משפטים מאינפי 2 והוכחותיהם

מאת: הלל בן חנוך

קרדיט ליקיר ולניב

הערות על הסימון והמבנה

משפט: תוצאה מתמטית שהוכחתה במלואה.

טענה: הצהרה או תוצאה המשמשת כהנחה או כהשלמה להוכחה עיקרית.

למה: תוצאה עזר אשר מוכיחה חלקים מההוכחות.

הדגשה:

ההוכחות המופיעות כאן נועדו לרענון הזיכרון ולהבהרת הרעיונות המרכזיים, אך הן מניחות היכרות מוקדמת עם הרקע המתמטי הנדרש. כל ההוכחות כתובות בצורה מלאה, מובנת וברורה, תוך שימת דגש על דיוק והשלמות של הטיעונים המתמטיים.

יש לציין כי כל ההוכחות הנדרשות כלולות כאן. מעבר לכך, התוכן נבדק בקפידה, אך ייתכן ויימצאו בו שגיאות קלות, אשמח אם תעדכנו אותי אם מצאתם אחת.

תוכן העניינים

1 אינטגרל רימן

1.1 תנאי הכרחי לאינטגרביליות (פונקציה חסומה)

הצהרה:
אם פונקציה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא חסומה שם.

הוכחה.
נניח בשלילה שאין זה כך. על כן יש סדרת נקודות $\{x_l\}$ ב-$[a,b]$ (שונות) כאשר $f(x_l) \to \infty$.
תהי חלוקה T כלשהי של $[a,b]$. יש i_0, $1 \le i_0 \le k$ כך שבקטע Δx_{i_0} יש אינסוף איברים מהסדרה x_l.
נבחר נקודות ביניים ζ_i בכל קטע Δx_i, עבור $i \neq i_0$. 'בינתיים' יש לנו את הסכום $A = \sum_{i\neq i_0} \Delta x_i f(\zeta_i)$.
לכל מספר טבעי n, נוכל לבחור $\zeta_{i_0} \in \Delta x_{i_0}$ כך ש-$f(\zeta_{i_0}) > \frac{|A|+n}{\Delta x_{i_0}}$.
ואז, עבור סכום רימן המתאים:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta x_i &= \Delta x_{i_0} f(\zeta_{i_0}) + \sum_{i\neq i_0} \Delta x_i f(\zeta_i)\\ &\ge \Delta x_{i_0} f(\zeta_{i_0}) - \left|\sum_{i\neq i_0} \Delta x_i f(\zeta_i)\right|\\ &> \Delta x_{i_0} \cdot \frac{|A|+n}{\Delta x_{i_0}} - |A| = |A| + n - |A| = n\end{aligned}$$

בפרט, אם $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת חלוקות נורמליות, נוכל 'להצמיד' לכל T_n סכום רימן שגדול מ-n, וכך סידרת סכומי רימן הללו תתבדר ל-∞.
לפיכך, f אינה אינטגרבילית, וזו סתירה. □

1.2 קיום סכומי דרבו

הצהרה:
אם T_1, T_2 הן שתי חלוקות כלשהן של $[a,b]$, אז $\underline{S}(T_1) \le \overline{S}(T_2)$.

הוכחה.
תהי T החלוקה המתקבלת מאיחוד כל נקודות החלוקה של T_1 ו-T_2 (אפשר לסמן $T = T_1 \cup T_2$).
כמובן ש-T היא עידון של שתיהן.
לפי למות קודמות על התנהגות סכומי דרבו תחת העדנה, סה"כ נקבל:

$$\underline{S}(T_1) \le \underline{S}(T) \le \overline{S}(T) \le \overline{S}(T_2)$$

ולכן, $\underline{S}(T_1) \le \overline{S}(T_2)$. □

1.3 העדנה של חלוקות דרבו לפי תנודה

הצהרה:

נניח כי T חלוקה של $[a,b]$ ו-T' היא חלוקה המעדנת אותה ע"י הוספת P נקודות חלוקה נוספות. תהי f חסומה ב-$[a,b]$. אז:

$$\overline{S}(T) \geq \overline{S}(T') - P\lambda\Omega$$

$$\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T') + P\lambda\Omega$$

כאשר $\lambda = \lambda(T)$, ו-Ω היא התנודה של f ב-$[a,b]$.

