משפטים מאינפי 2 והוכחותיהם

מאת: הלל בן חנוך

קרדיט ליקיר ולניב

לצפייה בהרצאות המשוכתבות – לחצו כאן (19 קבצים)

הערות על הסימון והמבנה

משפט: תוצאה מתמטית שהוכחתה במלואה.

טענה: הצהרה או תוצאה המשמשת כהנחה או כהשלמה להוכחה עיקרית.

למה: תוצאה עזר אשר מוכיחה חלקים מההוכחות.

הדגשה:

ההוכחות המופיעות כאן נועדו לרענון הזיכרון ולהבהרת הרעיונות המרכזיים, אך הן מניחות היכרות מוקדמת עם הרקע המתמטי הנדרש. כל ההוכחות כתובות בצורה מלאה, מובנת וברורה, תוך שימת דגש על דיוק והשלמות של הטיעונים המתמטיים.

יש לציין כי כל ההוכחות הנדרשות כלולות כאן. מעבר לכך, התוכן נבדק בקפידה, אך ייתכן ויימצאו בו שגיאות קלות, אשמח אם תעדכנו אותי אם מצאתם אחת.

הבהרה: כל ההוכחות במסמך זה, למעט ההוכחה לנפח גוף סיבוב סביב ציר ה-y, נאמנות לנוסח ההוכחות שהופיעו בהרצאות של שחר שנבו. ההוכחה עבור סיבוב סביב ציר ה-y שונתה, שכן גרסתה המקורית מוזרה. לפיכך, נכתבה כאן גרסה שונה וברורה יותר, תוך שמירה על נכונות ודיוק מתמטי.

תוכן העניינים

1 אינטגרל רימן

1.1 תנאי הכרחי לאינטגרביליות (פונקציה חסומה)

הצהרה:

אם פונקציה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא חסומה שם.

הוכחה.

נניח בשלילה ש-f אינה חסומה בקטע $[a,b]$.

פירוש הדבר הוא שלכל $M > 0$, קיים $x \in [a,b]$ כך ש-$|f(x)| > M$.

לכן, ניתן לבנות סדרת נקודות $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ ב-$[a,b]$ כך ש-$|f(x_l)| \to \infty$.

לשם הפשטות, נניח כי $f(x_l) \to \infty$.

תהי $T = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_k = b\}$ חלוקה כלשהי של $[a,b]$.

מכיוון שיש אינסוף איברים בסדרה $\{x_l\}$ ומספר סופי של תת-קטעים (k), לפי עקרון שובך היונים (אם יש יותר עצמים מתאים, לפחות תא אחד מכיל יותר מאובייקט אחד), קיים לפחות תת-קטע אחד, $\Delta x_{i_0} = [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$, המכיל אינסוף איברים מהסדרה $\{x_l\}$.

עובדה זו גוררת כי f אינה חסומה בתת-הקטע Δx_{i_0}.

כעת, נבנה סכום רימן עבור החלוקה T.

נבחר נקודות ביניים ζ_i בכל קטע Δx_i עבור $i \neq i_0$.

הסכום החלקי של סכום רימן עבור קטעים אלו הוא קבוע:

$$A = \sum_{i \neq i_0} \Delta x_i f(\zeta_i)$$

עבור הקטע Δx_{i_0}, אנו חופשיים לבחור את נקודת הביניים ζ_{i_0}.

מכיוון ש-f אינה חסומה מלעיל ב-Δx_{i_0}, לכל מספר ממשי K, נוכל למצוא $\zeta_{i_0} \in \Delta x_{i_0}$ כך ש-$f(\zeta_{i_0}) > K$.

יהי n מספר טבעי כלשהו. נבחר את K להיות $\frac{|A|+n}{\Delta x_{i_0}}$.

אזי קיימת $\zeta_{i_0} \in \Delta x_{i_0}$ כך ש:

$$f(\zeta_{i_0}) > \frac{|A| + n}{\Delta x_{i_0}}$$

סכום רימן המתאים לבחירה זו של נקודות הביניים הוא:

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\Delta x_i = f(\zeta_{i_0})\Delta x_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} f(\zeta_i)\Delta x_i = \Delta x_{i_0} f(\zeta_{i_0}) + A$$

לפי אי-שוויון המשולש, $|a+b| \geq |a| - |b|$, נקבל:

$$|\sigma(T)| = |\Delta x_{i_0} f(\zeta_{i_0}) + A| \geq |\Delta x_{i_0} f(\zeta_{i_0})| - |A|$$
$$> \Delta x_{i_0} \cdot \frac{|A|+n}{\Delta x_{i_0}} - |A| = |A| + n - |A| = n$$

הראינו שלכל חלוקה T, ניתן לבחור נקודות ביניים כך שסכום רימן המתאים יהיה גדול מכל מספר טבעי n.

אם ניקח סדרת חלוקות נורמלית $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ (כלומר $\lambda(T_m) \to 0$), נוכל לבנות עבורה סדרת סכומי רימן $\sigma(T_m)$ כך ש-$\sigma(T_m) > m$. סדרה זו מתבדרת לאינסוף.

מכאן שהגבול המגדיר את האינטגרל אינו קיים, בסתירה להנחה ש-f אינטגרבילית. □

1.2 קיום סכומי דרבו

הצהרה:

אם T_1, T_2 הן שתי חלוקות כלשהן של $[a,b]$, אז $\underline{S}(T_1) \leq \overline{S}(T_2)$.

