דפי נוסחאות למד"ר

מבוא וסדר ראשון

הגדרות כלליות

- **מד"ר:** קשר מהצורה $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.
- **סדר:** סדר הנגזרת הגבוהה ביותר.
- **מעלה:** החזקה של הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר (לאחר שהמשוואה פולינומיאלית בנגזרות).
- **תנאי התחלה:** מד"ר מסדר n דורשת n תנאי התחלה לקביעת פתרון פרטי.
- **ליניארית:** אם ניתן לכתוב כ- $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = R(x)$.
- **פתרון:** כללי (עם קבועים), פרטי (עם ת"ה), סתום ($G(x, y) = C$), סינגולרי (לא נובע מהכללי).
- **משפט קיום ויחידות (פיקארד):** לבעיית התחלה $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. אם f, f'_y רציפות במלבן סביב (x_0, y_0), קיים פתרון יחיד.

משוואות פריקות (Separable)

- **צורה:** $y' = f(x)g(y)$ או $M(x)dx + N(y)dy = 0$.
- **פתרון:** $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.
- **הערה חשובה:** יש לבדוק בנפרד פתרונות קבועים $y = y_0$ המאפסים את $g(y_0)$, שכן ייתכן שהם "הולכים לאיבוד" בחלוקה.

משוואות הומוגניות

- **צורה:** $y' = f(y/x)$.
- **פתרון:** הצבה $z = y/x \implies y' = z'x + z$. המשוואה הופכת לפריקה: $\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$.

משוואות "כמעט הומוגניות"

צורה. $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$.

- **ישרים נחתכים ($a_1b_2 \neq a_2b_1$):** מצא נק' חיתוך (x_0, y_0). הצב $x = X + x_0, y = Y + y_0$. המשוואה הופכת להומוגנית ב-X, Y.
- **ישרים מקבילים ($a_1b_2 = a_2b_1$):** הצב $t = a_1x + b_1y$. המשוואה הופכת לפריקה.

משוואות מדויקות

- **צורה:** $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
- **תנאי:** מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
- **פתרון:** אם מדויקת, קיים פוטנציאל $\phi(x, y)$ והפתרון הוא $\phi(x, y) = C$.
- **מציאת ϕ:** בצע אינטגרל על M לפי x ואינטגרל על N לפי y, וחשב:

$$\phi(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \int N(x, y)\, dy$$

התעלם מהאיברים שחוזרים פעמיים. הפתרון הוא $\phi(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה (μ)

מטרה. הופך משוואה לא מדויקת למדויקת.

- אם $\frac{1}{N}(M_y - N_x) = f(x) \implies \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$.
- אם $\frac{1}{M}(N_x - M_y) = g(y) \implies \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$.
- למשוואה הומוגנית עם $Mx + Ny \neq 0$, $\mu = \frac{1}{Mx+Ny}$.

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

- **צורה:** $y' + P(x)y = Q(x)$.
- **גורם אינטגרציה:** $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.
- **הפתרון הכללי:** $y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)Q(x)dx + C \right)$.
- **מבנה:** $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

משוואת ברנולי

- **צורה:** $y' + P(x)y = Q(x)y^t$, ($t \neq 0, 1$).
- **פתרון:** הצבה $z = y^{1-t}$ הופכת את המשוואה לליניארית: $z' + (1-t)P(x)z = (1-t)Q(x)$.

מד"ר מסדר שני

הורדת סדר (מקרים מיוחדים)

- **צורה 1: חסר y ($F(x, y', y'') = 0$):** הצב $y' = z(x)$, $y'' = z'$. מתקבלת מד"ר מסדר 1, $F(x, z, z') = 0$. הפתרון הסופי הוא $y(x) = \int z(x)dx + C_2$.
- **צורה 2: חסר x ($F(y, y', y'') = 0$):** הצב $y' = z(y)$, ואז $y'' = z\frac{dz}{dy}$. מתקבלת מד"ר מסדר 1, $F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$. לאחר מציאת $z(y)$, פותרים את $\frac{dy}{dx} = z(y)$.

מד"ר ליניארית, מקדמים קבועים - הומוגנית

צורה. $ay'' + by' + cy = 0$.

- **משוואה אופיינית:** $ar^2 + br + c = 0$.
- **הפתרון $y_h(x)$ תלוי בשורשים r_1, r_2:**
  1. **ממשיים ושונים:** $y_h(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
  2. **ממשי כפול:** $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx}$
  3. **מרוכבים צמודים ($r = \alpha \pm i\beta$):** $y_h(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$
- **הרחבה לסדר n:** כל שורש r של המשוואה האופיינית בעל ריבוי k תורם לפתרון ההומוגני איבר מהצורה $(C_1 + C_2x + \dots + C_kx^{k-1})e^{rx}$.

מד"ר ליניארית, מקדמים קבועים - לא הומוגנית

צורה. $ay'' + by' + cy = R(x)$.

