בעזרת ה׳

<u>בוחן בחשבון אינפי 2 סמסטר ב תשפ״ה, שאלון סגור</u>

ד״ר שחר נבו

רועי תורג׳מן

אושרית שטוסל

- משך הבוחן 120 דקות
- ענה על 4 מ5 שאלות
- נמק תשובותיך

1. א. נסח את קריטריון קושי לאינטגרלים
   ב. הוכח אותו
2. חשבו את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{2n+1} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

3. קבע מתי האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:
   א. $\int_2^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p}\,dx$
   ב. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)} \cdot \sin(tan(x))\,dx$
4. עבור טורי הפונקציות הבאים קבעו התכנסות(כלומר התכנסות בהחלט , בתנאי ,במ״ש)
   א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$
   ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x\cdot n)}{n^x}$ (אל תדברו על התכנסות בהחלט ,זה קצת מסובך)
5. מצא רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(5n^2+3n+5)\cdot n!\cdot x^n$

בהצלחה!!!

<u>פתרונות סופיים</u>

1. א. הוכחה
ב. הוכחה
2. $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2-\frac{e-1}{e+1}-\ln\left(1-\frac{e-1}{e+1}\right)\right)$
3. א. $\begin{cases} p>1 & \text{בהחלט} \\ -1<p<1 & \text{בתנאי} \\ p<-1 & \text{מתבדר} \end{cases}$
ב. מתכנס תמיד
4. א. $\begin{cases} x>1 & \text{מתכנס בהחלט במ"ש} \\ x<1 & \text{מתבדר} \end{cases}$
ב. מתכנס במ״ש (לא דיברנו על בתנאי או בהחלט)

הצעת פתרון

דן בן חנוך

1. הוכח בהרצאה
2. נביט בטור הפונקציות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n+\frac{1}{2}}$$

ונביט בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x}$$

ידוע שהוא מתכנס במידה שווה בכל קטע $(-1,1)\subseteq[-c,c]$ שהרי לפי מבחן הM של ווישטראס

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}|c|^{2n}$$

והטור הזה כידוע הנדסי ומתכנס

ולכן לפי משפט ניתן לעשות *אינטגרציה איבר איבר*:

$$\int x^{2n}dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=2\cdot\frac{x^{2n+1}}{n+\frac{1}{2}}\to\frac{x^{2n+1}}{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int x^{2n}dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int x^{2n}dx\overset{\text{אינטגרציה איבר איבר}}{=}\frac{1}{2}\int\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}dx$$

נחשב את האינטגרל הזה באמצעות חילוק ארוך:

$$x^2|\overline{1-x}^{\,-x-1}$$

$$\frac{x^2}{-x}=-x$$

$-$

x^2-x

$x|1-x$

$$\frac{x}{-x}=-1$$

$-$

$x-1$

$1|1-x$

לכן:

$$\int\frac{x^2}{1-x}dx=\int -x-1-\frac{1}{1-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)$$

לכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)\right)$

ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{2n+1}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2-\frac{e-1}{e+1}-\ln\left(1-\frac{e-1}{e+1}\right)\right)$$

3. א. $\int_2^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$

נעשה הצבה: $x=\sqrt{t}$ ולכן $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \to dt = \frac{dx}{2\sqrt{t}}$

$$\int_2^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx = \int_2^\infty \frac{\sin(t)}{t^p}dt = \int_2^\infty \frac{\sin(x)}{x^{\frac{p}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}dx = \int_2^\infty \frac{\sin(x)}{x^{\frac{p+1}{2}}}dx$$

שלפי משפט מ**התרגול** ההתכנסות שלו היא:

$$\begin{cases} \text{בהחלט} & \frac{p+1}{2} > 1 \\ \text{בתנאי} & 0 < \frac{p+1}{2} < 1 \\ \text{מתבדר} & \frac{p+1}{2} < 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \text{בהחלט} & p > 1 \\ \text{בתנאי} & -1 < p < 1 \\ \text{מתבדר} & p < -1 \end{cases}$$

ב. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx$

נחלק ל2 אינטגרלים:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx$$

נפתור כרגע את $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx$:

נחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan(x))}{x}$ לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(tan(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\tan(x))\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{1} \overset{\text{רציפות}}{=} \frac{\cos(\tan(0))\cdot\frac{1}{\cos^2 0}}{1} = 1$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי , האינטגרלים

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx \quad \text{ו} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\cos(x)}dx$$

מתכנסים ומתבדרים יחד , והאינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\cos(x)}dx$ מתכנס שהרי היא רציפה ואין בה נקודות

התפוצצות 💣

כעת , נביט באינטגרל $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)}\cdot \sin(tan(x))\,dx$, לא שמתי לב מקודם אך הוא מתכנס שהרי

היא רציפה ואין בה נקודות *התפוצצות* 💣

ולכן סך הכל האינטגרל **מתכנס**

4. א. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{x^n}$

נראה שלכל $c>1$, עבור $c\le x$ זה מתכנס במידה שווה: ידוע ש: $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{c^n} < \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{x^n}$ ולכן לפי

מבחן הM של ווישטראס אם $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{c^n}$ מתכנס אז זה מתכנס במ"ש

נראה ש$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{c^n}$ מתכנס: לפי מבחן המנה:

$$\frac{\frac{n+1}{c^{n+1}}}{\frac{n}{c^n}} = \frac{n}{c(n+1)} \to \frac{1}{c} < 1$$

לכן זה מתכנס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{c^n}$ מתכנס במ״ש עבור $x>1$

מה עם התכנסות בהחלט? אם x חיובי אז הטור חיובי ולכן מתכנס במ״ש.

מה עבור $x<1$?

נחלק למקרים:

אם $0<x<1$:

אזי נבדוק תנאי הכרחי , איבר הסדרה הוא:

$$n\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

והוא שואף לאינסוף כי הרי n שואף לאינסוף וכיוון ש$x<1$ גם הסדרה ההנדסית $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ שואפת לאינסוף ולכן הטור מתבדר

אם $x<0$:

אזי נבדוק תנאי הכרחי , איבר הסדרה הוא:

$$n\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

והוא בטוח לא שואף ל0 כי ניקח נניח תת סדרה של זוגיים, ואז זה מוביל אותנו למקרה הקודם שהאיבר הכללי שואף לאינסוף שזה שונה מ0 ולכן הגבול הוא לא 0

ולכן הטור מתבדר

לסיכום:

$$\boxed{\begin{cases} x>1 & \text{מתכנס בהחלט במ"ש} \\ x<1 & \text{מתבדר}\end{cases}}$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x\cdot n)}{n^x}$

לפי מבחן דריכלה , כיוון ש$\sin(x\cdot n)<1$ ו$1/n^x$ מונוטונית יורדת אז זה מתכנס במידה שווה

5. רדיוס התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}(5n^2+3n+5)\cdot n!\cdot x^n$ הוא לפי משפט דלאמבר:

$$\frac{1}{|R|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5(n+1)^2+3n+3+5)\cdot(n+1)!}{(5n^2+3n+5)\cdot n!}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n^2+10n+5+3n+8)\cdot(n+1)}{(5n^2+3n+5)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+13n+13}{5n^2+3n+5}\cdot(n+1)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{13}{n}+\frac{13}{n^2}}{5+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}\cdot(n+1)\overset{"5\cdot\infty=\infty"}{=}\infty$$

$$|R|=0$$

לכן הרדיוס התכנסות הוא 0 והוא בעצם מתבדר לכל x