הוכחה.

תהי T החלוקה הנוצרת מאיחוד כל נקודות החלוקה של T_1 ו-T_2. כלומר, קבוצת נקודות החלוקה של T היא $T_1 \cup T_2$.

חלוקה T זו היא **עידון** של T_1 (כי כל נקודות T_1 נמצאות ב-T) וגם עידון של T_2.

נשתמש בשתי תכונות יסודיות של סכומי דרבו:

- **התנהגות תחת עידון:** כאשר מעדנים חלוקה, הסכום התחתון גדל (או נשאר זהה) והסכום העליון קטן (או נשאר זהה). כלומר, אם T היא עידון של T_1, אז:

$$\underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T) \quad \text{וגם} \quad \overline{S}(T) \leq \overline{S}(T_1)$$

- **היחס בין סכום עליון לתחתון:** לכל חלוקה נתונה T, מתקיים $\underline{S}(T) \leq \overline{S}(T)$. זאת מכיוון שבכל תת-קטע Δx_i, מתקיים $m_i = \inf_{x \in \Delta x_i} f(x) \leq \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) = M_i$.

כעת, נשרשר את האי-שוויונות:

- מכיוון ש-T היא עידון של T_1, מתקיים: $\underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T)$.
- לפי תכונה (2), עבור החלוקה T, מתקיים: $\underline{S}(T) \leq \overline{S}(T)$.
- מכיוון ש-T היא עידון של T_2, מתקיים: $\overline{S}(T) \leq \overline{S}(T_2)$.

בסה"כ נקבל:

$$\underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T) \leq \overline{S}(T) \leq \overline{S}(T_2)$$

ולכן, $\underline{S}(T_1) \leq \overline{S}(T_2)$. □

1.3 העדנה של חלוקות דרבו לפי תנודה

הצהרה:
נניח כי T היא חלוקה של $[a,b]$ ו-T' היא חלוקה המעדנת אותה על ידי הוספת P נקודות חלוקה נוספות.
תהי f פונקציה חסומה ב-$[a,b]$. אז מתקיים:

$$\underline{S}(T) \geq \underline{S}(T') - P\lambda\Omega \quad (1)$$

$$\overline{S}(T) \leq \overline{S}(T') + P\lambda\Omega \quad (2)$$

כאשר $\lambda = \lambda(T)$ הוא פרמטר החלוקה T, ו-$\Omega = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ היא התנודה של f בקטע כולו.

הוכחה.
נוכיח את אי-השוויון:

$$\overline{S}(T) \leq \overline{S}(T') + P\lambda\Omega$$

באינדוקציה על P, מספר הנקודות המתווספות לחלוקה T כדי לקבל את החלוקה T'.

בסיס האינדוקציה: $P = 1$
נניח כי T' מתקבלת מ-T על ידי הוספת נקודה אחת x^*, הנמצאת בתוך תת-קטע קיים $\Delta x_{i_0} = [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ של T.

נסמן:

$$M_{i_0} = \sup_{x\in\Delta x_{i_0}} f(x), \quad m_{i_0} = \inf_{x\in\Delta x_{i_0}} f(x)$$

בחלוקה T, התרומה של הקטע Δx_{i_0} לסכום דרבו העליון היא:

$$M_{i_0} \cdot (x_{i_0} - x_{i_0-1}) = M_{i_0} \cdot \Delta x_{i_0}$$

בחלוקה T', הקטע התפצל לשני תתי-קטעים:

$$[x_{i_0-1}, x^*], \quad [x^*, x_{i_0}]$$

נסמן את הסופרימומים של f על קטעים אלו ב-M' ו-M'' בהתאמה. אז התרומה של קטע זה ל-$\overline{S}(T')$ היא:

$$M'(x^* - x_{i_0-1}) + M''(x_{i_0} - x^*)$$

נחשב את ההפרש בין הסכומים (הסכומים זהים בכל מקום אחר):

$$\begin{aligned}\overline{S}(T)-\overline{S}(T') &= M_{i_0}\cdot\Delta x_{i_0}-[M'(x^*-x_{i_0-1})+M''(x_{i_0}-x^*)]\\ &=(M_{i_0}-M')\cdot(x^*-x_{i_0-1})+(M_{i_0}-M'')\cdot(x_{i_0}-x^*)\end{aligned}$$

כעת, ננצל את העובדה ש-$M',M''\leq M_{i_0}$, מאחר ש-M' ו-M'' הם סופרימומים על תת-קטעים של Δx_{i_0}, ואילו M_{i_0} הוא הסופרימום על כל הקטע. בנוסף, לכל $x\in\Delta x_{i_0}$, מתקיים $f(x)\geq m_{i_0}$, ולכן:

$$M_{i_0}-M',\ M_{i_0}-M''\leq M_{i_0}-m_{i_0}$$

נסמן את התנודה המקומית ב-$\omega_{i_0}=M_{i_0}-m_{i_0}$, ונקבל:

$$\overline{S}(T)-\overline{S}(T')\leq\omega_{i_0}\cdot[(x^*-x_{i_0-1})+(x_{i_0}-x^*)]=\omega_{i_0}\cdot\Delta x_{i_0}$$

כיוון ש-$\omega_{i_0}\leq\Omega$ ו-$\Delta x_{i_0}\leq\lambda$, אז:

$$\overline{S}(T)-\overline{S}(T')\leq\Omega\cdot\lambda$$

ולכן:

$$\overline{S}(T)\leq\overline{S}(T')+\lambda\Omega$$

צעד האינדוקציה:

נניח כי הטענה נכונה עבור $P=k$, כלומר:

$$\overline{S}(T)\leq\overline{S}(T^{(k)})+k\lambda\Omega$$

נראה כי היא נכונה גם עבור $P=k+1$. כלומר, נניח ש-$T^{(k+1)}$ מתקבלת מ-$T^{(k)}$ על ידי הוספת נקודה נוספת אחת.

