חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. <u>כתבו את התשובות במחברת הבחינה</u>.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה או בנימוק. הניקוד ינתן אך ורק על-סמך התשובה שבחרתם.

(6 נק') **א.** נתון ש- α, β הם פסוקים פורמליים כלשהם (לאו דוקא משתנים פסוקיים!). נתבונן בפסוקים:

(*) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

(**) $.(\alpha \vee \beta) \to \alpha$

אזי:

[1] מהנתון נובע ש-(*) ו-(**) שניהם טאוטולוגיות.

[2] מהנתון **לא** נובע ש-(*) הוא טאוטולוגיה, **ולא** נובע ש-(**) הוא טאוטולוגיה.

[3] מהנתון נובע ש-(*) הוא טאוטולוגיה וש-(**) **אינו** טאוטולוגיה.

[4] אף אחת מהטענות [1]–[3] אינה נכונה.

(7 נק') **ב.** <u>הגדרה</u>: נאמר כי קבוצות A, B הן **כמעט שוות** אם $|A\Delta B| \le \aleph_0$.

נתון: $S \subseteq P(\mathbb{R})$; כל $A, B \in S$ הן כמעט שוות. כמו כן, ידוע (נתון), שעוצמת הקבוצה $\{X \subseteq \mathbb{R} \mid X$ בת-מניה$\}$ היא $\aleph$.

אזי:

[1] מהנתון נובע ש- $|S| \le \aleph_0$.

[2] טענה [1] אינה נכונה, אבל מהנתון נובע ש- $|S| \le \aleph$.

[3] טענה [2] אינה נכונה, אבל מהנתון נובע ש- $|S| \le \aleph'$. (תזכורת: $|P(\mathbb{R})| = \aleph'$.)

[4] אף אחת מהטענות [1]–[3] אינה נכונה.

הערה: חוק הצמצום של פעולת ההפרש הסימטרי עשוי לעזור כאן.

(6 נק') **ג.** נתבונן בתנאי הבא על עץ T:

(*) T עץ על $\{1,2,\ldots,10\}$, ומתקיים $\deg_T(1) \ge 7$.

מהו מספר העצים המקיימים את (*), בהנחה שעצים איזומורפיים נחשבים זהים?

[1] 36

[2] 64

[3] 2800

[4] 2341

[5] אף אחת מהתשובות [1]–[4] אינה נכונה.

חלק ב':

- תלמידי שנת הלימודים **2024 בלבד** – ענו על **שלוש** מבין השאלות 2, 3, 4, **6**.
- **יתר הסטודנטים** (מי שלמדו בסמסטר 2025א, בסמסטר 2025ב, או בכל סמסטר אחר שאינו שייך לשנת הלימודים 2024) – ענו על **שלוש** מבין השאלות 2, 3, 4, **5**.

נמקו את תשובותיכם.

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות.

שאלה 2 (27 נק')

<u>הגדרות</u>: **נקודה** (במישור) היא איבר של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. **ראשית הצירים** היא הנקודה $\langle 0,0\rangle$. **מעגל** (במישור) הוא קבוצה מהצורה $\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$, כאשר $\langle a,b\rangle$ נקודה, שנקראת **מרכז המעגל**, ו- r מספר ממשי חיובי, שנקרא **רדיוס** המעגל. נקודה P **נמצאת על** מעגל C אם $P\in C$. נקודה $\langle x,y\rangle$ היא **רציונלית** אם $x,y\in\mathbb{Q}$.

תהי O קבוצת כל המעגלים שמרכזם הוא ראשית הצירים.

(7 נק') א. מהי $|O|$? הוכיחו את תשובתכם.

(20 נק') ב. תהי A קבוצת כל האיברים של O **שלא** נמצאת עליהם אף נקודה רציונלית.
מהי $|A|$? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (27 נק')

(12 נק') א. כתבו פונקציה יוצרת לחישוב מספר הפתרונות למשוואה

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=k \qquad (*)$$

המקיימים את התנאים הבאים :

(i) $x_1,x_2,x_3\in\{0,4\}$;

(ii) x_4,x_5,x_6,x_7 הם שלמים זוגיים ואי-שליליים.

