מבחן מתכונת 2 - כיתה י' - תשפ"ה

שאלון 035571

חומר עזר מותר בשימוש : מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
משך המבחן : ארבע שעות ורבע.
מבנה השאלון : עליכם לענות על 5 שאלות :
לפחות שאלה אחת מן הפרק הראשון או השני.
לפחות שאלה אחת מהפרק השלישי.
לפחות שאלה אחת מהפרק הרביעי.
מפתח ההערכה : הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
הבהרה : כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק א' – שאלות קצרות

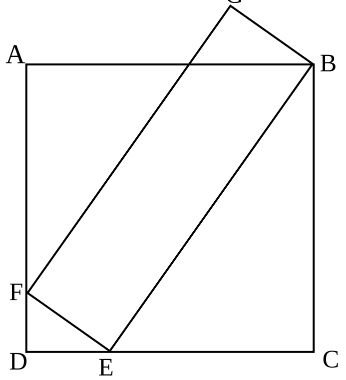
1. ענו על 2 מתוך 4 הסעיפים א'-ד' שלפניכם.
אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. **(1)** הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים :

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

(2) מצאו x ו- y טבעיים $(x<y)$ המקיימים את המשוואה :

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$ הציגו דרך פתרון.



ב. נתון ריבוע $ABCD$. נתון מלבן $BEFG$ שקודקודיו E ו- F מונחים על הצלעות DC ו- AD , בהתאמה.
נתון : $EB=4\cdot EF$.
חשבו את גודל הזווית $\measuredangle GBA$.

ג. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

נתון: $f(0)=-2$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ שנגזרתה היא: $g'(x)=\frac{f(x)-f'(x)\cdot(x+1)}{f^2(x)}$.

נתון: $g(0)=0$.

(1) הביעו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

נתון: $f(x)=h(x)\cdot\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)$, $h(x)$ היא פונקציית פולינום.

ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק 4 אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x.

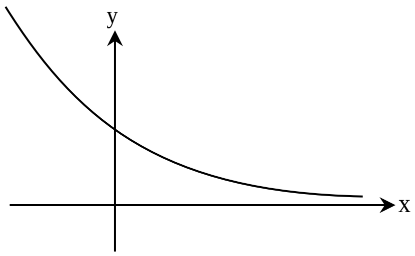
נתון: $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(2) קבעו עבור כל אחד מהביטויים הבאים האם ייתכן שהוא הפונקציה $h(x)$. נמקו.

i. $(x+1)$ ii. $\left(x^2-1\right)$

ד. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה, כמתואר בציור.



נסמן: $\int_1^2 f(x)\,dx=S$.

(1) מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם: $\int_1^2 f(ax)\,dx>S$.

(2) עבור כל אחד מהאינטגרלים (i) ו-(ii) קבעו האם הוא גדול מ- S, קטן מ- S, או שווה ל- S. נמקו קביעתכם.

(i) $\int_1^2 f(\sqrt{x})\,dx$, (ii) $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$

<u>פרק ב'</u> – סדרות והסתברות

.2 A ו- B הן שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות.

a_1 ו- q הם בהתאמה האיבר הראשון והמנה של הסדרה A.

b_1 ו- p הם בהתאמה האיבר הראשון והמנה של הסדרה B.

נתון: $p = 2q - 1$.

א. מצאו את תחום ערכי q האפשריים.

נסמן: S הוא סכום אינסוף האיברים של הסדרה A.

T הוא סכום אינסוף האיברים של הסדרה B.

M הוא סכום אינסוף האיברים של הסדרה C שאיברה הכללי הוא: $c_n = a_n \cdot b_n$.

נתון: $S \cdot T = M$.

ב. חשבו את q ואת p.

נתון: $T \cdot M < 0$.

ג. לפניכם שתי טענות $i - ii$. קבעו עבור כל טענה האם היא **נכונה** או **שגויה**. נמקו.

.i $b_{20} \cdot c_{21} > 0$.

.ii A היא סדרה עולה.

ד. נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת D שאיברה הראשון הוא M ואיברה השני הוא S.

סכום איברי הסדרה D הוא $\frac{64}{21}$. נתון: $a_1 = -3$.

מצאו את b_1.

3. באוניברסיטה גדולה מאוד יש קורסי מבוא בגיאומטריה ובאלגברה.

ההסתברות שמתוך 4 סטודנטים הנבחרים באקראי, רוב הסטודנטים שנבחרו לא לומדים את הקורס מבוא לגאומטריה, גדולה פי $\frac{32}{25}$ מההסתברות שמתוך 2 סטודנטים הנבחרים באקראי, אף לא אחד מהם לומד בקורס מבוא לגאומטריה.

