בס"ד

סדר ראשון

סדר - הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה
מעלה/דרגה - החזקה של הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה
משוואה מסדר n תכיל n קבועים שרירותיים בלתי תלויים.
ומחייב n תנאי הגבה
במשוואות לינאריות - הפתרון הכללי מאפשר לקבל כל הפתרונות הפרטיים
במשוואות לא לינאריות - יתכנו פתרונות פרטיים שלא חלק מהפתרון הכללי (סינגולריים)
משוואה לינארית: $a_0y+a_1y'...=b$

משוואות פרידות: ניתנות לפירוק להפרדת משתנים

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

★ $g(y)=0$ לבדוק פתרון סינגולרי.

הומוגניות - סכום החזקות מסדר n מוגדרת כך:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

★ המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ הומוגנית אם N, M הומוגניות מאותו סדר

טרנספורמציה: $y=zx$, $dy=zdx+xdz$ ואז נקבל ל: $P(x,z)dx+Q(x,z)dz=0$ פרידה, נפתור עבור z ואז נחזור ל-y

כמעט הומוגניות - $N(x,y)$, $M(x,y)$ לא הומוגניות:

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\to(h,k)\to\begin{cases}x'=x-h & dx'=dx\\ y'=y-k & dy'=dy\end{cases}$$

הצבת המשתנה. ונקבל $(a_1x'+b_1y')dx'+(a_2x'+b_2y')dy'=0$ הומוגנית.

★ אם הישרים מקבילים ← אינסוף פתרונות ← משוואה
$\begin{cases}a_1x+b_1y=t\\ a_1dx+b_1dy=dt\end{cases}$ ⟵ $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$ פרידה

לינאריות: $y'+P(x)y=Q(x)$

- **הומוגנית** - אם $Q(x)=0$ המשוואה הומוגנית ואז המשוואה פרידה.
- **לא הומוגנית** - $Q(x)\neq0$

$$\mu=e^{-\int P(x)dx}\Rightarrow y(x)=\mu(x)\left[\int\frac{Q(x)}{\mu(x)}dx+c\right] \quad \text{או} \quad \mu=e^{\int P(x)dx}\Rightarrow y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int Q(x)\mu(x)dx+c\right]$$

- **ברנולי** - $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$ כאשר n ממשי

$$\begin{cases}z=y^{1-n}\\ z'=(1-n)y^{-n}y'\end{cases}\Rightarrow z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

$y=0$ אם n חיובי ⇒ פתרון סינגולרי

- **קלרו** - $y=xy'+f(y')$

$$\begin{cases}y=cx+f(c)\\ y'=c\end{cases}$$

כמעט מדויקות: גורם אינטגרציה

$$\mu=e^{\int f(x)dx/\int f(y)dy} \Leftarrow \begin{cases}f(x)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\\[2ex] f(y)=-\left(\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}\right)\end{cases} \Leftarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

מכפילים במקדם את μ, מקבלים את המשוואה מדויקת.
אם המשוואה הומוגנית אם $M(x)+N(y)\neq0$ אז: $\frac{1}{M(x)+N(y)}$

מדויקות -

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \;\text{מדויקת}\Leftarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\to\phi(x,y)=C\to\begin{cases}\phi_1=\int M(x,y)dx+C_1(y)\\ \phi_2=\int N(x,y)dy+C_2(x)\end{cases}$$

הפתרון הכללי יהיה איחוד ל-ϕ_1 ו-ϕ_2 ואם יש איברים כפולים לוקחים פעם אחת

$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac1a\operatorname{arcsec}(\frac xa)$ | $\int\cot x\,dx=\ln(\sin x)$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$ | $\int\tan^2x\,dx=\tan x-x$
$\int\frac{1}{(x-a)^n}dx=A\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}$
$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac1a\arctan(\frac xa)$ | $\int\sec^2x\,dx=\tan x$ | $\int\ln x\,dx=x\ln x-x$
$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac1{2a}\ln(\frac{a+x}{a-x})$ | $\int\csc^2x\,dx=-\cot x$ | $\int\sec x\,dx=\ln(\sec x+\tan x)$
$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin(\frac xa)$ | $\int\tan x\,dx=-\ln(\cos x)$ | $\int\csc x\,dx=\ln(\tan(\frac x2))$