לפי בסיס האינדוקציה:

$$\overline{S}(T)\leq\overline{S}(T^{(k)})+k\lambda\Omega$$

ומבסיס המקרה $P=1$ עבור $T^{(k)}\to T^{(k+1)}$, נקבל (בעצם הוספנו נקודה אחת - שזה הבסיס שהוכחנו מקודם):

$$\overline{S}(T^{(k)})\leq\overline{S}(T^{(k+1)})+\lambda\Omega$$

נחבר את שני האי-שוויונות:

$$\overline{S}(T)\leq\overline{S}(T^{(k+1)})+(k+1)\lambda\Omega$$

נוכיח את אי-השוויון:

$$\underline{S}(T') \leq \underline{S}(T) + P\lambda\Omega$$

באינדוקציה על P, מספר הנקודות המתווספות לחלוקה T כדי לקבל את החלוקה T'.

בסיס האינדוקציה: $P = 1$

נניח כי T' מתקבלת מ-T על ידי הוספת נקודה אחת x^*, הנמצאת בתוך תת-קטע קיים $\Delta x_{i_0} = [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ של T.

נסמן:

$$m_{i_0} = \inf_{x \in \Delta x_{i_0}} f(x), \quad M_{i_0} = \sup_{x \in \Delta x_{i_0}} f(x)$$

בחלוקה T, התרומה של הקטע Δx_{i_0} לסכום דרבו התחתון היא:

$$m_{i_0} \cdot (x_{i_0} - x_{i_0-1}) = m_{i_0} \cdot \Delta x_{i_0}$$

בחלוקה T', הקטע התפצל לשני תתי-קטעים:

$$[x_{i_0-1}, x^*], \quad [x^*, x_{i_0}]$$

נסמן את האינפימומים של f על קטעים אלו ב-m' ו-m'' בהתאמה. אז התרומה של קטע זה ל-$\underline{S}(T')$ היא:

$$m'(x^* - x_{i_0-1}) + m''(x_{i_0} - x^*)$$

נחשב את ההפרש בין הסכומים:

$$\begin{aligned}\underline{S}(T') - \underline{S}(T) &= m'(x^* - x_{i_0-1}) + m''(x_{i_0} - x^*) - m_{i_0} \cdot \Delta x_{i_0} \\ &= (m' - m_{i_0})(x^* - x_{i_0-1}) + (m'' - m_{i_0})(x_{i_0} - x^*)\end{aligned}$$

כעת, ננצל את העובדה ש-$m', m'' \geq m_{i_0}$, ולכן:

$$m' - m_{i_0},\ m'' - m_{i_0} \leq M_{i_0} - m_{i_0} = \omega_{i_0}$$

ולכן:

$$\underline{S}(T') - \underline{S}(T) \leq \omega_{i_0} \cdot \Delta x_{i_0} \leq \Omega \cdot \lambda$$

ולכן:

$$\underline{S}(T') \leq \underline{S}(T) + \lambda\Omega$$

צעד האינדוקציה:

נניח כי הטענה נכונה עבור $P = k$, כלומר:

$$\underline{S}(T^{(k)}) \leq \underline{S}(T) + k\lambda\Omega$$

נראה כי היא נכונה גם עבור $P = k+1$. כלומר, נניח ש-$T^{(k+1)}$ מתקבלת מ-$T^{(k)}$ על ידי הוספת נקודה נוספת אחת.

לפי בסיס האינדוקציה:

$$\underline{S}(T^{(k+1)}) \leq \underline{S}(T^{(k)}) + \lambda\Omega$$

נחבר עם הנחת האינדוקציה:

$$\underline{S}(T^{(k+1)}) \leq \underline{S}(T) + (k+1)\lambda\Omega$$

ובכך הוכחנו את הטענה לכל $P \in \mathbb{N}$. $\square$

1.4 פונקציה מונוטונית היא אינטגרבילית

הצהרה:
פונקציה מונוטונית בקטע סגור $[a,b]$ אינטגרבילית בו.

