הלל בן חנוך

1. מכונה מייצרת מסמרים באופן אוטומטי, עם סיכוי כלשהו לייצר מסמרים פגומים. המסמרים שהמכונה מייצרת מתפלגים נורמלית עם ממוצע 5 ס"מ ושונות 2 ס"מ. נאמר שמסמר הוא פגום אם אורכו מעל 6.5 ס"מ או מתחת ל-4.5 ס"מ.

(א) מה הסיכוי שמסמר שנבחר באקראי הוא פגום?

(ב) בכל שעה מיוצרים בממוצע 6000 מסמרים. מה הסיכוי שהמכונה תייצר מסמר פגום תוך 6 שניות או פחות?

(ג) מה הסיכוי שהמכונה תייצר 1500 מסמרים פגומים תוך לכל היותר 30 דקות?

א.

נתון לנו שהשונות היא 2 ס"מ לכן סטיית התקן היא $\sigma = \sqrt{2}$

כלומר

$$X \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 2)$$

מסמר מוגדר כפגום אם $x < 4.5 \; or \; x > 6.5$

נסמן את המאורע "המסמר פגום" בD.

ההסתברות למאורע זה היא

$$P(D) = P(X > 6.5) + P(X < 4.5)$$

(אלו מאורעות זרים ,כי מסמר לא יכול להיות בו-זמנית ארוך מ-6.5 וקצר מ-4.5).

כדי לחשב הסתברויות אלו ,נתקן את המשתנה המקרי X למשתנה נורמלי סטנדרטי Z על ידי הנוסחה:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 5}{\sqrt{2}}$$

נחשב כל הסתברות בנפרד:

$$P(X > 6.5) = P\left(\frac{X - 5}{\sqrt{2}} > \frac{6.5 - 5}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Z > \frac{1.5}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \phi(1.06) = 0.1446$$

$$P(X < 4.5) = P\left(\frac{X - 5}{\sqrt{2}} < \frac{4.5 - 5}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Z > \frac{-0.5}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \phi(-0.35) = \phi(0.35) = 0.3632$$

נחבר:

$$P(D) = 0.1446 + 0.3632 = 0.5078$$

ב.

קצב ייצור לשנייה :

$$\frac{6000}{3600} = \frac{5}{3}$$

מסמרים לשנייה.

מספר המסמרים המיוצרים ב-6 שניות :

$$N = \left(\frac{5}{3}\right) \cdot 6 = 10$$

מסמרים.

נסמן ב Y את מספר המסמרים הפגומים מתוך 10 המסמרים שיוצרו. כל מסמר הוא ניסוי ברנולי בלתי תלוי עם הסתברות להצלחה (להיות פגום)

$$p = 0.5078$$

לכן Y מתפלג בינומית :

$$Y \sim Bin(n = 10, p = 0.5078)$$

השאלה היא "מה הסיכוי שהמכונה תייצר מסמר פגום ,"כלומר ,לפחות מסמר פגום אחד.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$$

נחשב את המאורע המשלים $P(Y = 0)$ (אף מסמר אינו פגום).

$$P(Y = 0) = \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} = 0.00085 \rightarrow P(Y \geq 1) = 0.99915$$

ג.

ראשית, מספר המסמרים המיוצרים ב-30 דקות

$$N = 6000 \cdot 0.5 = 3000$$

מסמרים.

נסמן ב W-את מספר המסמרים הפגומים מתוך 3000 .

$$W \sim Bin(n = 3000, p = 0.5078)$$

אנחנו רוצים לחשב את

$$P(W \geq 1500)$$

כאשר n גדול, ניתן לקרב את ההתפלגות הבינומית להתפלגות נורמלית עם הפרמטרים:

$$\mu = np = 1518$$

$$\sigma^2 = np(1-P) = 748.428$$

$$\sigma = 27.367$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \approx -0.676$$

ולכן

$$P(W \geq 1500) \approx P(Z \geq -0.676) = 1 - P(Z < -0.676) = 1 - 0.249 = 0.751$$

2. הוכיחו בעזרת MGF שסכום משתנים מעריכיים בלתי תלויים ושווי התפלגות מתפלג גאמא, כלומר:
יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n \sim Exp(\frac{1}{\lambda})$. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^n X_i = S \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$

נמצא את פונקציה יוצרת המומנטים.

פונקצית הצפיפות היא

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; for \; x \geq 0$$

ולכן

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tX} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \cdots = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

ה MGF-של סכום משתנים מקריים בלתי תלויים שווה למכפלת ה MGFs-שלהם.

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = \cdots E[e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}] \overset{\text{אי תלות}}{=} E[e^{tX_1}] \cdots E[e^{tX_n}]$$
$$= M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t) \overset{\text{שווי התפלגות}}{=} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

ידוע שה *MGF*-של משתנה מקרי $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ הוא

$$M_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$$

במקרה שלנו ,קיבלנו

$$M_s(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

זוהי בדיוק ה *MGF*-של התפלגות גאמא עם פרמטרים
$\alpha = n, \beta = \lambda$

מיחידות ה *MGF* (אם לשני משתנים יש אותה *MGF*, יש להם אותה התפלגות), אנו מסיקים כי:
$S \sim \Gamma(n, \lambda)$

(שימו לב שהייתה לי פה טעות קטנה – בטעות הוכחתי עבור המשתנה λ ולא עבור $\frac{1}{\lambda}$, אבל זה לא משנה, הרי שהוכחתי את זה עבור כל משתנה λ ולכן זה ג מוכח עבור $\frac{1}{\lambda}$).

