הגדרה 1.1 (משוואה אלגברית). משוואה אלגברית היא משוואה מהצורה $g\left(x\right)=c$ כאשר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הגדרה 1.2 (משוואה דיפרנציאלית רגילה). משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר) היא משוואה מהצורה $F\left(x,y,y',y''...\right)=c$, כאשר $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

הגדרה 2.1 (סדר). סדר (order) של משוואה דיפרנציאלית הוא הסדר הגבוה ביותר של נגזרת שמופיעה במשוואה.

הגדרה 2.2 (מעלה). מעלה (rank) של משוואה דיפרנציאלית היא החזקה של הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר שמופיעה במשוואה.

הגדרה 2.3. מד"ר היא לינארית כאשר היא מתוארת על ידי סכום מהצורה $\sum_{i=0}^{n}f_i\cdot y^{(i)}$ כאשר $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ היא סדרת פונקציות של x (שיכולות להיות גם קבועות).

הגדרה 3.1 (פתרון מפורש). פתרון של מד"ר הוא מפורש כאשר הכלל לפיו מתאימה הפונקציה ערכים הוא מפורש. לדוגמה, $y=2x+1$ הוא פתרון מפורש.

הגדרה 3.2 (פתרון סתום). פתרון של מד"ר הוא סתום כאשר לא ברור מה הכלל לפיו מתאימה הפונקציה ערכים. לדוגמה, הפתרון $2x+\tan\left(2y\right)=3$ הוא פתרון סתום.

הגדרה 5.1. משוואה מסדר ראשון תיקרא פריקה אם אפשר לייצג אותה בצורה

$$f_1\left(x\right)g_2\left(y\right)\,dx+f_2\left(x\right)g_1\left(y\right)\,dy=0$$

הגדרה 6.1 (פונקציה הומוגנית). פונקציה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקראת הומוגנית אם לכל קבוע $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$F\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^n\cdot F\left(x,y\right)$$

עבור קבוע $n\in\mathbb{N}$ כלשהו. הקבוע n נקרא סדר ההומוגניות של F.

הגדרה 6.2 (משוואה דיפרנציאלית הומוגנית). מד"ר תיקרא הומוגנית אם היא מהצורה

$$M\left(x,y\right)\,dx+N\left(x,y\right)\,dy=0$$

כאשר הפונקציות M,N הן הומוגניות מאותו סדר.

עובדה 6.1 (פתרון משוואות הומוגניות). לכל משוואה הומוגנית

$$M\left(x,y\right)\,dx+N\left(x,y\right)\,dy=0$$

ההצבה $y=zx$ תניב משוואה חדשה

$$P\left(x,z\right)\,dx+Q\left(x,z\right)\,dz=0$$

הניתנת לפירוק משתנים.

עובדה 6.2. כדי לפתור משוואה כמעט הומוגנית מהצורה

$$\left(a_1x+b_1y+c_1\right)\,dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)\,dy=0$$

נפריד למקרים:

- אם הישרים $a_1x+b_1y+c_1=0$ ו-$a_2x+b_2y+c_2=0$ אינם מקבילים זה לזה, נעבור למשתנים $x:=x'+\alpha,y:=y'+\beta$, ונבדוק מתי הקבועים נעלמים: נקבל את שתי המשוואות הלינאריות

$$\begin{cases}a_1\alpha-b_1\beta+c_1=0\\a_2\alpha-b_2\beta+c_2=0\end{cases}$$

פתרון שתי המשוואות יתן לנו את הקבועים α, β המתאימים.

- אם הישרים כן מקבילים זה לזה, אז המקדמים פרופורציוניים זה לזה עבור λ כלשהו, כלומר $a_1=\lambda a_2,b_1=\lambda b_2,c_1=\lambda c_2$. אז נגדיר

$$t:=a_1x+b_1y=\lambda\left(a_2x+b_2y\right)\,,\,dt=a_1\,dx+b_1\,dy$$

כלומר $dy=\frac{dt-a_1\,dx}{b_1}$ ואז

$$\left(t+c_1\right)\,dx+\left(t+c_2\right)\cdot\frac{dt-a_1\,dx}{b_1}=0$$

ותתקבל משוואה הומוגנית על t.