הוכחה.
נניח **בלי** הגבלת הכלליות כי f מונוטונית לא יורדת.
ראשית, f חסומה בקטע מכיוון שלכל $x \in [a,b]$, מתקיים $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
כדי להוכיח אינטגרביליות, נשתמש בתנאי רימן, הקובע כי פונקציה חסומה היא אינטגרבילית אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$, קיימת חלוקה T של $[a,b]$ כך ש-$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$.
ההפרש בין סכומי דרבו הוא $\sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k}\omega_i \Delta x_i$.
מכיוון ש-f לא יורדת, בכל תת-קטע $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, המינימום מתקבל בקצה השמאלי והמקסימום בקצה הימני:

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i)$$

לכן, התנודה בכל קטע היא $\omega_i = M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.
יהי $\varepsilon > 0$. אם $f(a) = f(b)$, אז f קבועה, ולכן אינטגרבילית. נניח $f(b) > f(a)$.
נבחר חלוקה T כך שהפרמטר שלה, $\lambda(T) = \max_i\{\Delta x_i\}$, יקיים $\lambda(T) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.
כעת, נחשב את הפרש סכומי דרבו עבור חלוקה זו:

$$\begin{aligned}\overline{S}(T) - \underline{S}(T) &= \sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \\ &< \lambda(T)\sum_{i=1}^{k}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\end{aligned}$$

הסכום $\sum_{i=1}^{k}(f(x_i) - f(x_{i-1}))$ הוא טור טלסקופי:

$$(f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))+\cdots+(f(x_k)-f(x_{k-1})) = f(x_k)-f(x_0) = f(b)-f(a)$$

נציב בחזרה:

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \lambda(T)\cdot(f(b)-f(a)) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b)-f(a)) = \varepsilon$$

הראינו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T כך ש-$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$. לכן, f אינטגרבילית. □

1.5 האינטגרל של פונקציה רציפה, אי-שלילית, שאינה פונקציית האפס

הצהרה:

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, כך ש-$f(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$, אך $f \not\equiv 0$ (כלומר, לא פונקציית האפס). אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

הוכחה.

מכיוון ש-$f \not\equiv 0$, קיימת נקודה $x_0 \in [a,b]$ שעבורה $f(x_0) = L > 0$.

מרציפות הפונקציה f בנקודה x_0, נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה של x_0 בה ערכי הפונקציה קרובים ל-$f(x_0) = L$. נבחר $\varepsilon = \frac{L}{2}$. אז קיים מספר ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$ המקיים $|x - x_0| < \delta$, מתקיים:

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

מכך נובע:

$$f(x) > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

לכן, עבור קטע סגור $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ המוכל בתוך הסביבה הזו, נקבל כי לכל $x \in [\alpha,\beta]$ מתקיים:

$$f(x) > \frac{L}{2}$$

כעת, נחשב את האינטגרל על $[a,b]$, ונשתמש באי-שליליות הפונקציה כדי להוריד ממנו רק את האינטגרל על תת-הקטע:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta \frac{L}{2}\,dx = (\beta - \alpha)\cdot\frac{L}{2}$$

מכיוון ש-$L > 0$ ו-$\beta > \alpha$, המכפלה חיובית, ולכן:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

□

1.6 משפט ערך הביניים האינטגרלי

הצהרה:

תהי $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$, ו-$g(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ עם סימן קבוע (כלומר, $g(x) \geq 0$ לכל x או $g(x) \leq 0$ לכל x). אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

הוכחה.

הפונקציה $f \cdot g$ היא מכפלה של פונקציה רציפה (ולכן אינטגרבילית) ופונקציה אינטגרבילית, ולכן היא אינטגרבילית.

נניח **בלי** הגבלת הכלליות כי $g(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$.

הפונקציה f רציפה בקטע סגור $[a,b]$, ולכן לפי משפט ויירשטראס, היא חסומה ומקבלת בו ערך מינימום m וערך מקסימום M. כלומר, קיימות נקודות $x_m, x_M \in [a,b]$ כך ש-$f(x_m) = m$ ו-$f(x_M) = M$, ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$m \leq f(x) \leq M$$

מכיוון ש-$g(x) \geq 0$, נוכל להכפיל את אי-השוויון ב-$g(x)$ ולקבל:

$$m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$$

לפי תכונת המונוטוניות של האינטגרל, נבצע אינטגרציה על אי-השוויון בקטע $[a,b]$:

$$\int_a^b m \cdot g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b M \cdot g(x)dx$$

נוציא את הקבועים m ו-M מהאינטגרלים:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

נפריד לשני מקרים:

מקרה 1: $\int_a^b g(x)dx = 0$. במקרה זה, אי-השוויון הכפול הופך ל: $0 \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq 0$, כלומר $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. המשוואה המבוקשת היא $0 = f(c) \cdot 0$, והיא נכונה לכל $c \in [a,b]$.

מקרה 2: $\int_a^b g(x)dx > 0$. במקרה זה, ניתן לחלק את אי-השוויון הכפול ב-$\int_a^b g(x)dx$ (שהוא

מספר חיובי) מבלי לשנות את כיוון אי-השוויונות:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

נסמן את הערך שבאמצע ב-K.

הרגע הראינו ש-K הוא ערך הנמצא בין המינימום (m) למקסימום (M) של הפונקציה הרציפה f, ולכן:

לפי משפט ערך הביניים (של קושי), לכל ערך בין m ל-M, קיימת נקודה c בקטע $[x_m, x_M]$ (שמוכל ב-$[a,b]$) כך ש-$f(c)$ שווה לערך זה.

לכן, קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש:

$$f(c) = K = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

כעת, נציב את $f(c)$ שהתקבל מהמשוואה לעיל ונכפול את שני האגפים ב-$\int_a^b g(x)dx$, ונקבל:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

וזה בדיוק השוויון שרצינו להוכיח.

