סיכום בחשבון אינפיניטסימלי 2

מאת: הלל בן חנוך

קרדיטים ענקיים לניב שורק וליקיר אלון

מבוסס על ההרצאות של שחר שנבו

לצפייה בהרצאות המשוכתבות – לחצו כאן (19 קבצים)

תוכן העניינים

I. אינטגרל לא מסוים

הגדרה ומושגי יסוד

- **נגזרת (תזכורת):** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

- **פונקציה קדומה:**

פונקציה $F(x)$ נקראת פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע I, אם לכל $x \in I$ מתקיים $F'(x) = f(x)$.

- **אינטגרל לא מסוים:**

אוסף כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$.

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה, אז כל פונקציה קדומה אחרת היא מהצורה $F(x)+C$, כאשר C קבוע.

סימון: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

שיטות אינטגרציה

אינטגרלים מיידיים ופירוק

- **ליניאריות:** $\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$

- **נוסחאות בסיסיות:**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad , \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad , \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

אינטגרציה בחלקים

- **נוסחה:** מבוססת על נגזרת של מכפלה: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

- **כתיב דיפרנציאלי:**

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- **שימוש:** שימושית כאשר האינטגרל באגף ימין פשוט יותר מהמקורי. לעיתים יש לחזור על הפעולה מספר פעמים או לפתור משוואה עבור האינטגרל המבוקש. לדוגמה, בחישוב $\int e^x \sin x dx$, לאחר שתי הפעלות של אינטגרציה בחלקים, חוזרים לאינטגרל המקורי ומחלצים אותו.

אינטגרציה על ידי הצבה (שינוי משתנה)

- **נוסחה:** מבוססת על כלל השרשרת:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

כאשר F היא פונקציה קדומה של f.

- **הצבה ישירה:** מציבים $t = g(x)$, ואז $dt = g'(x)dx$.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

- **הצבה הפוכה:** מציבים $x = l(t)$, ואז $dx = l'(t)dt$.

$$\int f(x)dx = \int f(l(t))l'(t)dt = G(t) + C = G(\phi(x)) + C$$

כאשר $\phi(x)$ היא הפונקציה ההפוכה של $l(t)$.

- **מקרה פרטי חשוב:** $\int h(ax+b)dx = \frac{H(ax+b)}{a} + C$, כאשר $\int h(x)dx = H(x) + C$.

הדיפרנציאל

- **הגדרה:** פונקציה $f(x)$ נקראת דיפרנציאבילית ב-x_0 אם קיים קבוע A כך ש:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$$

כאשר $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$.

- **קשר לנגזרת:** פונקציה גזירה ב-x_0 אם ורק אם היא דיפרנציאבילית שם, ובמקרה זה $A=f'(x_0)$.

- **הדיפרנציאל של f:** הוא הפונקציה הלינארית $df_{x_0}(\Delta x)=f'(x_0)\Delta x$.

- **כתיב דיפרנציאלי:** עבור הפונקציה $g(x)=x$, מתקיים $g'(x)=1$, ולכן $dx=1\cdot\Delta x$. מכאן ניתן לכתוב את הדיפרנציאל של כל פונקציה f כ-$df=f'(x)dx$. כתיב זה שימושי מאוד בשיטת ההצבה ובאינטגרציה בחלקים.

אינטגרציה של פונקציות רציונליות

- **אלגוריתם:** עבור $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$:

1. אם $\deg(P)\ge\deg(Q)$, בצע חילוק פולינומים.
2. פרק את המכנה $Q(x)$ לגורמים לינאריים וריבועיים אי-פריקים.
3. בצע פירוק לשברים חלקיים. למשל, $\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$.
4. בצע אינטגרציה לכל אחד מהשברים החלקיים. אינטגרלים אופייניים:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C,\qquad\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx\quad\text{(כאשר המכנה אי-פריק)}$$

הצבות מיוחדות

- **פונקציה רציונלית של פונקציות טריגונומטריות:** $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

  ההצבה האוניברסלית: $t = \tan(x/2)$.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

אם R מקיימת תכונות סימטריה מסוימות, ניתן להשתמש בהצבות פשוטות יותר (למשל $t = \sin x$, $t = \cos x$ או $t = \tan x$).

