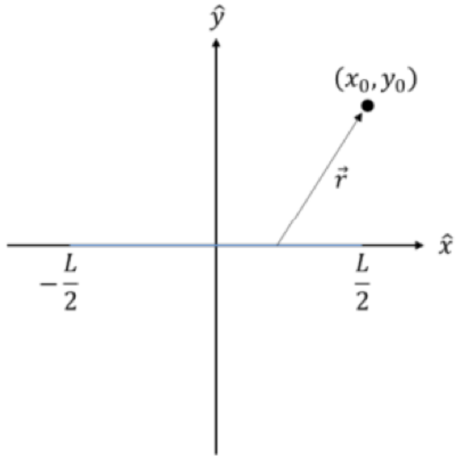
בס״ד

חשמל - תרגול 10 -

שאלה 1:

נתון תיל באורך L בו זורם זרם I . מצאו את השדה המגנטי בנק (x0,y0).



$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\, d\bar{l} \times \bar{r}$$

$$r = |\bar{r}| = \left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\bar{l} = dx\,\hat{x}$$

$$\bar{r} = (x_0 - x)\hat{x} + y_0\,\hat{y}$$

$$d\bar{l} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ x_0 - x & y_0 & 0 \end{vmatrix} = dx\, y_0\, \hat{z}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I\, dx\, y_0}{(\ldots)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{z}$$

$$4\pi\left((x_0-x)^2+y_0^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$x - x_0 = z$

נסמן

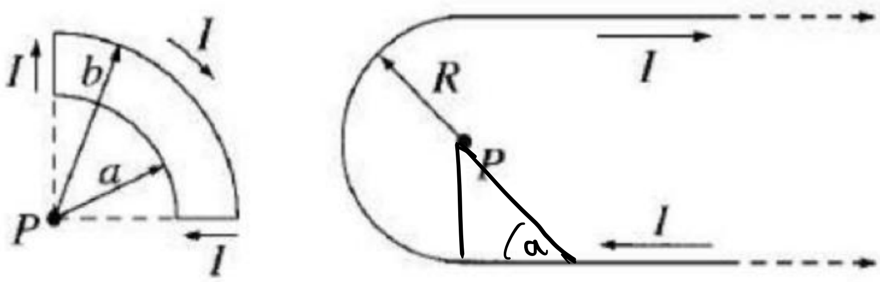
$$B = \frac{\mu_0 I y_0}{4\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\left((x_0-x)^2+y_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx \;\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I y_0}{4\pi}\left.\frac{x-x_0}{y_0^2\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2}}\right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I y_0}{4\pi}\left[\frac{\frac{L}{2}-x_0}{y_0^2\left(\left(\frac{L}{2}-x_0\right)^2+y_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(-\frac{L}{2}-x_0\right)}{y_0^2\left(\left(-\frac{L}{2}-x_0\right)^2+y_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\hat{z}$$

שאלה 2:

מצאו את השדה המגנטי בנקודה P בכל אחד מהציורים:



(a) (b)

תשובות: א. $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(out)$. ב. $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4R}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)$(into the page)

בס״ד

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\, dl \times r \qquad (\text{א})$$

נחשב את השדה שמייצר כל צד בצורה.

אך z הקווים בכיווני הצורה - לפי $dl \times r$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad (\sin 180 = 0)$$

ואז נחשב את B_a ו- B_b, נוסף להם כיוונים לפי

חוק י׳ ימין ונמצא.

$$B_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi a^3} \cdot a\, dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I}{8a} \quad (\hat{z})$$

החוצה מהדף

$$B_b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi b^3}\, b\, dl = \frac{\mu_0 I}{8b} \quad (-\hat{z})$$

לתוך הדף

למה החוצה מהדף.

אז הוש כאן כלל י׳ ימין?