לכן, קיימת נקודה $c \in [a,b]$ שעבורה מתקיים השוויון, והמשפט הוכח. $\square$

2 חישובים גיאומטריים באמצעות אינטגרלים

2.1 נפח גוף סיבוב

2.1.1 סיבוב סביב ציר ה-x

הצהרה:
נפח גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב גרף הפונקציה הרציפה f בקטע $[a,b]$ סביב ציר ה-x הוא:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

הוכחה.
נשתמש בשיטת **הדיסקאות (הגלילים)** לחישוב נפח גוף סיבוב.

נניח כי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, ונרצה לחשב את הנפח של הגוף הנוצר כאשר גרף הפונקציה $y=f(x)$ מסתובב סביב ציר ה-x.

נחלק את הקטע $[a,b]$ לחלוקה T עם תתי-קטעים $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, ונבחר בכל תת-קטע נקודה כלשהי $\zeta_i \in \Delta x_i$. הערך $f(\zeta_i)$ מייצג קירוב מקומי של הפונקציה באותו תת-קטע.

כעת נביט בגוף שמתקבל כאשר הקטע הקטן של הפונקציה מעל Δx_i מסתובב סביב ציר x. נקבל גוף דמוי **גליל (דיסקה)**, שרדיוסו:

$$r_i = |f(\zeta_i)|$$

ואורכו

$$h_i = \Delta x_i$$

ולכן נפח הגליל הזה הוא בקירוב:

$$\Delta V_i = \pi r_i^2 h_i = \pi [f(\zeta_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

אם נסכום את כל נפחי הגלילים, נקבל קירוב לנפח הכולל:

$$V \approx \sum_{i=1}^{k} \pi [f(\zeta_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

זהו סכום רימן עבור הפונקציה $g(x) = \pi[f(x)]^2$.

כדי לעבור מגישה אינטואיטיבית להוכחה מדויקת, נשתמש בסכומי דרבו.
נסמן ב-m_i את הערך המינימלי וב-M_i את הערך המקסימלי של $|f(x)|$ על כל תת-קטע Δx_i. אז:

- הגליל **הקטן ביותר** האפשרי (שמתקבל אם נשתמש בערך המינימלי של הפונקציה בתת-הקטע) הוא בעל רדיוס m_i, ולכן נפחו:

$$V_i^{\min} = \pi m_i^2 \Delta x_i$$

- הגליל **הגדול ביותר** האפשרי הוא עם רדיוס M_i, ונפחו:

$$V_i^{\max} = \pi M_i^2 \Delta x_i$$

מכיוון שנפח הסיבוב של הקטע Δx_i שוכן בין שני הגלילים האלו, מתקיים:

$$\pi m_i^2 \Delta x_i \leq V_i \leq \pi M_i^2 \Delta x_i$$

אם נסכם את כל אי-השוויונות על פני כל תתי-הקטעים, נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i$$

כלומר:

- $\sum \pi m_i^2 \Delta x_i$ הוא סכום דרבו התחתון.
- $\sum \pi M_i^2 \Delta x_i$ הוא סכום דרבו העליון.

מכיוון שהפונקציה f רציפה, אז גם $\pi[f(x)]^2$ רציפה (והריבוע של רציפה הוא רציפה), ולכן היא אינטגרבילית.
כלומר, סכומי דרבו העליון והתחתון שואפים לאותו ערך כאשר פרמטר החלוקה $\lambda(T) \to 0$.

לכן, לפי משפט הסנדוויץ':

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

□

2.1.2 סיבוב סביב ציר ה-y (שיטת הקליפות הגליליות)

הצהרה:

נפח גוף הסיבוב הנוצר על ידי סיבוב השטח הכלוא בין גרף הפונקציה החיובית והרציפה f, ציר ה-x, והישרים $x = a$ ו-$x = b$ ($0 \leq a < b$) סביב ציר ה-y הוא:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

הוכחה.

נשתמש בשיטת "הקליפות הגליליות". נחלק את הקטע $[a, b]$ לתת-קטעים באמצעות חלוקה T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. הנפח הכולל הוא סכום הנפחים של "קליפות" גליליות, הנוצרות מסיבוב של רצועות אנכיות דקות סביב ציר ה-y.

נתבונן ברצועה אחת מעל תת-הקטע $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$. כאשר רצועה זו מסתובבת סביב ציר ה-y,

היא יוצרת קליפה גלילית. ניתן לקרב את נפח הקליפה הזו, ΔV_i, באמצעות הנוסחה:

$$\Delta V_i \approx (\text{היקף ממוצע}) \times (\text{גובה ממוצע}) \times (\text{עובי})$$

נבחר נקודת ביניים $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- **העובי** של הקליפה הוא $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- **הגובה הממוצע** של הקליפה הוא בקירוב $f(\zeta_i)$.
- **הרדיוס הממוצע** של הקליפה הוא בקירוב ζ_i, ולכן **ההיקף הממוצע** הוא $2\pi\zeta_i$.

