y' + P(x)y = Q(x)  $\Rightarrow y_H = e^{-\int P(x)dx}, y = y_H \left[ \int \frac{Q(x)}{v...} dx + C \right]$  $p(r) = \sum_{i=0}^n a_i r^n$  :מוצאים את כל השורשים של הפ

$$= e^{-\int P(x)dx}, y = y_H \left[ \int \frac{Q(x)}{y_H} dx + C \right]$$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y^{1-n} \\ z' = (1-n)y^{-n}y' \end{cases}$$

 $f(x)dx = g(y)dy \Rightarrow \int f(x)dx = \int g(y)dy + C$ 

f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 מד"ר מהצורה

 $\begin{cases} f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \\ g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{y}{x} \\ y' = z + z'x \\ dy = zdx + xdz \end{cases}$ 

 $(x_0, y_0)$  אם יש חיתוך *יחיד* בנקודה

 $\begin{cases} x^* = x - x_0 \Rightarrow dx^* = dx \\ y^* = y - y_0 \Rightarrow dy^* = dy \end{cases}$ 

לא לחזור פעמיים על אותו ביטוי!

אם מקבילים:

:אזי הפתרון הוא

 $(A_1x + B_1y + C_1)dx + (A_2x + B_2y + C_2)dy = 0$ 

f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0

 $\lambda 
eq 0$  ולכל ולכל  $k \in \mathbb{R}$  נקראת הומוגנית קיים

הומוגנית:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y^{1-n} \\ z' = (1-n)y^{-n}y' \end{cases}$$

 $\begin{cases} z(y(x)) = y' \\ zz' = y'' \end{cases} \begin{cases} z(x) = y' \\ z' = y'' \end{cases} \Leftrightarrow y = \int z dx$ 

 $\sum_{i} a_i x^i y^{(i)} = f(x)$ 

 $x^{\lambda_i}$ .... $\ln^{k-1}|x| \cdot x^{\lambda_i}$ 

 $x^{a} \ln|b\cos(x)|, ..., \ln^{k-1}|x| x^{a} \ln|b\cos(x)|$ 

 $x^{a} \ln|b \sin(x)|, ..., \ln^{k-1}|x| x^{a} \ln|b \sin(x)|$ 

שורש  $\lambda_i = a + bi$  והצמוד שלו מריבוי  $\lambda_i = a + bi$ 

הפתרון למד"ר ההומגנית  $y_H$  הוא צ"ל של כל התורמים.

מציבים  $oldsymbol{\chi^r}$  ופותרים את המשוואה האינדציאילית.

שורש k מריבוי  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  שורש

 $y = y_H + y_p$  הפתרון הכללי הוא

שיטת הניחוש (קושי):

 $x + \frac{df(y')}{dx'} = 0 \qquad .2$ 

<u>קושי:</u>

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y \\ z' = (1 - z') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z'} + P(x)$$

$$e^{ax}\cos(bx)$$
, ...,  $x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)$   
 $e^{ax}\sin(bx)$ , ...,  $x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$   
הפתרון למד"ר ההומגנית  $y_H$  הוא צ"ל של כל התורמים.

תורמים:

שיטת האינטגרציה:

שיטת הניחוש (מקדמים קבועים): 
$$a\in\mathbb{R}$$
 , $f(x)=e^{ax}p_n(x)$  שו

:שורש k מריבוי  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  שורש

 $e^{\lambda_i x}$ .... $x^{k-1}e^{\lambda_i x}$ (כל אחד) אורש  $\lambda_i = a + bi$  שורש

$$k$$
 אם ריבוי  $a\in\mathbb{R}$  ,  $f(x)=e^{ax}p_n(x)$  אם אם  $y_p=x^ke^{ax}p_n(x)$  אם  $a\pm bi$  ,  $f(x)=e^{ax}\sin(bx)p_n(x)$  או  $f(x)=e^{ax}\cos(bx)p_n(x)$  אם •

$$y_p = x^k e^{ax} p_{n_1}(x) \cos(bx) + x^k e^{ax} p_{n_2}(x) \sin(bx)$$

$$y=y_H+y_p$$
הפתרון הכללי הוא

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$
 מפרקים את המד"ר בעזרת שורשי אינגיי  $y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}$   $y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$   $y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$   $y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$   $y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 = (D - \lambda_n I)y \\ \vdots \\ g' - \lambda g = (D - \lambda I)g = f(x) \end{cases}$$

$$)^{n-2}$$

מציאת פתרון אחד על סמך השני:  
מציאת פתרון כללי להומוגנית על סמך פתרון נתון:  
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

 $\Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{v^2} dx$ 

$$-a)^{n-2}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

- k אם  $f(x) = x^a$ , וכן a שורש של המשוואה האינדציאלית מריבוי מציאת פתרון כללי ללא הומוגנית על סמך פתרון נתון להומוגנית:  $y_p = Cx^a \ln^k |x|$
- y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) $v'' + \left[\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right]v' = \frac{R(x)}{v_2}$