- **פונקציה רציונלית של x ושורש ריבועי:**
  - עבור $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, נציב $x = a \sin t$.
  - עבור $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, נציב $x = a \tan t$.
  - עבור $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, נציב $x = a/\cos t$.

- **הצבות אוילר:** שיטות להפיכת אינטגרנד המכיל שורש של פולינום ריבועי, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, לפונקציה רציונלית של משתנה חדש t.
  - **סוג ראשון (כאשר $a > 0$):** ניתן להשתמש בהצבה:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x$$

  לדוגמה, עבור $\sqrt{x^2 + px + q}$, ההצבה $u = x + \sqrt{x^2 + px + q}$ תחלץ את x כפונקציה רציונלית של u, וכך גם את dx ואת השורש עצמו.

  - **סוג שני (כאשר לפולינום שורשים ממשיים α, β):** כלומר, $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. ניתן להשתמש בהצבה:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

  לדוגמה, עבור האינטגרל $\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}$ (כאשר $a < 0$), ההצבה $u = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$ הופכת את האינטגרנד לפונקציה רציונלית של u.

II. האינטגרל המסוים

הגדרת אינטגרל רימן

- **חלוקה:** חלוקה T של קטע $[a,b]$ היא סדרה $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$.
  הפרמטר של החלוקה $\lambda(T)$ הוא אורך תת-הקטע המקסימלי: $\lambda(T) = \max_i(x_i - x_{i-1})$.

- **סכום רימן:** עבור חלוקה T ובחירת נקודות $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, סכום רימן הוא:

$$\sigma(f, T, \{\zeta_i\}) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

- **אינטגרל מסוים:** פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם קיים מספר ממשי I כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T עם $\lambda(T) < \delta$ ולכל בחירת נקודות ζ_i מתקיים $|\sigma(f, T, \{\zeta_i\}) - I| < \varepsilon$. ערך הגבול I נקרא האינטגרל המסוים ומסומן $\int_a^b f(x)dx$.

סכומי דרבו ותנאים לאינטגרביליות

- **סכומי דרבו:** עבור חלוקה T ופונקציה חסומה f, נסמן $m_i = \inf_{x\in\Delta x_i} f(x)$ ו-$M_i = \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)$.
  - **סכום דרבו תחתון:** $s(T) = \sum m_i \Delta x_i$.
  - **סכום דרבו עליון:** $S(T) = \sum M_i \Delta x_i$.

- **אינטגרל תחתון ועליון:** $\underline{I} = \sup_T s(T)$ ו-$\overline{I} = \inf_T S(T)$.

- **תנאי הכרחי ומספיק:** פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם $\underline{I} = \overline{I}$. במקרה זה, ערכם המשותף הוא $\int_a^b f(x)dx$.

- **תנאי רימן:** f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם היא חסומה ומתקיים $\lim_{\lambda(T)\to 0}[S(T) - s(T)] = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$, כאשר $\omega_i = M_i - m_i$ היא התנודה של f בתת-הקטע ה-i.

- **משפטים מרכזיים:**

- ○ פונקציה **רציפה** בקטע סגור היא אינטגרבילית בו.
- ○ פונקציה **מונוטונית** בקטע סגור היא אינטגרבילית בו.
- ○ פונקציה חסומה עם **מספר סופי של נקודות אי-רציפות** היא אינטגרבילית.
- ○ **משפט לבג:** פונקציה חסומה היא אינטגרבילית אם ורק אם קבוצת נקודות אי-הרציפות שלה היא בעלת מידה אפס.