לפיכך, הקירוב לנפח הקליפה הבודדת הוא:

$$\Delta V_i \approx 2\pi\zeta_i f(\zeta_i)\Delta x_i$$

כדי לקבל קירוב לנפח הכולל, נסכום את נפחי כל הקליפות:

$$V \approx \sum_{i=1}^{k} 2\pi\zeta_i f(\zeta_i)\Delta x_i$$

ביטוי זה הוא סכום רימן עבור הפונקציה $g(x) = 2\pi x f(x)$. מכיוון ש-$f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וגם הפונקציה $h(x) = 2\pi x$ רציפה בו, מכפלתן $g(x)$ רציפה אף היא, ולכן אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

כאשר ניקח את גבול סכומי הרימן כאשר פרמטר החלוקה $\lambda(T) \to 0$, סכום הקירובים שואף לערך המדויק של הנפח, שהוא האינטגרל המסוים של הפונקציה $g(x)$:

$$V = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{k} 2\pi\zeta_i f(\zeta_i)\Delta x_i = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

ובכך הוכחנו את הנוסחה. □

2.2 אורך עקומה

הצהרה:
אורך הגרף של פונקציה f בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a, b]$ הוא:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

הוכחה.
הרעיון הוא לקרב את אורך העקומה באמצעות סכום אורכים של מקטעים ישרים (קו פוליגונלי) המחברים נקודות סמוכות על הגרף.

תהי $T = \{a = x_0, x_1, \dots, x_k = b\}$ חלוקה של $[a, b]$. נחשב את אורך הקטע הישר המחבר את הנקודות $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ו-$(x_i, f(x_i))$. לפי משפט פיתגורס, אורך מקטע זה הוא:

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

הפונקציה f גזירה בקטע $[a, b]$. לכן, לפי משפט הערך הממוצע של לגראנז' על הקטע $[x_{i-1}, x_i]$, קיימת נקודה $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ כך ש:

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \implies \Delta y_i = f'(\zeta_i)\Delta x_i$$

נציב ביטוי זה באורך המקטע:

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\zeta_i)\Delta x_i]^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2(1 + [f'(\zeta_i)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta x_i \quad (\Delta x_i > 0) \end{aligned}$$

האורך הכולל של הקו הפוליגונלי המקרב את העקומה הוא סכום אורכי המקטעים:

$$L_T = \sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + [f'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

זהו סכום רימן עבור הפונקציה $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.
מכיוון ש-f' רציפה, גם $g(x)$ רציפה, ולכן אינטגרבילית.
כאשר פרמטר החלוקה $\lambda(T) \to 0$, סכום רימן זה שואף לאינטגרל המסוים, ולכן אורך העקומה הוא:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

□

---

3 סדרות וטורים של פונקציות

3.1 סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש

הצהרה:
נניח $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות המוגדרת בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$, ומתכנסת שם במידה שווה (במ"ש) ל-$f(x)$. נניח ש-$x_0 \in I$ וכל אחת מהפונקציות f_n רציפה ב-x_0. אז פונקציית הגבול f רציפה ב-x_0.

הוכחה.
מטרתנו להוכיח כי $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. על פי הגדרת הגבול, עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$, קיים

$\delta > 0$ כך שלכל $x \in I$ המקיים $|x - x_0| < \delta$, מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
יהי $\varepsilon > 0$ נתון.

שלב 1: שימוש בהתכנסות במ"ש.
מההתכנסות במ"ש של $\{f_n\}$ ל-f, קיים מספר טבעי N (שתלוי רק ב-ε) כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

נבחר n ספציפי המקיים $n > N$. נקרא לו n_0. אי-שוויון זה נכון בפרט עבור הנקודה x_0, כלומר:

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

שלב 2: שימוש ברציפות של f_{n_0}.
נתון שכל f_n רציפה ב-x_0, ובפרט f_{n_0} רציפה ב-x_0. לפי הגדרת הרציפות של f_{n_0}, עבור $\frac{\varepsilon}{3}$, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I$ המקיים $|x - x_0| < \delta$, מתקיים:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

שלב 3: הרכבת האי-שוויונות.
כעת נראה ש-δ שמצאנו בשלב 2 מתאים גם עבור f. יהי $x \in I$ המקיים $|x - x_0| < \delta$. נשתמש באי-שוויון המשולש כדי לחסום את $|f(x) - f(x_0)|$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$$

ננתח כל אחד מהאיברים:

- $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (מהתכנסות במ"ש, שלב 1)
- $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (מרציפות f_{n_0}, כי $|x - x_0| < \delta$, שלב 2)
- $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (מהתכנסות במ"ש בנקודה x_0, שלב 1)

סה"כ, עבור x המקיים $|x - x_0| < \delta$, קיבלנו:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

הראינו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ מתאים, ולכן f רציפה ב-x_0. $\square$

3.2 סדרת פונקציות אינטגרביליות המתכנסת במ"ש

הצהרה:
נניח $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$, ומתכנסת שם במ"ש ל-$f(x)$. אז פונקציית הגבול $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

והתכנסות זו היא במ"ש ב-$[a,b]$.

הוכחה.
ההוכחה מורכבת משני חלקים: (א) הוכחת האינטגרביליות של f, (ב) הוכחת התכנסות האינטגרלים.

חלק א: f אינטגרבילית.
לפי משפט לבג, פונקציה היא אינטגרבילית רימן בקטע סגור אם ורק אם היא חסומה בו וקבוצת נקודות אי-הרציפות שלה היא בעלת מידה אפס.

1. **חסימות של f:** מההתכנסות במ"ש, עבור $\varepsilon = 1$, קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < 1$.
נבחר $n_0 > N$. הפונקציה f_{n_0} אינטגרבילית ולכן חסומה. כלומר, קיים קבוע $M > 0$ כך ש-$|f_{n_0}(x)| \le M$ לכל $x \in [a,b]$.
לפי אי-שוויון המשולש:

$$|f(x)| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + M$$

לכן f חסומה בקטע $[a,b]$.