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx=\frac{e^{ax}(b\sin(bx)+a\cos(bx))}{a^2+b^2} \qquad \int e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{e^{ax}(a\sin(bx)-b\cos(bx))}{a^2+b^2}$$

קושי - אוילר - $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$ (מעלת x שווה לסדר הנגזרת)

נציב $y=x^m$ ⇐ $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$ ⇐ r_1, r_2

★ $r_1\neq r_2$: $y(x)=A|x|^{r_1}+B|x|^{r_2}$
★ $r_1=r_2=r$: $y(x)=A|x|^r+B|x|^r\ln(x)$
★ $r_1=\bar r_2=\alpha\pm\beta i$: $y(x)=|x|^\alpha(C_1\sin(\beta\ln|x|))+C_2\cos(\beta\ln|x|)$ או $y(x)=A|x|^\alpha\cos(\beta\ln|x|+\delta)$

לינארית:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)\Rightarrow\begin{cases}R(x)=0 & \text{הומוגנית}\\ R(x)\neq0 & \text{לא הומוגנית}\end{cases}$$

★ אם y_1, y_2 הם פתרונות (כפרט) של המשוואה הלינארית ההומוגנית אז $y_H=Ay_1+By_2$ הוא הפתרון הכללי של ההומוגנית
★ אם קיים y_p פתרון אחד של המשוואה הלינארית הלא הומוגנית אז $y=y_H+y_p$ הפתרון הכללי של הלא הומוגנית

חסר y: $F(x,y',y'')=0$ יהיו 2 קבועים בפתרון

$$\begin{cases}z=y'\\ z'=y''\end{cases}\Rightarrow \text{פותרים את המשוואה}\Rightarrow y(x)=\int z(x)dx$$

חסר x: $F(y,y',y'')=0$

$$\begin{cases}y'=z=\frac{dy}{dx}\\ y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}\end{cases}\Rightarrow \text{עבר מסדר ראשון}$$

$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^n kx^k$ | $\sin x=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ | $\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=\ln(1+x)$: (-1,1)
$\sinh x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $\cos x=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ | $\sum_{k=0}^\infty\frac{x^{2k+1}}{2(2k+1)}=\ln(\frac{1+x}{1-x})$
$\cosh x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $e^x=\sum_{k=0}^\infty\frac{x^k}{k!}$ | $\arcsin x=\sum_{n=0}^\infty\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^\infty x^k$ | $\arctan x=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}x^{2k-1}$: [-1,1]

טורים - $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$
1) הצבה של $y=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ ו-y, y', y''..
2) מזיזים אינדקסים כדי להשוות חזקות
3) השוואת מקדמים החזקות שמכילים a_n כך
4) כותבים את y כללי, מציאת חוקיות, הכללה של a_n לפחות 8 איברים את הבא כפי...

סדר שני

שיטת האופרטורים - $y+a_1y'+a_2y''=R(x)$

$r^2+a_1r+a_2=0$ ⇐ r_1,r_2 ⇐ $(D-r_1I)(D-r_2I)y=R(x)$
נגדיר $g(x)=(D-r_2I)y$
ונפתור שתי משוואות לינאריות מסדר ראשון:
$g'-r_1g=R(x)$
ואז $y'-r_2y=g(x)$ ⟵ $y(x)$

משוואות לינאריות -

$$y''+ay'+by=R(x)\to\begin{cases}R(x)=0\to\text{הומוגנית}\\ R(x)\neq0\to\text{לא הומוגנית}\end{cases}$$

הומוגנית - נציב $y=Ae^{rx}$ ⟵ $Ae^{rx}(r^2+ar+b)=0$
★ $r_1\neq r_2$ ממשיים: $y(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$
★ $r_2=r_1=r$: $y(x)=Ae^{rx}+Bxe^{rx}$
★ $r_1=\bar r_2=\alpha\pm\beta i$: $y(x)=Ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\delta)$ או $y(x)=e^{\alpha x}(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$
הערה: אפשר שיטת פתרון דומה רק עם 3 r, אם $r_1\neq r_2\neq r_3$ ⟵ $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{r_3x}$

