הלל בן חנוך

.1

בדוק אם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים במ"ש :

א.

$$(-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

נשתמש במבחן ה M-של ויירשטראס.

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

נבחר $M_n = \frac{1}{n^2}$ ומכיוון שזה טור עם $p = 2 > 1$ הוא מתכנס.

מסקנה :מצאנו טור מספרי חיובי ומתכנס $\sum M_n$ שחוסם את טור הפונקציות לכל x בתחום. לכן, לפי מבחן ה M-של ויירשטראס, הטור המקורי מתכנס במידה שווה בכל הממשיים.

ב.

$$(-1 \le x \le 1) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{1}{n^{3/2}}$$

זהו טור חזקות. נחשב את תחום ההתכנסות של הטור:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n+1^{\frac{3}{2}}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right|^{\frac{3}{2}} \to R = 1$$

נבדוק בקצות התחום:

בנקודה $x = 1$ מתקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

שהוא מתכנס

בנקודה $x = -1$ מתקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

ולפי לייבניץ הוא מתכנס.

מסקנה :על פי משפט (הרחבה של משפט אבל), אם טור חזקות מתכנס בקצות קטע ההתכנסות שלו, אז הוא מתכנס במ"ש בכל הקטע הסגור. מכיוון שהטור שלנו מתכנס בשני הקצוות הוא מתכנס במ"ש בכל הקטע $[1,-1]$.

ג.

$$(-\infty < x < \infty)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$$

מכיוון

$$n\sqrt{n}+x^2 \geq n\sqrt{n} \to \frac{1}{n\sqrt{n}+x^2} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

נבחר את $M_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ והוא מתכנס מכיוון ש$p = \frac{3}{2} > 1$

מסקנה :מצאנו טור מספרי חיובי ומתכנס $\sum M_n$ שחוסם את טור הפונקציות לכל x בתחום. לכן, לפי מבחן ה M-של ויירשטראס, הטור המקורי מתכנס במידה שווה בכל הממשיים.

ד.

$$(\frac{1}{4} \leq x \leq 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$$

נשתמש במבחן ה M-של ויירשטראס.

נרצה למצוא חסם לביטוי $g(x) = x^n + x^{-n}$ ולכן נגזור אותו.

$$g'(x) = nx^{n-1} - nx^{-n-1}$$

$$nx^{n-1} - nx^{-n-1} = 0 \to x^{2n} = 1 \to x = \pm 1$$

מכיוון שאנחנו בתחום החיובי $x = 1$. זו נקודת מינימום לכן המקסימום של הפונקציה מתקבל באחת הקצוות של הקטע, נבדוק

$$\mathrm{g}(4) = 4^n + 4^{-n}$$

$$\mathrm{g}\left(\frac{1}{4}\right) = 4^n + 4^{-n}$$

לכן החסם העליון של הפונקציה הוא

$$4^n + 4^{-n}$$

כלומר

$$\left|\frac{n+1}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})\right| \leq \frac{n+1}{\sqrt{n!}}(4^n + 4^{-n})$$

נבחר

$$M_n = \frac{n+1}{\sqrt{n!}}(4^n + 4^{-n})$$

נבדוק אם $\sum M_n$ מתכנס לפי מבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{\sqrt{n+1!}}(4^{n+1} + 4^{-n-1})}{\frac{n+1}{\sqrt{n!}}(4^n + 4^{-n})} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot 4\cdot\frac{1+4^{-2n-2}}{1+4^{-2n}}\right) = 0 < 1$$

ולכן $\sum M_n$ מתכנס ולכן הטור שלנו מתכנס במ"ש.

ה.

$$(-\infty < x < \infty)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x}{1+n^7x^2}$$

נחפש את נקודת המקסימום עבור $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^7x^2}$, נגזור

$$g'(x) = \frac{n^2(1-n^7x^2)}{(1+n^7x^2)^2} = 0 \to x = \pm\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} \to \left|g_n\left(\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\right)\right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

ולכן

$$\left|\frac{n^2x}{1+n^7x^2}\right| \le \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

נבחר את $M_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ והוא מתכנס מכיוון ש$p = \frac{3}{2} > 1$

מסקנה :מצאנו טור מספרי חיובי ומתכנס $\sum M_n$ שחוסם את טור הפונקציות לכל x בתחום. לכן, לפי מבחן ה M-של ויירשטראס, הטור המקורי מתכנס במידה שווה בכל הממשיים.

ו.

$$(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2})\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

זהו טור חזקות, נמצא את רדיוס ההתכנסות

$$\frac{n}{n+1} \to 1 \to R = 1$$

כלומר הטור מתכנס בקטע $(-1,1)$ מכיוון שהקטע $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ מוכל בו הטור מתכנס בו במידה שווה (כי הוא גם מתכנס בו והוא גם טור חזקות).