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

- **חלק א':** אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ורציפה ב-$x_0 \in [a,b]$, אז הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ גזירה ב-x_0 ומתקיים $F'(x_0) = f(x_0)$.
- **חלק ב' (נוסחת ניוטון-לייבניץ):** אם f רציפה ב-$[a,b]$ ו-$\phi(x)$ היא פונקציה קדומה כלשהי של f, אז:

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)\Big|_{\text{מסומן גם}\,\phi(x)|_a^b}$$

תכונות ושיטות לאינטגרל מסוים

- **לינאריות:** $\int_a^b (cf+dg)dx = c\int_a^b fdx + d\int_a^b gdx$.
- **אדיטיביות הקטע:** $\int_a^b fdx = \int_a^c fdx + \int_c^b fdx$.
- **מונוטוניות:** אם $f(x) \geq g(x)$ ב-$[a,b]$, אז $\int_a^b fdx \geq \int_a^b gdx$. בפרט, אם $f(x) \geq 0$, אז $\int_a^b fdx \geq 0$.
- **אי-שוויון המשולש:** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
- **משפט ערך הביניים לאינטגרלים:** אם f רציפה ו-g אינטגרבילית ובעלת סימן קבוע ב-$[a,b]$, אז קיימת $c \in [a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

- **אינטגרציה בחלקים:**

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

- **שיטת ההצבה:** אם $x = l(t)$, כאשר $l(\alpha) = a, l(\beta) = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(l(t))l'(t)dt$$

III. שימושי האינטגרל המסוים

חישוב שטחים

- **שטח מתחת לגרף:** אם $f(x) \geq 0$ בקטע $[a,b]$, השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x והישרים $x=a, x=b$ הוא $\int_a^b f(x)dx$. אם f מחליפה סימן, האינטגרל מחשב את "השטח עם סימן". השטח הגיאומטרי הוא $\int_a^b |f(x)|dx$.

- **שטח בין שני גרפים:** אם $f(x) \geq g(x)$ בקטע $[a,b]$, השטח הכלוא ביניהם הוא:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

נפח גוף סיבוב

- **סיבוב סביב ציר x (שיטת הדיסקאות):** נפח הגוף הנוצר מסיבוב השטח מתחת לגרף $f(x)$ בקטע $[a,b]$ סביב ציר x הוא:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- **סיבוב סביב ציר y (שיטת הקליפות הגליליות):** נפח הגוף הנוצר מסיבוב השטח מתחת לגרף $f(x)$ בקטע $[a,b]$ (עבור $a \geq 0$) סביב ציר y הוא:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

אורך עקומה ושטח פנים

- **אורך עקומה:** אורך הגרף של פונקציה $y=f(x)$ בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a,b]$ הוא:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- **שטח פנים של גוף סיבוב (סביב ציר x):**

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{כאשר } f(x) \geq 0)$$

- **שטח פנים של גוף סיבוב (סביב ציר y):**

$$A_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \quad (\text{כאשר } a \geq 0)$$

IV. אינטגרלים לא אמיתיים

סוגי אינטגרלים לא אמיתיים

- **סוג ראשון (קטע אינסופי):**

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

האינטגרל **מתכנס** אם הגבול קיים וסופי. באופן דומה עבור $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ועבור $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$.

- **סוג שני (פונקציה לא חסומה):** אם f אינה חסומה בסביבת a (נקודה סינגולרית),

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

האינטגרל **מתכנס** אם הגבול קיים וסופי. באופן דומה אם הנקודה הסינגולרית היא b.

- אם יש מספר נקודות "בעייתיות" (כלומר, גבולות אינטגרציה אינסופיים או נקודות בתוך הקטע בהן הפונקציה אינה חסומה), מפצלים את האינטגרל לסכום של אינטגרלים, כאשר כל אחד מהם מכיל נקודה בעייתית אחת בלבד. האינטגרל המקורי מתכנס רק אם כל החלקים מתכנסים.

