

## מבוא וסדר ראשון

### הגדרות כלליות

- **מד"ר:** קשר מהצורה  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ .
- **סדר:** סדר הנגזרת הגבוהה ביותר.
- **מעלה:** החזקה של הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר (לאחר שהמשוואה פולינומאלית בנגזרות).
- **תנאי התחלה:** מד"ר מסדר  $n$  דורשת  $n$  תנאי התחלה לקביעת פתרון פרטי.
- **לינאריות:** אם ניתן לכתוב כ-  $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = R(x)$ .
- **פתרון:** כללי (עם קבועים), פרטי (עם תנאי), סתום  $(G(x, y) = C)$ , סינגולרי (לא נובע מהכללי).
- **משפט קיום ויחידות (פיקארד):** לבעיית התחלה  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  אם  $f, f'_y$  רציפות במלבן סביב  $(x_0, y_0)$ , קיים פתרון יחיד.

### משוואות פריקות (Separable)

- **צורה:**  $y' = f(x)g(y)$  או  $M(x)dx + N(y)dy = 0$ .
- **פתרון:**  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ .
- **הערה חשובה:** יש לבדוק בנפרד פתרונות קבועים  $y = y_0$  המאפסים את  $g(y_0)$ , שכן ייתכן שהם "הולכים לאיבוד" בחלוקה.

### משוואות הומוגניות

- **צורה:**  $y' = f(y/x)$ .
- **פתרון:** הצבה  $z = y/x \implies y' = z'x + z$  המשוואה הופכת לפריקה:  $\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$ .

### משוואות "כמעט הומוגניות"

- **צורה:**  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ .
- **ישרים נחתכים**  $(a_1b_2 \neq a_2b_1)$ : מצא נק' חיתוך  $(x_0, y_0)$ . הצב  $x = X + x_0, y = Y + y_0$ . המשוואה הופכת להומוגנית ב- $X, Y$ .
- **ישרים מקבילים**  $(a_1b_2 = a_2b_1)$ : הצב  $t = a_1x + b_1y$ . המשוואה הופכת לפריקה.

### משוואות מדויקות

- **צורה:**  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .
- **תנאי:** מדויקת אם ורק אם  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .
- **פתרון:** אם מדויקת, קיים פוטנציאל  $\phi(x, y)$  והפתרון הוא  $\phi(x, y) = C$ .
- **מצאת  $\phi$ :** בצע אינטגרל על  $M$  לפי  $x$  ואינטגרל על  $N$  לפי  $y$ , וחשב:

$$\phi(x, y) = \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy$$

התעלם מהאיברים שחוזרים פעמיים. הפתרון הוא  $\phi(x, y) = C$ .

### גורם אינטגרציה ( $\mu$ )

**מטרה.** הופך משוואה לא מדויקת למדויקת.

- אם  $\frac{1}{N}(M_y - N_x) = f(x) \implies \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$ .
- אם  $\frac{1}{M}(N_x - M_y) = g(y) \implies \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$ .
- למשוואה הומוגנית עם  $Mx + Ny \neq 0$ ,  $\mu = \frac{1}{Mx + Ny}$ .

### משוואות לינאריות מסדר ראשון

- **צורה:**  $y' + P(x)y = Q(x)$ .
- **גורם אינטגרציה:**  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ .
- **הפתרון הכללי:**  $y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int \mu(x)Q(x)dx + C \right)$ .
- **מבנה:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ .

### משוואת ברנולי

- **צורה:**  $(t \neq 0, 1) y' + P(x)y = Q(x)y^t$ .
- **פתרון:** הצבה  $z = y^{1-t}$  הופכת את המשוואה ללינארית:  $z' + (1-t)P(x)z = (1-t)Q(x)$ .

## מד"ר מסדר שני

### הורדת סדר (מקרים מיוחדים)

- **צורה 1: חסר  $y$**   $(F(x, y', y'') = 0)$ : הצב  $z(x) = y'$ ,  $z'(x) = y''$ . מתקבלת מד"ר מסדר 1,  $F(x, z, z') = 0$ . הפתרון הסופי הוא  $y(x) = \int z(x)dx + C_2$ .
- **צורה 2: חסר  $x$**   $(F(y, y', y'') = 0)$ : הצב  $z(y) = y'$ , ואז  $y'' = z \frac{dz}{dy}$ . מתקבלת מד"ר מסדר 1,  $F(y, z, z \frac{dz}{dy}) = 0$ . לאחר מציאת  $z(y)$ , פותרים את  $\frac{dy}{dx} = z(y)$ .