לא הומוגנית - $R(x)\neq0$: $y(x)=C_1y_1+C_2y_2+y_p$
מציאת פתרון פרטי: $y_p=AR(x)+BR'(x)+CR''(x)...$
★ $R(x)\neq\{y_1,y_2,y_1x^n,y_2x^n\}$ ⟵ $y_p(x)$
★ $R(x)\cap\{y_1,y_2\}$ ⟵ $x\cdot y_p(x)$
★ $R(x)\cap\{y_1x^n,y_2x^n\}$ ⟵ $x^{n+1}\cdot y_p(x)$
ואז מציבים את y_p במשוואה ומוצאים את הקבועים וכו'.

דרך פתרון
1) מציאת פתרון להומוגני
2) בדיקת שייכות של $R(x)$
3) מציאת y_p עם קבועים
4) הצבת y_p במשוואה ומציאת הקבועים
5) חיבור y_p ו-y_H לכללי

אוילר: $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$$\int f(x(t))\cdot x'(t)dt=F(x(t))+C$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

במקרה ו $F(x)=x^n\cdot y(x)$, $y_p=x^n\cdot y(x)$ כאשר m היא החזקה הגבוהה ביותר של הפתרון ההומוגני, האיבר הראשון בנוסף, הפתרון הוא אז $y_p(x)=x^{m+n+1}y(x)$

$y''+ay'+by=R(x)$

$R(x)$	$Ae^{\alpha x}$	$A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$	$P_n(x)=A_0+A_1x...A_nx^n$
$\alpha\neq\alpha_2$, $\alpha\neq\alpha_1$	$Ce^{\alpha x}$	$C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x$	$x^{S_0}(C_0+C_1x+...C_nx^n)$; S_0 - מספר השורשים האפסים
$\alpha=\alpha_1$, $\alpha\neq\alpha_2$ או הפוך	$Cxe^{\alpha x}$	$C_1x\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x$	
$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$	$Cx^2e^{\alpha x}$	—	

דוגמאות	y_H	ניחוש
$y''+3y'-4y=x$	e^{-4x}, e^x	$Ax+B$
$=\cos2x$	" "	$A\cos2x+B\sin2x$
$=e^{-x}+x$	" "	$Ae^{-x}+Bx+C$
$=e^x$	" "	Axe^x
$=xe^x$	" "	$Ax^2e^x+Bxe^x$
$y''+4y'+4y=e^{-2x}$	$e^{-2x}, e^{-2x}x$	Ax^2e^{-2x}
$y''+y=e^x$	$\cos x, \sin x$	Ae^x
$=\sin x+e^{-x}$	" "	$Ax\sin x+Bx\cos x+Ce^{-x}$
$y'''+3y''-4y=e^{-2x}x$	$e^x, e^{-2x}, e^{-2x}x$	$Ax^3e^{-2x}+Bx^2e^{-2x}...$
$y^{(6)}-y^{(4)}=x^2$	$x, x^2, x^3, x^0, e^x, e^{-x}$	$Ax^6+Bx^4+Cx^2$
$=\cos x\sin2x$	$\cos x, \sin2x$	$A\cos x\sin2x+$ (נגזרות)
$=x\cos x$	" "	$Ax^2\cos x+$ נגזרות

$\int x^ne^{\alpha x}dx=\frac{x^ne^{\alpha x}}{\alpha}-\frac{n}{\alpha}\int x^{n-1}e^{\alpha x}dx$

$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+\frac A2\ln(x^2+px+q)$

$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt a}\ln\left|\sqrt a x+\frac{b}{2\sqrt a}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|$ $(a>0, b^2-4ac\neq0)$

$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt a}\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ $(a>0, b^2-4ac=0)$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ | $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ | $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin(\frac{\alpha\pm\beta}{2})\cos(\frac{\alpha\mp\beta}{2})$ | $\sin\alpha\sin\beta=-\frac12(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ | $\cos\alpha\cos\beta=\frac12(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$ | $\sin\alpha\cos\beta=\frac12(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$10x^2y^5+3yy''+(y')^3=xy$ — סדר 2, לא לינארית (yy'') — לינארית

$10x^8y^3+xy''+(y')^3=xy$ — סדר 2, מעלה 1 — לינארית

8) הניחו שקצב הגידול של תרבית חיידקים פרופורציוני למספר החיידקים הנמצאים בתרבית. סמנו את קבוע הפרופורציה ב α. כתבו ופתרו את המשוואה הדיפרנציאלית עבור מספר החיידקים N כתלות בזמן t אם ישנם N_0 חיידקים בזמן $t=0$.