א. חשבו את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד באוניברסיטה שלומד קורס מבוא לגאומטריה, אם נתון כי הסתברות זו קטנה מ0.3 .

מתוך התלמידים שלומדים בקורס מבוא לגאומטריה, ההסתברות לבחור תלמיד הלומד בקורס מבוא לאלגברה גדולה פי 3 מההסתברות לבחור תלמיד שאינו לומד בקורס מבוא לאלגברה. בנוסף, ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שלא לומד בקורס מבוא לאלגברה וגם לא בקורס מבוא לגאומטריה גדולה פי 4 מההסתברות לבחור באקראי תלמיד שלומד בשני קורסים אלו.

ב. חשבו את ההסתברות לבחור באקראי מתוך הסטודנטים שלומדים בקורס מבוא לאלגברה, סטודנט שלומד גם בקורס מבוא לגאומטריה.

כל סטודנט נדרש לצבור סכום מסוים של נקודות כדי להשלים את התואר.
השלמה של כל קורס מקנה כמות מסוימת של נקודות:

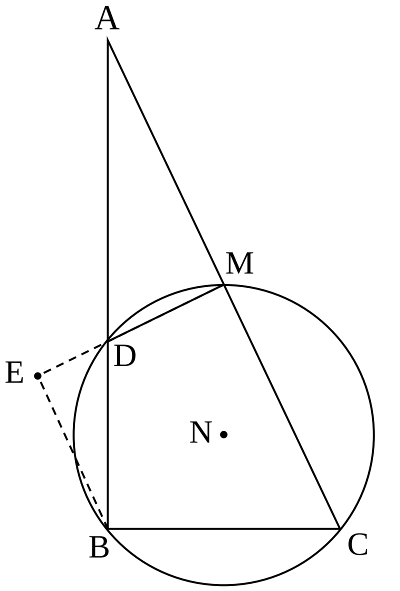
קורס המבוא לגאומטריה מקנה 2 נקודות.

קורס המבוא לאלגברה מקנה 3 נקודות.

בוחרים באקראי 5 סטודנטים שהשתתפו בקורס המבוא לאלגברה, וסוכמים את כלל הנקודות שצברו מהשלמת קורס זה ומהשלמת קורס המבוא לגאומטריה (אם עשו גם אותו).

ג. בהנחה שכל מי שמשתתף בקורס כלשהו מצליח לעבור אותו בהצלחה, מצאו את ההסתברות שסכום כלל הנקודות שצברו הסטודנטים שנבחרו קטן מ- 20 .

פרק ג' – טריגונומטריה במישור, גיאומטריה



4. משולש ABC הוא ישר זווית ($\sphericalangle B=90^\circ$).
הנקודה M היא אמצע הצלע AC, הנקודה D נמצאת על הצלע AB.
הנקודות M,C,B ו-D נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה N
ורדיוסו R.

א. **(1)** הוכיחו: $AD=2R$.
(2) הוכיחו: $MN \parallel AB$.

המשך הקטע MN חותך את הצלע BC בנקודה K.

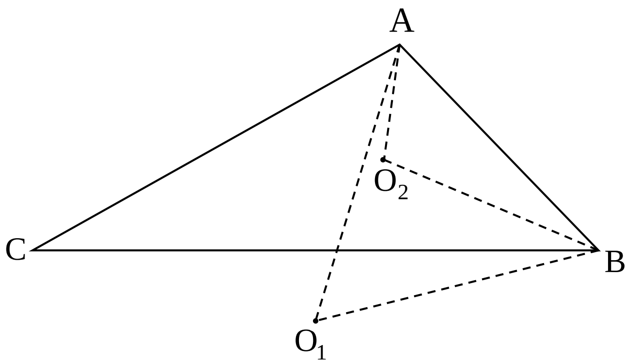
נתון יחס השטחים: $\dfrac{S_{MKBD}}{S_{\triangle DMB}}=t$.

ב. הביעו באמצעות t ו- R את אורך הקטע DB.

ג. קבעו האם שטח המשולש AMB **גדול** משטח המרובע $DMKB$, **קטן** ממנו, או **שווה** לו. הוכיחו קביעתכם.

הנקודה E מונחת על המשך הקטע MD (מהכיוון של D) כך שמתקיים: $ME \perp EB$.

ד. הוכיחו: $EK \parallel DC$.



5. נתון משולש ABC. נסמן: $\sphericalangle C=2\alpha$.
נסמן ב- O_1 את מרכז המעגל החוסם את משולש ABC.
נסמן ב- O_2 את מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
נתון: $O_2C \parallel BO_1$.

