תרגיל 11! פתרון?

July 2, 2025

1) נתון סליל ארוך עם n כריכות למטר בעל רדיוס a, וזרם. כורכים סביב הסליל לולאה עם נגד R.

א. אם הזרם עולה בקצב קבוע, באיזה כיוון יזרום הזרם בנגד? האם התשובה תשתנה אם מורידים את הזרם בקצב קבוע? כאשר הזרם עולה, אז השטף המגנטי דרך הלולאה עולה (כאשר כיוונו ימינה), ולכן על פי חוק לנץ יזרום זרם שיצור שדה מגנטי שמאלה, שזה אומר שיזרום בו זרם בכיוון הפוך מהזרם בסליל.

כאשר הזרם בסליל יורד, אז השטף המגנטי ייקטן, ולכן הסליל ינסה לפצות על זה, ויזרים זרם באותו כיוון של זרם הסליל.

ב. הזרם בסליל קבוע I_0. מוציאים את הסליל, הופכים אותו ומכניסים אותו מחדש. כמה מטען עבר בנגד בזמן כל התהליך? תחילה נמצא את המתח שנוצר כתוצאה מהוצאת הלולאה:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

כעת נזכר ש $\frac{V}{R} = I = \frac{dQ}{dt}$, ולכן נציב זאת:

$$\Rightarrow R \cdot \frac{dQ}{dt} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \int_0^t$$

$$= R \cdot \Delta Q = -\left(\phi_{B,t} - \phi_{B,0}\right) = \phi_{B,0} = a^2\pi \cdot B = a^2\pi\mu_0 n I_0$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \frac{a^2\pi\mu_0 n I_0}{R}$$

זה עבור הוצאת הלולאה, כאשר בהכנסה ייקרה אותו תהליך, אך בצד הפוך, ולכן סך הכל:

$$\Delta Q_{total} = 2 \cdot \Delta Q = \frac{2a^2\pi\mu_0 n I_0}{R}$$

ג. נתון תיל אינסופי עם זרם I, ולולאה ריבועית $(a \times a)$, בעלת התנגדות R במרחק d מהתיל. חותכים את התיל. מהו כיוון הזרם בלולאה? כמה מטען עבר בנקודה מסוימת בלולאה? כאשר חותכים את התיל נפסק הזרם והשדה המגנטי, ולכן גם השטף המגנטי דרך הלולאה, ולכן:

$$|\varepsilon| = \frac{d}{dt}\left(\phi_B\right)$$

נחשב את השטף המגנטי:

$$\phi_B = \int_d^{a+d}\int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dx \cdot dy = \int_d^{a+d} \frac{a\mu_0 I}{2\pi y} dy = \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right)$$

ולכן:

$$\varepsilon = IR = R \cdot \frac{dQ}{dt} = -\frac{d\phi_B}{dt} \int_0^t$$

$$= R \cdot \Delta Q = -\left(\phi_{B,t} - \phi_{B,0}\right) = \phi_{B,0} = \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \frac{a\mu_0 I}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right)$$

מכיוון שהתיל יוצר שדה מגנטי יוצא מן הלוח, אז הלולאה תנסה לפצות על השדה שנעלם, ולכן הזרם יהיה נגד כיוון השעון כדי ליצור שדה מגנטי יוצא מן הלוח.

2) לוחית ריבועית שחור ($l \times l$) והתנגדות (R), יוצאת במהירות v מאזור בעל שדה מגנטי B.
המרחק בין הפינה הימנית של הלוח לסוף האזור הוא x.

