מד"ר לינארית סדר שני

מקדמים קבועים

כאשר יש מד"ר לינארית מסדר שני הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$y'' + ay' + by = 0$$

נוכל לנחש פתרון $y = e^{rx}$ ואז נקבל משוואה אופיינית:

$$r^2 + ar + b = 0$$

ונוכל לחלק למקרים. נתייחס למקרה בו השורשים מרוכבים שהוא יותר מעניין. במקרה זה:

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\underbrace{a^2 - 4b}_{<0}}}{2} = \frac{a}{2} \pm i\sqrt{4b - a^2} = \alpha \pm \beta i$$

כאשר סימנו את זה בצורה נוחה יותר. כעת הפתרון ההומוגני הינו:

$$y = \left\{ e^{(\alpha+\beta i)x}, e^{(\alpha-\beta i)x} \right\}$$

ואז נוכל לפתח את הביטויים לפי זהות אוילר $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ונקבל:

$$y = C_1\left(e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)\right) + C_2\left(e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)\right) =$$

$$e^{\alpha x}\left((C_1 + C_2)\cos(\beta x) + (C_1 - C_2)\, i\sin(\beta x)\right) =$$

כעת נוכל לבחור מקדמים $A, B \in$ מקדמים מרוכבים $C_1 = \overline{C_2} = \frac{A-Bi}{2},$ ואז נקבל:

$$C_1 + C_2 = A,\ i(C_1 - C_2) = -Bi^2 = B$$

ואז נקבל פתרון ממשי:

$$y_H = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$\square$