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{8a} - \frac{\mu_0 I}{8b}\right)\hat{z}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\hat{z}$$

(ב) נחלק לחלקים חלקים: תחתון, עליון ומעגל

עבור החלק המעגלי: $dl = R\, d\theta$ ואז

$$dl \times R = R\, d\theta\, \hat{\theta} \times R\hat{r} = R^2\, d\theta\, (-\hat{z})$$

לתוך הדף

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi R^3}\int_0^{\pi} (-\hat{z})\, d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4R}\,(\hat{z})$$

בס״ב החלקים העליון / התחתון -

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\sin a = \frac{R}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx\,\hat{x} \times r\,\hat{r}$$

$$= dx\, r \sin a$$

$$= R\, dx$$

$$dB = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx =$$

$$= \dots \Big|_0^\infty \frac{x}{R^2\sqrt{R^2+x^2}} = \left(\frac{1}{R^2} - 0\right)$$

$$B_{\text{של ציר אחד}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

נשים לב ששני הקווים הישרים הכיוון שלהם זה $(-\hat{z})$ ומחבר

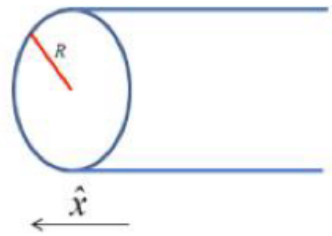
$$B_{\text{שלהם}} = -\frac{\mu_0 I}{2R\pi}\,\hat{z}$$

$$B_{\text{כולל}} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)(-\hat{z})$$ לצי הבל.

בס״ד

3)

נתון מוליך צילינדרי אינסופי בעל רדיוס R. במוליך זורם זרם עם צפיפות זרם $\vec{J}=\alpha r\hat{x}$, α קבוע, כמתואר בציור:



$J = ar\hat{x}$

א. מצאו את השדה המגנטי בכל המרחב, ציירו את $|B|(r)$. (תשובה: $\vec{B}=\begin{cases}\frac{\alpha r^2\mu_0}{3}\hat{\theta} & r<R\\ \frac{\alpha R^3\mu_0}{3r}\hat{\theta} & r>R\end{cases}$).

ב. חזרו על סעיף א', אך הפעם כאשר: $\vec{J}=\begin{cases}\alpha r & a<r<R\\ 0 & r<a\end{cases}$ (תשובה:

$$\vec{B}=\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{\alpha(r^3-a^3)\mu_0}{3r}\hat{\theta} & a<r<R\\ \frac{\alpha(R^3-a^3)\mu_0}{3r}\hat{\theta} & r>R\end{cases}$$).

$\underline{r<R}$:

תחילה נגדיר את כיוון השדה שלפי כלל יד ימין יהיה נגד כיוון השעון בכיוון $\hat{\theta}$

$$\oint B\, dl = \mu_0 I$$

$$B\, 2\pi r = \mu_0 I$$

$$I = \int_0^r\int_0^{2\pi} ar\cdot r\, dr\, d\theta = \frac{ar^3}{3}2\pi$$

בס״ד

$$2\pi r B = \frac{ar^3}{3} 2\pi \mu_0$$

$$B = \frac{ar^2}{3} \mu_0 \hat{\theta} \qquad r < R$$

$\underline{r > R}$:

$$2\pi r B = \mu_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} ar^2 \, dr \, d\theta$$

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{aR^3}{3} 2\pi$$

$$B = \frac{\mu_0 a R^3}{3r}$$

ב)

$\underline{r < a}$: $B = 0$

$a < r < R$:

$$2\pi r B = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_a^R ar \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$2\pi r B = \mu_0 2\pi \left. \frac{ar^3}{3} \right|_a^r$$

$$Br = \mu_0 \frac{ar^3}{3} - \frac{a^4}{3}$$

$$B = \frac{a}{3r} \left(r^3 - a^3 \right) \mu_0$$

בס״ד

$$Br = \frac{\mu_0 a R^3}{3} - \frac{a^4}{3} \qquad : \underline{r > a}$$

$$B = \frac{a}{3r}\mu_0 (R^3 - a^3)$$

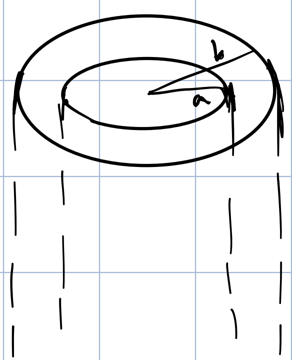
לשאול על כל השאלה הזו!!
מה הכיוונים הנבחרים
מה מתאפס ומתבטל
ומה לא.

