חדו"א 2 – אודיסאה

עדי מכנס

23 ביוני 2025

''היי חברים, ומכנס``

– ד``ר ארז שיינר, אודיסאה, 2025.

סיכום זה מבוסס על הרצאותיו של ד``ר ארז שיינר לאודיסאה ומערכי התרגול של רעות בורנובסקי אשר התקיימו בשנת 2025 (התשפ``ה).

השתדלתי להכניס גם אם ארז לא הראה או הוכיח בהרצאה מספר דברים שנראו לי חשובים להבנת החומר. רובם מהאתר המצויין של ד``ר ארז שיינר - Math Wiki. (ובפרט, הספר המצויין של סמי זעפרני כאן)

הסיכום נכתב בתוכנה LyX ובשפת LaTeX, שהיא הרחבה של שפת TeX.

תודות רבות לאנשי אודיסאה, אשר העירו הערות ותיקנו שגיאות.

אם יש לכם הערות / תיקונים / הצעות אנא פנו אליי. אני לא נושך.

עדי מכנס ☺

תוכן העניינים

1 טורים **5**
1.1 מבוא ואינטואיציה לטורים 5
1.2 טורים חיובים ומבחני התכנסות לטורים חיוביים 8
1.3 טורים כללים, התכנסות בהחלט ומבחן לייבניץ 14

2 סדרות וטורי פונקציות **17**
2.1 סדרות של פונקציות, פונקציית הגבול 17
2.2 התכנסות במידה שווה, תכונות של התכנסות במידה שווה 18
2.3 טורי פונקציות והתכנסות במ"ש של טורי פונקציות 22

3 טורי חזקות / טיילור **24**
3.1 הגדרה של טורי חזקות 25
3.2 רדיוס התכנסות, נוסחאות המנה והשורש 26
3.3 התכנסות במ"ש של טורי חזקות 27
3.4 קיום ויחידות טור טיילור וטורי טיילור ידועים 28
3.5 הערכת שגיאות של קירובי טורים 32

4 מבוא לפונקציות מרובות משתנים **33**
4.1 פונקציות בשתי משתנים + דוגמאות 33
4.2 סביבות ב $\mathbb{R}^n$ (טופולוגיה בקטנה) 39
4.3 הבנה של פונקציות בשני משתנים 40

5 גבולות ורציפות בשתי משתנים **41**
5.1 גבולות בשתי משתנים 41
5.2 רציפות בשתי משתנים 42

6 גזירות בשני משתנים **44**
6.1 דיפרנציאביליות בשני משתנים 44
6.2 נגזרות חלקיות 45
6.3 נגזרת כיוונית 47
6.4 כלל השרשרת 49
6.5 כללי גזירה וקטורית (מהתרגול) 51

7 פולינום טיילור בשני משתנים **52**

8 קיצון בשני משתנים **53**
8.1 נקודות קיצון מקומיות 53
8.2 משוואת המשיק לקו הגובה 56
8.3 קיצון מוחלט וכופלי לגראנז' 57

9 אינטגרלים כפולים **58**
9.1 סכומי רימן כפולים משפט פוביני 58
9.2 שיטות לחישוב אינטגרלים כפולים 61
9.3 החלפת משתנים ב $\mathbb{R}^2$ 62

10 אינטגרלים משולשים **63**
10.1 אינטואיציה והגדרות 63
10.2 שינוי משתנים ב $\mathbb{R}^3$ 64

11 אינטגרל קווי (מסלולי) **65**
11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 65
11.2 אינטגרל קווי מסוג שני 66
11.3 שדות משמרים 67
11.4 משפט גרין 68

12 אינטגרלים משטחיים **69**
12.1 אינטגרל משטחי מסוג ראשון 69
12.2 אינטגרל משטחי מסוג שני 71
12.3 משפט גאוס (הדיברגנץ) 72
12.4 משפט סטוקס 72

א׳ אלגברה לינארית (תזכורת) **74**
א׳.1 הגדרות בסיסיות ואריתמטיקת וקטורים 74
א׳.2 צירופים לינארים, תלות לינארית ובסיס 77
א׳.3 היטלים 78
א׳.4 מכפלה וקטורית 79

ב׳ העשרות הכרחיות **81**

1 טורים

1.1 מבוא ואינטואיציה לטורים

טורים באים לייצג סכום אינסופי. כיוון שאנו אנושיים ואין אנו יכולים לספור עד אינסוף, ניעזר במושגים מתחום החדו"א על מנת להבינם ועל מנת לחקור את משפחת האובייקטים הללו.