הגדרה 7.1 (משוואה דיפרנציאלית מדויקת). משווה דיפרנציאלית

$$M\left(x,y\right)\,dx+N\left(x,y\right)\,dy=0$$

נקראת מדויקת אם מתקיים התנאי

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

עובדה 7.1. כאשר נרצה לפתור משוואה מהצורה $M\left(x,y\right)\,dx+N\left(x,y\right)\,dy=0$, ואנו חושדים שהיא מדויקת, נבצע את השלבים הבאים:

- נבדוק האם המשוואה היא מדויקת.
- אם כן, נבצע שני אינטגרלים:

$$\phi=\int M\,dx=\int N\,dy$$

- כאשר נבצע אינטגרל לפי x יהיה לנו "קבוע" $C_1\left(y\right)$, וכאשר נבצע אינטגרל לפי y יהיה לנו "קבוע" $C_1\left(x\right)$.
- נצליב את הקבועים השונים עם התוצאות משני האינטגרלים השונים כדי למצוא את ϕ.
- ϕ קבועה, כלומר $\phi=C$ בסוף התהליך.

עובדה 7.2. כאשר נרצה לפתור משוואה "כמעט" מדויקת מהצורה $M\left(x,y\right)\,dx+N\left(x,y\right)\,dy=0$, נשתמש באחד מהאלגוריתמים הבאים:

- אם הפונקציה

$$f\left(x\right):=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

היא פונקציה של x בלבד:

1. נמצא את האינטגרל $\int f\,dx$.
2. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int f\,dx}$.
3. נקבל שמתקיים התנאי למשוואה מדויקת.

- אם הפונקציה

$$g\left(y\right):=-\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

היא פונקציה של y בלבד:

1. נמצא את האינטגרל $\int g\,dx$.
2. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int g\,dx}$.
3. נקבל שמתקיים התנאי למשוואה מדויקת.

לאחר שהכפלנו בגורם האינטגרציה המתאים, נמשיך לפתור כמו משוואה מדויקת רגילה.

הגדרה 8.1 (משוואה לינארית מסדר ראשון). מד"ר לינארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה

$$y'+P\left(x\right)\cdot y=Q\left(x\right)$$

הגדרה 8.2 (משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון)**.** משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה

$$y'+P(x)\cdot y=0$$

עובדה 8.1. כאשר נרצה לפתור משוואה לינארית מסדר ראשון הומוגנית, נוכל לפתור אותה כך:

1. נביא את המשוואה לצורה $y'+P(x)\cdot y=0$.
2. נמצא את האינטגרל $I:=\int P(x)\,dx$.
3. מפירוק המשוואה נקבל שמתקיים

$$\frac{y'}{y}=-P(x)$$

ולכן

$$\int\frac{y'}{y}\,dx=-\int P(x)\,dx$$

כלומר

$$\log(Cy)=-I$$

4. הפתרון המתקבל הוא

$$y=C\cdot e^{-I},y\cdot e^{I}=C$$

עובדה 8.2. כאשר נרצה לפתור משוואה לינארית מסדר ראשון $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ שאינה הומוגנית, נפעל כך:

1. נחלץ את $P(x)$ ואת $Q(x)$.
2. נמצא את y_H על ידי מציאת I ולאחר מכן e^{-I}.
3. הפתרון הוא בעזרת האינטגרל $\int\frac{Q}{y_H}\,dx$:

$$y=y_H\left(\int\frac{Q}{y_H}\,dx+C\right)$$

(חשוב לא לשכוח את $+C$ בשלב זה.)

הגדרה 8.1 (משוואת ברנולי)**.** משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה

$$y'+P(x)\,y=Q(x)\cdot y^{t}$$

עובדה 8.3. כדי לפתור משוואת ברנולי נבצע הצבה

$$z:=y^{1-t},\qquad z'=(1-n)\,y^{t}\cdot y'$$

נכפיל את המשוואה המקורית בגורם $(1-t)\,y^{-t}$ ונקבל:

$$\underbrace{(1-n)\,y^{-t}y'}_{z'}+(1-t)\,P(x)\,\underbrace{y^{1-t}}_{z}=(1-t)\,Q(x)$$

ולכן התקבלה המשוואה

$$z'+\underbrace{(1-t)\,P(x)}_{P^*}\cdot z=\underbrace{(1-t)\,Q(x)}_{Q^*}$$

וזוהי מד"ר לינארית על z.