הוכחה.

מאחר שכל עידון אינו מגדיל את הפרמטר λ ומאחר ש-Ω לא משתנה, נובע מאופיים של האי-שוויונות כי מספיק להוכיח כל אחד מהם למקרה שהעידון הוא ע"י הוספת נקודה אחת, כלומר $P = 1$.

הוכחות שני האי-שוויונות מקבילות, לכן נסתפק בהוכחת אי-שוויון עבור הסכום העליון. נניח שהנקודה הנוספת היא x^* בקטע Δx_{i_0}. מתקיים:

$$\begin{aligned}\overline{S}(T) - \overline{S}(T') &= M_{i_0}\Delta x_{i_0} - [M'(x^* - x_{i_0-1}) + M''(x_{i_0} - x^*)] \\ &\leq M_{i_0}\Delta x_{i_0} - [m_{i_0}(x^* - x_{i_0-1}) + m_{i_0}(x_{i_0} - x^*)] \\ &= \Delta x_{i_0}(M_{i_0} - m_{i_0})\end{aligned}$$

כעת נשתמש בכך ש-$\Omega \geq M_{i_0} - m_{i_0}$. זאת כי Ω היא התנודה ב-$[a,b]$ ואילו ההפרש הנ"ל הוא התנודה ב-Δx_{i_0} המוכל ב-$[a,b]$.

לכן, בסיוע $\Delta x_{i_0} \leq \lambda$ נקבל:

$$\overline{S}(T) - \overline{S}(T') \leq \Delta x_{i_0}\Omega \leq \lambda\Omega.$$

כלומר $\overline{S}(T) \leq \overline{S}(T') + \lambda\Omega$, וזה מוכיח את אי-השוויון עבור $P = 1$. $\square$

1.4 פונקציה מונוטונית היא אינטגרבילית

הצהרה:

פונקציה מונוטונית בקטע סגור $[a,b]$ אינטגרבילית בו.

הוכחה.

נניח בהגבלת הכלליות כי f לא יורדת. ברור ש-f חסומה, שכן לכל x בקטע מתקיים $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

יהי $\varepsilon > 0$. אם $f(a) = f(b)$, אז f קבועה והיא אינטגרבילית. אחרת, ניקח $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} > 0$.

אם $\lambda(T) < \delta$, אז:

$$\begin{aligned}\sum \omega_i \Delta x_i &= \sum (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \\ &< \delta \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \delta(f(b) - f(a)) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon\end{aligned}$$

הסכום $\sum (f(x_i) - f(x_{i-1}))$ הוא טור טלסקופי.

לפי תנאי רימן ($\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$), הפונקציה f אינטגרבילית. □

1.5 האינטגרל של פונקציה אינטגרבילית וחיובית

הצהרה:

אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx > 0$.

הוכחה.

נניח בשלילה שזה לא מתקיים. לכן, לפי משפט קודם, מתקיים $\int_a^b f(x)dx = 0$.

מכאן נובע: (א) לכל קטע $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, מתקיים $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. (ב) לכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא תת-קטע $\Delta \subseteq [a,b]$ כך ש-$\sup_{x\in\Delta} f(x) < \varepsilon$.

(א) נובע מ-$0 = \int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b f$, כאשר כל אינטגרל אי-שלילי. (ב) נובע מכך ש-$\lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(T) = 0$. אם לכל תת-קטע Δx_i היה מתקיים $M_i \geq \varepsilon$, היינו מקבלים $\overline{S}(T) = \sum M_i \Delta x_i \geq \varepsilon(b-a)$, בסתירה.

כעת נבנה סדרת קטעים שתוביל לסתירה.