$ydy+(xy^2-8x)dx=0$
$\int\frac{y}{8-y^2}dy=\int xdx$
$-\frac12\ln(8-y^2)=\frac12x^2+c$
$\boxed{y=\sqrt{8-Ae^{-x^2}}}$
פרידה
$8-y^2>0$
$Ae^{-x^2}>0$
יש הפתרון $A=-1$ לא
פתרון

$y(2xy+1)dx+x(1-xy)dy=0$
הצבה
$y=\frac{z-1}{x}$ ← $z=xy+1$
$\frac{z-1}{x}(2z-1)dx+x(2-z)dy=0$
$-\frac1x+\int\frac1xdx=\int\frac{2-z}{(2z-1)(z-1)}dz=\int\frac{3}{2z-1}-\frac{1}{z-1}dz$
$-\frac1x=\frac32\ln(2z-1)-\ln(z-1)+C$
$\boxed{e^{-\frac1x}=\frac{(2z-1)^{3/2}}{z-1}\cdot A=A\frac{(2xy+1)^{3/2}}{xy}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$ | $\frac{d\lambda y}{d\lambda x}\cdot\frac{dy}{dx}$ | $\frac{\lambda^2x^2+\lambda^23y^2}{\lambda^22xy}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$
הומוגנית מסדר 0
$dy=zdx+xdz$ | נציב $y=zx$
$\frac{zdx+xdz}{dx}=\frac{x^2+3z^2x^2}{2x^2z}$: $\frac{1-3z^2}{2z}$
$\int\frac{2z\,dz}{1-z^2}=\int\frac1xdx$
$\ln(1-z^2)=\ln x+C$ ⇒ $1-z^2=kx$
$\boxed{x^2-y^2=kx^3}$
הומוגנית

לינארית
$y+2y=e^x$
$y_H=e^{-\int2dx}=e^{-2x}$
$\int\frac{e^x}{e^{-2x}}dx=\frac13e^{3x}$
$y=e^{-2x}(\frac13e^{3x}+C)$
$\boxed{y=\frac13e^x+Ce^{-2x}}$

$\frac{dN}{dt}=\alpha N$
$\int\frac{dN}{N}=\int\alpha\,dt$
$\ln N=\alpha t+c$
$N=e^{\alpha t+c}$
$N_0=e^c$ ⇒ $C=\ln N_0$
$N(t=0)=N_0$
α - קבוע פרופורציה
פרידה
$\boxed{N(t)=N_0e^{\alpha t}}$

$\left(\frac{\frac{x^2}{2\sqrt{\frac12x^2-1}}+\sqrt{\frac12x^2-1}}{2(\frac12x^4-x^2)+1}\right)\times\sqrt{\frac12x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}$
בדיקה:
$\frac{x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac12x^2+\frac12x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{x^2-1}$
$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}$

$y'=\frac{2xy^2+x}{x^2y-y}$
פרידה
$\frac{dy}{dx}\frac{y}{2y^2+1}=\frac{x}{x^2-1}$
$\int\frac{y}{2y^2+1}dy=\int\frac{x}{x^2-1}dx$
$\frac14\ln(2y^2+1)=\frac12\ln(x^2-1)+C$
$\boxed{2y^2+1=(x^2-1)^2\cdot\tilde C}$
נבדוק גם $y\neq0$
יש פתרון סינגולרי $y=0$

הומוגני

$y(2xy+1)dx + x(1-xy)dy = 0$

$dy = \left(\frac{-(z-1)}{x^2} + \frac{dz}{x\,dx}\right)dx \qquad \begin{cases} z = xy+1 \\ \frac{z-1}{x} = y \end{cases}$