ז.

$$(-\infty < x < \infty)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

לפי משפט לייבניץ מתקיים ש

$$|R_N(x)| \le f_{N+1}(x)$$

כאשר

$$f_n = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

נמצא לו חסם על ידי גזירה

נסמן

$$t = x^2 \to f_n = \frac{t}{(1+t)^n}$$

נגזור

$$f_n' = \frac{1+t-nt}{(1+t)^{n+1}}$$

נשווה לאפס

$$1+t-nt = 0 \to t = \frac{1}{n-1} \to f_n\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{\frac{1}{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \le \frac{e^{-1}}{n-1}$$

ולכן

$$|R_N(x)| \le f_{N+1}(x) \le \frac{e^{-1}}{(N+1)-1} = \frac{e^{-1}}{N}$$

וכאשר $N \to \infty$ מתקיים $\frac{e^{-1}}{N} \to \infty$ ולכן גם $R_N(x) \to 0$ ולכן הטור מתכנס במידה שווה

ח.

$$\left(\frac{1}{2} \le |x| \le 2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$$

נשתמש במבחן ה M-שלויירשטראס. התחום הנתון הוא האיחוד של [-2, -1/2] ו-[1/2, 2].

כמו בסעיף ד', הפונקציה

$$\mathrm{g_n} = x^n + x^{-n}$$

$$|x^n + x^{-n}| \le |x^n| + |x^{-n}| \le 2^n + 2^{-n}$$

ולכן

$$|f_n| = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + 2^{-n})$$

נשתמש במבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}}(2^{n+1} + 2^{-n-1})}{\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + 2^{-n})} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \frac{1 + 4^{-n-1}}{1 + 4^{-n}} = 0$$

ולכן הטור

$$M_n = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + 2^{-n})$$

מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס במ"ש.

ט.

$$(-a \leq x \leq a) \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$$

נשתמש באי שוויון הידוע

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n\ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n\ln^2 n} = M_n$$

נבדוק האם הטור

$$\sum \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

מתכנס.

נפעיל את מבחן העיבוי

$$\sum 2^k \frac{a^2}{2^k \ln^2 2^k} = \sum \frac{1}{\ln 2^2} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\ln 2^2} \sum \frac{1}{k^2}$$

והטור הזה מתכנס ולכן גם הטור $\sum M_n$ מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס במידה שווה.

2.

מצא את רדיוס ותחום ההתכנסות:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

זהו טור חזקות נפעיל את מבחן דלמבר

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{\frac{(-1)^n x^n}{n!}}\right|=\frac{|x|}{n+1}\to 0\to R=\infty$$

ולכן הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{lnn}}$$

זהו גם טור חזקות, נפעיל את משהו של קושי

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{\ln n}{n}}\to 1\to R=1$$

ב$x=-1$ מלייבניץ הטור מתכנס וב$x=1$ הוא מתכנס לא יודע למה ולכן הטור מתכנס ב$[-1,1]$.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n-2)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}}{(2n-2)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n)}{2^n\cdot n!}x^n$$

נפעיל את מבחן דלמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)(2n)}{2^n\cdot n!}}{\frac{(2n+1)(2n+2)}{2\cdot 2^n\cdot n!\,(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n)}{(2n+1)}=\infty=R$$

ולכן הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$

ד.

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$$

זהו טור חזקות נפעיל את מבחן דלמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0=R$$

לכן הטור מתכנס רק ב$x=0$.

ה.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$

זהו טור חזקות נפעיל את מבחן דלמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=1=R$$

כאשר $x=1$ מתכנס וזה ברור כאשר $x=-1$ לייבניץ לכן הטור מתכנס ב$[-1,1]$.

ו.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

זהו טור חזקות נפעיל את מבחן דלמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}}=\infty$$

ולכן הטור מתכנס בתחום $(-\infty,\infty)$

ז.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot 100^n}$$

נסמן

$$y=(x-1)^2$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot 100^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4 100^n}\cdot(y)^n$$

נשתמש בזה של קושי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^4 100^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{n}}100}=\frac{1}{100}\to R=100$$

הטור בy מתכנס עבור $|y|\le 100$ לכן

$$|x-1|^2\le 100\to|x-1|\le 10\to -9<x<11$$

כאשר $x=-9,11$ הטור שווה ל

$$\sum\frac{1}{n^4}$$

ולכן מתכנס ולכן הטור מתכנס ב$[-9,11]$.