3. יהי $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. מצאו את ה-MGF של המשתנה המקרי $Y = \sqrt{X}$. אתם יכולים להשתמש בזהות הבאה בלי להוכיח: $\int_0^\infty xe^{ax-bx^2}dx = \frac{1}{2b}e^{\frac{a^2}{4b}}$ כאשר $b > 0$. ציינו מתי ה-MGF מוגדרת.

נשתמש במשפט הסטטיסטיקאי הנאיבי:

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{t\sqrt{x}} \cdot f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{t\sqrt{x}} \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx$$

כדי לפתור אינטגרל זה, נבצע החלפת משתנים :

$$u = \sqrt{x}$$

מכאן ש

$$x = u^2, dx = 2udu$$

גבולות האינטגרציה נשארים 0 עד ∞

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{tu} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot (2udu) = 2\lambda \int_0^\infty u \cdot e^{tu-\lambda u^2}du$$

נשתמש בזהות הנתונה עבור $u = x, a = t, b = \lambda$ ונקבל

$$M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{4\lambda}}$$

הזהות הנתונה תקפה עבור $b > 0$. במקרה שלנו $b = \lambda$. מכיוון ש-X מתפלג מעריכית, הפרמטר λ (קצב) חייב להיות חיובי, $\lambda > 0$. לכן התנאי מתקיים. באינטגרל $\int u * e^{tu-\lambda u^2}du$, הגורם $e^{-\lambda u^2}$ דועך מהר יותר מכל פולינום או אקספוננט e^{tu}, ולכן האינטגרל מתכנס לכל ערך ממשי של t.

4. מידת הנעליים של תושבי ארץ עוץ מתפלגת נורמלית עם ממוצע 42 ושונות 3.

(א) מה ההסתברות שמידת הנעליים של אדם אקראי נמצאת במרחק של יותר מ**סטיית תקן** אחת מהממוצע?

(ב) דגמנו $n = 2k$ תושבים מארץ עוץ. תנו חסם להסתברות שלפחות מחצית מהם בעלי מידת נעליים אשר נמצאת במרחק של יותר מסטיית תקן אחת מהממוצע הארצי.

(ג) שפרו את החסם מהסעיף הקודם בעזרת אי שוויון צ'ביצ'ב.

א.

סטיית התקן היא

$$\sigma = \sqrt{3}$$

השאלה היא לחשב את $P(|X - 42| > \sqrt{3}) = P\left(\frac{|X-42|}{\sqrt{3}} > 1\right)$.

נתקן את המשתנה

$$Z = \frac{x - 42}{\sqrt{3}}$$

ההסתברות המבוקשת היא

$$P(|Z| > 1) = P(Z > 1) + P(Z < -1) \overset{\text{סימטריה}}{=} 2P(Z > 1) = 2\big(1 - p(Z \leq 1)\big)$$
$$= 2\big(1 - \Phi(1)\big) \approx 0.3174$$

ב.

ההסתברות שבין אדם הוא 'חריג' (מידת נעליו רחוקה מהממוצע ביותר מסטיית תקן) היא

$$p \approx 0.3174$$

נסמן ב-Y את מספר התושבים ה"חריגים" במדגם של $n = 2k$ אנשים.

$$Y \sim Bin(n = 2k, p)$$

אנו רוצים חסם להסתברות

$$P(Y \geq k)$$

נשתמש ב**אי-שוויון מרקוב**:

$$P(Y \geq a) \leq \frac{E[Y]}{a}$$

התוחלת של Y היא

$$E[Y] = n \cdot p = 2kp \to P(Y \geq k) \leq \frac{2kp}{k} = 2p \approx 0.6348$$

ג.

אי-שוויון צ'ביצ'ב:

$$P(Y - E[Y] \geq a) \leq \frac{Var(Y)}{a^2}$$

$$E[Y] = 2kp$$

$$Var(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 2kp(1 - p)$$

$$P(Y \geq k) = P(Y - E[Y] \geq k - E[Y]) = P\big(Y - 2kp \geq k(1 - 2p)\big)$$

$$k(1 - 2p) > 0$$

ולכן

$$P\big(Y - 2kp \geq k(1 - 2p)\big) \leq P\big(|Y - 2kp| \geq k(1 - 2p)\big)$$

כעת נפעיל את אי-שוויון צ'ביצ'ב

$$P\big(|Y - 2kp| \geq k(1 - 2p)\big) \leq \frac{2kp(1 - p)}{\big(k(1 - 2p)\big)^2} = \frac{3.25}{k}$$

ולכן

$$P(Y \geq k) \leq \frac{3.25}{k}$$

5. מצאו MGF למשתנים המקריים הבאים:

(א) $X \sim Geo(p)$

(ב) $X \sim U_{[a,b]}$ אחידה רציפה.