2. **קבוצת אי-הרציפות של f היא בעלת מידה 0:** תהי A_n קבוצת נקודות אי-ההרציפות של f_n.
מכיוון שכל f_n אינטגרבילית, לפי משפט לבג, כל A_n היא קבוצה בעלת מידה 0.
מהמשפט על רציפות הפונקציה הגבולית, אם x_0 היא נקודת רציפות של כל הפונקציות f_n, אז f רציפה ב-x_0.
כיוון שלכל n הפונקציה f_n רציפה בכל נקודה מחוץ לקבוצה A_n, נובע שכל f_n רציפה על הקטע $[a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. מכיוון שההתכנסות היא במידה שווה, הגבול f רציף גם הוא באותו תחום. לכן, קבוצת נקודות אי־הרציפות של f, שנסמנה D_f, מוכלת באיחוד קבוצות אי־הרציפות של כל ה־f_n:

$$D_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

כעת נראה שאיחוד בן מנייה של קבוצות בעלות מידה 0 הוא בעל מידה 0.

למה 3.1. אם $A_1, A_2, \ldots$ הן קבוצות בעלות מידה 0, אז גם $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ בעלת מידה 0.

הוכחת הלמה..

נזכיר כי קבוצה A היא בעלת מידה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$, ניתן לכסות אותה בעזרת סדרת קטעים פתוחים (סופית או בן-מנית), כך שסכום אורכי הקטעים קטן מ-ε.

כעת, יהי $\varepsilon > 0$. מכיוון שעלינו לכסות איחוד של אינסוף קבוצות A_n, נחלק את ε לאינסוף חלקים כך שסכומם יתכנס ל-ε. למשל:

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, מאחר ש-A_n היא קבוצה בעלת מידה אפס, קיימת סדרת קטעים פתוחים $\{I_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש:

$$A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_{n,i}| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

כעת נבנה כיסוי לקבוצה $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ על ידי איחוד של כל הקטעים מכל הקבוצות:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}.$$

זהו אוסף בן-מנייה של קטעים פתוחים שמכסה את A. סכום אורכי כל הקטעים באוסף זה חסום על ידי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |I_{n,i}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

לפיכך, הקבוצה $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ היא בעלת מידה אפס. $\square$

מכאן ש-f חסומה וקבוצת אי-הרציפות שלה היא ממידה 0, ולכן היא אינטגרבילית.

חלק ב: התכנסות האינטגרלים.

נגדיר $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ ו-$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. עלינו להראות ש-$F_n \to F$ במ"ש.

יהי $\varepsilon > 0$. מההתכנסות במ"ש של f_n ל-f, קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $t \in [a,b]$, מתקיים $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

כעת, לכל $n > N$ ולכל $x \in [a,b]$, נחשב את ההפרש:

$$\begin{aligned}
|F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))dt \right| \\
&\le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \quad \text{(אי-שוויון המשולש לאינטגרלים)} \\
&< \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a)
\end{aligned}$$

מכיוון ש-$x \le b$, אז $x - a \le b - a$, ולכן $\frac{x-a}{b-a} \le 1$.

לפיכך, $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in [a,b]$.
הראינו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N (שאינו תלוי ב-x) כך שלכל $n > N$, ההפרש קטן מ-ε. זוהי הגדרת ההתכנסות במ"ש. $\square$

3.3 רדיוס ההתכנסות (נוסחת קושי-הדמר)

משפט 3.1 (נוסחת קושי-הדמר). עבור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, רדיוס ההתכנסות R נתון על ידי הנוסחה:

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

כאשר אנו מפרשים $\frac{1}{0} = \infty$ ו-$\frac{1}{\infty} = 0$.

הוכחה.
נסמן $y = x - x_0$, וכך הטור מקבל את הצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

שזהו טור חזקות במשתנה y סביב אפס.
מקרה 1: $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$
במקרה זה, הגבול העליון הוא אפס. מכיוון ש-$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ לכל n, פירוש הדבר הוא שהגבול הרגיל קיים ושווה לאפס:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

יהי $y \neq 0$ קבוע כלשהו. לפי הגדרת גבול הסדרה, עבור $\varepsilon = \frac{1}{2|y|}$ (שהוא מספר חיובי וקבוע), קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|y|}$$

נכפיל ב-$|y|$ ונקבל:

$$\sqrt[n]{|a_n|}|y| < \frac{1}{2} \implies |a_n y^n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

הטור ההנדסי $\sum(\frac{1}{2})^n$ מתכנס, ולכן על פי מבחן ההשוואה, הטור $\sum a_n y^n$ מתכנס בהחלט. מכיוון שהוכחנו זאת לכל $y \neq 0$, הטור מתכנס לכל $y \in \mathbb{R}$. לכן, תחום ההתכנסות הוא $A = \mathbb{R}$, ורדיוס ההתכנסות הוא $R = \infty$. תוצאה זו תואמת את הנוסחה: $R = \frac{1}{0} = \infty$.

מקרה 2: $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$
במקרה זה, הגבול העליון הוא אינסוף.
פירוש הדבר הוא שקיימת תת-סדרה $\{a_{n_k}\}$ כך ש-$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty$.
יהי $y \neq 0$ קבוע כלשהו.