$\frac{z-1}{x}\left(2x\frac{(z-1)}{x}+1\right)dx + x\left(1-\frac{x(z-1)}{x}\right)\left(-\frac{z-1}{x^2}dx + \frac{1}{x}dz\right) = 0$

$\frac{dx}{x} = \frac{2z}{3(z^2-2z+1)}dz = \left(\frac{z-1}{3(z-1)^2} - \frac{1}{3(z-1)^2}\right)dz$

$\boxed{\ln x + c = \frac{1}{6}\ln(z^2-2z+1) + \frac{1}{3(z-1)}}$

מדויק

$\underbrace{(2x^3+3y)}_{M}dx + \underbrace{(3x+y-1)}_{N}dy = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\phi_1 = \int(2x^3+3y)dx = \frac{1}{2}x^4 + 3yx + c_1(y)$

$\phi_2 = \int(3x+y-1)dy = 3xy + \frac{1}{2}y^2 - y - c_2(x)$

$\boxed{\phi = C = 3xy + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^2 - y}$

כמעט מדויק

$\underbrace{(y^2+2xy)}_{M}dx + \underbrace{(2y^2+3xy)}_{N}dy = 0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x+3y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y+2x$

$f(y) = \frac{-4x-3y+2y+2x}{y^2+2xy} = \frac{1}{y} \to \mu = e^{\int\frac{1}{y}dy} = y$

$\underbrace{(y^3+2xy^2)}_{M}dx + \underbrace{(2yx^2+3xy^2)}_{N}dy = 0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4yx+3y^2 = \frac{\partial M}{\partial y}$

$\phi_1 = \int(y^3+2xy^2)dx = y^3x + x^2y^2 + c_1(x)$

$\phi_2 = \int(2yx^2+3xy^2)dy = y^2x^2 + xy^3 + c_2(x)$

$\boxed{\phi = x^2y^2 + xy^3 + C}$

בלי Y

$xy'' + y' = 4x \qquad \begin{cases} z = y' \\ z' = y'' \end{cases}$

$xz' + z = 4x$

$x\,dz + (z-4x)dx = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\phi_1 = \int x\,dz = xz + c_2(x)$

$\phi_2 = \int(z-4x)dx = zx - 2x^2 + c_1(x)$

$c = zx - 2x^2$

$\frac{c_1+2x^2}{x} = z = y' = \frac{dy}{dx}$

$\int\left(\frac{c_1}{x}+2x\right)dx = \int dy$

$\boxed{C_2 + C_1\ln x + x^2 = y}$

ניוטון

2) לפי חוק הקירור של ניוטון, קצב ההתקררות של חומר, הנמצא באוויר קר, פרופורציוני להפרש הטמפרטורות בין טמפרטורת החומר וטמפרטורת האוויר.

טמפרטורת האוויר $30°$ וידוע שהחומר מתקרר מ100 מעלות ל70 במשך 15 דקות. אם ידוע שטמפרטורת החומר ההתחלתית היא $100°$ מתי תהיה טמפרטורת החומר $40°$?

שימו לב: האוויר מתנהג כאמבט חום ולכן הטמפרטורה שלו נשארת קבועה.

2) $\frac{dT}{dt} = \alpha(T-30)$

$\frac{dT}{T-30} = \alpha\,dt$

$\ln(T-30) = \alpha t + c$

$T - 30 = ke^{\alpha t}$

$T = ke^{\alpha t} + 30$

$T(t=0) = 100 \Rightarrow k = 70$

$T(t=15) = 70 \Rightarrow 70 = 70e^{15\alpha} + 30$

$\frac{1}{15}\ln\left(\frac{40}{70}\right) = \alpha$

$-0.0373 = \alpha$

$40 = T = 70e^{-0.0373t} + 30$

$\frac{1}{-0.0373}\cdot\ln\frac{10}{70} = t$

$\boxed{\text{דקות}\ 52.1583 = t}$

לינארי

$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$

$y_H = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int\frac{1}{x}dx} = x$