מבחני התכנסות לאינטגרלים אי-שליליים

- **מבחן ההשוואה:** אם $0 \le f(x) \le g(x)$ בקטע האינטגרציה:
  - אם $\int g(x)dx$ מתכנס, אז $\int f(x)dx$ מתכנס.
  - אם $\int f(x)dx$ מתבדר, אז $\int g(x)dx$ מתבדר.

- **מבחן ההשוואה הגבולי:** אם $f, g > 0$ ו- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (כאשר $0 < L < \infty$, והגבול נלקח בנקודה הבעייתית), אז $\int f(x)dx$ ו-$\int g(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

- **מבחן ה-p (מבחן אינטגרלי):**

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \quad (a>0) \quad p>1 \text{ מתכנס אם ורק אם }$$

$$\int_0^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$ (סינגולריות ב-a) $p<1$ מתכנס אם ורק אם

התכנסות בהחלט ובתנאי

- **התכנסות בהחלט:** האינטגרל $\int f(x)dx$ מתכנס בהחלט אם $\int |f(x)|dx$ מתכנס.

  התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.

- **התכנסות בתנאי:** האינטגרל $\int f(x)dx$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס, אך לא מתכנס בהחלט.

- **מבחן דיריכלה:** אם $g(x)$ מונוטונית ושואפת ל-0, ו-$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ חסומה, אז $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס. לדוגמה: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

- **קריטריון קושי:** $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שלכל $b_2>b_1>M$ מתקיים $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

V. טורי פונקציות

התכנסות נקודתית ובמידה שווה

- **התכנסות נקודתית:** סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית ל-$f(x)$ בקבוצה A, אם לכל $x \in A$ הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}$ מתכנסת ל-$f(x)$.
  (ה-N בהגדרת הגבול תלוי ב-ε וגם ב-x).

- **התכנסות במידה שווה (במ"ש):** $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ל-$f(x)$ בקבוצה A, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N (שתלוי רק ב-ε) כך שלכל $N < n$ ולכל $x \in A$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

- **קריטריון ה-sup:** התכנסות במ"ש שקולה לכך ש- $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

- **קריטריון קושי להתכנסות במ"ש:** $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ב-A אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n, m > N$ ולכל $x \in A$ מתקיים $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

- **מבחן ה-M של ויירשטראס:** אם $|u_n(x)| \le M_n$ לכל $x \in A$, והטור המספרי $\sum M_n$ מתכנס, אז טור הפונקציות $\sum u_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה ב-A.

- **מבחן דיריכלה להתכנסות במ"ש:** אם סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum u_n(x)$ חסומה במידה אחידה, וסדרת הפונקציות $\{v_n(x)\}$ מונוטונית יורדת נקודתית ומתכנסת במ"ש ל-0, אז הטור $\sum u_n(x)v_n(x)$ מתכנס במ"ש.

תכונות של התכנסות במ"ש

- **רציפות:** אם $\{f_n\}$ היא סדרה של פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש ל-f בקטע, אז f רציפה בקטע.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

- **משפט דיני:** אם $\{f_n\}$ היא סדרה מונוטונית של פונקציות רציפות בקטע סגור $[a, b]$ שמתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה f, אז ההתכנסות היא במ"ש.