(4) שאלה 4:

נתונות שתי קליפות גליליות אינסופיות מוליכות בעלות ציר משותף מצאו את השדה המגנטי בכל המרחב כאשר:

א. בקליפה הפנימית זורם זרם I בכיוון $\hat{z}$ ובחיצונית זורם I בכיוון $-\hat{z}$.

ב. בקליפה הפנימית צפיפות זרם משטחית $K_0\hat{\theta}$ ובחיצונית $-K_0\hat{\theta}$.



$\underline{r < a}$: הזרם עובר על פני השטח של הקליפה ולא בתוכה
כיוון שהוא זורם בכיוון $\hat{z}$ ולכן במקרה כזה לפי חוק אמפר
בתוך הקליפה אין זרם תחום בעקום סגור בתוך הרדיוס שלה ולכן
השדה המגנטי שם הוא 0

$$\oint B\, dl = \mu_0 I = 0$$

$$\underline{\underline{B = 0}}$$

בס"ד

$a<r<b$: יש לנו כאן זרם רק מהקליפה הפנימית, מאותה הסבה שציינו למעלה, שהזרם של b לא עובר בתוך קליפה לולאה שנשים בצורה הזה, אבל שם כן יש לנו זרם סגור של רדיוס a. ואז

$$\oint B\,dl = \mu_0 I = B\,2\pi r$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$ (נגד כיוון השעון)

$r>b$:

$$I_T = (I - I) = 0$$

$$\oint B\,dl = \mu_0 \cdot 0$$

$$B = 0$$

(ב) בפנים יש לנו שדה כתוצאה מהקליפה הפנימית המוליכה

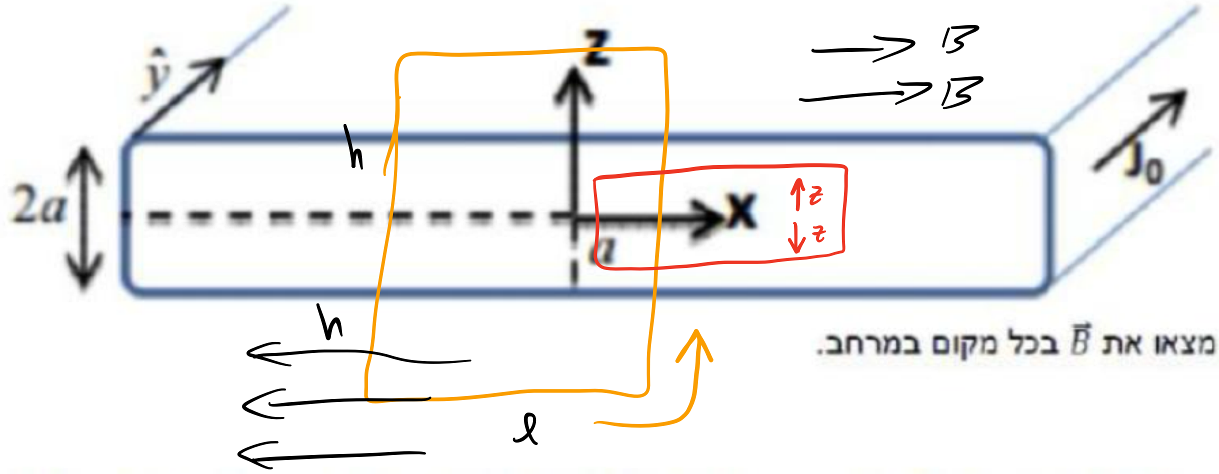
$$\oint B\,dl = \int_0^r \int_0^{2\pi} k_0 \mu_0\,d\theta$$