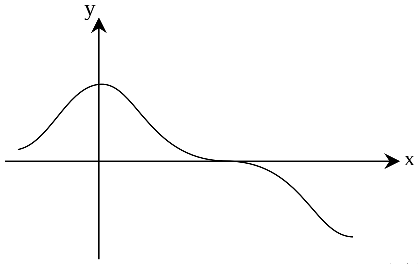
א. **(1)** הביעו באמצעות α את זוויות המשולש ABC.
(2) הוכיחו: המרחק בין הנקודה O_1 לקטע O_2C שווה ל $\dfrac{AB}{2}$.

נתון: $AC=3k$, $CB=4k$.

ב. **(1)** הוכיחו: $AB=8k\sin\alpha$.
(2) הביעו באמצעות k (ללא α) את אורך הצלע AB.

ג. נתון: $k=10$. חשבו את שטח המשולש CO_1O_2.

<u>פרק ד'</u> – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי



6. לפניכם גרף הפונקציה: $f(x)=\cos^3 x$, בתחום: $-\frac{\pi}{3}\le x\le \pi$.

א. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכיחו: $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$ היא פונקציה אי-זוגית.

(3) ללא חישוב האינטגרל, מצאו את הערך: $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

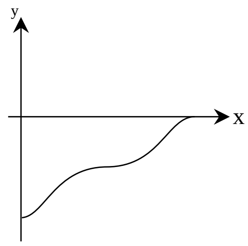
ידוע כי הפונקציה $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{3}\le x\le \pi$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון הפנימיות של $f'(x)$ וקבעו את סוגן.

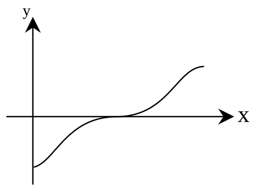
ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f'(x)$.

נתונה הפונקציה: $T(x)=\int_x^{\pi} f'(t)\,dt$, בתחום: $0\le x\le \pi$.

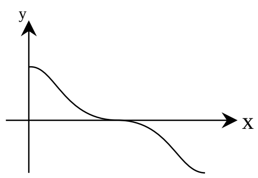
ד. קבעו איזה מהגרפים **א'** – **ד'** הבאים מתאר את הפונקציה $T(x)$. נמקו.



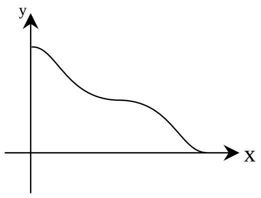
גרף א'



גרף ב'



גרף ג'



גרף ד'

נתונה הפונקציה: $m(x)=f(x)-T(x)$. נסמן: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=S$

ה. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} m(x)dx$.

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^3+ax^2+3x}$, a פרמטר.

ידוע כי עבור: $x=a-8$ לפונקציה יש נקודת קיצון פנימית.

א. הראו כי קיים בדיוק ערך אחד לפרמטר a עבורו: $x=a-8$ נמצא בתחום ההגדרה של $f(x)$.

הציבו את ערך a שמצאתם בסעיף הקודם וענו על הסעיפים הבאים:

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

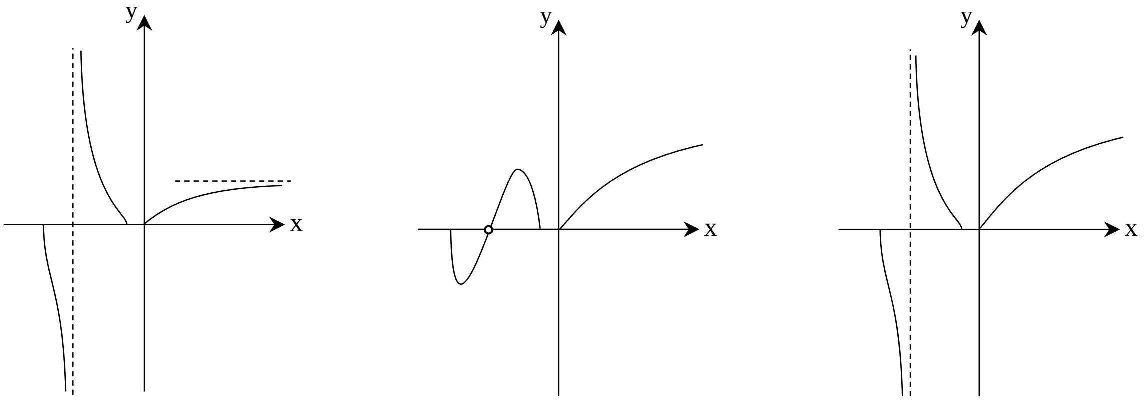
ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x+3}$.

