דפי נוסחאות למד"ר - הלל בן חנוך

מבוא וסדר ראשון

הגדרות כלליות

- **מד"ר:** קשר מהצורה $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.
- **סדר:** סדר הנגזרת הגבוהה ביותר.
- **מעלה:** החזקה של הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר (לאחר שהמשוואה פולינומיאלית בנגזרות).
- **תנאי התחלה:** מד"ר מסדר n דורשת n תנאי התחלה לקביעת פתרון פרטי.
- **לינאריות:** אם ניתן לכתוב כ- $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = R(x)$.
- **פתרון:** כללי (עם קבועים), פרטי (עם ת"ה), סתום ($G(x,y) = C$), סינגולרי (לא נובע מהכללי).

משוואות פריקות (Separable)

- **צורה:** $y' = f(x)g(y)$ או $M(x)dx + N(y)dy = 0$.
- **פתרון:** $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.
- **הערה חשובה:** יש לבדוק בנפרד פתרונות קבועים $y = y_0$ המאפסים את $g(y_0)$, שכן ייתכן שהם "הולכים לאיבוד" בחלוקה.

משוואות הומוגניות

- **צורה:** $y' = f(y/x)$.
- **פתרון:** הצבה $z = y/x \implies y' = z'x + z$. המשוואה הופכת לפריקה: $\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$.

משוואות "כמעט הומוגניות"

צורה. $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$.

- **ישרים נחתכים** ($a_1b_2 \neq a_2b_1$)**:** מצא נקודת חיתוך (x_0, y_0). הצב $x = X + x_0,\ y = Y + y_0$. המשוואה הופכת להומוגנית ב-X, Y.
- **ישרים מקבילים** ($a_1b_2 = a_2b_1$)**:** הצב $t = a_1x + b_1y$. המשוואה הופכת לפריקה.

משוואות מדויקות

- **צורה:** $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
- **תנאי:** מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
- **פתרון:** אם מדויקת, קיים פוטנציאל $\phi(x, y)$ והפתרון הוא $\phi(x, y) = C$.
- **מציאת** ϕ**:** בצע אינטגרל על M לפי x ואינטגרל על N לפי y, וחשב:

$$\phi(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \int N(x, y)\,dy$$

התעלם מהאיברים שחוזרים פעמיים. הפתרון הוא $\phi(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה (μ)

מטרה. הופך משוואה לא מדויקת למדויקת.

- אם $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$
- אם $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}$
- אם המשוואה הומוגנית אז $\mu = \frac{1}{Mx+Ny}$ כאשר $Mx + Ny \neq 0$

משוואות לינאריות מסדר ראשון

- **צורה:** $y' + P(x)y = Q(x)$.
- **גורם אינטגרציה:** $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.
- **הפתרון הכללי:** $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + C\right)$.
- **מבנה:** $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

משוואת ברנולי

- **צורה:** $y' + P(x)y = Q(x)y^t$, ($t \neq 0, 1$).
- **פתרון:** הצבה $z = y^{1-t}$ הופכת את המשוואה ללינארית: $z' + (1-t)P(x)z = (1-t)Q(x)$.

טכניקות נוספות

- **שימוש בקשר ההופכי:** אם המשוואה $y' = f(x, y)$ מסובכת, נסו לפתור את $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ עבור $x(y)$. שימושי במיוחד כשהמשוואה הופכת ללינארית ב-$x(y)$.

משוואת קלרו

- **צורה:** $y = xy' + f(y')$.
- **פתרון כללי:** $y = Cx + f(C)$.

מד"ר מסדר שני

הורדת סדר (מקרים מיוחדים)

- **צורה 1: חסר** y ($F(x, y', y'') = 0$)**:** הצב $y' = z(x)$, $y'' = z'$. מתקבלת מד"ר מסדר 1, $F(x, z, z') = 0$. הפתרון הסופי הוא $y(x) = \int z(x)\,dx + C_2$.
- **צורה 2: חסר** x ($F(y, y', y'') = 0$)**:** הצב $y' = z(y)$, ואז $y'' = z\frac{dz}{dy}$. מתקבלת מד"ר מסדר 1, $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$. לאחר מציאת $z(y)$, פותרים את $\frac{dy}{dx} = z(y)$.

מד"ר לינארית, מקדמים קבועים - הומוגנית

צורה. $ay'' + by' + cy = 0$.

