

## אלגברה ליניארית 88-113

### סמסטר ב' מבחן לדוגמה

מרצה: ד"ר יונתן בק. משך המבחן: שלוש שעות, חומר עזר: ללא. הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. יש לנמק כל פתרון. יש לרשום בדף הראשון של המחברת איזה שאלות הן לבדיקה. אחרת, יבדקו 4 הראשונות. **בהצלחה!**

$$1. \text{ תהי } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a. עבור איזה תמורה  $\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  מתקיים ש:  
 $\det A = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$   
 מה הם  $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$ ?  
 b. חשבו את מהמטריצה  $\operatorname{adj}(A)$ .  
 c. בשימוש סעיף b חשבו את  $A^{-1}$ .

2. יהי  $V$  המרחב המכפלה הפנימית  $\mathbb{C}^n$  עם המכפלה הפנימית  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ , כאשר

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

- a. הגדירו קבוצה אורתונורמלית  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  של ווקטורים ב  $\mathbb{C}^n$ .  
 b. הוכיחו שכל קבוצה אורתונורמלית של ווקטורים ב  $\mathbb{C}^n$  היא בלתי תלוייה ליניארית.  
 c. נתון שני הווקטורים  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ב  $\mathbb{C}^2$ . מצאו בסיס אורתונורמלי  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  של  $\mathbb{C}^2$  כך ש  $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}_1\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1\}$ .

3. יהי  $V$  מרחב ווקטורי ממד  $n$  מעל  $F$ . נניח ש  $T : V \rightarrow V$  היא העתקה ליניארית כך  $\dim \operatorname{Im} T = 1$ .

- a. מה הדרגה של הפולינום המינימלי  $m_T(x)$  של  $T$ ? הצדיקו את תשובתך.  
 b. הוכיחו שיש שתי אפשרויות: או ש  $T$  לכסינה או שקיים  $k > 0$  כך  $T^k = 0_{\operatorname{Hom}(V, V)}$ .  
 c. במקרה ש  $T$  אינה לכסינה, מה ה  $k$  המינימלי כך ש  $T^k = 0_{\operatorname{Hom}(V, V)}$ ?

4. תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

- a. מצאו את הערכים העצמיים של  $A$ .  
 b. מצאו לכסון אורתוגונלי עבור  $A$ . ז"א מטריצה  $P$  אורתוגונלית כך ש  $A = PDP^T$ , כאשר  $D$  היא אלכסונית.  
 c. מה הפולינום האופייני של  $A$ ?

5. לכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו דוגמא למטריצה  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  כך שכל מרכיב ב  $A$  שונה מאפס, ז"א  $a, b, c, d \neq 0$ , ו  $A$  מקיימת: (הצדק את תשובתך!)

- a. אינה לכסינה אבל כן שלیשה (ז"א ניתן להעביר את  $A$  לצורה משולשת עליון על ידי שינוי בסיס ב  $\mathbb{R}^2$ ).  
 b. אינה לכסינה וגם אינה שלישה.  
 c.  $A^2 = 0$ .