



מבחן מתכונת 3 - כיתה י' תשפ"ה

שאלון 035572

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
משך המבחן: שעתיים וארבעים וחמש דקות.
מבנה השאלון: במבחן 2 פרקים. יש לענות על 3 שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק.
מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
הבהרות: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק א' - וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית ומספרים מרוכבים

1. הנקודה C נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(12,0)$ ו- $B(0,-5)$. מהנקודה C מעבירים אנך לציר ה- x החותך אותו בנקודה D. הנקודה O הינה ראשית הצירים.
 - א. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות חיתוך הישרים OC ו- BD.
 - ב. מצאו את שיעורי נקודת מפגש התיכונים של משולש ABO. הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאתם.
 - ג. נקודת החיתוך של המקום הגיאומטרי שמצאתם עם ציר ה- x הינו מרכזו של מעגל ברדיוס $\sqrt{80}$. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל זה שווה למרחק שלהן מהישר $x = -8$.
2. נתון כי הבסיס של פרמידה SABCD הוא מעוין (S קודקוד הפרמידה).

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DS} = \underline{w}$, O - נקודת מפגש אלכסוני המעוין.

נתון כי: $\angle CDA = 60^\circ$, $|\underline{v}| = |\underline{w}|$, $\underline{v} \perp \underline{w}$, $\underline{u} \perp \underline{w}$. בנוסף $\overrightarrow{BE} = t \cdot \overrightarrow{BS}$, פרמטר t ($0 < t < 1$).

 - א. הביעו את הווקטורים \overrightarrow{CE} , \overrightarrow{AE} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- t.
 - ב. נתון: $DS \parallel OE$. מצאו את גודלו של הפרמטר t.
 - ג. הוכיחו כי: $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{CE}$.

נתון: $A(6, \sqrt{12}, 0)$, $D(0,0,0)$, קודקוד C נמצא על ציר ה- y וקודקוד S נמצא בכיוון החיובי של ציר ה- z.

 - ד. מצאו את משוואת המישור SAB.
 - ה. חשבו את נפח הפרמידה ABCE.



3. בסדרה הנדסית, שאיבריה שונים זה מזה, שווה האיבר הראשון ל $-i$ והאיבר השני ל z (מספר מרוכב).

א. רשמו את ששת האיברים הראשונים בסדרה (הביעו באמצעות z , במידת הצורך).

ב. הוכיחו כי סכום ששת איברי הסדרה הראשונים שווה $\frac{z^6 + 1}{z + i}$.

ג. מצאו את כל פתרונות המשוואה: $z^6 = -1$ (מספר מרוכב).

ד. מצאו את כל פתרונות המשוואה: $1 + zi - z^2 - z^3i + z^4 + z^5i = 0$ (מספר מרוכב).

ה. הסבירו את הדומה והשונה בין הפתרונות שמצאתם בסעיפים ג' ו ד'.

ו. יוצרים שתי צורות סגורות: הראשונה ע"י חיבור כל הנקודות המייצגות את פתרונות המשוואה

שהתקבלו בסעיף ג' (על פי סדר קבלתם). השנייה ע"י חיבור הנקודות המייצגות את פתרונות המשוואה

שהתקבלו בסעיף ג' (על פי סדר קבלתם) פרט לפתרונות המהווים מספרים ממשיים טהורים או דמיוניים

טהורים (אם יש כאלו).

פי כמה גדול שטח הצורה הראשונה משטח הצורה השנייה ?

פרק ב' - חדו"א ואלגברה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, בעיות גדילה ודעיכה

4. נתונה הפונקציה $f(x) = ae^{1-x} - 1$, פרמטר a , $a > 1$.

בטאו את תשובותיכם באמצעות a , במידת הצורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

(4) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$ נחתכים כאשר $x = 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

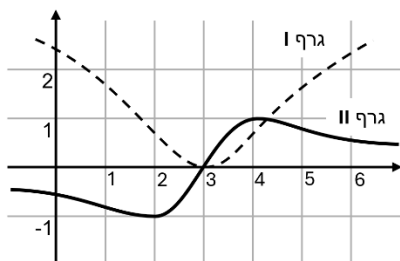
מצאו את ערכו של הפרמטר a .

ד. נתון כי לפונקציה $g'(x)$ (פונקציית הנגזרת של $g(x)$) יש נקודת קיצון כאשר $x = 1 + \ln(2)$.

חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$.



5. נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{2(x+b)}{x^2-6x+10}$, $f(x) = \ln(ax^2+2bx+10)$, a ו- b פרמטרים.



בסקיצה שלפניכם מתוארים הגרפים של שתי פונקציות אלה.

- מצאו ונמקו איזה מהגרפים מתאר כל אחת מהפונקציות.
- בהסתמך על הסקיצה קיבעו את ערכי הפרמטרים: a ו- b .
- נתון כי: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

חשבו את השטח הכלוא בין הפונקציה $h(x)$ לציר ה- x בתחום בין $x=2$ ולבין $x=5$.

ד. נתון כי עבור $x=3$ שיפוע הגרף $g(x)$ שווה ל-2.

בהתבסס על הסעיפים הקודמים וללא חקירה נוספת, שרטטו את גרף הפונקציה: $k(x) = \ln(1-g'(x))$.

בהצלחה!



תשובות סופיות

1. א. $y = \frac{5}{24}x - \frac{5}{2}$ ב. $\left(4, -\frac{5}{3}\right)$ והוכחה ג. $y^2 = 40x$

2. א. $\overline{AE} = t\overline{v} + (1-t)\overline{u} + t\overline{w}$, $\overline{CE} = (t-1)\overline{v} - t\overline{u} + t\overline{w}$ ב. $t = \frac{1}{2}$

ג. הוכחה. ד. $2x + \sqrt{3}z - 12 = 0$ ה. 24

3. א. $-i, z, z^2i, -z^3, -z^4i, z^5$ ב. הוכחה.

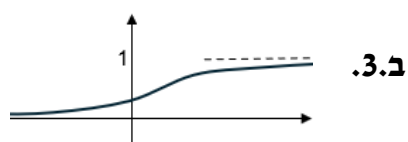
ג. $z_0 = \text{cis } 30^\circ, z_1 = \text{cis } 90^\circ, z_2 = \text{cis } 150^\circ, z_3 = \text{cis } 210^\circ, z_4 = \text{cis } 270^\circ, z_5 = \text{cis } 330^\circ$

ד. $z_0 = \text{cis } 30^\circ, z_1 = \text{cis } 90^\circ, z_2 = \text{cis } 150^\circ, z_3 = \text{cis } 210^\circ, z_4 = \text{cis } 330^\circ$

ה. הסבר. ו. $\frac{3}{2}$

4. א. כל x ב. $y_{x \rightarrow +\infty} = -1$ א.3. יורדת בכל ת"ה

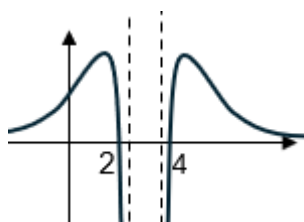
א.4. $(1 + \ln a, 0), (0, ae - 1)$ ב.1. כל x



ב.2. $y_{x \rightarrow +\infty} = 1, y_{x \rightarrow -\infty} = 0$

ג. 2 ד. 0.0786

5. א. גרף I: $f(x)$, גרף II: $g(x)$ ב. $a = 1, b = -3$



ג. 1.5354 ד.