הגדרה 9.1 (משוואת קלרו)**.** משוואת קלרו היא משוואה עם הקשר

$$y=xy'+f(y')$$

עובדה 9.1. הסוגים שראינו הם:

1. משוואות פריקות
2. משוואות הומוגניות מסדר n
3. משוואות מדויקות
4. משוואות לינאריות
5. משוואות ברנולי

והשיטות המיוחדות שראינו הן:

1. החלפת משתנים
2. גורם אינטגרציה
3. הזזת הראשית (במשוואות הומוגניות)
4. יצירתיות/מיומנות
   (א) החלפת משתנים יצירתית
   (ב) שימוש בקשר ההופכי $x(y)$

הגדרה 10.1 (מד"ר מסדר שני)**.** באופן כללי, מד"ר מסדר שני היא מד"ר מהצורה

$$F(x,y,y',y'')=0$$

כאשר $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$.

עובדה 10.1. כאשר המשוואה ניתנת לכתיבה בצורה $F(x,y',y'')=0$, אז אפשר לפתור משוואה מסדר ראשון על המשוואה $F(x,z,z')=0$, כאשר מציבים $z:=y'$. כך אפשר להפעיל את כל השיטות שלמדנו על משוואות מסדר ראשון.

עובדה 10.2. במשוואות מהצורה $F(y,y',y'')=0$, נעשה את ההצבה $z:=y'$, ונקבל:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z\cdot\frac{dz}{dy}$$

כלומר, מתקבלת המד"ר

$$F\left(y,z,z\cdot\frac{dz}{dy}\right)=0$$

הגדרה 11.1 (משוואה לינארית מסדר שני)**.** משוואה לינארית מסדר שני היא משוואה מהצורה

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=R(x)$$

נאמר כי היא הומוגנית אם $R(x)=0$.

הגדרה 11.2 (משוואת קושי)**.** משוואת קושי היא משוואה לינארית מסדר שני, שבה המקדמים הם חזקות של x המתאימים לסדר הנגזרות של y:

$$x^2y''+axy'+by=R(x)$$

אם $R(x)=0$, המשוואה היא הומוגנית.

עובדה 11.1. כדי לפתור משוואת קושי הומוגנית, ננחש את הפתרון $y:=x^{\alpha}$. נקבל את השוויון

$$x^2\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}+ax\cdot\alpha x^{\alpha-1}+bx^{\alpha}=0$$

נוציא גורם משותף ונקבל

$$x^{\alpha}\left(\alpha^2-\alpha+a\cdot\alpha+b\right)=0$$

לכן נקבל שהשורשים של המשוואה $\alpha^2+(a-1)\,\alpha+b=0$ הם המספרים α_1,α_2 שמקיימים את המשוואה. לכן, מהמשפט שהצגנו קודם, נוכל מיידית לקבוע כי הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$\operatorname{span}\left\{x^{\alpha_1},x^{\alpha_2}\right\}$$

עובדה 11.2. כדי לפתור משוואת קושי הומוגנית, נוכל להציב $x := e^z$. ההצבה הזו משנמכת את המשוואה למשוואה עם מקדמים קבועים:

$$x^2\alpha\left(\alpha-1\right)x^{\alpha-2}+ax\cdot\alpha x^{\alpha-1}+bx^{\alpha}=0 \implies \frac{d^2\tilde{y}}{dz^2}+\left(a-1\right)\cdot\frac{d\tilde{y}}{dz}+b\tilde{y}=0$$

כאשר $\tilde{y}\left(z\right)=y\left(x\left(z\right)\right)=y\left(e^z\right)$. משם נמצא את המספרים r_1,r_2 שהם השורש של המשוואה $r^2+\left(a-1\right)r+b=0$, והפתרון הכללי יהיה כך:

עובדה 11.3. נראה כאן פתרון כאשר $R\left(x\right)=t\cdot x^{\alpha}$.

