Math-Wiki

88-112 לינארית 1 תיכוניסטים קיץ תשעא/מערך תרגול/1

חזרה למערכי התרגול

שיעור ראשון

שדות (מה שנעשה בהרצאה אפשר לדלג)

הגדרה: שדה.

תרגיל 1.3 סעיף ג'

[בד"כ נעשה בהרצאה!]

יהי שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו את הטענה הבאה: $\forall a\in\mathbb{F}: 0\cdot a=0$, כאשר 0 הינו הסימון לאיבר הנייטרלי החיבורי.

פתרון

ראשית נשים לב שלפי הנתונים ניתן להניח שאקסיומות השדה מתקיימות.

יהא $a\in\mathbb{F}$. צריך להוכיח כי $0\cdot a=0$

לפי תכונה (4) [ניטרליות 0 לחיבור] מתקיים ש $0+0=0$

לכן $0\cdot a=(0+0)\cdot a$

לפי תכונה (7) [פילוג] מתקיים בנוסף ש$0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a$ (השתמשנו בעצם בתכונה (7) לאחר שהפעלנו עליה את תכונה (2))

לפי תכונה (5) [קיום נגדי] לאיבר $0\cdot a\in\mathbb{F}$ קיים איבר נגדי. נחבר אותו לשני צידי המשוואה לקבל $0\cdot a+(-(0\cdot a))=(0\cdot a+0\cdot a)+(-(0\cdot a))$

4444 לפי תכונה (3) [קיבוציות] ניתן להחליף את סדר הסוגריים מימין ולקבל $0\cdot a+(-(0\cdot a))=0\cdot a+(0\cdot a+(-(0\cdot a)))$

עוד לפי תכונה (5) [תכונת הנגדי] יחד עם תכונה (4) [נטרליות 0 לחיבור] מתקיים ש$0 \cdot a = 0$ בדיוק כפי שרצינו להוכיח.

תרגיל

הוכיחו שבשדה ל0 אין הופכי.

פתרון

מכיוון ש0 כפול דבר שווה ל0.

תרגיל 1.3 סעיף ו'

יהי שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו את הטענה הבאה: $\forall a \in \mathbb{F} : -(-a) = a$. (כלומר, הנגדי של הנגדי הוא האיבר עצמו)

פתרון

יהא a בשדה צריך להוכיח כי $(-a) + a = 0$ [זה הגדרת נגדי].

כיוון החיבור חילופי נקבל כי $(-a) + a = a + (-a)$. כיוון ש $a + (-a) = 0$ לפי הגדרת נגדי של a, סיימנו.

תרגיל 1.3 סעיף ז'

יהי שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו את הטענה הבאה: $\forall a \in \mathbb{F} : (-1) \cdot a = -a$. (כלומר הנגדי של האיבר הנייטרלי הכפלי כפול a הינו הנגדי של a)

פתרון

$-a$ זה סימון לנגדי של a. לכן מה שבעצם צריך להוכיח זה ש- $(-1) \cdot a$ הוא הנגדי של a, לכן הם שווים (נגדי יש אחד).

מתוך תכונות (7),(5) וסעיף ג' שהוכחנו לעיל, $0 = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a$

לפי תכונה (4) קיבלנו $0 = a + (-1) \cdot a$

לכן קיבלנו ש- $(-1) \cdot a$ הוא הנגדי של a כפי שרצינו.

תרגיל

הוכיחו שבשדה מתקיים כי $(-1)(-1)=1$

תרגיל

```
בד"כ נעשה בהרצאה!
```

יהא $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו כי אין לו מחלקי אפס. כלומר לא קיימים $a,b\in\mathbb{F}$ שונים מאפס כך ש $ab=0$ (באופן שקול: אם $ab=0$ אז בהכרח אחד מהם שווה 0)

פתרון

נניח $ab=0$. צ"ל שאחד מהם אפס. אם $a=0$ סיימנו אחרת $a\neq 0$ ולכן קיים לו הופכי a^{-1}. נכפיל את ההופכי של a בשני האגפים ונקבל $b=a^{-1}ab=a^{-1}0=0$ וסיימנו.