- **משוואה אופיינית:** $ar^2 + br + c = 0$.
- **הפתרון** $y_h(x)$ **תלוי בשורשים** r_1, r_2**:**
  1. **ממשיים ושונים:** $y_h(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
  2. **ממשי כפול:** $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx}$
  3. **מרוכבים צמודים** ($r = \alpha \pm i\beta$)**:**
     $y_h(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$
- **הרחבה למשוואות מסדר גבוה יותר:** אם למשוואה האופיינית יש שורש r בריבוי k, אז הפתרון ההומוגני כולל k איברים מהצורה:

$$(C_1 + C_2x + \dots + C_kx^{k-1})e^{rx}$$

כלומר, עבור כל שורש עם ריבוי k, יש לקחת את הפונקציה e^{rx} ולשים אותה בפולינום מדרגה $k - 1$ (עם מקדמים בלתי תלויים).

מד"ר לינארית, מקדמים קבועים - לא הומוגנית

צורה. $ay'' + by' + cy = R(x)$.

- **פתרון כללי:** $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

שיטת הניחוש המושכל (מקדמים לא ידועים) למציאת y_p**:**

1. **בניית קבוצת הניחוש (**S**):** בהתבסס על אגף ימין $R(x)$, בנה קבוצה S הכוללת את כל הפונקציות שמופיעות ב-$R(x)$ וכל הנגזרות הבלתי תלויות-לינארית שלהן. השתמש בטבלה הבאה:

אם $R(x)$ **מכיל איבר מהצורה...**	**אז קבוצת הניחוש** S **מכילה את האיברים...**
$P_n(x)$ (פולינום)	$\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$
$e^{\alpha x}$	$\{e^{\alpha x}\}$
$\sin(\beta x)$ או $\cos(\beta x)$	$\{\sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$
שילובים (לפי מכפלות)	
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$\{x^ne^{\alpha x}, \dots, e^{\alpha x}\}$
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\{e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)\}$
$P_n(x)\sin(\beta x)$	$\{x^k\sin(\beta x), x^k\cos(\beta x) \mid k = 0, \dots, n\}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\{x^ke^{\alpha x}\sin(\beta x), x^ke^{\alpha x}\cos(\beta x) \mid k = 0, \dots, n\}$

2. **ניחוש ראשוני:** הפתרון הפרטי y_p הוא צירוף לינארי של כל האיברים בקבוצה S עם מקדמים לא ידועים ($A, B, C\dots$).
3. **בדיקת תהודה (Resonance) ותיקון:** אם איבר כלשהו בניחוש הראשוני y_p הוא גם פתרון של המשוואה ההומוגנית (y_h), קיימת תהודה. **התיקון:** יש להכפיל את **כל הניחוש** ב-x^k, כאשר k היא החזקה השלמה החיובית הנמוכה ביותר שמבטלת את כל החפיפות עם y_h.

שיטת האופרטור המפרק.

- **שלב 1: פירוק האופרטור.** כותבים את המשוואה כ:

$$(D - r_1)(D - r_2)y = \frac{R(x)}{a}$$

כאשר $D = \frac{d}{dx}$ ו-r_1, r_2 הם שורשי המשוואה האופיינית.

- **שלב 2: פתרון מדורג.**
  (א) הגדר: $g(x) = (D - r_2)y$.
  (ב) פתור את המד"ר מסדר ראשון: $g' - r_1g = \frac{R(x)}{a}$. הפתרון $g(x)$ יכיל קבוע C_1.
  (ג) פתור את המד"ר השנייה: $y' - r_2y = g(x)$. הפתרון $y(x)$ הוא הפתרון הכללי המבוקש ויכיל קבוע נוסף C_2.

- **פתרון סינגולרי:** פתרון המערכת (עם $p = y'$):

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

בעיות פיזיקליות נפוצות

- k — קבוע קצב (חיובי - גידול, שלילי - דעיכה)
- g — תאוצת הכובד.
- y_0, v_0, x_0 — ערכי התחלה (מיקום/מהירות).
- m — מסה; γ — מקדם חיכוך; k (שוב) — קבוע קפיץ.
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$ — תדירות תנודה במתנד מרוסן חלש.
- $r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$ — שורשים אופייניים במתנד מרוסן חזק.

בעיה	משוואה טיפוסית	פתרון / פירוש קצר
קצב פרופורציוני לגודל	$\frac{dy}{dt} = k\,y$	$y(t) = y_0 e^{kt}$ $k > 0$ - גידול, $k < 0$ - דעיכה
תאוצה קבועה	$\ddot{x} = g$	$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$
מתנד הרמוני מרוסן $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$		
ריסון חסר (חלש)	$\gamma^2 < 4mk$	$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}[C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t]$
ריסון קריטי	$\gamma^2 = 4mk$	$x(t) = (C_1 + C_2 t)\,e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$
ריסון יתר (חזק)	$\gamma^2 > 4mk$	$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, $r_{1,2} < 0$