א. בזמן dt, מהו השטח שעוזב את השדה בזמן זה? בהנחה ש $l < \sqrt{2x^2}$ (כלומר, חצי מהלוחית כבר יצא), אז בסיס המשולש שנותר הוא $2x$, ובזמן dt יוצא טרפז. נראה ששבגלל הזמן הקצר ניתן להתייחס אליו כמלבן, על ידי שנחסום אותו פעם אחת במלבן בעל בסיס $2x$ ורוחב dx:

$$dA = 2x \cdot dx = 2x \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = 2xv \cdot dt$$

פעם שנייה נחסום אותו במלבן בעל בסיס $2x - dx$ ורוחב dx:

$$dA = (2x - dx)\, dx \approx 2xdx = 2xv \cdot dt$$

חסמנו אותו פעם אחת במלבן לפי הבסיס הגדול, ששטחו בהכרח גדול מהטרפז, ופעם שנייה במלבן לפי הבסיס הקטן (ששטחו בהכרח קטן מהטרפז), וקיבלנו את אותו השטח, ולכן זה בהכרח שטח הטרפז, והשטח שעוזב את השדה בזמן זה.
נשים לב שגם אם חצי מהלוחית עדיין לא יצא החישוב אותו הדבר, אלא שצדדי בסיסי הטרפז מתחלפים.

ב. מהו הזרם שנוצר בלולאה הריבועית ומה כיוונו? נחשב קודם את גודל הזרם:

$$|\varepsilon| = R \cdot |I| = \frac{d\phi_b}{dt} = \frac{dB \cdot A}{dt} = B \cdot \frac{dA}{dt} = 2xvB$$

$$\Rightarrow |I| = \frac{2xvB}{R}$$

מכיוון שהשטף יורד, אז הזרם ירצה להכניס שדה מגנטי לכיוון הלוח, ולכן יזרום בכיוון השעון.

ג. מהו הכוח שצריך להשקיע על מנת שהלולאה הריבועית תזוז במהירות קבועה? נחשב מה הכוח המגנטי שפועל על כל שוק במשולש:

$$|F_B| = q\vec{v} \times \vec{B} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B} = I \cdot l \cdot B = \frac{2xvB^2}{R} \cdot \left(\sqrt{x^2 + x^2}\right) = \frac{2\sqrt{2}x^2 vB^2}{R}$$

לפי כלל יד ימין, כל כוח יהיה במישור הדף xy, מאונך לצלע ולתוך הלוחית. משיקולי סימטריה, היטל הכוח בציר y מתקזז, ולכן נחשב רק את היטל הכוח בציר x:

$$\sum F = 2 \cdot F_{B,x} = 2 \cdot F_B \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{4x^2 vB^2}{R}$$

ד. נניח כי בהתחלה $x(0) = x_0$. הוכח שהעבודה שמתבצעת בזמן שהלולאה עוזבת את האזור כאשר $x(t) = 0$, שווה לאנרגיה שמתבזבזת על הנגד. נחשב את העבודה לפי הכוח מסעיף ג':

$$W = \int_{x_0}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{x_0}^{0} -\frac{4x^2 vB^2}{R} dx = \left[-\frac{4x^3 vB^2}{3R}\right]_{x_0}^{0} = \frac{4x_0^3 vB^2}{3R}$$

נחשב את ההספק של הזרם בנגד:

$$P_x = I^2 R = \left(\frac{2xvB}{R}\right)^2 R = \frac{4x^2v^2B^2}{R}$$

כעת נסכום את ההספק כתלות ב t כדי לגלות את האנרגיה:

$$|U| = \int_{t_0}^{t_f} \frac{4x^2v^2B^2}{R} \cdot dt \overset{\frac{dx}{dt}=v}{=} \int_0^{x_0} \frac{4x^2v^2B^2}{R} \cdot \frac{dx}{v} = \frac{4x_0^3vB^2}{3R}$$

3) בסילונאיד אינסופי (R, n) הזרם גדל לינארית כ $I(t) = ct$. מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

נזכור ש:

$$-\frac{d\phi_B}{dt} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

נזכור שבתוך סילונאיד השדה המגנטי הוא $\mu_0 In$, ומחוצה לו הוא מתאפס. לכן, ככל שהזרם גדל, השטף המגנטי בתוך הסילונאיד גדל, אך מחוצה לו נשאר אפס, ולכן עבור $r < R$, נוכל לחשב את השינוי בשדה המגנטי, וכתוצאה מכך גם את השדה החשמלי:

$$-\frac{d}{dt}\left(\iint_A B \cdot da\right) = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 \mu_0 ct \cdot n\right) = -\pi r^2 \mu_0 c \cdot n = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{\mu_0 cnr}{2}$$

עבור $R > r$, החישוב יהיה אותו הדבר, אך נזכור שקיים שטף רק בתוך הסילונאיד:

$$-\frac{d}{dt}\left(\iint_A B \cdot da\right) = -\frac{d}{dt}\left(\pi R^2 \mu_0 ct \cdot n\right) = -\pi R^2 \mu_0 c \cdot n = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{\mu_0 cnR^2}{2r}$$

כיוון השדה יהיה הפוך לכיוון הזרם בסילונאיד.