תרגיל 2.3 סעיף א'

```
[בד"כ נעשה בהרצאה!]
```

יש להוכיח שקבוצת הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ אינה שדה.

פתרון

אין איבר נייטרלי לחיבור: $\forall n,k\in\mathbb{N}:n+k>n$, ואילו האיבר הנייטרלי היה צריך לקיים $n+0=n$.

תרגיל

הוכיחו שבשה יש רק איבר אחד שנטרלי לכפל. (כלומר, איבר היחידה הוא יחיד)

תרגיל

הוכיחו שבשדה לכל איבר יש הופכי יחיד.

תרגיל

הוכיחו שבשדה מתקיים צמצום בכפל. כלומר, אם ab=ac כאשר a לא 0, אז b=c.

תרגיל 2.3 סעיף ג'

```
[בד"כ נעשה בהרצאה!]
```

הגדרה: נגדיר את הקבוצה הבאה: $\mathbb{Z}_n=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{n-1}\}$.

עובדה: עבור n=p ראשוני הקבוצה $\mathbb{Z}_p=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{p-1}\}$ הינה שדה ביחס לחיבור וכפל מודלו p. הניטרלי לחיבור הוא 0 והנטרלי לכפל הוא 1. למשל $\mathbb{Z}_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$

תרגיל: הוכיחו כי ש$\mathbb{Z}_n$ אינו שדה כאשר n מספר פריק (כלומר קיימים טבעיים כך ש n=mk) ביחס לפעולות החיבור והכפל מודולו n.

פתרון

לפי הנתונים קיימים $0<k,m<n$ כך ש $mk=n$. לפיכך, לפי ההגדרה,

$$\overline{m}\overline{k}=n \mod n=\overline{0}.$$

כלומר יש מחלקי אפס. כיוון שבשדה אין מחלקי אפס נסיק כי $\mathbb{Z}_n$ אינו שדה במקרה זה.

תרגיל 2.6

הסבר מדוע $\mathbb{Z}_p$ אינו תת שדה של $\mathbb{R}$

פתרון

תת שדה הינו תת קבוצה של איברים, תחת **אותן** פעולות כמו בשדה. לכן $(p-1)+1=p\neq 0$ ולכן אין סגירות לחיבור וזה אינו תת שדה.

מרוכבים

נגדיר מרוכבים, נראה שרוב תכונות השדה הן טריוויאליות פרט לקיום ההופכי וגם זה ניתן להוכחה.

תרגיל 3.2

אם נשנה את פעולת כפל המרוכבים לפעולה הבאה: $(a+bi)(c+di)=ac+bdi$, האם קבוצת המרוכבים תשאר שדה?

פתרון

לא. ניקח $(0+i)\cdot(1+0\cdot i)=0$ כלומר יש לנו איברים שונים מאפס שמכפלתם הינה אפס. כלומר מחלקי אפס אבל בשדה אין מחלקי אפס!

תרגיל 3.4

הצג את הביטוי הבא בצורה $z=a+bi$ וציין מהם $Re(z),Im(z),\overline{z},|z|$. הביטוי הינו: $\dfrac{5+2i}{2-3i}$

פתרון

נכפול בצמוד למכנה למעלה ולמטה $\frac{(5+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$.

