tangente * 100,
    Valor_SELIC = alocao$valor_rf,
    Valor_Portfolio_Tangente = alocao$valor_tangente,
    Retorno_Esperado = alocao$retorno_esperado * 100
  ))
}

kable(resultados_perfis, digits = 2, booktabs = TRUE, row.names = FALSE,
      caption = "Alocações Estratégicas para Diferentes Perfis de Risco")>%
  kableExtra::kable_styling(latex_options = c("striped", "scale_down", "HOLD_position"), full_width = F

```

Table 10: Alocações Estratégicas para Diferentes Perfis de Risco

Perfil	Risco_Alvo	Peso_SELIC	Peso_Portfolio_Tangente	Valor_SELIC	Valor_Portfolio_Tangente
Conservador	5	74.27	25.73	74265.44	25734.56
Moderado	10	48.53	51.47	48530.88	51469.12
Arrojado	15	22.80	77.20	22796.31	77203.69
Muito Arrojado	20	-2.94	102.94	-2938.25	102938.25

```

cat("\n**Interpretação das Alocações:**\n\n")

##
## **Interpretação das Alocações:**

for(i in 1:nrow(resultados_perfis)){
  cat("***", resultados_perfis$Perfil[i], "：**\n")
  cat(" - Investir R$", format(round(resultados_perfis$Valor_SELIC[i], 2),
                                big.mark = ".", decimal.mark = ","),
      "em SELIC (", round(resultados_perfis$Peso_SELIC[i], 1), "%)\n")
  cat(" - Investir R$", format(round(resultados_perfis$Valor_Portfolio_Tangente[i], 2),
                                big.mark = ".", decimal.mark = ","),
      "no Portfólio Tangente (", round(resultados_perfis$Peso_Portfolio_Tangente[i], 1), "%)\n")
  cat(" - Retorno esperado:", round(resultados_perfis$Retorno_Esperado[i], 2),
      "% a.a.\n")
  cat(" - Risco (volatilidade):", round(resultados_perfis$Risco_Alvo[i], 2),
      "% a.a.\n\n")
}

## ** Conservador :**
## - Investir R$ 74.265,44 em SELIC ( 74.3 %)
## - Investir R$ 25.734,56 no Portfólio Tangente ( 25.7 %)
## - Retorno esperado: 20.1 % a.a.
## - Risco (volatilidade): 5 % a.a.
##
## ** Moderado :**
## - Investir R$ 48.530,88 em SELIC ( 48.5 %)
## - Investir R$ 51.469,12 no Portfólio Tangente ( 51.5 %)
## - Retorno esperado: 26.25 % a.a.
## - Risco (volatilidade): 10 % a.a.

```

```
##
## ** Arrojado : **
## - Investir R$ 22.796,31 em SELIC ( 22.8 %)
## - Investir R$ 77.203,69 no Portfólio Tangente ( 77.2 %)
## - Retorno esperado: 32.41 % a.a.
## - Risco (volatilidade): 15 % a.a.
##
## ** Muito Arrojado : **
## - Investir R$ -2.938,25 em SELIC ( -2.9 %)
## - Investir R$ 102.938,2 no Portfólio Tangente ( 102.9 %)
## - Retorno esperado: 38.56 % a.a.
## - Risco (volatilidade): 20 % a.a.
```

```
# Detalhamento para perfil Moderado
cat("\n**Detalhamento do Perfil Moderado (R$ 100.000):**\n\n")
```

```
##
## **Detalhamento do Perfil Moderado (R$ 100.000):**
```

```
alocacao_moderado <- calcular_alocacao_cal(0.10, portfolio_tangente$Retorno,
                                           portfolio_tangente$Risco,
                                           taxa_livre_risco, investimento)

valor_na_selic <- alocacao_moderado$valor_rf
valor_no_tangente <- alocacao_moderado$valor_tangente

cat("1. SELIC: R$", format(round(valor_na_selic, 2),
                           big.mark = ".", decimal.mark = ","), "\n\n")
```