הגדרה 1.1 (סס"ח)**.** תהי סדרה a_n. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים (סס"ח) להיות:

$$S_n\left(a\right)=a_1+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

הערה. ניתן להגדיר את הסס"ח באופן שקול בצורה רקורסיבית:

$$S_n\left(a\right)=\begin{cases}a_1 & n=1\\ a_n+S_{n-1}\left(a\right) & \text{otherwise}\end{cases}$$

כעת אנו יכולים לדבר על הסכום האינסופי בעזרת הסס"ח. זאת בעזרת גבולות.

הגדרה 1.2 (טור)**.** תהי סדרה a_n. נגדיר את הטור להיות גבול הסס"ח. דהיינו:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n\left(a\right)$$

הגדרה 1.3 (התכנסות של טור)**.** אומרים כי הטור מתכנס אם גבול הסס"ח קיים וסופי. אחרת אומרים כי הטור מתבדר.

סימון 1.4. לעיתים, לצורך נוחות הכתיבה נכתוב $\sum a_n$ בכדי לדבר על טור.
שימו לב כי אנו יכולים לשנות גם את אינדקס ההתחלה, במקרים של ת.ה. או נוחות אחרת. ההשפעה של זה היא ישירות על הסס"ח, כלומר מאיזה איבר מתחילים לספור. שימו לב שאין בעיה להתחיל לספור מ-0, או ממספרים אחרים, כל עוד הדבר הגיוני.

דוגמה 1.5 (טור הנדסי)**.** הטור ההנדסי הוא הטור הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

למה 1.6. הטור ההנדסי $\sum x^n$ מתכנס $\iff |x|<1$. בנוסף כאשר הטור מתכנס מתקיים כי:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

הוכחה. נביט בסס"ח:

$$\sum_{i=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

נשים לב כי זהו סכום סדרה הנדסית (המנה היא x). לכן ניתן להיעזר בנוסחה מהתיכון (תרגיל לקוראים, באינדוקציה):

$$= \frac{1\cdot(x^n-1)}{x-1}$$

לכן כאשר נשאיף את n לאינסוף (ז"א נחשב את הגבול), עלינו לחלק למקרים לפי ערכו של x.

אם $|x|<1$ אזי נובע מחשבון גבולות כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n-1}{x-1} = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

אם $x=1$ ישנה בעיה של ת.ה. אבל אז הסס"ח תהיה:

$$S_n\left(1^n\right) = n$$

אך היא שואפת לאינסוף, ולכן הטור מתבדר.

אם $x=-1$ אזי לסס"ח:

$$S_n\left(a\right) = \frac{(-1)^n-1}{-2}$$

אין גבול, ולכן הטור יתבדר.

אחרת, מתקיים כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n-1}{x-1} = \infty$$

וע"כ הטור מתבדר.

סה"כ נקבל שהטור מתכנס רק עבור $|x|<1$. $\square$

טענה 1.7 (חשבון טורים). יהיו טורים מתכנסים $\sum a_n = L_a$, $\sum b_n = L_b$. אזי כל צירוף לינארי שלהם (צ"ל) מתכנס לצ"ל של הגבולות. כלומר, לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי:

$$\sum c_1 a_n + c_2 b_n = c_1 L_a + c_2 L_b$$

הוכחה. נחשב את גבול הסס"ח:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_1 a_i + c_2 b_i = c_1\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i + c_2\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} b_i = c_1 L_a + c_2 L_b$$

כאשר המעבר נבע מחשבון גבולות ומחוק הפילוג תחת כמות סופית של איברים. $\square$

טענה 1.8 (שינוי מספר סופי של איברים). יהי טור מתכנס $\sum a_n$. אזי מתקיים כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

הוכחה. טריוויאלית והושארה לקוראים, עקב משפטי חשבון גבולות שהוכחנו בממפי"ס 1. $\square$

הערה. שימו לב כי שאם נמחק חלק מן האיברים מטור מתכנס, הטור יתכנס, אך למספר אחר.

הגדרה 1.9 (טור טלסקופי)**.** טור טלסקופי הוא טור, בו הסס"ח מבטלת חלק מן האיברים, כך שהיא ביטוי "פשוט".

דוגמה. נביט בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$$

מפירוק לשברים חלקיים, ניתן לראות כי:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ומכאן שהסס"ח תהיה:

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ולכן הטור $\sum \frac{1}{n^2+n}$ מתכנס לערך 1.

ברצוננו לדבר כעת על השאלה **האם** הטור מתכנס, שכן לחשב את הגבול עצמו קשה לרוב. לכן פרק זה יעסוק ברובו במבחני התכנסות, שהם עונים על השאלה האם הטור מתכנס, או מתבדר.

משפט 1.10 (תנאי הכרחי להתכנסות)**.** יהי טור $\sum a_n$ מתכנס. אזי $a_n \to 0$.