כדי לפתור, ננחש פתרון פרטי $y_P := k\cdot x^n$, כאשר n הוא החזקה של x בפונקציה $R\left(x\right)$. נקבל דרישה שצריכה להתקיים עבור k:

$$x^2\cdot\alpha\left(\alpha-1\right)\cdot kx^{\alpha-2}+ax\cdot\alpha kx^{\alpha-1}+b\cdot kx^{\alpha}=tx^{\alpha}$$

ונקבל כי

$$\left(n^2-n\right)k+ank+bk=t$$

כלומר אפשר לחלץ את k ולקבל פתרון פרטי. משם מוצאים את הפתרון הכללי באמצעות שני פתרונות מהמשוואה ההומוגנית: הפתרון הכללי הוא $Ay_1+By_2+y_P$.

אפשר להשתמש בשיטה זו גם כאשר יש צירוף לינארי של חזקות $R\left(x\right)=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}$. במקרה זה נציב צירוף לינארי ונמצא את שני הקבועים: $y_P := k_1x^{\alpha}+k_2x^{\beta}$.

הגדרה 12.1 (משוואת עם מקדמים קבועים)**.** משוואה עם מקדמים קבועים היא משוואה מהצורה

$$y''+ay'+by=R\left(x\right)$$

אם $R\left(x\right)=0$, המשוואה נקראת הומוגנית.

עובדה 12.1. ננחש פתרון $y := e^{tx}$. נקבל:

$$t^2e^{tx}+a\cdot e^{tx}+be^{tx}=0$$

ולכן מתקיים

$$t^2+at+b=0$$

לכן

$$t_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

כעת יש 3 אפשרויות:

1. אם $t_1\neq t_2\in\mathbb{R}$, הפתרון הכללי הוא
$$\text{span}\left\{e^{t_1x},e^{t_2x}\right\}$$
2. אם $t_1=t_2=-\frac{a}{2}\in\mathbb{R}$, הפתרון הכללי הוא
$$\text{span}\left\{e^{-\frac{a}{2}x},xe^{-\frac{a}{2}x}\right\}$$
3. אם $t_1=\overline{t_2}=\alpha+\beta i$, הפתרון הכללי הוא
$$\text{span}\left\{e^{\alpha x}\cos\left(\beta x\right),e^{\alpha x}\cos\left(\beta x\right)\right\}$$

הגדרה 12.1 (משוואה עם מקדמים קבועים מסדר שלישי)**.** משוואה לינארית הומוגנית מסדר שלישי עם מקדמים קבועים היא משוואה מהצורה

$$\frac{d^3y}{dx^3}+a\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+b\cdot\frac{dy}{dx}+cy=0$$

עובדה 12.2. כדי לפתור את המשוואה, נמצא את שורשי הפולינום t^3+at^2+bt+c, ונפעל בהתאם:

1. אם כל הפתרונות ממשיים ושונים $t_1\neq t_2\neq t_3\neq t_1\in\mathbb{R}$, אז נקבל צירוף לינארי מהצורה
$$\text{span}\left\{e^{t_1x},e^{t_2x},e^{t_3x}\right\}$$
2. אם כל הפתרונות ממשיים אבל שניים מהם מתלכדים, אז נקבל צירוף לינארי מהצורה
$$\text{span}\left\{e^{t_1x},xe^{t_1x},e^{t_2x}\right\}$$
כאשר $t_1\neq t_2$.
3. אם שניים מהפתרונות מרוכבים $t_1=\overline{t_2}=a+bi$ ואחד ממשי $t_3\in\mathbb{R}$, אז נקבל
$$\text{span}\left\{e^{ax}\cos\left(bx\right),e^{ax}\sin\left(bx\right),e^{t_3x}\right\}$$

באופן כללי, מפרקים את הפולינום לגורמים ממעלה לכל היותר 2 ועושים מה שהיינו עושים במקרה של משוואה מסדר שני. עם השיטה הזאת אפשר להכליל ולקבל שיטה לפתרון משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים, מכל סדר שהוא.