לפי (ב), קיים קטע $[\alpha_1,\beta_1] \subseteq [a,b]$ כך ש-$\beta_1 - \alpha_1 < 1$ וגם $\sup_{x\in[\alpha_1,\beta_1]} f(x) \leq 1$.

נמשיך כך באינדוקציה: נבנה סדרה יורדת של קטעים סגורים $[\alpha_k,\beta_k]$ כך שלכל k:

$$[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}] \subseteq [\alpha_k,\beta_k], \quad \beta_k - \alpha_k < \frac{1}{k}, \quad \sup_{x\in[\alpha_k,\beta_k]} f(x) \leq \frac{1}{k}$$

לפי למת קנטור, קיימת נקודה יחידה x_0 המשותפת לכל הקטעים.

לפי הבנייה, $f(x_0) \leq \frac{1}{k}$ לכל k, ולכן בהכרח $f(x_0) \leq 0$.

זו סתירה לנתון ש-$f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$. □

1.6 משפט ערך הביניים האינטגרלי

הצהרה:

תהי $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$, ו-$g(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ עם סימן קבוע. אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$

כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

הוכחה.

הפונקציה $f \cdot g$ אינטגרבילית. נניח בהגבלת הכלליות כי $g(x) \geq 0$.

f רציפה בקטע סגור, ולכן חסומה ומקבלת בו מקסימום (M) ומינימום (m).

לפיכך, $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a, b]$.

מכיוון ש-$g(x) \geq 0$, נקבל $m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$.

לפי תכונות האינטגרל:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

אם $\int_a^b g(x)dx = 0$, כל האיברים מתאפסים והמשפט מתקיים לכל c.

אם $\int_a^b g(x)dx > 0$, נחלק ונקבל:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

הביטוי באמצע הוא ערך בין המינימום למקסימום של f.

מכיוון ש-f רציפה, לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

ומכאן נובע השוויון המבוקש. □

1.7 נפח גוף סיבוב

הצהרה:

נפח גוף הסיבוב סביב ציר x של פונקציה רציפה f בקטע $[a, b]$ הוא:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

הוכחה.

השטח שבין קטע קטן Δx לגרף הפונקציה אחראי לגוף סיבוב אשר את נפחו נסמן ב-$V_{\Delta x}$.

נסמן ב-$m_{\Delta x}$ את הערך המינימלי של $|f(x)|$ וב-$M_{\Delta x}$ את הערך המקסימלי של $|f(x)|$ בקטע Δx.

מתקיים:

$$\pi[m_{\Delta x}]^2\Delta x \leq V_{\Delta x} \leq \pi[M_{\Delta x}]^2\Delta x$$

אם T היא חלוקה של $[a, b]$, הנפח הכולל הוא $V = \sum_{i=1}^{k} V_{\Delta x_i}$. על כן:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi[m_{\Delta x_i}]^2 \Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{k} \pi[M_{\Delta x_i}]^2 \Delta x_i$$

הפונקציה $\pi[f(x)]^2$ אינטגרבילית. צד ימין של האי-שוויון הוא סכום דרבו עליון וצד שמאל הוא סכום דרבו תחתון עבור הפונקציה $H(x) = \pi[f(x)]^2$.
כאשר $\lambda(T) \to 0$, שני הצדדים שואפים ל-$\int_a^b H(x)dx$.
לפי משפט הסנדוויץ', בהכרח $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$. $\square$

2 סדרות וטורים של פונקציות

2.1 סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש

הצהרה:
נניח $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות המוגדרת בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$, ומתכנסת שם במ"ש ל-$f(x)$. נניח ש-$x_0 \in I$ והפונקציות f_n רציפות ב-x_0. אז f רציפה ב-x_0.