- **אינטגרציה איבר-איבר:** אם $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$ וכל f_n אינטגרבילית, אז f אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

- **גזירה איבר-איבר:** אם $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל-f בנקודה אחת לפחות, וסדרת הנגזרות $\{f'_n\}$ מתכנסת במ"ש ל-g, אז $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ל-f, ו-f גזירה ומתקיים $f' = g$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

VI. טורי חזקות

הגדרות ותחום התכנסות

- **טור חזקות:** טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.
- **רדיוס התכנסות** (R)**:** לכל טור חזקות קיים $R \in [0,\infty]$ כך שהטור:
  - מתכנס (בהחלט) לכל x המקיים $|x-x_0|<R$.
  - מתבדר לכל x המקיים $|x-x_0|>R$.
  - התנהגות הטור בקצוות $x=x_0 \pm R$ דורשת בדיקה נפרדת.
- **נוסחת קושי-הדמר לרדיוס ההתכנסות:**

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

- **חישוב מעשי (מבחן המנה):** אם הגבול קיים, $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.
- **התכנסות במ"ש:** טור חזקות מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום ההתכנסות שלו (x_0-R, x_0+R). אם הטור מתכנס גם בקצה x_0+R, אז הוא מתכנס במ"ש בכל הקטע $[x_0, x_0+R]$.

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

- בתחום ההתכנסות (x_0-R, x_0+R), ניתן לגזור ולבצע אינטגרציה לטור איבר-איבר.
- רדיוס ההתכנסות של הטור המקורי, טור הנגזרות וטור האינטגרלים **זהה**.
- **גזירה:** $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$
- **אינטגרציה:** $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

טורי טיילור ומקלורן

- אם פונקציה $f(x)$ ניתנת לפיתוח כטור חזקות סביב x_0, אז טור זה הוא טור טיילור שלה, והמקדמים הם $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- **פולינום טיילור:** $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

- **שארית לגראנז':** השגיאה בקירוב $f(x)$ על ידי $P_n(x)$ היא $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. ניתן להעריך אותה באמצעות:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

עבור c כלשהו בין x_0 ל-x.

- פונקציה שווה לטור טיילור שלה בתחום מסוים אם ורק אם שארית לגראנז' שואפת לאפס באותו תחום, כלומר $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

טורי מקלורן שימושיים (סביב $x_0 = 0$)

פונקציה	טור חזקות	תחום התכנסות
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$	$\|x\| < 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \dots$	$\|x\| \leq 1$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$	$\|x\| < 1$

VII. דוגמאות ויישומים נבחרים

אינטגרציה בחלקים חוזרת (אינטגרל "בומרנג")

- **שאלה:** חשב את האינטגרל $I = \int e^x \sin x \, dx$.

- **פתרון:** זוהי דוגמה קלאסית בה נשתמש באינטגרציה בחלקים פעמיים ונחזור לאינטגרל המקורי.

- **שלב א':** נבחר $u = \sin x$ ו-$dv = e^x dx$. מכאן $du = \cos x \, dx$ ו-$v = e^x$.

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

האינטגרל החדש דומה למקורי. נפעיל אינטגרציה בחלקים פעם נוספת עליו.

- **שלב ב':** עבור $\int e^x \cos x \, dx$, נבחר $u = \cos x$ ו-$dv = e^x dx$. מכאן $du = -\sin x \, dx$ ו-$v = e^x$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + I$$

- **שלב ג':** נציב את התוצאה משלב ב' במשוואה של שלב א'.

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

- **שלב ד' (חילוץ האינטגרל):** קיבלנו משוואה עבור I. נעביר אגפים ונפתור.

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

נוסחת נסיגה לאינטגרל

- **שאלה:** מצא נוסחת נסיגה עבור האינטגרל $I_n = \int \sin^n x \, dx$, עבור $n \geq 2$.

- **פתרון:** נשתמש באינטגרציה בחלקים. נכתוב את האינטגרנד כמכפלה: $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$.

- **שלב א':** נבחר $u = \sin^{n-1} x$ ו-$dv = \sin x\, dx$. מכאן:

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx \quad , \quad v = -\cos x$$

- **שלב ב':** נציב בנוסחת אינטגרציה בחלקים:

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x - \int (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

- **שלב ג':** נשתמש בזהות $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ כדי לחזור לאינטגרלים מהצורה I_k.