עובדה 12.3. כדי לפתור משוואה עם מקדמים קבועים לא הומוגנית מהצורה

$$y''+ay'+by=F\left(x\right)$$

כאשר $F\left(x\right)=e^x,\sin x,\cos x,x^n$, נמצא קודם את הפתרונות ההומוגניים y_1,y_2. כעת נפריד למקרים.

1. אם מתקיים
$$F\left(x\right)\neq y_1,y_2,y_1x^n,y_2x^n$$
אז הפתרון הפרטי הלא הומוגני הוא
$$y_P=\sum_{i=0}^{n}A_iF^{(i)}\left(x\right)$$
הפתרון הכללי יהיה הפתרון ההומוגני ועוד צירוף לינארי של כל הנגזרות של F, מה שראינו קודם שהוא y_P (עוצרים כאשר הנגזרות מגיעות לאותן פונקציות עד כדי קבוע).
2. אם $F=y_1$ או $F=y_2$, נעשה מה שעשינו קודם, אבל נעבוד על הפונקציה $x\cdot F$, כדי להעלות את הנגזרות בחזקה אחת של x. אותה נגזור וניקח את כל הנגזרות היחודיות לפתרון הפרטי.
3. אם $F=x^ny_1$ או $F=x^ny_2$, אז נעבוד על הפונקציה $x\cdot F$ שוב.

אם יש סכום של פונקציות $F_1,F_2,\dots$ באגף ימין, מטפלים בכל אחת בצורה נפרדת המתאימה לה, לפי הכללים לעיל.

אם יש מונום x^n בפתרון ההומוגני וגם מונום x^k בפונקציה $F=x^ky_i$, אז הפתרון הפרטי יהיה עם הנגזרות של $x^{n+k+1}y_i$.

אם הפונקציה F היא פולינום, אז מציבים פולינום מאותו הסדר $p\left(x\right)=x^{S_0}\sum_{i=0}^{\deg F}C_ix^i$, כאשר S_0 הוא מספר השורשים שמתאפסים בפולינום האופייני של המשוואה. (זה רלוונטי בעיקר למשוואות מסדר גבוה יותר.)

עובדה 12.4. נדגים את השימוש בשיטות השונות של מד"ר מסדר ראשון.

נראה דוגמאות שונות לפתרונות של מד"ר עם מקדמים קבועים:

עובדה 13.1. בפתרון מד"ר באמצעות טורים מבצעים את השלבים הבאים:

1. מציבים את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ במשוואה, כאשר נגזרתו היא $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$.
2. מוצאים קשר רקורסיבי על המקדמים a_n של הטור.
3. משתמשים בקשר הרקורסיבי כדי למצוא נוסחה כללית למקדמים, וכך למצוא פתרון כללי למד"ר.
4. תנאי השפה של המד"ר יקבעו את האיברים הראשונים בטור.

המשוואה	דרך הפתרון	ההסבר
$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$	משוואה פריקה	אפשר לכתוב: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0$
$y' - x^2 y = x^5$	משוואת ברנולי	המשוואה כבר בצורת ברנולי
$(y-x)^2\,y' = 1$	החלפת משתנים יצירתית	ראשית, נחסר: $(y-x)^2\,y' - (y-x)^2 = 1 - (y-x)^2$ נוציא גורם משותף: $(y-x)^2\left(y'-1\right) = 1 - (y-x)^2$ כעת נחליף משתנים: $u := y - x, \quad u' = y' - 1$ ונקבל $u^2 \cdot u' = 1 - u^2 \implies u^2\,du + \left(u^2 - 1\right)\,dx = 0$ וזוהי משוואה פריקה.
$xy' + y + x^4 y^4 e^x = 0$	משוואת ברנולי	מחלקים ומקבלים $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P}\,y = \underbrace{-x^3 e^x}_{Q} \cdot y^4$
$(y-x)\,dx + y\,dy = 0$	הצבה $z = xy$	המשוואה הומוגנית
$(x-2y+5)\,dx + (2x-y+4)\,dy = 0$	הזזה לראשית	המשוואה כמעט הומוגנית
$\left(x^2+y^2\right)\,dx + 2y\,dy = 0$	הצבה יצירתית	נכתוב בצורה $x^2 + y^2 + 2yy' = 0$ ואז $u := y^2, \quad u' = 2yy'$ ונקבל $x^2 + u + u' = 0$ לינארית על u.
$x\,dy + \left(y - y^2\log x\right)\,dx = 0$	משוואת ברנולי	נכתוב בצורה $xy' + y - y^2\log x = 0$ ומחילוק מתקבל $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\log x}{x} \cdot y^2$
$3x^2 y\,dx + \left(x^3 + y^3\right)\,dy = 0$	משוואה מדויקת	התנאי מתקיים: $\frac{\partial}{\partial y}3x^2 y = \frac{\partial}{\partial x}x^3 + y^3$