הוכחה.
יהי $\varepsilon > 0$.
מההתכנסות במ"ש, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
נבחר $n > N$ מסוים. f_n רציפה ב-x_0, לכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
נראה ש-δ זה מתאים גם עבור f.
אכן, נניח $|x - x_0| < \delta$. לפי אי-שוויון המשולש:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

שני האיברים הקיצוניים קטנים מ-$\frac{\varepsilon}{3}$ כי $n > N$. האיבר האמצעי קטן מ-$\frac{\varepsilon}{3}$ מרציפות f_n.
סה"כ:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ולכן f רציפה ב-x_0. □

2.2 סדרת פונקציות אינטגרביליות המתכנסת במ"ש

הצהרה:
נניח $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$, ומתכנסת שם במ"ש ל-$f(x)$. אז $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

במ"ש ב-$[a,b]$.

הוכחה.
ראשית, נוכיח ש-$f(x)$ אינטגרבילית. לפי משפט לבג, מספיק להראות שהיא חסומה ושקבוצת נקודות אי-ההרציפות שלה היא בעלת מידה 0.

חסימות:
מההתכנסות במ"ש, לכל $\varepsilon > 0$ (למשל $\varepsilon = 1$), קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < 1$.

נבחר $n_0 > N$. f_{n_0} אינטגרבילית ולכן חסומה, כלומר קיים $M > 0$ כך ש-$|f_{n_0}(x)| \leq M$.
לפי אי-שוויון המשולש:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + M$$

ולכן f חסומה.

מידה 0:
תהי A_n קבוצת נקודות אי-הרציפות של f_n. לפי לבג, A_n בעלת מידה 0.
אם x_0 היא נקודת רציפות של כל ה-f_n, אז גם f רציפה ב-x_0.
לכן, קבוצת נקודות אי-הרציפות של f מוכלת ב-$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
נשאר להוכיח שאיחוד בן מנייה של קבוצות ממידה 0 הוא בעל מידה 0.

למה 2.1. אם $A_1, A_2, \ldots$ הן קבוצות בעלות מידה 0, אז גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ בעלת מידה 0.

הוכחת הלמה.
יהי $\varepsilon > 0$. לכל n, נכסה את A_n בסדרת קטעים $\{I_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ שסכום אורכיהם קטן מ-$\frac{\varepsilon}{2^n}$.
האוסף $\bigcup_{n,i} I_{n,i}$ הוא איחוד בן-מנייה של קטעים המכסה את $\bigcup A_n$.
סכום אורכי כל הקטעים האלה חסום על ידי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

לכן $\bigcup A_n$ היא בעלת מידה 0. □

מכאן ש-f אינטגרבילית. ההוכחה שהאינטגרל של f_n מתכנס במ"ש לאינטגרל של f דומה להוכחה במקרה של פונקציות רציפות. □

---

3 טורי טיילור

3.1 שארית פיאנו

הצהרה:
נניח כי $f(x)$ גזירה n פעמים ב-x_0. אז:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

כאשר $p_n(x)$ הוא פולינום טיילור מסדר n של f סביב x_0.

הוכחה.
נוכיח באינדוקציה על n.

המקרה $n=1$ הוא הגדרת הנגזרת $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0}=f'(x_0)-f'(x_0)=0$.
נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח עבור $n+1$, כאשר f גזירה $n+1$ פעמים ב-x_0.
עלינו להוכיח:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0$$

זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, ולכן נשתמש בכלל לופיטל. נגדיר את המונה כ-$h(x)$ ואת המכנה כ-$g(x)$.

$$h'(x)=f'(x)-p_{n+1}'(x)=f'(x)-\left(f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$$

נשים לב שהביטוי בסוגריים הוא פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה $f'(x)$ סביב x_0. נסמנו $p_{n,f'}(x)$.
כמו כן, $g'(x)=(n+1)(x-x_0)^n$. לכן, מנת הנגזרות היא:

$$\frac{h'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(x)-p_{n,f'}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{f'(x)-p_{n,f'}(x)}{(x-x_0)^n}$$

הפונקציה $f'(x)$ מקיימת את תנאי המשפט עבור n (היא גזירה n פעמים ב-x_0).
לכן, לפי הנחת האינדוקציה, הגבול של השבר הימני הוא 0.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-p_{n,f'}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

ולכן גם הגבול המקורי הוא 0, כדרוש. □

תודה על הקריאה.