### מד"ר לינארית, מקדמים קבועים - הומוגנית

**צורה:**  $ay'' + by' + cy = 0$ .

- **משוואה אופיינית:**  $ar^2 + br + c = 0$ .
- **הפתרון  $y_h(x)$  תלוי בשורשים  $r_1, r_2$ :**
  1. **ממשיים ושונים:**  $y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
  2. **ממשי כפול:**  $y_h(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r x}$
  3. **מרוכבים צמודים:**  $(r = \alpha \pm i\beta)$   $y_h(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$
- **הרחבה לסדר  $n$ :** כל שורש  $r$  של המשוואה האופיינית בעל ריבוי  $k$  תורם לפתרון ההומוגני איבר מהצורה  $C_k x^{k-1} e^{rx}$ .

### מד"ר לינארית, מקדמים קבועים - לא הומוגנית

**צורה:**  $ay'' + by' + cy = R(x)$ .

- **פתרון כללי:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ .
- **שיטת הניחוש המושכל (מקדמים לא ידועים) למציאת  $y_p$ :**
  1. **בניית קבוצת הניחוש  $(S)$ :** בהתבסס על אגף ימין  $R(x)$ , בנה קבוצה  $S$  הכוללת את כל הפונקציות שמופיעות ב- $R(x)$  וכל הנגזרות הבלתי תלויות-לינאריות שלהן. השתמש בטבלה הבאה:

אז קבוצת הניחוש $S$ מכילה את האיברים...	אם $R(x)$ מכיל איבר מהצורה...
$\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$	$P_n(x)$ (פולינום)
$\{e^{\alpha x}\}$	$e^{\alpha x}$
$\{\sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$	$\cos(\beta x)$ או $\sin(\beta x)$
<b>שילובים (לפי מכפלות)</b>	
$\{x^n e^{\alpha x}, \dots, e^{\alpha x}\}$	$P_n(x) e^{\alpha x}$
$\{e^{\alpha x} \sin(\beta x), e^{\alpha x} \cos(\beta x)\}$	$e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
$\{x^k \sin(\beta x), x^k \cos(\beta x) \mid k = 0, \dots, n\}$	$P_n(x) \sin(\beta x)$
$\{x^k e^{\alpha x} \sin(\beta x), x^k e^{\alpha x} \cos(\beta x) \mid k = 0, \dots, n\}$	$P_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

2. **ניחוש ראשוני:** הפתרון הפרטי  $y_p$  הוא צירוף לינארי של כל האיברים בקבוצה  $S$  עם מקדמים לא ידועים  $(A, B, C \dots)$ .
3. **בדיקת תהודה (Resonance) ותיקון:** אם איבר כלשהו בניחוש הראשוני  $y_p$  הוא גם פתרון של המשוואה ההומוגנית  $(y_h)$ , קיימת תהודה. **התיקון:** יש להכפיל את כל הניחוש ב- $x^k$ , כאשר  $k$  היא החזקה השלמה החיובית הנמוכה ביותר שמבטלת את כל החפיפות עם  $y_h$ .

### שיטת האופרטור המפוק

- **שלב 1: פירוק האופרטור.** כותבים את המשוואה כ:

$$(D - r_1)(D - r_2)y = \frac{R(x)}{a}$$

- כאשר  $D = \frac{d}{dx}$  ו- $r_1, r_2$  הם שורשי המשוואה האופיינית.
- **שלב 2: פתרון מדורג.** (א) הגדר:  $g(x) = (D - r_2)y$

## טכניקות נוספות

- שימוש בקשר ההופכי: אם המשוואה  $y' = f(x, y)$  מסובכת, נסו לפתור את  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$  עבור  $x(y)$ . שימושי במיוחד כשהמשוואה הופכת ללינארית ב- $x(y)$ .

