מבחן מתכונות 1 - כיתה י' - תשפ"ה

שאלון 035571

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
משך המבחן: ארבע ורבע שעות.
מבנה השאלון: עליכם לענות על 5 שאלות:
לפחות שאלה אחת מן הפרק הראשון או השני.
לפחות שאלה אחת מהפרק השלישי.
לפחות שאלה אחת מהפרק הרביעי.
מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק א' – שאלות קצרות

1. ענו על 2 מתוך 4 הסעיפים א'-ד' שלפניכם.
אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. **(1)** הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

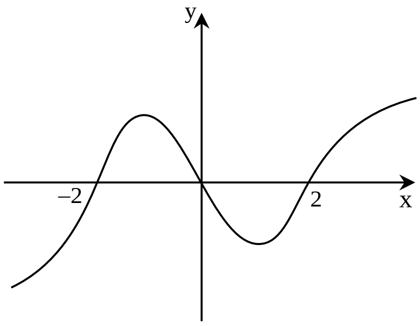
$$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+4\cdot7+...+n(n+3)=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

(2) מצאו את n עבורו מתקיים:

$$3\cdot6+4\cdot7+...+n(n+3)+(n+1)(n+4)=\frac{1}{3}n^3+502$$

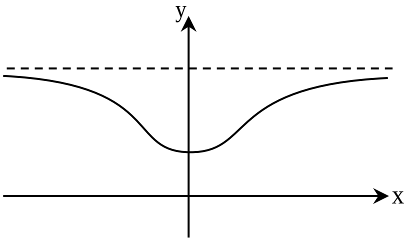
ב. נתון גרף הפונקציה $f(x)$. נקודות הפיתול היחידות של $f(x)$ הן: $(-2,0),(0,0),(2,0)$.

נתון: $\int_{-2}^{0} f(x)dx=T$, $\int_{0}^{2} f(x)dx=-T$.



(1) בטאו באמצעות T את ערך האינטגרל: $\int_{-2}^{2}\left(|f(x)|+2\cdot f(x)\right)dx$

(2) שרטטו את גרף הפונקציה $S(x)$ המקיימת: $S(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$.



ג. משמאל נתון גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2+2}{x^2+2}$.

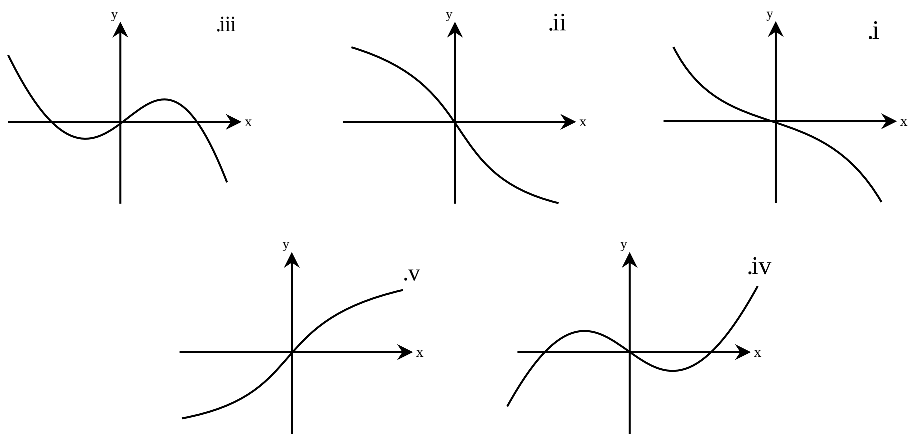
(1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ ואת נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- y.

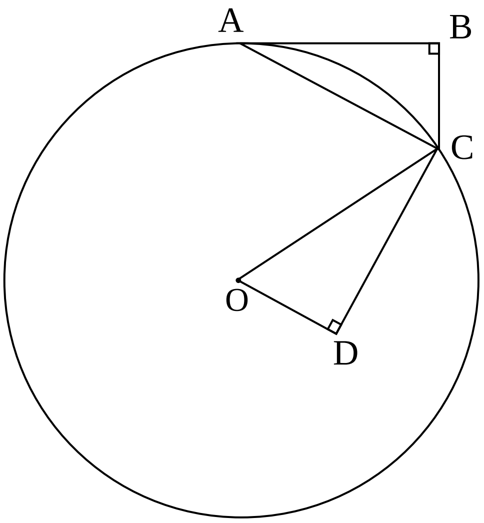
נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g'(x)=c-f(x)$ (c פרמטר).