$\int\frac{Q(x)}{y_H}dx = \int x + 3 - \frac{2}{x}dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln x + c$

$\boxed{y = x\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln x + c\right) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln x + cx}$

ברנולי

$y' = \frac{2}{x}y + \frac{x}{y^2} \qquad z = y^{1+2} = y^3$

$z' - \frac{6z}{x} = 3x$

$z_H = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int -\frac{6}{x}dx} = e^{6\ln x} = x^6$

$\int\frac{Q(x)}{z_H}dx = \int\frac{3}{x^5}dx = -\frac{3}{4x^4}$

$z = \boxed{y^3 = x^6\left(-\frac{3}{4x^4} + c\right)}$

$xy' - 2y = x^2\sqrt{y}$

$y' - \frac{2y}{x} = x\sqrt{y}$

$z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$z' + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}\right)z = \frac{1}{2}x$

$z_H = e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x} = x$

$\int\frac{\frac{1}{2}x}{x}dx = \frac{1}{2}x$

ברנולי

$\boxed{z = \sqrt{y} = x\left(\frac{1}{2}x + c\right)}$

קלרו

$y - xy' + \frac{1}{4}(y')^4 = 0$

$y' = c$

$\boxed{y = xc - \frac{1}{4}c^4}$

בלי X

$yy'' + (y')^2 + 4 = 0 \qquad \begin{cases} y' = z \\ y'' = z\frac{dz}{dy} \end{cases}$

$yz\frac{dz}{dy} + z^2 + 4 = 0$

$\int\frac{z\,dz}{z^2+4} = -\int\frac{dy}{y}$

$\frac{1}{2}\ln(z^2+4) + \ln y + c_1 = 0$

$z^2 + 4 = \tilde{C}_1 y^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\tilde{C}_1 y^{-2} - 4}$

$\int\frac{dy}{\sqrt{\tilde{C}_1 y^{-2} - 4}} = x = \int dx$

$-\frac{1}{4}\sqrt{\tilde{C}_1 - 4y^2} = x + C_2$

$\boxed{y = \sqrt{C_2 - \frac{1}{4}(\tilde{C}_1 - 4x)^2}}$

אוילר - וריאציה

$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

$y(z) = y(x(z)) \qquad z = \ln|x|$

$\frac{d^2y}{dz^2} + 4\frac{dy}{dz} + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0 \to r = -2$

$y(x) = A|x|^{-2} + B|x|^{-2}\ln|x|$

מקדמים קבועים

$y'' - y = 0 \qquad y = e^{\lambda x}$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 1) = 0$

$\boxed{y_H = Ae^{-x} + Be^{x}}$

$y''' + y = 0 \qquad y = e^{\lambda x}$

$e^{\lambda x}(\lambda^3 + 1) = 0 \to \lambda = -1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{y_H = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

אוילר

$x^2y'' + 3xy' - 3y = 0 \qquad y = x^{\lambda}$

$\lambda(\lambda-1)x^2x^{\lambda-2} + 3x\lambda x^{\lambda-1} - 3x^{\lambda} = 0$

$x^{\lambda}(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0$

$\boxed{y_H = Ax + Bx^{-3}}$

ניחוש מושכל

$(D - r_2I)(D - r_1I) = R(x), \ r_1 = 1, \ r_2 = 2, \ R(x) = e^{x}\cos 2x$

$\boxed{Ae^{x}\cos 2x + Be^{x}\sin 2x}$

ניחוש מושכל / אינטגרציה בחלקים

$y'' - y = \sin 2x$

$y_H = Ae^{-x} + Be^{x}$

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$

$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - A\sin 2x - B\cos 2x = \sin 2x$

$-5B = 0 \quad -5A = 1$

$\boxed{y = Ae^{-x} + Be^{x} - \frac{1}{5}\sin 2x}$

$r^2 - 1 = 0 \to (D+I)(D-I) = 0$

$g + g' = \sin 2x \qquad \mu = e^{\int dx} = e^{x}$

$\int\frac{\sin 2x}{e^{-x}}dx = \int\sin 2x\,e^{x}dx = \frac{1}{5}\sin 2x\,e^{x} - \frac{2}{5}e^{x}\cos 2x$