## משוואות קלר

- צורה:  $y = xy' + f(y')$
- פתרון כללי:  $y = Cx + f(C)$
- פתרון סינגולרי: פתרון המערכת (עם  $p = y'$ ):

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

## אינטגרלים נפוצים

הפונקציה	האינטגרל (ללא קבוע C)
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x $
$\int e^{ax} dx$	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$\int \sin(ax) dx$	$-\frac{1}{a} \cos(ax)$
$\int \cos(ax) dx$	$\frac{1}{a} \sin(ax)$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \ln(x) dx$	$x \ln(x) - x$
$\int \tan(x) dx$	$-\ln \cos(x) $
$\int \sec^2(x) dx$	$\tan(x)$

## זהויות טריגונומטריות

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
- $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$
- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$
- $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$

## שיטות אינטגרציה

- אינטגרציה בחלקים:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- שיטת ההצבה (שינוי משתנה):

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du, \quad u = g(x)$$

- שימושי כאשר חלק מהאינטגרנד הוא נגזרת של ביטוי פנימי.
- שברים חלקיים: לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  (כאשר מעלת  $P$  קטנה ממעלת  $Q$ ).
- (א) פרק את המכנה  $Q(x)$  לגורמים לינאריים ו/או ריבועיים אי-פריקים.
- (ב) רשום את השבר כסכום של שברים חלקיים:
- גורם  $(ax+b)$  תורם:  $\frac{A}{ax+b}$
- גורם  $(ax+b)^k$  תורם:  $\frac{A_1}{ax+b} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$
- גורם  $(ax^2+bx+c)$  תורם:  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
- (ג) מצא את הקבועים  $(A, B, \dots)$  ע"י השוואת מונים או הצבת ערכי  $x$  נוחים.

- (ב) פתור את המד"ר מסדר ראשון:  $g' - r_1 g = \frac{R(x)}{a}$ . הפתרון  $g(x)$  יכיל קבוע  $C_1$ .
- (ג) פתור את המד"ר השנייה:  $y' - r_2 y = g(x)$ . הפתרון  $y(x)$  הוא הפתרון הכללי המבוקש ויכיל קבוע נוסף  $C_2$ .

## מד"ר לינארית, מקדמים כלליים

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad \text{צורה.}$$

- שלב 1: מציאת פתרון הומוגני  $y_1$ :
  - אם  $1 + P(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^x$
  - אם  $1 - P(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^{-x}$
  - אם  $P(x) + xQ(x) = 0 \implies y_1 = x$
  - אם  $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^{mx}$
- שלב 2: מציאת  $y_2$  (הורדת סדר):

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2} dx$$

הפתרון ההומוגני הכללי הוא:  $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

- שלב 3: פתרון לא-הומוגני (וריאצית פרמטרים) הפתרון הפרטי הוא  $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ , כאשר:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2 R}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1 R}{W(y_1, y_2)}$$

## פתרון בעזרת טורים

שיטה. מציאת פתרון סביב  $x_0 = 0$  (נק' רגולרית):

- הנחת הפתרון:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ,  $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$
- הצבה במד"ר וסידור לפי חזקות  $x^k$ .
- נוסחת נסיגה: השוואת מקדמים  $\Leftarrow$  קשר בין  $a_n$ .
- חישוב: מקדמים לפי  $a_0 = y(0)$ ,  $a_1 = y'(0)$ .
- פתרון כללי:  $y(x) = a_0 \cdot y_{\text{even}}(x) + a_1 \cdot y_{\text{odd}}(x)$

## טורי טיילור שימושיים (סביב 0)

פונקציה	טור חזקות	פונקציה	טור חזקות
$e^x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$	$\ln(1-x)$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

## משוואות אוילר-קושי

- צורה:  $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$
- פתרון: נחש פתרון  $y = x^m$ . הצבה מובילה למשוואה אינדיציאלית (עזר) עבור  $m$ :

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

- הפתרון תלוי בשורשי המשוואה העזר,  $m_1, m_2$ :

- ממשיים ושונים:  $y(x) = C_1 |x|^{m_1} + C_2 |x|^{m_2}$
- ממשי כפול:  $y(x) = (C_1 + C_2 \ln|x|) |x|^m$
- מרוכבים צמודים:  $(m = \alpha \pm i\beta)$

$$y(x) = |x|^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln|x|) + C_2 \sin(\beta \ln|x|)]$$