```
## 1. SELIC: R$ 48.530,88
```

```
cat("2. Portfólio Tangente: R$", format(round(valor_no_tangente, 2),
                                         big.mark = ".", decimal.mark = ","),
    "distribuídos em:\n")
```

```
## 2. Portfólio Tangente: R$ 51.469,12 distribuídos em:
```

```
if(!is.null(portfolio_tangente_composicao)){
  for(j in 1:length(composicao_tangente_filtrada$Ativo)){
    valor_ativo <- composicao_tangente_filtrada$Peso_Percentual[j] / 100 *
                  valor_no_tangente
    cat("    - ", composicao_tangente_filtrada$Ativo[j], ": R$",
        format(round(valor_ativo, 2), big.mark = ".", decimal.mark = ","),
        " (", round(composicao_tangente_filtrada$Peso_Percentual[j], 2),
        "% do portfólio tangente)\n")
  }
}
```

```
## - ITUB3 : R$ 51.469,12 ( 100 % do portfólio tangente)
```


Esta análise final demonstra como um investidor pode implementar a estratégia ótima na prática. O portfólio tangente representa a melhor combinação de ativos com risco (ações e ETF), e a proporção entre este portfólio e a SELIC determina o perfil de risco-retorno final. O investidor conservador prioriza a proteção do capital, alocando maior parte na SELIC, enquanto o arrojado busca maximizar retornos, concentrando-se no portfólio tangente. Note que todos os perfis utilizam exatamente a mesma composição de ativos com risco (o portfólio tangente), variando apenas a proporção total investida neste portfólio versus na SELIC, demonstrando a elegância e simplicidade do modelo de Markowitz com ativo livre de risco.

9. Cálculo do VaR Histórico

```
# VaR Histórico: percentil (1-confiança) dos retornos históricos
# Para 99% de confiança, pegamos o 1º percentil (piores 1% dos retornos)

calcular_var <- function(retornos_acao, investimento, confianca){
  # Percentil correspondente
  percentil <- 1 - confianca

  # VaR como percentil dos retornos
  var_percentual <- quantile(retornos_acao, percentil)

  # Perda máxima esperada em reais
  perda_maxima <- -var_percentual * investimento

  return(list(
    VaR_percentual = var_percentual,
    Perda_Maxima_Reais = perda_maxima,
    Percentil = percentil * 100
  ))
}

# Calcular VaR para cada ação
resultados_var <- data.frame()

for(i in 1:ncol(retornos)){
  var_resultado <- calcular_var(retornos[,i], investimento, confianca)

  resultados_var <- rbind(resultados_var, data.frame(
    Acao = nomes_acoes[i],
    VaR_Percentual = var_resultado$VaR_percentual,
    Perda_Maxima_R = var_resultado$Perda_Maxima_Reais,
    Investimento_R = investimento,
    Perda_Percentual = (var_resultado$Perda_Maxima_Reais / investimento) * 100
  ))
}

kable(resultados_var, digits = 2,
  caption = paste0("VaR Histórico (", confianca*100, "% de confiança) - Janela de ",
    janela, " dias úteis"))
```

Table 11: VaR Histórico (99% de confiança) - Janela de 252 dias úteis

	Acao	VaR_Percentual	Perda_Maxima_R	Investimento_R	Perda_Percentual
1%	POMO3	-0.07	6798.65	100000	6.80
1%1	AURE3	-0.04	4476.00	100000	4.48
1%2	BBAS3	-0.05	4782.39	100000	4.78
1%3	ITUB3	-0.03	2620.28	100000	2.62

9.1 VaR do Portfólio Ótimo (Variância Mínima)

```
# Calcular portfólio de variância mínima global
# Este é o ponto mais à esquerda da fronteira eficiente