נעצור לרגע להבין את הפורמליות של מה שאנחנו עושים. הרי $\frac{5+2i}{2-3i}=(5+2i)(2-3i)^{-1}$ וכעת רשמנו $(5+2i)(2+3i)[(2-3i)^{-1}(2+3i)^{-1}]$

לפיכך נקבל $z=\frac{4+19i}{13}=\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{4^2+19^2}{13^2}}$$

$$Re(z)=\frac{4}{13},Im(z)=\frac{19}{13}$$

$$\overline{z}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i$$

תכונות של מרוכבים

- $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z}z=|z|^2$
- $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$

משפט דמואבר

[אפשר לדלג]

ידוע שניתן להציג כל מספר מרוכב באופן יחיד בצורה $z = rcis\theta = r(cos\theta + i \cdot sin\theta)$ כאשר r הוא ממשי אי-שלילי (המציין את המרחק מראשית הצירים ושווה ל |z|) והזווית θ נמדדת נגד כיוון השעון מהקרן החיובית של ציר x. צורה זו נקראת הצורה הקוטבית של מספר מרוכב z. (ההצגה של המספר המרוכב z=a+bi, נקראת ההצגה הקרטזית שלו)

משפט דמואבר אומר ש $(rcis\theta)^n = r^n cis(n\theta)$

תרגיל 3.8 א'

חשב את $(1+\sqrt{3}i)^{2011}$

פתרון

דבר ראשון נעבור לצורה קוטבית. בהנתן מספר מרוכב z=a+bi המעבר לצורה הקוטבית שלו $z = r \cdot cis(\theta)$ מתבצע על ידי $r = |z|, cos\theta = \frac{a}{r}$

אצלנו בשאלה

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$

ולכן $\theta = \frac{\pi}{3}$

ביחד $z = 2cis\frac{\pi}{3}$ ולכן $z^{2011} = 2^{2011}cis2011\frac{\pi}{3}$ מכיוון שגם הסינוס וגם הקוסינוס הם ממחזור שני פאי, זה שווה ל

$$2^{2011}cis(335 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}) = 2^{2011}cis\frac{\pi}{3}$$

תרגיל

פתרון את המשוואה $z^5 = 3 + 4i$

תרגיל

מצאו דרך פשוטה לסובב נקודה במישור (a,b) בזווית θ (כלומר למצוא את הנקודה במישור המתקבלת לאחר הסיבוב)

פתרון:

נחשוב במרוכבים על האיבר $a+bi$ ונכפיל אותו ב $cis(\theta)$

תרגיל

חשבו את הסכום $\cos(1)+\cdots+\cos(n)$

פתרון:

ניעזר במרוכבים: $$\sum_{k=1}^{n}\cos(k)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cis}(k)\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cis}(1)^k\right)$$

תרגיל (חשוב)

לרוב נעשה בהרצאה - ולכן הצעה: הוכיחו שלפולינום $p(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$ יש שורש ממשי (בלי להזכיר את המשפט מההרצאה, לוודא שהם זוכרים לבד). אחרי זה אפשר להזכיר, אם נדרש, את ההגדרה והמשפט, ולעבור למסקנה.

הגדרה: פולינום עם מקדמים משדה $\mathbb{F}$ ומשתנה x הוא $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ כאשר a_i קבועים מהשדה.

בהיתן פולינום $p(x)$ ואיבר בשדה a נוכל להציב את a בפולינום לקבל איבר בשדה $p(a)=\sum_{i=0}^{n}a_ia^i$. עוד נגדיר: a יקרא שורש של פולינום $p(x)$ אם $p(a)=0$

יהא $p(x)$ פולינום עם מקדמים ממשיים. הוכיחו שאם $z\in\mathbb{C}$ שורש של פולינום $p(x)$ אזי גם $\bar{z}$ שורש של אותו פולינום.

הוכחה: בשימוש תכונות הצמוד.

~מסקנה

הסיקו (קצת בנפנופי ידיים, העיקר התובנה) שכל פולינום ממשי ניתן לפירוק לגורמים מדרגה קטנה שווה 2. היעזרו במשפט היסודי של האלגברה: כל פולינום מרוכב מדרגה n ניתן לפירוק למכפלה של n גורמים בדיוק מהצורה $(x-a)$
