

Euler formula: $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

$\cos(\alpha) = [\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)]/2, \quad \sin(\alpha) = [\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)]/(2i).$

$1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2), \quad 1 + \cos(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha/2), \quad \sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2 \sin(\alpha/2 \pm \beta/2) \cos(\alpha/2 \mp \beta/2).$

$\cos(\alpha) \pm \cos(\beta) = 2 \sin(\alpha/2 \pm \beta/2) \cos(\alpha/2 \mp \beta/2), \quad \sin(\alpha) \cos(\beta) = [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]/2.$

$\sin(\alpha) \sin(\beta) = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2, \quad \cos(\alpha) \cos(\beta) = [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]/2.$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta), \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta).$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{[\tan(\alpha) + \tan(\beta)]}{[1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)]}, \quad \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{[1 - \tan^2(\alpha)]}, \quad \cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}.$

שיטת וריאצית הפרמטרים:

מציאת פתרון פרטי (עבור

$g(x)$ על סמך פתרונות

ללינארית-הומוגנית y_1, y_2 :

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$u_1(x) = - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} dx \qquad \int f'g = fg - \int g'f$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} dx$$

שיטות אינטגרציה:

אינטגרציה בחלקים:

1. מציבים $t = f(x)$, ולכן: $dt = f'(x)dx$
2. מחליפים את $f'(x)dx$ ב- dt ואת $f(x)$ ב- t .
(אם ההצבה לא עוזרת, אולי כדאי להביע את x בעזרת t)
3. פותרים את האינטגרל על המשתנה t .
4. חוזרים להצבה, ומחליפים בין t ל- $f(x)$.

פירוק לשברים חלקיים:

תהי פונקציה רציונלית מהצורה:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}$$

1. מחלקים פולינומים כך שדרגת המכנה תהא גדולה ממש מדרגת השארית.
2. מפרקים את הפולינום לגורמים (לינאריים או ריבועיים).
3. לכל גורם לינארי מריבוי k , מציבים: $\frac{A_0}{x-a}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$
ולכל גורם ריבועי (שאינו פריק) מריבוי k מציבים:
 $\frac{B_0x+C_0}{x^2+bx+c}, \dots, \frac{B_k+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$
4. עושים מכנה משותף ומוצאים את הקבועים, זאת בשתי דרכים:
a. לכל חזקה מגדירים משוואה בה הנעלמים הם הקבועים, ופותרים אותה.
b. מציבים ערכים ספציפיים של x ובכך מוצאים כל קבוע בנפרד.

טורי טיילור ידועים:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ for all } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ for all } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \text{ for } |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ for all } x$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ for all } x$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ for all } x$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \text{ for } |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ for } |x| \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{for } |x| < 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

שינויי משתנים חשובים

אם רואים פונקציה שמכילה ביטוי של קו ישר נוח להגדיר:

$$z = ax + by + c$$

אם נתקלים בביטוי מהצורות האלה, כדאי לשים לב כי:

$$y'x + y = (xy)' = z' \\ \text{לכן נגדיר } z = xy$$

$$y''y + (y')^2 = (yy')' = z' \\ \text{ולכן נגדיר } z = yy'$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \Rightarrow$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

$$\int \sec x dx = \ln(\tan x + \sec x) + c$$

$$\int \csc x dx = \ln(\tan(x/2)) + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c$$

$$\int \cot x dx = \ln(\sin x) + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right)$$

$$\int x^n e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

אינטגרלים ידועים:

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + c$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \cdot \frac{1}{1-n} (x-a)^{1-n} + c$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right) + \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} \right| \text{ for } a > 0, \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

המלצות כלליות לפתרון מד"ר

חשוב לשים לב לקשרים בין גורמים שונים בתוך המד"ר! הם יכולים לעזור לפתור אותה!

לפעמים משתלם לסדר את המשוואה בסדר שונה, כדי לקבל פרספקטיבה שונה על המד"ר.

לפעמים כדאי להחליף בין משתנה לפונקציה: $y(x) \leftrightarrow x(y)$, או יותר מכך, להגדיר פונקציה חדשה ומשתנה חדש (שכוללים בתוכם גם את x וגם את y) ואז על פיהם לפתור את המד"ר.

לא מומלץ להתעכב על מציאת ג"א, לפעמים יש שיטות טובות יותר.

כאשר פותרים מד"ר בעזרת טורי טיילור, לעיתים אין צורך להציב את הטור, אלא ניתן להשיג את נוסחת המקדמים ישירות דרך המד"ר.

| מקרה | פתרון ידוע |
|--------------------------|--------------|
| $xQ(x) + P(x) = 0$ | $y = x$ |
| $mP(x) + Q(x) + m^2 = 0$ | $y = e^{mx}$ |