 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ for all } x$ אינטגרלים זהויות טריגונומטריות:  $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{a + x}{a - x} \right) + c$ ידועים:  $\int \frac{1}{a^2 + r^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$  $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2), 1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha/2), \sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin(\alpha/2 \pm \beta/2)\cos(\alpha/2 \mp \beta/2).$  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$  for all x  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$  $\int \ln x dx = x \ln x - x + c$  $\int \sec x dx = \ln (\tan x + \sec x) + \epsilon$  $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \left(\frac{x}{a}\right) + c$  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$  for |x| < 1 $\int \csc x dx = \ln \left( \tan(x/2) \right) + c$  $\tan(\alpha+\beta) = \frac{[\tan(\alpha)+\tan(\beta)]}{[1-\tan(\alpha)\tan(\beta)]}, \quad \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{[1-\tan^2(\alpha)]}, \quad \cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}, \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}.$  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + c$  $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$  $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  for all x  $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$  $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \cdot \frac{1}{1-n} (x-a)^{1-n} + c$  $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c$  $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  for all x  $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \left( \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right)$  $\int \cot x dx = \ln(\sin x) + c$  $W(f,g)(x) = egin{array}{c|c} f(x) & g(x) \ f'(x) & g'(x) \ \end{array} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$  $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ for all } x$  $\int \cosh x dx = \sinh x + c$  $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \text{ for } |x| < 1 \qquad \int x e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{a^2} (ax-1)$  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \right|$  $\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \left( x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right)$  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} \right| \text{ for } a > 0, \ b^2 - 4ac = 0$   $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$  $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ for } |x| \le 1$  $\int x^n e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{for } |x| < 1$  $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$ 

 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  אונים בתוך המד"ר!  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  וחשוב לשים לב לקשרים בין גורמים שונים בתוך המד"ר!

y(x) לפעמים כדאי להחליף בין משתנה לפונקציה: ומשתנה מכך, להגדיר פונקציה חדשה ומשתנה  $\leftrightarrow x(y)$ 

לפתור את המד"ר.

טובות יותר.

z = vv' ולכן נגדיר

 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \Rightarrow$ 

 $y''y + (y')^2 = (yy')' = z'$ 

אם רואים פונקציה שמכילה ביטוי של קו ישר

z = ax + by + c

y'x + y = (xy)' = z'

אם נתקלים בביטוי מהצורות האלה, כדאי

שינויי משתנים חשובים

נוח להגדיר:

לשים לב כי:

z = xy לכן נגדיר

2. מפרקים את הפולינום לגורמים (לינאריים או ריבועיים).

 $\frac{A_0}{r-a}, ..., \frac{A_k}{(r-a)^k}$ : מציבים ,k מציבים לינארי מריבוי .3

תהי פונקציה רציונלית מהצורה:

:ולכל גורם ריבועי (שאינו פריק) מריבוי k מציבים

שיטות אינטגרציה:

<u>אינטגרציה בחלקים:</u>

פירוק לשברים חלקיים:

השארית.

שיטת ההצבה:

4. עושים מכנה משותף ומוצאים את הקבועים, זאת בשתי דרכים:

1. מחלקים פולינומים כך שדרגת המכנה תהא גדולה ממש מדרגת

- a. לכל חזקה מגדירים משוואה בה הנעלמים הם הקבועים,
- ופותרים אותה. מציבים ערכים ספציפיים של x ובכך מוצאים כל קבוע בנפרד.

Euler formula:  $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ .

שיטת וריאצית הפרמטרים:

מציאת פתרון פרטי (עבור

 $y_1, y_2$  ללינארית-הומוגנית

 $u_2(x)=\int rac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx$ 

על סמך פתרונות (g(x))

 $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ 

 $u_1(x) = -\int rac{y_2(x)g(x)}{W(x)} dx \qquad \int \! f'g = fg - \int \! g'f$ 

 $\cos(\alpha) = [\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)]/2$ ,  $\sin(\alpha) = [\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)]/(2i)$ .

 $\cos(\alpha) \pm \cos(\beta) = 2\sin(\alpha/2 \pm \beta/2)\cos(\alpha/2 \mp \beta/2), \quad \sin(\alpha)\cos(\beta) = \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]/2.$ 

 $\sin(\alpha)\sin(\beta) = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2, \quad \cos(\alpha)\cos(\beta) = [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]/2.$ 

 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta), \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$ 

dt = f'(x)dx מציבים, t = f(x) מציבים, tב-f(x) ואת dtב f'(x)dx ב-

t פותרים את האינטגרל על המשתנה

f(x)-ל לוערים להצבה, ומחליפים בין ל

(t בעזרת x בעזרת אולי כדאי להביע את בעזרת אולי בעזרת)

הם יכולים לעזור לפתור אותה!

לפעמים משתלם לסדר את המשוואה בסדר שונה, כדי לקבל פרספקטיבה שונה על המד"ר.

חדש (שכוללים בתוכם גם את x וגם את שכוללים בתוכם את חדש

לא מומלץ להתעכב על מציאת ג"א, לפעמים יש שיטות

כאשר פותרים מד"ר בעזרת טורי טיילור, לעיתים אין צורך להציב את הטור, אלא ניתן להשיג את נוסחת המקדמים ישירות דרך המד"ר.

פתרון ידוע מקרה xQ(x) + P(x) = 0v = x $y = e^{mx}$  $mP(x) + Q(x) + m^2 = 0$