בסעיף זה **לא** נדרש פישוט או טיפול אלגברי כלשהו בפונקציה היוצרת שכתבתם.

(15 נק') ב. מצאו את מספר הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=18$ המקיימים את התנאים (i) ו-(ii). תנו תשובה **מספרית**. נמקו.

שאלה 4 (27 נק')

שאלה זו עוסקת במחרוזות סופיות של אותיות מהקבוצה $\{A,B,C,D,E\}$.

הגדרה: **מחרוזת חוקית** היא מחרוזת סופית של אותיות מהקבוצה שלעיל, שבה כל רצף A ים (כלומר: כל רצף מהצורה $AAA\ldots A$) באורך אי-זוגי הוא חלק מרצף A ים באורך זוגי.

דוגמאות למחרוזות חוקיות: B, $BCBBD$, AA, $AAAAB$, $AABCAAAA$.

דוגמאות למחרוזות לא חוקיות: A, $BACAAAA$ $AABCAAA$.

לכל n שלם וחיובי, יהי a_n מספר המחרוזות החוקיות באורך n.

כמו כן, נגדיר $a_0=1$.

(7 נק') א. מצאו על-ידי חישוב ישיר את a_1,a_2.

(10 נק') ב. מצאו יחס נסיגה עבור a_n. בדקו האם הערכים של a_0,a_1,a_2 מתאימים ליחס הנסיגה שמצאתם.

(10 נק') ג. פתרו את יחס הנסיגה שמצאתם, וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.

לפניכם שתי שאלות. **אין לענות על יותר מאחת מהן.**

- אם למדתם את הקורס **בשנת הלימודים 2024** – תוכלו לענות על **שאלה 6**.
- אם למדתם את הקורס בסמסטר **2025א**, בסמסטר **2025ב**, או בכל סמסטר אחר שאינו שייך לשנת הלימודים 2024 – תוכלו לענות על **שאלה 5**.

לתשומת לבכם: **באחריותכם** להקפיד על בחירת השאלה המתאימה!

שאלה 5 (27 נק') ****השאלה מיועדת רק למי שלמדו את הקורס בסמסטר 2025א, בסמסטר 2025ב, או לפני שנת הלימודים 2024!****

(9 נק') א. נתבונן בתנאי הבא על גרף H:

$$(*) \quad |E(H)| \geq |V(H)|+3.$$

הוכיחו, כי אם גרף H הוא העדנה של $K_{3,3}$ או של K_5, אז הוא מקיים את (*).

(9 נק') ב. יהי G גרף לא מישורי, המתקבל מעץ T על-ידי הוספת k קשתות בדיוק.

הוכיחו כי $k \geq 4$. תוכלו להסתמך על הטענה הבאה מבלי להוכיח אותה: לכל יער H מתקיים $|E(H)| \leq |V(H)|-1$.

(9 נק') ג. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי כל גרף קשיר G על n צמתים, המקיים $|E(G)| \leq n+2$, הוא מישורי.

המשך השאלון – בעמוד הבא.

- השאלה שלהלן מיועדת לתלמידי שנת הלימודים **2024 בלבד**.
- בכל מקרה, **אין לענות על יותר מאחת** מבין השאלות 5, 6.

לתשומת לבכם: **באחריותכם** להקפיד על בחירת השאלה המתאימה!

שאלה 6 (27 נק׳) ****השאלה מיועדת רק למי שלמדו את הקורס בשנת הלימודים 2024!****

(14 נק׳) א. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו, כי כל גרף פשוט G על n צמתים, המקיים $|E(G)| \geq \binom{n}{2} - n + 2$, הוא קשיר. הקפידו על ניסוח מדוייק של כל טיעוניכם.

(13 נק׳) ב. יהי $n \geq 3$ טבעי. האם קיים מספר $m < \binom{n}{2} - n + 2$, כך שכל גרף פשוט G על n צמתים, המקיים $|E(G)| \geq m$, הוא קשיר? נמקו היטב.

בהצלחה!