(ג) $X \sim Bin(n,p)$

א.

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \; for \; k = 1,2, \dots$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tX}(1 - p)^{k-1} p = pe^t \sum_{k=1}^{\infty} (e^t)^{k-1}(1 - p)^{k-1}$$
$$= pe^t \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^t(1 - p)\right)^{k-1}$$

זוהי סדרה הנדסית והיא מתכנסת כאשר

$$|e^t(1 - p)| < 1 \rightarrow t < -\ln(1 - p)$$

והסכום של הטור הוא

$$\sum_{0}^{\infty} \left(e^t(1 - p)\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - e^t(1 - p)}$$

ולכן

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - e^t(1 - p)}$$

ב.

עבור $a \leq x \leq b$ מתקיים

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

ולכן

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_a^b e^{tX} \cdot \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b e^{tX} dx = \frac{1}{b - a} \left[\frac{e^{tX}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}$$

ג.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \binom{n}{p} (1-p)^{n-k} p^k = \sum_{k=0}^{\infty} (e^t p)^k \binom{n}{p} (1-p)^{n-k} p^k$$
$$= \left(pe^t + (1-p)\right)^n$$

6. בתרגיל הזה נראה שלפעמים אי שוויון מרקוב לא תורם לנו מידע:
יהי $X \sim Exp(\lambda), a > 0$.

(א) מצאו חסם להסתברות $P(X > a)$ בעזרת אי"ש מרקוב, והשוו להסתברות האמיתית.

(ב) מצאו חסם לאותה הסתברות בעזרת אי"ש צ'ביצ'ב והשוו להסתברות האמיתית.

א.

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a}$$

נשתמש ב**אי-שוויון מרקוב**:

$$P(X > a) \le \frac{E[X]}{a} = \frac{1}{a\lambda}$$

ידוע שלכל $y > 0$ מתקיים $e^y > 1 + y > y$ נציב $y = a\lambda$ ונקבל

$$e^{a\lambda} > a\lambda \to \frac{1}{e^{a\lambda}} < \frac{1}{a\lambda}$$

מסקנה: החסם של מרקוב תמיד גדול מההסתברות האמיתית . הוא מספק חסם עליון, אך הוא אינו הדוק. ככל ש $a\lambda$ גדל, שני הביטויים שואפים לאפס, אך $e^{-\lambda a}$ שואף לאפס הרבה יותר מהר.

ב.

אי-שוויון צ'ביצ'ב:

$$P(|x - \mu| \ge k) \le \frac{Var(Y)}{k^2}$$

$$P(X > a) = P(X - \mu > a - \mu) = P\left(X - \frac{1}{\lambda} > a - \frac{1}{\lambda}\right)$$

בהנחה ש $a > \frac{1}{\lambda}$ נגדיר $k = a - \frac{1}{\lambda} > 0$

$$P(X - 1/\lambda > k) \le P(|\, X - 1/\lambda \,| \ge k) \le \frac{Var(X)}{k^2}$$

החסם הוא

$$\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\left(a-\frac{1}{\lambda}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\left(\frac{a\lambda-1}{\lambda}\right)^2}=\frac{1}{(a\lambda-1)^2}$$

שני החסמים נכונים אך רחוקים מהערך האמיתי.

7. יהי $X\sim\Gamma(n,\theta)$. מצאו נוסחה סגורה ל-$\mathbb{E}[X^k]$. אתם רשאים להשתמש בלי הוכחה בעובדה ש-$\Gamma(n)=(n-1)!$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

$$E[X^k]=\int_0^\infty x^k\frac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(n)\theta^n}dx=\frac{1}{\Gamma(n)\theta^n}\int_0^\infty x^{k+n-1}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\cdots=\theta^k\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$$
$$=\theta^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

8. יהי $X\sim Exp(\lambda)$. מצאו נוסחה סגורה למומנט של X ($\mathbb{E}[X^k]$).

$$E[X^k]=\int_0^\infty x^k\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty x^k\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\frac{k!}{\lambda^{k+1}}=\frac{k!}{\lambda^k}$$

השתמשי פה בזה ש

$$\int_0^\infty x^k\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{k!}{\lambda^{k+1}}$$

הנה ההוכחה:

📌 שלב 1: נבצע הצבה כדי להעלים את λ

נשים לב שביטוי כזה מזכיר את פונקציית גאמה:

$$\Gamma(k+1) = \int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx = k! \quad (\text{זהות ידועה}).$$

אבל לנו יש λ בתוך האקספוננט.
נעשה **שינוי משתנה** כדי להיפטר ממנו:

🔁 הצבה:

$$u = \lambda x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u}{\lambda}, \quad dx = \frac{1}{\lambda}du.$$

🧮 נבצע את ההחלפה באינטגרל:

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{\lambda}du.$$

נפשט:

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \int_0^\infty u^k e^{-u}du.$$

אבל זה בדיוק:

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot \Gamma(k+1) = \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot k!.$$

✅ מסקנה:

$$\boxed{\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}.}$$