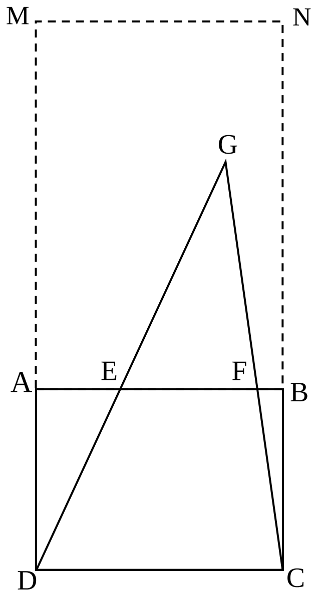
ה. לפניכם הגרפים **א'-ג'**. העיגול הריק מייצג נקודת אי-הגדרה ("חור") והקווים המקווקווים מייצגים אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(1) קבעו איזה מהגרפים שלפניכם מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$. נמקו קביעתכם.



גרף ג   גרף ב   גרף א

(2) שרטטו את גרף הפונקציה: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.



8. נתון מלבן $ABCD$. הנקודה G נמצאת מחוץ למלבן כך שהקטעים GC ו- GD חותכים את הצלע AB בנקודות F ו- E בהתאמה.

נתון: $DC = 3-2x$, $EF = 3x-1$.

שטח המשולש EFG הוא 1.

א. הביעו באמצעות x את אורך הקטע BC.

הפונקציה $T(x)$ מתארת את אורך הקטע BC כפונקציה של x.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $T(x)$.

הנקודות N ו- M מונחות על המשך צלעות המלבן CB ו- DA (מהכיוונים של B ו- A בהתאמה) כך שמתקבל מלבן חדש $MNCD$.

היקף המלבן $MNCD$ גדול ב- $36x$ מהיקף המלבן $ABCD$.

ג. **(1)** הראו כי כאשר $EF=1$ אורך הקטע NC הוא מינימלי.

(2) עבור NC המינימלי חשבו את <u>סכום</u> שטחי המשולשים MED ו- NFC.

בהצלחה!

תשובות סופיות

1. **א(1)** הוכחה **א(2)** $x=21 , y=28$ **ב.** 36.869° **ג(1).** $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}+\frac{1}{2}$

ג(2) i-לא מתאים, ii- לא מתאים **ד(1)** $a<1$ **ד(2)** (i) גדול (ii) גדול

2. **א.** $0<q<0.5$ או $0.5<q<1$ **ב.** $q=\frac{1}{4} , p=-\frac{1}{2}$ **ג.** (i) נכון (ii) נכון

ד. $b=-2$.

3. **א.** 0.2 **ב.** $\frac{3}{7}$ **ג.** 0.63211

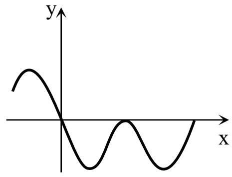
4. **א(1).** הוכחה **א(2)** הוכחה **ב.** $\frac{R}{t-1.5}$ **ג.** גדול **ד.** הוכחה

5. **א(1)** $90^\circ-3\alpha , 2\alpha , 90^\circ+\alpha$ **א(2)+ב(1)** הוכחה **ב(2)** $2k$ **ג.** 129.101

6. **א(1)** $.\max(0,1) , \min\left(-\frac{\pi}{3},0.65\right) , \min(\pi,-1)$ **א(2)** הוכחה **א(3)** 0

ב. $.\max(-0.615,1.15) , \min(0.615,-1.15) , \max\left(\frac{\pi}{2},0\right) , \min(2.526,-1.15)$

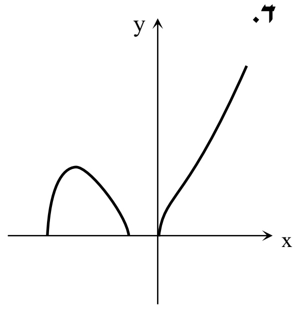
ג.



ד. גרף א' **ה.** $2S+\frac{\pi}{2}$

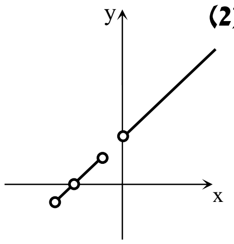
7. **א.** $a=5$ **ב.** $x=-3$ **ג.** $\min(-4.302,0) , \min(-0.697,0) , \min(0,0) , \max(-3,9)$

ד.



ה(1) גרף א'

ה(2)



8. **א.** $\frac{8-10x}{(3x-1)^2}$ **ב.** $\frac{1}{3}<x<\frac{4}{5}$ **ג(1)** הוכחה **ג(2)** $4\frac{4}{9}$