$$B\,2\pi r = k_0 \mu_0\,2\pi r$$

$$B = k_0 \mu_0\,(\hat{z})$$

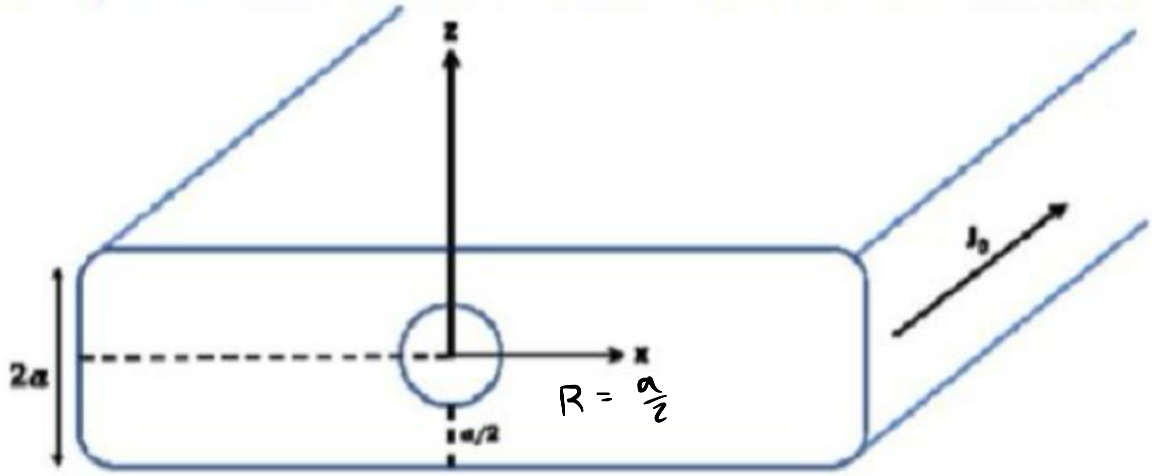
בס״ד

נתונה תיבה מוליכה אינסופית בה צפיפות זרם $\vec{J} = J_0 \hat{y}$.



א. מצאו את $\vec{B}$ בכל מקום במרחב.

ב. כעת קודחים חור בעל רדיוס $a/2$ בראשית הצירים. מצאו את השדה המגנטי בכל נקודה על ציר z.



(א) על פני הדפנות האורכיות $\oint B \cdot dl = 0$ ולכן

נסתכל על z הדפנות המקבילות.

ונשים חוק אמפר על הדפנה העליונה והתחתונה

נקיף בלולאה את התיבה ואז

$$2 \oint_c B \, dl = 2al\mu_0 J$$

$$2Bl = 2al\mu_0 J$$

$$B = \mu_0 J l$$

בס״ד

$$B_{z>a}: \mu_0 J l \hat{x}$$

$$B_{z<a}: -\mu_0 J l(-\hat{x})$$

בתוך הלולאה הדברים מתאפסים כלל ונשאר רק מעטפות גם כאן
עם z הלולאות העליונה והתחתונה

$$\oint_c B\, dl = \mu_0 J_0\, 2z l$$

$$2lB = \mu_0 J_0\, 2z l$$

למה בכיוון
$\hat{x}$ ומה
מחלקים גם כאן?

$$\boxed{B_{-a<z<a} = \mu_0 J_0 z\, \hat{x}}$$

(ב) נתייחס לגליל שנכנס בתיבה כאל גליל ברדיוס $\frac{a}{2}$ עם צפיפות
זרם $J = J_0(-\hat{y})$, נמצא את השדה המגנטי שהוא מייצר סביבו ונחבר
זאת עם השדה המגנטי שמצאנו בסעיף א.

מחוץ לגליל:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} -J_0\, r\, dr\, d\theta = -J_0 r^2 \pi$$

$$= -\frac{J_0 a^2 \pi}{4}$$

$$\oint B\, ds = B\, 2\cancel{\pi} r = -\frac{\mu_0 J_0 a^2 \cancel{\pi}}{4} \qquad z>a$$

$$z<a$$

מעל
ומתחת
$$\left\{ B = -\frac{\mu_0 J_0 a^2}{8r} \right.$$

$-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$ בפ״ב

$$I = -J_0 r^2 \pi$$

$$\oint B\, dS = B\, 2\cancel{\pi}\cancel{r} = -\mu_0 J_0 r^{\cancel{2}} \cancel{\pi}$$