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx$$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\left(\int \sin^{n-2} x\, dx - \int \sin^n x\, dx\right)$$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

- **שלב ד' (חילוץ I_n):** נבודד את I_n.

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n + (n-1)I_n = nI_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$$

- **נוסחת הנסיגה הסופית:**

$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

ניתן להשתמש בנוסחה זו כדי לחשב את האינטגרל לכל n טבעי, בהתבסס על אינטגרלי הבסיס $I_0 = \int dx = x + C$ ו-$I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$.

הצבה טריגונומטרית לחישוב שטח

- **שאלה:** חשב את האינטגרל $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, המייצג (כאשר מכפילים ב-2) את שטח העיגול ברדיוס a.

- **פתרון:** נשתמש בהצבה טריגונומטרית המבוססת על הזהות $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.

- **שלב א':** נציב $x = a\sin t$, כאשר $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. בתחום זה, $t = \arcsin(x/a)$ וההצבה חח"ע.

$$dx = a\cos t\,dt$$

- **שלב ב':** נציב באינטגרל:

$$\int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot (a\cos t)\,dt = \int \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \cdot a\cos t\,dt$$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2 t} \cdot a\cos t\,dt = \int |a\cos t| \cdot a\cos t\,dt$$

מאחר ובחרנו $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, מתקיים $\cos t \ge 0$, ולכן $|a\cos t| = a\cos t$.

$$= \int a^2\cos^2 t\,dt$$

- **שלב ג':** נשתמש בזהות זווית כפולה $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

$$a^2 \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

- **שלב ד' (חזרה למשתנה x):** מ- $x = a\sin t$, יש לנו $t = \arcsin(x/a)$ ו-$\sin t = x/a$. מכאן, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - (x/a)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

- **פתרון סופי:**

$$\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

הצבה אוניברסלית

- **שאלה:** חשב את האינטגרל $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

- **פתרון (דרך א' - הצבה אוניברסלית):** נשתמש בהצבה $t = \tan(x/2)$. מכאן $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ו-$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

- **פתרון (דרך ב' - טריק אלגברי):** נשתמש בזהויות $1 = \sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)$ ו-$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$.

$$I = \int \frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} + \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\tan(x/2) + \cot(x/2))dx$$

כעת נזהה אינטגרלים מהצורה $\int \frac{f'}{f}$.

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{-2(-\frac{1}{2}\sin(x/2))}{\cos(x/2)}dx + \int \frac{2(\frac{1}{2}\cos(x/2))}{\sin(x/2)}dx\right)$$

$$= -\ln|\cos(x/2)| + \ln|\sin(x/2)| + C = \ln\left|\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

יישום: נפח של טורוס (בייגלה)

- **שאלה:** חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב העיגול $(y-y_0)^2 + x^2 = R^2$ (כאשר $y_0 > R$) סביב ציר ה-x.

- **פתרון:** הגוף הנוצר הוא טורוס. נפחו הוא הפרש הנפחים של גוף הסיבוב של חצי המעגל העליון ושל חצי המעגל התחתון.

- **שלב א':** נבודד את y. חצי המעגל העליון הוא $f_+(x) = y_0 + \sqrt{R^2 - x^2}$ וחצי המעגל התחתון הוא $f_-(x) = y_0 - \sqrt{R^2 - x^2}$. תחום האינטגרציה הוא $[-R, R]$.

- **שלב ב':** נפח הטורוס הוא $V = V_+ - V_-$.

$$V = \pi\int_{-R}^{R} [f_+(x)]^2 dx - \pi\int_{-R}^{R} [f_-(x)]^2 dx = \pi\int_{-R}^{R} \left([f_+(x)]^2 - [f_-(x)]^2\right) dx$$

נשתמש בנוסחת כפל מקוצר $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$[f_+]^2-[f_-]^2=(f_+-f_-)(f_++f_-)=(2\sqrt{R^2-x^2})(2y_0)=4y_0\sqrt{R^2-x^2}$$

- **שלב ג':** נציב בחזרה באינטגרל:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}4y_0\sqrt{R^2-x^2}dx=4\pi y_0\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$$

- **שלב ד' (זיהוי גיאומטרי):** האינטגרל $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$ מייצג את השטח של חצי עיגול ברדיוס R. ערכו הוא $\frac{1}{2}\pi R^2$.