.3

$$\left|x^n \sin nx\,(1-x)^{\frac{1}{n}}\right| \leq x^n$$

והטור

$$\sum x^n = \frac{x}{1-x}\,\forall 0 \leq x < 1$$

ב $x = 1$ הטור שווה ל0 ולכן מתכנס, ולכן הטור מתכנס בהחלט בכל $[0,1]$, לעומת זאת

נבחר את

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$$

עכשיו נציב

$$\lim_{n\to\infty} x_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n = 1$$

$$1 - x_n = \frac{1}{n^2+1}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$nx_n = \frac{n^3}{n^2+1} = n - \frac{n}{n^2+1}$$

ולכן

$$\sin nx \to \sin n$$

$$\sup|f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = \left|x_n^n \sin nx_n\,(1-x_n)^{\frac{1}{n}}\right|$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}(\sup|f_n(x)|) \geq \lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)| = \lim_{n\to\infty}\sin n$$

הגבול של פונקצית הסינוס לא קיים ובוודאי אינו אפס ולכן הגבול של הסופרימום אינו יכול להיות 0.

.4

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log(n+2)}$$

יהי $N \geq 2$ כולשהו נסמן $k = N, m = 2N$

נבחר

$$x_N = \frac{\pi}{4N}$$

$$\frac{\pi}{4} < nx_N \le \frac{\pi}{2}$$

בתחום זה, פונקציית הסינוס חיובית ומונוטונית עולה, ולכן

$$\sin nx_N > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sin nx}{\log(n+2)}\right| = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sin nx}{\log(n+2)} > \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log(n+2)} > \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log(2N+2)}$$
$$= N\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log(2N+2)}$$

כלומר הראנו כי לכל N ניתן למצוא m, k, x_N כך ש

$$|S_m(x_N) - S_k(x_N)| \ge N\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log(2N+2)}$$

ומכיוון ש

$$\lim_{N\to\infty} N\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log(2N+2)} = \infty$$

מתקיים שקיים N_0 כך שלכל $N > N_0$ מתקיים

$$N\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log(2N+2)} \ge 1$$

ניקח $\varepsilon_0 = 1$ וסיימנו.

.5

חשבו את הסכומים הבאים

.א

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

זהו טור מהצורה $\sum nx^n$ עם $x = 1/2$. נתחיל מטור הנדסי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

כדי לקבל את הצורה הרצויה נגזור לפי x ונכפול ב-x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

עכשיו נציב $x = 1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

נגזור שוב לפי x ונכפול ב-x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1\cdot(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}$$
$$= \frac{(1-x)(1-x+2x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

עכשיו נציב $x = 1/3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{1/3(1+1/3)}{(1-1/3)^3} = \frac{1/3(4/3)}{(2/3)^3} = \frac{4/9}{8/27} = \frac{4}{9}\cdot\frac{27}{8} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$$

ג.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$$

נרשום את הביטוי $\frac{n}{n+1}$ כ-$1 - \frac{1}{n+1}$. הסכום הופך ל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

הטור הראשון הוא טור הנדסי אינסופי:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

עבור הטור השני, נזכור את טור מקלורן של $\ln(1-x)$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\text{for } |x| < 1$$

נציב $x = 1/2$:

$$-\ln(1-1/2) = -\ln(1/2) = \ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/2)^k}{k}$$

הטור השני שלנו הוא:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

נבצע שינוי אינדקס $k = n+1$ $(n = k-1)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\ln(2)$$

לכן, הסכום הכולל הוא ההפרש בין שני הטורים:

$$2 - 2\ln(2)$$

ד.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}$$

נשתמש בזהות

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy$$

זו זהות נכונה לכל *n ≥ 1* אפשר גם לבדוק אותה על ידי גזירה, אבל מקובל להשתמש בה לצורך טורים.

נכתוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\cdot\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy\right)$$

נחליף סדר סכום ואינטגרל (מותר כי הכול חיובי):

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xy)^{n-1}}{3^n} dxdy$$

$$\frac{(xy)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{xy}{3}\right)^{n-1}$$

אז הסכום הפנימי הוא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xy)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{xy}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{xy}{3}} = \frac{1}{3 - xy}$$

אז התשובה היא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{3 - xy} dxdy$$

ה.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)!}$$

נזכור ש

$$sinhx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

שזה בדיוק המבנה שלנו — רק שחסר לנו עוד משהו.

אם נציב *x = 1/2* נקבל:

$$sinh\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n \cdot 2 \cdot (2n+1)!}$$

נכפול 2 שני הצדדים:

$$2sinh\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)!}$$

וזה בדיוק הטור שלנו!

תשובה סופית:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)!} = 2sinh\left(\frac{1}{2}\right)}$$