4) נתונה לולאה עגולה עם רדיוס a בתוך שדה מגנטי משתנה $B(t) = B_0 + bt$.

א. מצא את השטף המגנטי דרך הלולאה בזמן $t = 0$. בזמן כללי t מתקיים:

$$\phi_B(t) = \iint_A \vec{B}(t) \cdot d\vec{a} = B(t) \cdot \iint_A da = B(t)\, a^2\pi$$

כאשר $t = 0$ יתקיים:

$$\phi_B(0) = B_0 a^2 \pi$$

ב. מצא את הכא"מ הנוצר בלולאה. על פי חוק פארדיי:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -a^2\pi \cdot \frac{dB(t)}{dt} = -a^2 b\pi$$

ג. מצא את הזרם הנוצר בלולאה ואת כיוונו. בהנחה שהתנגדות הלולאה היא R, אז:

$$|I| = \frac{|V|}{R} = \frac{a^2 b\pi}{R}$$

הזרם יפעל כדי ליצור שדה מגנטי הפוך ל $B(t)$ שגדל עם הזמן, ולכן הוא ילך נגד כיוון השעון.

ד. מצא את ההספק. ההספק נתון על ידי:

$$P = I^2 R = \left(\frac{a^2 b\pi}{R}\right)^2 R = \frac{a^4 b^2 \pi^2}{R}$$

5. טבעת ריבועית עם צלע a, מסה m והתנגדות R נופלת מגובה h, לתוך אזור עם שדה מגנטי B לתוך הדף. מצא את h עבורו מהירות הטבעת בזמן כניסתה לשדה תהיה קבועה. מה יקרה לאחר שכל הטבעת תכנס לשדה?

נסמן את מהירות הטבעת ברגע הכניסה כ v_0. ברגע שהטבעת מתחילה להיכנס לשדה, אז בזמן dt היא עוברת מרחק dx, כך שהשטח דרכו עובר שדה מגנטי הוא:

$$dA = a \cdot dx = a \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = a v_0 dt$$

ולכן השינוי בשטף המגנטי הוא:

$$\frac{d\phi_b}{dt} = \frac{d\left(A \cdot B\right)}{dt} = B \cdot \frac{dA}{dt} = Bav_0$$

כתוצאה מהשינוי בשטף הקבוע בזמן, יווצר כא"מ קבוע בגודל זהה, וכתוצאה ממנו יווצר זרם קבוע:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Bav_0}{R}$$

הזרם ינסה להקטין את השטף המגנטי הגדל, ולכן הוא יפעל כנגד כיוון השעון.
נשים לב שהזרם מפעיל בו זמנית כוח לורנץ על הטבעת - הכוח על הצלע התחתונה ידחוף את הטבעת למעלה, הכוח על הצלעות בצדיים יבטל אחד את השני והצלע העליונה לא נמצאת בתוך השדה עדיין ולא תגרום לכוח לורנץ.
כעת נוכל לדרוש שיווי משקל של הכוחות:

$$\sum F = 0$$

$$\Rightarrow F_B = mg$$

$$= a \cdot I \cdot B = \frac{B^2 a^2 v_0}{R} = mg$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{Rmg}{B^2 a^2}$$

כעת נדרוש שיהיה שימור אנרגיה בין רגע הפלת הטבעת לבין רגע לפני כניסתה לשדה:

$$mgh = \frac{mv_o^2}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} = \left(\frac{Rmg}{B^2 a^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = \left(\frac{Rm}{B^2 a^2}\right)^2 \cdot \frac{g}{2}$$