$y' - y = g(x) = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x + ce^{-x}$

$\mu = e^{-\int dx} = e^{x}$

$\int\frac{\frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x + ce^{-x}}{e^{-x}}dx = \ \dots$ אותו דבר

$y = e^{x}\left(-\frac{1}{5}\sin 2x\,e^{-x} + c_1e^{-2x} + A\right)$

$\boxed{y = Ae^{x} + Be^{-x} - \frac{1}{5}\sin 2x}$

מקדמים קבועים

$y''' + y = \cos x$

$y_H = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$y_p = A\cos x + B\sin x \to y_p' = -A\sin x + B\cos x$

$y_p''' = A\sin x - B\cos x \to y_p'' = -A\cos x - B\sin x$

$A\sin x - B\cos x + A\cos x + B\sin x = \cos x$

$\begin{cases} -B + A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \to A = \frac{1}{2} = -B$

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

טור

$y' = 3x^2y$

$\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} = 3x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

$-a_1 - 2a_2x - \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)a_{n+3}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+2} = 0$

$\sum x^{n+2}\left((n+3)a_{n+3} - 3a_n\right) = a_1 + 2a_2x$

$a_1 = 0, \ a_2 = 0, \ a_{n+3} = \frac{3a_n}{n+3}$

$a_3 = a_0, \ a_4 = \frac{3}{4}a_1 = 0, \ a_5 = \frac{3a_2}{5} = 0$

$a_6 = \frac{1}{2}a_0, \ a_{3n} = \frac{1}{n!}a_0$

$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a_0x^{3n} = a_0e^{x^3}}$

שינוי משתנים

$sin(y)dy = cos(x)(2cos(y) - sin(x))dx$

1) מהי הדרך לפתרון המשוואה:

א. שינוי משתנים

$dt = \cos x\,dx \quad t = \sin x$

2) אם ניתן להעביר את המשוואה לצורה $S'(t) + p(t)S = Q(t)$, אזי:

א. $p(t) = 2, \ Q(t) = t$

$\cos y = f(t) \qquad \frac{ds}{dt} = -\sin y\frac{dy}{dt}$

$\sin y\frac{dy}{\cos x\,dx} = (2\cos(y) - \sin x)$

$-S'(t) = 2S(t) - t \ / \ e^{-\int 2dx}$

$e^{-2t}\left(C + \int te^{2t}dt\right) = e^{-2t}\left(C + \frac{e^{2t}}{4}(2t-1)\right)$

$\cos y = S(t) = ce^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = \boxed{Ce^{-2\sin x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}}$

פיזיקה

כח המשיכה הכבידתי הפועל על מסה m הנמצאת במרחק r ממרכז כדוה"א (r גדול מ- R, רדיוס כדוה"א) הוא mgR^2/r^2.

- כתבו את המשוואה הדיפרנציאלית המייצגת את תנועת מסה m הנזרקת בכיוון הרדיאלי החוצה משטח פני כדוה"א.
- בהנחה שהמהירות ההתחלתית של המסה היא $v(r=R) = v_0$, מצאו את $v(r)$.

$F = \frac{-mgR^2}{r^2} = m\ddot{r}$

$-g\frac{R^2}{r^2} = \ddot{r}$

$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} = v\frac{dv}{dr}$

$-g\frac{R^2}{r^2} = v\frac{dv}{dr}$

$C + g\frac{R^2}{r} = \frac{1}{2}v^2$

$\sqrt{2g\frac{R^2}{r} + C} = v = v_0 = v(R)$

$2gR + C = v_0^2$

$\boxed{v(r) = \sqrt{2g\frac{R^2}{r} + v_0^2 - 2gR}}$

Linear 1st order

1. $y' + 2y = x$, $\quad y(x) = ce^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$
2. $y' + 2xy = x$, $\quad y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$
3. $y' + x^2y = x$, $\quad y(x) = ce^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$
4. $y' + 3y = 1$, $\quad y(x) = ce^{-3x} + \frac{1}{3}$
5. $xy' + 3y = 1$, $\quad y(x) = \frac{c}{x^3} + \frac{1}{3}$
6. $y' + y = e^x$, $\quad y(x) = ce^{-x} + \frac{e^x}{2}$
7. $y' + y/x = e^{x^2}$, $\quad y(x) = \frac{c}{x} + \frac{e^{x^2}}{2x}$
8. $y' + \frac{y}{x} = x + 1$, $\quad y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2}$
9. $xy' + y = sinx$, $\quad y(x) = \frac{c}{x} - \frac{cosx}{x}$
10. $xy' + y = cosx$, $\quad y(x) = \frac{c}{x} + \frac{sinx}{x}$