בתחתית השאלה נתונים חמישה גרפים (i)-(v).

(2) ציינו שני גרפים שאינם מתאימים לגרף הפונקציה $g(x)$. נמקו.

(3) עבור כל אחד משלושת הגרפים הנותרים מצאו את תחום ערכי c עבורם הגרף יתאר את הפונקציה $g(x)$.





ד. נתונים שני משולשים ישרי זווית $\triangle ABC$ ו- $\triangle CDO$ ($\sphericalangle B=\sphericalangle D=90°$).

הצלע AB משיקה בנקודה A למעגל שמרכזו בנקודה O. הנקודה C מונחת על היקף המעגל.

נתון: $\sin\sphericalangle BAC=\sin\sphericalangle OCD=t$.

הביעו באמצעות הפרמטר t את היחס בין שטח המשולש $\triangle CDO$ לבין שטח המשולש $\triangle ABC$

<u>פרק ב'</u> – סדרות ואינדוקציה

.2 נתונה סדרה A שהאיבר הכללי שלה a_n. נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A.

נתון כי מתקיים לכל n טבעי: $2\cdot S_n - S_{n+1} = p^n - a_{n+1} - 1$, p הוא פרמטר, $p \neq 0,1$.

א. **(1)** הביעו את S_n באמצעות p ו- n.

(2) הוכיחו כי הסדרה A היא סדרה הנדסית והביעו את מנת הסדרה ואיברה הראשון באמצעות p.

נתון: האיברים במקומות הזוגיים בסדרה A מהווים סדרה עולה.

ב. מצאו את תחום הערכים של p.

מגדירים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה b_n. נתון כי לכל n טבעי מתקיים: $b_n = a_{n+2}\cdot p^n$

ג. לפניכם שתי טענות. קבעו עבור כל אחת מהן אם היא נכונה או שגויה. נמקו.

(1) לא קיים k כך שמתקיים: $b_k \cdot b_{k+1} < 0$.

(2) הסדרה B היא בהכרח סדרה הנדסית עולה.

ד. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה B קטן פי 4 מסכום n האיברים הראשונים הממוקמים <u>במקומות הזוגיים</u> בסדרה A.

מצאו את p.

3. השולחנות במסעדה ממוקמים בשני אזורים: בתוך המסעדה ובגינה.

מספר הסועדים בתוך המסעדה הוא $\frac{2}{3}$ ממספר הסועדים בגינה.

חלק מהסועדים מוסיפים לתשלום דמי-שירות ("טיפ") והשאר אינם מוסיפים.

שיעור הסועדים המוסיפים דמי-שירות מקרב האוכלים בגינה, גדול פי $\frac{7}{6}$ משיעור הסועדים שאוכלים בגינה מבין הסועדים שמוסיפים דמי-שירות.

א. מה ההסתברות שסועד שנבחר באקראי מוסיף לתשלום דמי-שירות?

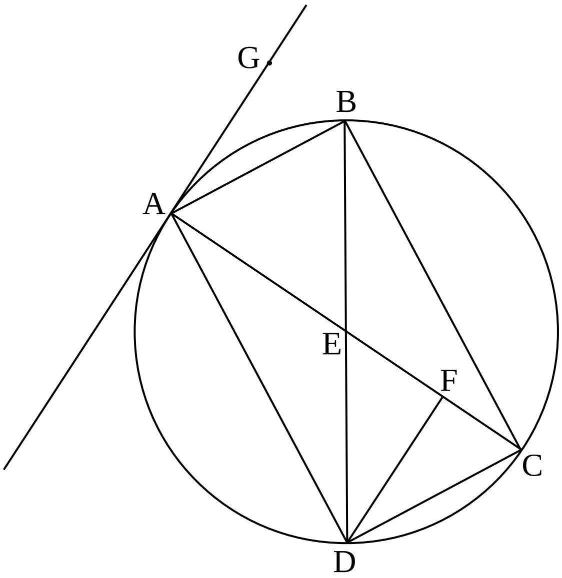
נתון גם כי בקרב הסועדים בגינה, ההסתברות שהסועד יוסיף דמי-שירות גדולה ב- 0.4 מההסתברות שהוא לא ישאיר דמי-שירות.

ב. **(1)** חשבו את אחוז הסועדים ששילמו דמי-שירות מקרב הסועדים שישבו בגינה.