אינטגרלים נפוצים

פונקציה	אינטגרל	פונקציה	אינטגרל
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	$\int \ln(x)\,dx$	$x\ln(x) - x$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\|x\|$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int e^{ax}\,dx$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\int \sinh x\,dx$	$\cosh x$
$\int \sin(ax)\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$	$\int \cosh x\,dx$	$\sinh x$
$\int \cos(ax)\,dx$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x$
$\int \tan x\,dx$	$-\ln\|\cos x\|$	$\int \sec x\,dx$	$\ln\|\sec x + \tan x\|$
$\int \cot x\,dx$	$\ln\|\sin x\|$	$\int \csc x\,dx$	$-\ln\|\csc x + \cot x\|$

זהויות טריגונומטריות

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
- $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

שיטות אינטגרציה

- **אינטגרציה בחלקים:**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **שיטת ההצבה (שינוי משתנה):**

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad u = g(x)$$

שימושי כאשר חלק מהאינטגרנד הוא נגזרת של ביטוי פנימי.

- **שברים חלקיים:** לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (כאשר מעלת P קטנה ממעלת Q).
  (א) פרק את המכנה $Q(x)$ לגורמים ליניאריים ו/או ריבועיים אי-פריקים.
  (ב) רשום את השבר כסכום של שברים חלקיים:
  - גורם $(ax+b)$: תורם $\frac{A}{ax+b}$
  - גורם $(ax+b)^k$: תורם $\frac{A_1}{ax+b} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$
  - גורם (ax^2+bx+c): תורם $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
  (ג) מצא את הקבועים $(A, B, \ldots)$ ע"י השוואת מונים או הצבת ערכי x נוחים.

מד"ר ליניארית, מקדמים כלליים

צורה. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$.

- **שלב 1: מציאת פתרון הומוגני y_1:**
  - אם $y_1 = e^x \Leftarrow 1 + P(x) + Q(x) = 0$
  - אם $y_1 = e^{-x} \Leftarrow 1 - P(x) + Q(x) = 0$
  - אם $y_1 = x \Leftarrow P(x) + xQ(x) = 0$
  - אם $y_1 = e^{mx} \Leftarrow m^2 + mP(x) + Q(x) = 0$
- **שלב 2: מציאת y_2 (הורדת סדר):**

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$$

הפתרון ההומוגני הכללי הוא: $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$.

- **שלב 3: פתרון לא-הומוגני (וריאציית פרמטרים)**
הפתרון הפרטי הוא $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, כאשר:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2R}{W(y_1,y_2)} \qquad u_2'(x) = \frac{y_1R}{W(y_1,y_2)}$$

כאשר $W(y_1,y_2)$ הוא ה־Wronskian של y_1 ו־y_2, כלומר:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

פתרון בעזרת טורים

שיטה. מציאת פתרון סביב $x_0 = 0$ (נק' רגולרית):

1. **הנחת הפתרון:** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$
2. **הצבה במד"ר** וסידור לפי חזקות x^k.
3. **נוסחת נסיגה:** השוואת מקדמים $\Leftarrow$ קשר בין a_n.
4. **חישוב:** מקדמים לפי $a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$.
5. **פתרון כללי:** $y(x) = a_0 \cdot y_{\text{even}}(x) + a_1 \cdot y_{\text{odd}}(x)$.

טורי טיילור שימושיים (סביב 0)

פונקציה	טור חזקות
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

פונקציה	טור חזקות
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$
$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}x^k$

משוואת אוילר-קושי

- **צורה כללית:** $ax^2y'' + bxy' + cy = R(x)$
- **שלב 1: פתרון ההומוגנית**
ננחש פתרון מהצורה $y = x^m$, ונחשב:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

נציב במשוואה ונקבל את המשוואה העזרית:

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

נסמן את שורשי המשוואה ב־m_1, m_2, ואז הפתרון ההומוגני הוא:

1. **שונים ממשיים:** $y_h(x) = C_1|x|^{m_1} + C_2|x|^{m_2}$
2. **שורש כפול ממשי:** $y_h(x) = (C_1 + C_2\ln|x|)|x|^m$
3. **שורשים מרוכבים צמודים:** אם $m = \alpha \pm i\beta$, אז:

$$y_h(x) = |x|^\alpha\left[C_1\cos(\beta\ln|x|) + C_2\sin(\beta\ln|x|)\right]$$

- **שלב 2: פתרון פרטי**
ננחש פתרון פרטי $y_p(x)$ לפי צורת $R(x)$ (למשל פולינום, טריגונומטרי או מעריכי), ונציב במשוואה כדי לקבוע את הפרמטרים.
- **שלב 3: פתרון כללי**

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- **הערה:** אם $R(x)$ מהצורה x^n ונמצא כבר בפתרון ההומוגני, יש להכפיל את הניחוש ב־$\ln x$.