- **פתרון סופי:**

$$V=4\pi y_0\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)=2\pi^2R^2y_0$$

אורך קשת של מעגל

- **שאלה:** חשב את אורך הקשת של הפונקציה $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ בקטע $[0,1/2]$.

- **פתרון:** זוהי קשת של מעגל היחידה ברביע הראשון.

- **שלב א':** נגזור את הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- **שלב ב':** נחשב את הביטוי שתחת השורש בנוסחת אורך קשת.

$$1+[f'(x)]^2=1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2=1+\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}$$

- **שלב ג':** נציב באינטגרל:

$$L=\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx=\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

- **פתרון סופי:**

$$L=[\arcsin x]_0^{1/2}=\arcsin(1/2)-\arcsin(0)=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$$

התוצאה הגיונית, שכן זוהי קשת של 30° ($\pi/6$ רדיאנים) על מעגל היחידה.

שוויון אינטגרלים לא אמיתיים

- **טענה:** הוכח כי $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

- **פתרון:** נצא מאינטגרל שמאל. נבצע הצבה $x=2t$, $dx=2dt$.

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin(2t)}{2t}2dt=\int_0^\infty \frac{2\sin t\cos t}{t}dt=2\int_0^\infty \frac{\sin t\cos t}{t}dt$$

כעת נבצע אינטגרציה בחלקים על התוצאה. נבחר $u=\frac{\sin t}{t}$ ו-$dv=\cos t\,dt$. מכאן $v=\sin t$ ו-$du=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}dt$.

$$I=2\left(\left[\frac{\sin t}{t}\cdot\sin t\right]_0^\infty-\int_0^\infty \sin t\cdot\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}dt\right)$$

האיבר הראשון מתאפס בגבולות. $\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2 t}{t}=0$ ו-$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t}=\lim\frac{\sin t}{t}\sin t=1\cdot 0=0$.

$$I=-2\int_0^\infty \left(\frac{t\sin t\cos t-\sin^2 t}{t^2}\right)dt=-2\int_0^\infty \frac{\sin t\cos t}{t}dt+2\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$$

אבל זיהינו קודם ש-$I=2\int_0^\infty \frac{\sin t\cos t}{t}dt$. נציב זאת:

$$I=-I+2\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$$

$$2I=2\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \implies I=\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

פונקציית בטא

- **שאלה:** לאילו ערכים של s האינטגרל $B(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}dx$ מתכנס?

- **פתרון:** זהו אינטגרל לא אמיתי עם שתי נקודות בעייתיות אפשריות: $x=0$ ו-$x=\infty$. נפצל את הבדיקה.

- **התנהגות ליד $x=0$:** כאשר $x\to 0^+$, המכנה $1+x\to 1$. לכן האינטגרנד מתנהג כמו $x^{s-1}=\frac{1}{x^{1-s}}$. ממבחן ה-p לאינטגרלים מסוג שני, האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-s}}$ מתכנס אם ורק אם המעריך קטן מ-1.

$$1-s<1 \implies s>0$$

- **התנהגות ליד** $x=\infty$**:** כאשר $x\to\infty$, המכנה $x+1$ מתנהג כמו x. לכן האינטגרנד מתנהג כמו $\frac{x^{s-1}}{x}=x^{s-2}=\frac{1}{x^{2-s}}$. ממבחן ה-p לאינטגרלים מסוג ראשון, האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-s}}$ מתכנס אם ורק אם המעריך גדול מ-1.

$$2-s>1 \implies s<1$$

- **מסקנה סופית:** כדי שהאינטגרל המקורי יתכנס, שני החלקים צריכים להתכנס. לכן, נדרש שיתקיימו שני התנאים יחד:

$$0<s<1$$

התכנסות במ"ש של טור טריגונומטרי

- **שאלה:** הראה שהטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n\log(n+2)}$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,2\pi-a]$ לכל $0<a<\pi$.