טבלה 3: סיכום מד"ר מסדר ראשון

המשוואה	הפתרון ההומוגני	האם יש מקרה מיוחד בפתרון הפרטי?	צורת הפתרון הפרטי
$y'' + 3x - 4y = x$	$y_1 = e^x, y_2 = e^{-4x}$	לא	$Ax + B\,(x)' = Ax + B$
$y'' + 3x - 4y = \cos 2x$	$y_1 = e^x, y_2 = e^{-4x}$	לא	$A\cos 2x + B\sin 2x$
$y'' + 3x - 4y = e^{-x} + x$	$y_1 = e^x, y_2 = e^{-4x}$	סכום	$Ae^{-x} + \cancel{B\left(-e^{-x}\right)} + Cx + D$
$y'' + 3x - 4y = e^x$	$y_1 = e^x, y_2 = e^{-4x}$	$e^x = y_1$	$Axe^x + \cancel{B\left(e^x + xe^x\right)}$
$y'' + 3x - 4y = xe^x$	$y_1 = e^x, y_2 = e^{-4x}$	$e^x = x \cdot y_1$	$Ax^2 e^x + Bxe^x$
$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$	$y_1 = e^{-2x}, y_2 = xe^{-2x}$	נצטרך לכפול ב-x פעמיים כי $e^{-2x} = y_1, xe^{-2x} = y_2$	$Ax^2 e^{-2x} + \cancel{Bxe^{-2x} + Ce^{-2x}}$
$y'' + y = e^x$	$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$	לא	Ae^x
$y'' + y = \sin x + e^x$	$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$	סכום, $\sin x = y_2$	e^{-x} לא מפריע, ובנוסף כל הנגזרות של $x\sin x$ לדורותיהן: $Ax\sin x + \cancel{B\sin x} + Cx\cos x + \cancel{D\cos x} + Ee^{-x}$
$y^{(3)} + 3y'' - 4y = xe^{-2x}$	אנחנו לא יודעים לפתור, אבל נתון: $y_1 = e^x,$ $y_2 = e^{-2x},$ $y_3 = xe^{-2x}$	$xe^{-2x} = y_3$, כדי לטפל בבעיה צריך לעלות מעל המכפלה של F ו-y_3: לעבוד עם $x^3 e^{-2x}$	$Ax^3 e^{-2x} + Bx^2 e^{-2x} + \cancel{Cxe^{-2x}}$
$y^{(6)} - y^{(4)} = x^2$	נתון: $y_H = 1, x, x^2, x^3, e^x, e^{-x}$	$x^2 \in y_H$ מטפסים מעל החזקה $2 + 3$	$Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + \cancel{Dx^3 + \cdots}$
$\_\_\_\_ = \sin x\cos 2x$	נתון: $y_1 = \sin x, y_2 = \cos 2x$	אפשר להתבלבל: $\sin x\cos 2x \notin \operatorname{span}\{\sin x, \cos 2x\}$ היה מקרה בעיתי רק אם המכפלה הייתה ב-x, ולא בפונקציה אחרת	$A\sin x\cos 2x +$ הנגזרות
$\_\_\_\_ = x\cos 2x$	נתון: $y_1 = \sin x, y_2 = \cos 2x$	כאן באמת יש מקרה בעייתי $F = xy_2$	$Ax^2\cos 2x +$ הנגזרות

טבלה 4: דוגמאות לפתרונות שונים של מד"ר עם מקדמים קבועים