# Encontrar o portfólio com menor risco
portfolio_min_var <- fronteira[which.min(fronteira$Risco), ]

# Para calcular VaR do portfólio, precisamos dos pesos ótimos
# Vamos recalcular para o retorno correspondente
ret_alvo_min <- portfolio_min_var$Retorno / 252 # Desanualizar

portfolio_otimo <- calc_portfolio(ret_alvo_min, retornos_medios, cov_matrix)

if(!is.null(portfolio_otimo)){
  # Calcular retornos do portfólio
  pesos_matrix <- matrix(portfolio_otimo$pesos, ncol = 1)
  retornos_portfolio <- as.matrix(retornos) %*% pesos_matrix

  # Calcular VaR do portfólio
  var_portfolio <- calcular_var(retornos_portfolio, investimento, confianca)

  # Exibir composição do portfólio
  composicao <- data.frame(
    Acao = nomes_acoes,
    Peso = portfolio_otimo$pesos * 100,
    Valor_Investido = portfolio_otimo$pesos * investimento
  )

  cat("\n### PORTFÓLIO DE VARIÂNCIA MÍNIMA\n\n")
  kable(composicao, digits = 2,
        caption = "Composição do Portfólio Ótimo (Variância Mínima)")

  cat("\n**VaR do Portfólio Ótimo:**\n")
  cat("- Retorno esperado diário:", round(portfolio_otimo$retorno * 100, 4), "%\n")
  cat("- Risco (desvio padrão):", round(portfolio_otimo$risco * 100, 4), "%\n")
  cat("- VaR (99%):", round(var_portfolio$VaR_percentual * 100, 2), "%\n")
  cat("- Perda máxima esperada: R$",
        format(round(var_portfolio$Perda_Maxima_Reais, 2),
              big.mark = ".", decimal.mark = ","), "\n\n")

  # Comparação com investimento em ações individuais
```

```

cat("**Comparação:** O portfólio diversificado reduz o risco comparado\n")
cat("ao investimento em ações individuais, demonstrando o benefício da diversificação.\n")
}

```

```

##
## ### PORTFÓLIO DE VARIÂNCIA MÍNIMA
##
##
## **VaR do Portfólio Ótimo:**
## - Retorno esperado diário: 0.102 %
## - Risco (desvio padrão): 1.1636 %
## - VaR (99%): -2.73 %
## - Perda máxima esperada: R$ 2.734,72
##
## **Comparação:** O portfólio diversificado reduz o risco comparado
## ao investimento em ações individuais, demonstrando o benefício da diversificação.

```

10. Interpretação dos Resultados

```

cat("\n## INTERPRETAÇÃO DO VALUE AT RISK (VaR)\n\n")

```

```

##
## ## INTERPRETAÇÃO DO VALUE AT RISK (VaR)

```

```

cat("Com um investimento de R$", format(investimento, big.mark = ".", decimal.mark = ","),
    "em cada ação:\n\n")

```

```

## Com um investimento de R$ 100.000 em cada ação:

```

```

for(i in 1:nrow(resultados_var)){
  cat("### ", resultados_var$Acao[i], "\n")
  cat("- VaR (99%): ", round(resultados_var$VaR_Percentual[i] * 100, 2), "%\n")
  cat("- Perda máxima esperada: R$",
      format(round(resultados_var$Perda_Maxima_R[i], 2),
              big.mark = ".", decimal.mark = ","), "\n")
  cat("- Interpretação: Com 99% de confiança, a perda não deve exceder R$",
      format(round(resultados_var$Perda_Maxima_R[i], 2),
              big.mark = ".", decimal.mark = ","),
      "em um dia de negociação.\n")
  cat("- Percentual do investimento:",
      round(resultados_var$Perda_Percentual[i], 2), "%\n\n")
}

```