לפי הגדרת הגבול העליון כאינסוף, קיימת תת־סדרה $\{n_k\}$ כך ש:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty$$

לכן, בפרט, קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > K$ מתקיים:

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|y|}$$

נעלה בחזקת n_k ונכפיל ב-$|y|^{n_k}$:

$$|a_{n_k} y^{n_k}| = \left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \cdot |y| \right)^{n_k} > 1^{n_k} = 1$$

מצאנו תת-סדרה של איברי הטור, $a_{n_k} y^{n_k}$, שאינה שואפת לאפס. לכן, האיבר הכללי של הטור, $a_n y^n$, אינו שואף לאפס. על פי התנאי ההכרחי להתכנסות טור, הטור $\sum a_n y^n$ מתבדר לכל $y \neq 0$. תחום ההתכנסות הוא $A = \{0\}$, ורדיוס ההתכנסות הוא $R = 0$. תוצאה זו תואמת את הנוסחה: $R = \frac{1}{\infty} = 0$.

מקרה 3: $0 < L < \infty$

נסמן, $L = 1/R$. נוכיח כי רדיוס ההתכנסות הוא אכן R.

- **התבדרות עבור** $|y| > R$**:**
  נניח $|y| > R$, כלומר $|y|/R > 1$. נחשב את הגבול העליון של איברי הטור:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n y^n|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|a_n|}|y|) = |y| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |y|L = \frac{|y|}{R} > 1$$

  מכיוון שהגבול העליון גדול מ-1, קיימים אינסוף אינדקסים n שעבורם $\sqrt[n]{|a_n y^n|} > 1$, ובהכרח $|a_n y^n| > 1$. לכן האיבר הכללי אינו שואף לאפס, והטור מתבדר.

- **התכנסות עבור** $|y| < R$**:**
  נניח $|y| < R$, כלומר $|y|/R < 1$. נחשב שוב:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n y^n|} = |y|L = \frac{|y|}{R} < 1$$

  נבחר מספר q כך ש $\frac{|y|}{R} < q < 1$.
  לפי תכונת הגבול העליון, קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$\sqrt[n]{|a_n y^n|} < q$$

  ומכאן $|a_n y^n| < q^n$. הטור $\sum q^n$ הוא טור הנדסי מתכנס (כי $0 < q < 1$), ולכן על פי מבחן ההשוואה, הטור $\sum a_n y^n$ מתכנס בהחלט.

סיכמנו כי הטור מתכנס (בהחלט) לכל $|y| < R$ ומתבדר לכל $|y| > R$. זוהי בדיוק ההגדרה של רדיוס ההתכנסות, ולכן רדיוס ההתכנסות הוא אכן R.
בכך הוכחנו את הנוסחה: $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. □

---

4 טורי טיילור

4.1 שארית פיאנו

הצהרה:
נניח כי $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה x_0. אז השארית בפיתוח טיילור, $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, מקיימת:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

כאשר $p_n(x)$ הוא פולינום טיילור מסדר n של f סביב x_0.

הוכחה.
נוכיח באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה ($n = 1$):
כאשר $n = 1$, $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. עלינו להוכיח:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0} = 0$$

נפצל את השבר:

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

וזה נכון לפי הגדרת הנגזרת של f ב-x_0.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$. כלומר, לכל פונקציה g הגזירה $n-1$ פעמים ב-x_0, מתקיים $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-p_{n-1,g}(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$.

צעד האינדוקציה: נוכיח עבור n. נתונה f הגזירה n פעמים ב-x_0. עלינו להוכיח:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$.
כדי להראות זאת, נגדיר את המונה $h(x) = f(x) - p_n(x)$ ואת המכנה $g(x) = (x-x_0)^n$.
לפי הגדרת פולינום טיילור, הנגזרות של $p_n(x)$ בנקודה x_0 זהות לנגזרות של $f(x)$ עד לסדר n.

כלומר, לכל k שלם, $0 \le k \le n$, מתקיים:

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

בפרט, עבור $k = 0$.

נקבל $p_n(x_0) = f(x_0)$, ולכן ערך המונה בנקודה הוא $h(x_0) = f(x_0) - p_n(x_0) = 0$.

ערך המכנה בנקודה הוא $g(x_0) = (x_0 - x_0)^n = 0$.

מכיוון שזהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

נגזור את המונה והמכנה:

$$h'(x) = f'(x) - p_n'(x) = f'(x) - \left(f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \right)$$

נשים לב שהביטוי בסוגריים הוא בדיוק פולינום טיילור מסדר $n - 1$ של הפונקציה $f'(x)$ סביב x_0.

נסמן אותו $p_{n-1,f'}(x)$.

נגזרת המכנה היא: $g'(x) = n(x - x_0)^{n-1}$.

לכן, מנת הנגזרות היא:

$$\frac{h'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x) - p_{n-1,f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{f'(x) - p_{n-1,f'}(x)}{(x - x_0)^{n-1}}$$

הפונקציה $f'(x)$ מקיימת את תנאי המשפט עבור $n - 1$ (היא גזירה $n - 1$ פעמים ב-x_0).

לפי הנחת האינדוקציה, הגבול של השבר הימני כאשר $x \to x_0$ הוא 0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - p_{n-1,f'}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

לכן, לפי כלל לופיטל, גם הגבול המקורי הוא $\frac{1}{n} \cdot 0 = 0$, כדרוש. □

תודה על הקריאה.