- **פתרון כללי:** $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

שיטת הניחוש המושכל (מקדמים לא ידועים) למציאת y_p:

1. **בניית קבוצת הניחוש (S):** בהתבסס על אגף ימין $R(x)$, בנה קבוצה S הכוללת את כל הפונקציות שמופיעות ב-$R(x)$ וכל הנגזרות הבלתי תלויות-ליניארית שלהן. השתמש בטבלה הבאה:

אם $R(x)$ מכיל איבר מהצורה...	אז קבוצת הניחוש S מכילה את האיברים...
$P_n(x)$ (פולינום)	$\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$
$e^{\alpha x}$	$\{e^{\alpha x}\}$
$\sin(\beta x)$ או $\cos(\beta x)$	$\{\sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$
שילובים (לפי מכפלות)	
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$\{x^ne^{\alpha x}, \dots, e^{\alpha x}\}$
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\{e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)\}$
$P_n(x)\sin(\beta x)$	$\{x^k\sin(\beta x), x^k\cos(\beta x) \mid k = 0, \dots, n\}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\{x^ke^{\alpha x}\sin(\beta x), x^ke^{\alpha x}\cos(\beta x) \mid k = 0, \dots, n\}$

2. **ניחוש ראשוני:** הפתרון הפרטי y_p הוא צירוף ליניארי של כל האיברים בקבוצה S עם מקדמים לא ידועים $(A, B, C...)$.
3. **בדיקת תהודה (Resonance) ותיקון:** אם איבר כלשהו בניחוש הראשוני y_p הוא גם פתרון של המשוואה ההומוגנית (y_h), קיימת תהודה. **התיקון:** יש להכפיל את **כל הניחוש** ב-x^k, כאשר k היא החזקה השלמה החיובית הנמוכה ביותר שמבטלת את כל החפיפות עם y_h.

מד"ר ליניארית, מקדמים כלליים

צורה. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$.

- **שלב 1: מציאת פתרון הומוגני y_1:**
  - אם $1 + P(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^x$
  - אם $1 - P(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^{-x}$
  - אם $P(x) + xQ(x) = 0 \implies y_1 = x$
  - אם $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^{mx}$

טכניקות נוספות

- **שימוש בקשר ההופכי:** אם המשוואה $y' = f(x,y)$ מסובכת, נסו לפתור את $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ עבור $x(y)$. שימושי במיוחד כשהמשוואה הופכת ללינארית ב-$x(y)$.

משוואת קלרו

- **צורה:** $y = xy' + f(y')$.
- **פתרון כללי:** $y = Cx + f(C)$.
- **פתרון סינגולרי:** פתרון המערכת (עם $p = y'$):

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

אינטגרלים נפוצים

הפונקציה	האינטגרל (ללא קבוע C)
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert$
$\int e^{ax}\,dx$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\int \sin(ax)\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\int \cos(ax)\,dx$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \ln(x)\,dx$	$x\ln(x) - x$
$\int \tan(x)\,dx$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\int \sec^2(x)\,dx$	$\tan(x)$

זהויות טריגונומטריות

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
- $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

שיטות אינטגרציה

- **אינטגרציה בחלקים:**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **שיטת ההצבה (שינוי משתנה):**

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad u = g(x)$$

שימושי כאשר חלק מהאינטגרנד הוא נגזרת של ביטוי פנימי.

- **שברים חלקיים:** לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (כאשר מעלת P קטנה ממעלת Q).

(א) פרק את המכנה $Q(x)$ לגורמים לינאריים ו/או ריבועיים אי-פריקים.

(ב) רשום את השבר כסכום של שברים חלקיים:

– גורם $(ax+b)$ תורם: $\frac{A}{ax+b}$

– גורם $(ax+b)^k$ תורם: $\frac{A_1}{ax+b} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$

– גורם (ax^2+bx+c) תורם: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

(ג) מצא את הקבועים $(A, B, \ldots)$ ע"י השוואת מונים או הצבת ערכי x נוחים.

- **שלב 2: מציאת y_2 (הורדת סדר):**

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$$

הפתרון ההומוגני הכללי הוא: $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$.

- **שלב 3: פתרון לא-הומוגני (וריאציית פרמטרים)** הפתרון הפרטי הוא $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, כאשר:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2R}{W(y_1,y_2)}$$
$$u_2'(x) = \frac{y_1R}{W(y_1,y_2)}$$

פתרון בעזרת טורים

שיטה. מציאת פתרון סביב $x_0 = 0$ (נק' רגולרית).

1. **הנחת הפתרון:** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
2. **הצבה במד"ר:** הצב את טורי החזקות של y, y', y''.
3. **איחוד אינדקסים:** סדר את כל הטורים כך שהחזקה תהיה אחידה (x^k) וגבולות הסכימה זהים.
4. **נוסחת נסיגה** ($Recursion$)**:** השווה את המקדם של x^k לאפס ומצא קשר בין המקדמים.
5. **חישוב מקדמים:** הביעו את כל המקדמים באמצעות a_0, a_1 (קבועים שרירותיים, $a_0 = y(0), a_1 = y'(0)$).
6. **פתרון כללי:** הביעו את כל המקדמים הזוגיים (a_{2k}) באמצעות a_0, ואת כל המקדמים האי-זוגיים (a_{2k+1}) באמצעות a_1. הפתרון הכללי יתפצל באופן טבעי לשני טורים: $y(x) = a_0 \cdot y_{\text{even}}(x) + a_1 \cdot y_{\text{odd}}(x)$.

טורי טיילור שימושיים (סביב 0)

פונקציה	טור חזקות
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

פונקציה	טור חזקות
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$
$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

משוואת אוילר-קושי

- **צורה:** $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$.
- **פתרון:** נחש פתרון $y = x^m$. הצבה מובילה למשוואה אינדיציאלית (עזר) עבור m:

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

- **הפתרון תלוי בשורשי המשוואה העזר, m_1, m_2:**
  1. **ממשיים ושונים:** $y(x) = C_1|x|^{m_1} + C_2|x|^{m_2}$
  2. **ממשי כפול:** $y(x) = (C_1 + C_2\ln|x|)|x|^m$
  3. **מרוכבים צמודים ($m = \alpha \pm i\beta$):**

$$y(x) = |x|^\alpha\left[C_1\cos(\beta\ln|x|) + C_2\sin(\beta\ln|x|)\right]$$