```

## ### POM03
## - VaR (99%): -6.8 %
## - Perda máxima esperada: R$ 6.798,65
## - Interpretação: Com 99% de confiança, a perda não deve exceder R$ 6.798,65 em um dia de negociação.
## - Percentual do investimento: 6.8 %

```

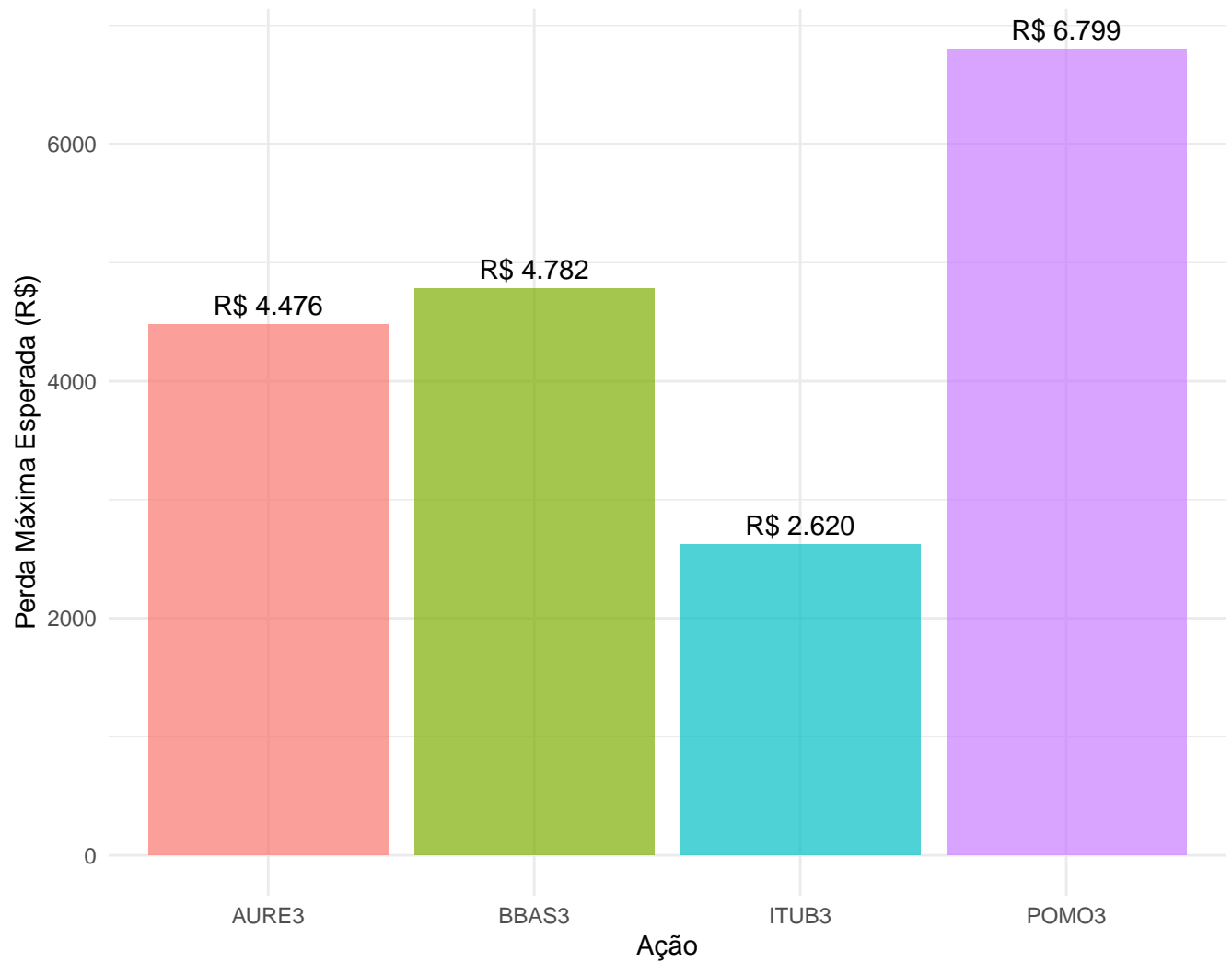
```
##
## ### AURE3
## - VaR (99%): -4.48 %
## - Perda máxima esperada: R$ 4.476
## - Interpretação: Com 99% de confiança, a perda não deve exceder R$ 4.476 em um dia de negociação.
## - Percentual do investimento: 4.48 %
##
## ### BBAS3
## - VaR (99%): -4.78 %
## - Perda máxima esperada: R$ 4.782,39
## - Interpretação: Com 99% de confiança, a perda não deve exceder R$ 4.782,39 em um dia de negociação.
## - Percentual do investimento: 4.78 %
##
## ### ITUB3
## - VaR (99%): -2.62 %
## - Perda máxima esperada: R$ 2.620,28
## - Interpretação: Com 99% de confiança, a perda não deve exceder R$ 2.620,28 em um dia de negociação.
## - Percentual do investimento: 2.62 %
```

9. Visualização Comparativa do VaR