(2) מצאו את ההסתברות שמתוך חמישה סועדים אקראיים היושבים בגינה, לכל היותר אחד מהם לא יוסיף דמי-שירות.

ג. מנהל המסעדה טען כי אין תלות בין מיקום הישיבה במסעדה לבין תשלום דמי-השירות. האם המנהל צודק? נמקו קביעתכם.

פרק ג' – טריגונומטריה במישור, גיאומטריה



4. מרובע $ABCD$ חסום במעגל.

AG משיק למעגל בנקודה A.

E היא נקודת מפגש האלכסונים במרובע, ו- F נמצאת על האלכסון AC בין הנקודות C ו- E, כך שמתקיים:

$\sphericalangle BAG = \sphericalangle CDF$.

א. הוכיחו: $\frac{AF}{FC} \neq \frac{AD}{DC}$.

ב. הוכיחו: $\triangle AFD \sim \triangle BCD$.

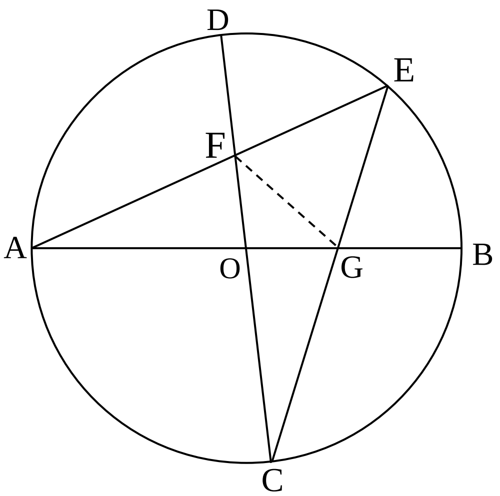
נתון: $DF \parallel AG$.

ג. הוכיחו: $AD = BC$.

ד. המשך המיתר CD (מהכיוון של D) חותך את המשיק בנקודה H.

(1) הוכיחו: $AD \neq HD$.

(2) קבעו האם מתקיים: $AD < HD$.



5. AB ו- CD הם קטרים במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

המיתר AE והקוטר CD נחתכים בנקודה F.

המיתר CE והקוטר AB נחתכים בנקודה G.

נסמן: $\sphericalangle EAB = \alpha$, $\sphericalangle BOD = \beta$.

א. (1) הביעו באמצעות α ו- β את זוויות המשולש CFE.

(2) הביעו באמצעות α, β ו- R את שטח המשולש DEC.

נסמן ב- r את רדיוס המעגל החוסם את משולש AFO.

נתון: $DE = EB$, $\frac{R^2}{r} = \frac{CG \cdot BE}{OF}$.

ב. חשבו את α ו- β.

ג. חשבו את היחס: $\frac{R}{r}$.

פרק ד' – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{-8\sin^2 x-2\cos x+7}{x}$, בתחום: $0\le x\le\frac{5\pi}{3}$.

א. **(1)** מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

(3) ידוע כי לפונקציה יש בדיוק 3 נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון.

שרטטו סקיצה משוערת של $f(x)$ (אין צורך למצוא את שיעורי נקודות הקיצון).

נתונה הפונקציה: $g(x)=x\cdot f(x)$, בתחום: $0\le x\le\pi$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

(2) שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) מצאו את ערכי הפרמטר m עבורו למשוואה: $g(x)=m$ יש בדיוק פתרון אחד.

ג. מצאו עבור אילו ערכי x בתחום $0\le x\le\pi$, מתקיים: $f(x)<g(x)$.

ד. משרטטים מלבן שצלעותיו מאונכות לצירים, אחד מקודקודיו מונח בראשית הצירים ואחד מקודקודיו מונח על גרף הפונקציה $f(x)$. ידוע כי שטח המלבן הוא 1.

מצאו <u>כמה</u> מלבנים אפשר לבנות באופן זה.

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{ax+2}}{x^2}+3$, a פרמטר קטן מ- 0.

בסעיפים **א'-ג'** הביעו במידת הצורך באמצעות הפרמטר a.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של $f(x)$.

(3) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? הוכיחו קביעתכם.