$$B = \frac{-\mu_0 J_0 r}{2}$$

כש $\frac{a}{2} < z < a$

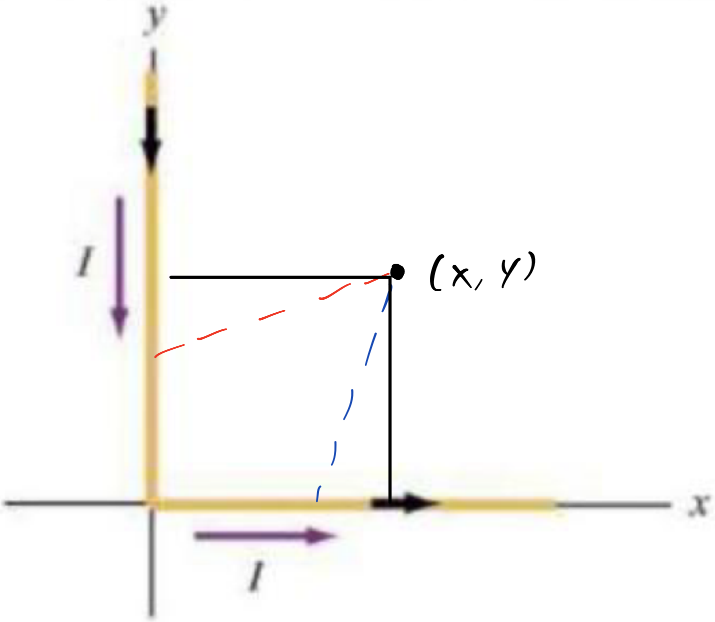
$$B = \frac{-\mu_0 J_0 a^2}{8r}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & B_{z>a} = \left(\mu_0 J_0 a - \frac{\mu_0 J_0 a^2}{8z} \right) \\ & B_{z<-a} = \left(-\mu_0 J_0 a - \frac{\mu_0 J_0 a^2}{8z} \right) \\ & \left. \begin{aligned} & B_{\frac{a}{2}<z<a} \\ & B_{-\frac{a}{2}>z>-a} \end{aligned} \right\} = \left(\mu_0 J_0 z - \frac{\mu_0 J_0 a^2}{8z} \right) \\ & B_{\frac{a}{2}>z>-\frac{a}{2}} = \left(\mu_0 J_0 z - \frac{\mu_0 J_0 z}{2} \right) \end{aligned} \right\}$$

בס״ד

שאלה 6:

נתון הזרם I שזורם בשני תיילים חצי אינסופיים כמתואר בציור. הראו כי



הראו כי השדה המגנטי ברביע הראשון שווה ל- :

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{z}$$

נחשב את השדה המגנ' של התיל בציר y בנק' מסוימת:

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\, dl\times r$$

$$r= x\hat{x}+(y-y')\hat{y}$$

$$dl=-dl(\hat{y})$$

$$dl\times r=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & -dl & 0\end{vmatrix}= dy\cdot x\,\hat{z}$$

$$\begin{vmatrix} x & y-y' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0 I x \hat{z}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+(y_0-y')^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \frac{y_0-y}{x^2(x^2+(y_0-y)^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^\infty \ldots\ldots$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \Big|_0^\infty \frac{y_0-y}{(x^2+(y_0-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

עכשיו נחשב את השדה שהתיל בציר ה - x :

$$r = y_0\hat{y} + (x-x_0)\hat{x}$$

$$dl = dx\,\hat{x}$$

$$dx \times r = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ (x-x_0) & y_0 & 0 \end{vmatrix} = dx\, y_0\, \hat{z}$$

$$B = \frac{\mu_0 I y_0 \hat{z}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \Big|_0^\infty \frac{x-x_0}{(y^2+(x-x_0)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

בס"ד

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-a}{b\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = \frac{1}{b}$$

$$\underset{\text{כיוון}}{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

7)

האם אפשרי למצוא את השדות המגנטיים הבאים בטבע?

א. $B_x = kx \quad B_y = ky \quad B_z = kz$

ב. $B_x = kx \quad B_y = 0 \quad B_z = -kz$

א) נבדוק אם הדיברגנץ של השדה שווה ל-0.

זאת כיוון שאין שטף של שדה מגנטי דרך מעטפת סגורה

האם $\nabla B = 0$, וזה תנאי שחייב להתקיים

כיוון שאין מונופולים מגנטי (כל קו שיוצא חוזר מהצד השני וזה בגלל מתאפס)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k + k + k \neq 0$$

ולכן השדה אינו אפשרי בטבע.

(ב)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k - k = 0$$

השדה אפשרי בטבע!