- **פתרון:** נשתמש במבחן דיריכלה להתכנסות במ"ש.

- **שלב א':** נראה שסדרת הסכומים החלקיים של $u_n(x)=\cos(nx)$ חסומה במידה אחידה בקטע. לפי הזהות $\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)=\frac{\sin((N+1/2)x)-\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}$, נקבל:

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)\right|=\left|\frac{\sin((N+1/2)x)-\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}\right|\le\frac{|\sin((N+1/2)x)|+|\sin(x/2)|}{2|\sin(x/2)|}\le\frac{1+1}{2|\sin(x/2)|}=\frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

בקטע $[a,2\pi-a]$, מתקיים $a/2\le x/2\le\pi-a/2$. בתחום זה, $\sin(x/2)\ge\sin(a/2)>0$. לכן, $\left|\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)\right|\le\frac{1}{\sin(a/2)}$. זהו חסם קבוע (אינו תלוי ב-N או ב-x), ולכן הסכומים החלקיים חסומים במ"א.

- **שלב ב':** נראה שהסדרה $v_n(x)=\frac{1}{n\log(n+2)}$ מתכנסת במ"ש ל-0. זוהי סדרת מספרים קבועים (אינה תלויה ב-x) שמונוטונית יורדת ל-0. התכנסות של סדרת קבועים היא תמיד במ"ש.

- **מסקנה:** מכיוון ששני תנאי מבחן דיריכלה מתקיימים, הטור $S(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,2\pi-a]$.

פיתוח פונקציה לטור חזקות

- **שאלה:** מצא טור חזקות סביב $x=0$ לפונקציה $f(x)=e^x\sin x$ וקבע את רדיוס ההתכנסות.

- **פתרון:** ניתן למצוא את מקדמי הטור, $c_n = f^{(n)}(0)/n!$, על ידי גזירה חוזרת.

- **שלב א' (גזירה):**

$$f(x) = e^x \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = (e^x \sin x + e^x \cos x) + (e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x \cos x \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = (2e^x \cos x - 2e^x \sin x) - (2e^x \sin x + 2e^x \cos x) = -4e^x \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

- **שלב ב' (זיהוי תבנית):** מצאנו כי $f^{(4)}(x) = -4f(x)$. תבנית זו מאפשרת למצוא את כל הנגזרות. למשל, $f^{(5)}(x) = -4f'(x)$, $f^{(8)}(x) = (-4)^2 f(x)$, וכו'. הנגזרות ב-0 הן: $0, 1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, 0, \dots$

- **שלב ג' (כתיבת הטור):**

$$c_0 = 0, c_1 = \frac{1}{1!} = 1, c_2 = \frac{2}{2!} = 1, c_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}, c_4 = 0, \dots$$
$$f(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{15}x^6 + \dots$$

- **שלב ד' (רדיוס התכנסות):** דרך אחרת היא להכפיל את טורי החזקות הידועים:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$
$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)$$

נאסוף את המקדמים של החזקות הנמוכות:

  - x^1: $1 \cdot x = x$
  - x^2: $x \cdot x = x^2$
  - x^3: $1 \cdot (-\frac{x^3}{6}) + \frac{x^2}{2} \cdot x = \frac{-1+3}{6}x^3 = \frac{1}{3}x^3$

התוצאה תואמת. מאחר וטורי החזקות של e^x ושל $\sin x$ מתכנסים לכל $x \in \mathbb{R}$ ($R = \infty$), גם טור המכפלה שלהם יתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$, ולכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = \infty$.