ב. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת קיצון אחת, ומצאו את שיעוריה וסוגה.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

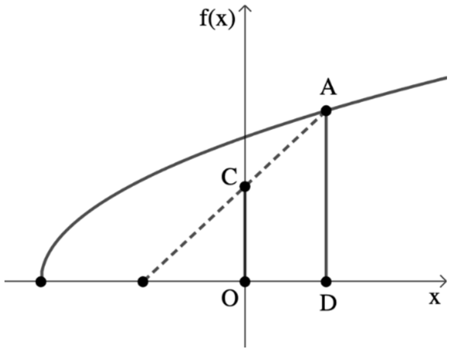
נתון: $\int_1^2 (f(x)-3)^2\,dx=\frac{13}{30}$

ד. מצאו את הפרמטר a.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

מצאו את שיעור x_1 עבורו ערך הביטוי: $f(x_1)-g(x_1)$ הוא הקטן ביותר האפשרי.

8. לפניכם גרף הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+2}$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

ישר העובר דרך הנקודה A ודרך הנקודה $(-1,0)$ חותך את ציר ה- y בנקודה C. D היא נקודה על ציר ה- x כך שהקטע AD מקביל לציר ה- y.

נסמן: $x_A=t$.

א. **(1)** מצאו מה צריך להיות הערך של t עבורו סכום אורכי הקטעים CO ו- AD יהיה מינימלי.

(2) מצאו את הסכום המינימלי של אורכי הקטעים CO ו- AD.

נתונה הפונקציה: $s(x)$ בתחום $x>0$ המייצגת את סכום אורכי הקטעים CO ו- AD

ב. שרטטו את הגרף הפונקציה $s(x)$ בתחום $0<x<3$ (הניחו כי הפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום $0<x<3$).

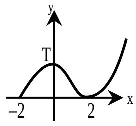
ג. נסמן ב S את השטח הכלוא בין ציר ה- x, גרף הפונקציה $s(x)$, והישרים: $x=1$ ו- $x=2$.

הוכיחו: $S<2.64$.

בהצלחה!

תשובות סופיות

.1 **א(1)** הוכחה **א(2)** 12 **ב. (1)** $2T$ **ב(2)**



ג(1) $y=3, (0,1)$

ג(2) ii, iv **ג(3)** $i: c\le 1$, $iii: 1<c<3$, $v: c\ge 3$ **ד.** $\frac{1}{4t^2}$

.2 **א(1)** p^n-1 **א(2)** $q=p,\ a_1=p-1$ **ב.** $p>1$ **או** $0<p<1$ **או** $p<-1$

ג. (1) נכון **(2)** לא נכון **ד.** $p=0.5$

.3 **א.** 0.7 **ב(1)** 70% **ב(2)** 0.52855 **ג.** המנהל צודק.

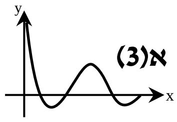
.4 הוכחות.

.5 **א(1)** $180°+\alpha-\beta, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}-\alpha$ **א(2)** $R^2\sin(\beta-2\alpha)$ **ב.** $\alpha=25.714°, \beta=102.857°$

ג. 1.9498.

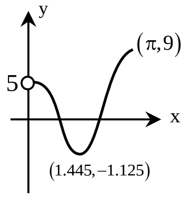
.6 **א(1)** $(1.823,0),(4.46,0),\left(\frac{5\pi}{3},0\right),\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ **א(2)** חיוביות: $1.823<x<4.46$, $0<x<\frac{\pi}{3}$,

שליליות: $4.46<x<\frac{5\pi}{3}$, $x<\frac{\pi}{3}<x<1.823$ **א(3)**



ב(1) $(\pi,9)\max, (1.445,-1.125)\min$

ב(2)

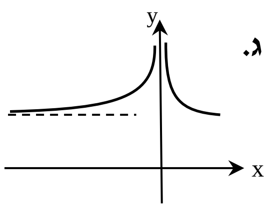


ב(3) $5\le m\le 9$, $m=-1.125$ **ג.** $1.823<x<\pi$ or $1<x<\frac{\pi}{3}$

ד. 4 מלבנים.

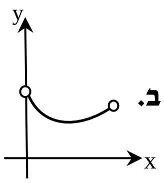
.7 **א(1)** $0<x\le -\frac{2}{a}$ or $x<0$ **א(2)** $x=0$, $y_{x\to-\infty}=3$ **א(3)** אין נקודות חיתוך.

ב. מינ' $\left(-\frac{2}{a},3\right)$ **ג.**



ד. $a=-0.4$ **ה.** $x_1=5$

.8 **א(1)** $t=1$ **א(2)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **ב.**



ג. הוכחה.