```
# Gráfico de barras comparativo
ggplot(resultados_var, aes(x = Acao, y = Perda_Maxima_R, fill = Acao)) +
  geom_bar(stat = "identity", alpha = 0.7) +
  geom_text(aes(label = paste0("R$ ", format(round(Perda_Maxima_R, 0),
                                                big.mark = "."))),
            vjust = -0.5, size = 4) +
  labs(title = "Comparação do VaR (99%) entre as Ações",
       subtitle = paste0("Perda máxima esperada com investimento de R$ ",
                        format(investimento, big.mark = ".")),
       x = "Ação",
       y = "Perda Máxima Esperada (R$)") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "none",
        plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 14, face = "bold"),
        plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 10))
```

Comparação do VaR (99%) entre as Ações

Perda máxima esperada com investimento de R\$ 100.000



10. Conclusões

```
cat("\n## CONCLUSÕES PRINCIPAIS\n\n")
```

```
##
```

```
## ## CONCLUSÕES PRINCIPAIS
```

```
# Ação com maior risco
```

```
acao_maior_risco <- resultados_var$Acao[which.max(resultados_var$Perda_Maxima_R)]
```

```
maior_perda <- max(resultados_var$Perda_Maxima_R)
```

```
# Ação com menor risco
```

```
acao_menor_risco <- resultados_var$Acao[which.min(resultados_var$Perda_Maxima_R)]
```

```

menor_perda <- min(resultados_var$Perda_Maxima_R)

cat("1. **Maior Risco:** ", acao_maior_risco,
    " - Perda máxima de R$", format(round(maior_perda, 2),
                                     big.mark = ".", decimal.mark = ","), "\n\n")

## 1. **Maior Risco:** POM03 - Perda máxima de R$ 6.798,65

cat("2. **Menor Risco:** ", acao_menor_risco,
    " - Perda máxima de R$", format(round(menor_perda, 2),
                                     big.mark = ".", decimal.mark = ","), "\n\n")

## 2. **Menor Risco:** ITUB3 - Perda máxima de R$ 2.620,28

cat("3. **Sobre a Normalidade:** Retornos financeiros geralmente apresentam:\n")

## 3. **Sobre a Normalidade:** Retornos financeiros geralmente apresentam:

cat("    - Caudas mais pesadas que a distribuição normal\n")

##    - Caudas mais pesadas que a distribuição normal

cat("    - Assimetria (mais retornos negativos extremos)\n")

##    - Assimetria (mais retornos negativos extremos)

cat("    - Mesmo com rejeição da normalidade, o VaR histórico é robusto\n\n")

##    - Mesmo com rejeição da normalidade, o VaR histórico é robusto

cat("4. **Limitações do VaR Histórico:**\n")

## 4. **Limitações do VaR Histórico:**

cat("    - Assume que o passado se repete\n")

##    - Assume que o passado se repete

cat("    - Não captura eventos extremos não observados no período\n")

##    - Não captura eventos extremos não observados no período

cat("    - Não mede perdas além do percentil (tail risk)\n")

##    - Não mede perdas além do percentil (tail risk)

```

Nota Metodológica: Este relatório utiliza o VaR Histórico não-paramétrico, que não assume normalidade dos retornos. Os testes de normalidade servem para verificar se métodos paramétricos (VaR Delta-Normal) seriam apropriados. Para gestão de risco conservadora, o VaR Histórico é preferível quando a normalidade é rejeitada.