Variable separation

1. $y'/x = 1/(x^2+1)$, $\quad y(x) = c + \frac{1}{2}log(x^2+1)$
2. $y'/x = e^x$, $y(x) = c + xe^x - e^x$
3. $\frac{1}{y'} = \frac{1}{sinx}$, $\quad y(x) = c - cosx$
4. $\frac{1}{y'} = \frac{x}{1+x}$, $\quad y(x) = c + x + log(x)$
5. $\frac{1}{y'} = 1 + x^2$, $\quad y(x) = c + arctan(x)$

Bernoulli

1. $y' + 2y = y^2$, $\quad y(x) = \frac{2}{ce^{2x}+1}$
2. $xy' + y = x^4y^2$, $\quad y(x) = -\frac{3}{x(c+x^3)}$
3. $xy' + y = y^2$, $\quad y(x) = \frac{1}{cx+1}$
4. $xy' + y = x^3y^2$, $\quad y(x) = -\frac{2}{x(c+x^2)}$

Exact equations:

1. $2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0$, $y^2 + (x^2+1)y - 3x^3 = c$
2. $\frac{2ty}{t^2+1} - 2t + (ln(t^2+1) - 2)y' = 0$, $\quad yln(t^2+1) - t^2 - 2y = c$
3. $2xy^2 + 4 = 2(3 - x^2y)y'$, $\quad x^2y^2 - 6y + 4x = c$

Euler equations:

1. $y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$, $\quad y(x) = c_1x^{-\frac{1}{2}}sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}log(x)) + c_2x^{-\frac{1}{2}}cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}log(x))$
2. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $\quad y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2x$
3. $2x^2y'' + 2xy' + y = 0$, $\quad y(x) = c_1sin(log(x)/\sqrt{2}) + c_2cos(log(x)/\sqrt{2})$
4. $2x^2y'' + 2xy' + y = x$, $\quad y(x) = c_1sin\left(\frac{log(x)}{\sqrt{2}}\right) + c_2cos\left(\frac{log(x)}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x}{3}$

Linear 2nd order

5. $y'' + 2y' + y = 0$, $\quad y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$
6. $y'' + 2y' + y = x$, $\quad y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x - 2$
7. $y'' - 2y' + y = 1$, $\quad y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + 1$
8. $y'' + 3y' + 2y = e^x$, $\quad y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{e^x}{6}$
9. $2y'' + 3y' + y = e^{2x}$, $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-x} + \frac{e^{2x}}{15}$
10. $2y'' + 3y' + y = sinx$, $\quad y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-x} - \frac{sinx}{10} - \frac{3cosx}{10}$
11. $y'' + y' = 1$, $\quad y(x) = c_1e^{-x} + c_2 + x$
12. $y'' + 2y' = x$, $\quad y(x) = c_1e^{-2x} + c_2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$
13. $3y'' + y' = x^2$, $\quad y(x) = c_1e^{-x/3} + c_2 + \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 18x$
14. $3y'' + y = 1$, $\quad y(x) = c_1sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c_2cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + 1$
15. $y'' + 3y' + 2y = e^x + 1$, $\quad y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{e^x}{6} + \frac{1}{2}$

Linear 2nd order no constants

1. $xy'' - (x+1)y' + y = 5, y_{H1} = e^x$, $\quad y(x) = c_1e^x + c_2(-x-1) + 5$
2. $(x-5)^2y'' - 2(x-5)y' + y = 0, y_{H1} = x - 5$, $\quad y(x) = c_1(x-5) + c_2(x-5)^2$