הוכחה. כיוון שהטור מתכנס, הסס"ח שלו שואפת לגבול סופי, אשר נסמנו ב L. כעת, נביט בסדרה הבאה:

$$S_{n+1}\left(a\right)-S_{n}\left(a\right)$$

כיוון שהסס"ח מתכנסת, מתקיים שהגבול של הסדרה לעיל הינו 0, שכן שינוי מספר סופי של איברים לא משפיע על גבול הסדרה.
כלומר:

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}\left(a\right)-S_{n}\left(a\right)=\lim_{n\to\infty}a_{1}+\cdots+a_{n}+a_{n+1}-a_{1}-\cdots-a_{n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$$

לכן מכיוון ש $a_{n+1}\to0$, כיוון ששינוי סופי של איברים לא משפיע על התכנסות של סדרה, אזי גם $a_{n}\to0$. □

מסקנה 1.11. תהי סדרה a_n המקיימת כי $a_n\nrightarrow0$. אזי הטור $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה. נובע לוגית מהתנאי ההכרחי (קונטרה פוזיטיב). □

תרגיל. הסבירו מדוע מתקיים כי:

$$1+2+3+4+\cdots\neq-\frac{1}{12}$$

1.2 טורים חיובים ומבחני התכנסות לטורים חיוביים

נעסוק כעת בסוגים ספציפיים יותר של טורים, עקב חשיבותם היחסית.

הגדרה 1.12 (טור חיובי)**.** טור $\sum a_n$ ייקרא <u>טור חיובי</u> אם לכל n מתקיים כי $a_n\geq0$.

הגדרה 1.13 (טור חסום)**.** טור $\sum a_n$ ייקרא <u>טור חסום</u> אם הסס"ח שלו חסומה. כלומר, קיים M כך שלכל n מתקיים כי $\left|S_{n}\left(a\right)\right|\leq M$.

מסקנה 1.14. כל טור מתכנס הוא טור חסום.

הוכחה. כיוון שהטור מתכנס, הסס"ח מתכנסת, והרי כל סדרה מתכנסת היא חסומה. □

מסקנה 1.15. טור חיובי הוא טור מתכנס $\iff$ הוא טור חסום.

הוכחה. נשים לב כי אם הטור $\sum a_n$ חיובי, מתקיים כי הסס"ח מונוטונית עולה, שכן:

$$S_{n+1}(a) - S_n(a) = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} - a_1 - \cdots - a_n = a_{n+1} \geq 0$$

והרי, סדרה מונוטונית מתכנסת לגבול סופי אמ"מ היא חסומה. $\square$

כעת נציג ונוכיח את חמשת מבחני ספוק להתכנסות טורים חיוביים.

משפט 1.16 (מבחן ההשוואה הראשון)**.** יהיו טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$ כך שלכל n מתקיים כי $a_n \leq b_n$. נניח בנוסף כי הטור הגדול $\sum b_n$ מתכנס. אזי הטור הקטן $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. נביט בסס"ח של a_n:

$$S_n(a) = a_1 + \cdots + a_n$$

קל לראות (באינדוקציה) שמתקיים כי:

$$S_n(a) = a_1 + \cdots a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = S_n(b)$$

ולכן מכיוון שהטור $\sum b_n$ מתכנס, הוא חסום ע"י M. מכאן, מתקיים שהטור $\sum a_n$ חיובי וחסום גם כן (ע"י M) ולכן מתכנס. $\square$

מסקנה 1.17. יהיו טורים חיובים $\sum a_n, \sum b_n$, כך שלכל n מתקיים כי $a_n \leq b_n$. עוד נניח כי הטור הקטן $\sum a_n$ מתבדר. אזי גם הטור הגדול $\sum b_n$ מתבדר.

הוכחה. נובע לוגית ממבחן ההשוואה הראשון (קונטרה פוזיטיב). $\square$

משפט 1.18 (מבחן ההשוואה הגבולי)**.** יהיו טורים חיובים $\sum a_n, \sum b_n$. נניח כי הגבול $\lim \frac{a_n}{b_n}$ קיים, ונסמנו באות L. נחלק למקרים:

- עבור $L = 0$, אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.
- עבור $L = \infty$, אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum b_n$ מתכנס.

* עבור גבול סופי $0 < L < \infty$, הטורים נקראים חברים, ומתקיים כי הטור $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum b_n$ מתכנס.

סימון. כאשר הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ חברים, מסמנים:

$$\sum a_n \sim \sum b_n$$

הוכחה. נוכיח כל סעיף:
תחילה, אם $L = 0$, אזי החל משלב מסוים מתקיים כי:

$$\frac{a_n}{b_n} - 0 < 1$$

$$a_n < b_n$$

ולכן ממבחן ההשוואה הראשון נקבל שהטור $\sum a_n$ מתכנס אף הוא, זאת כיוון ששינוי מספר סופי של איברי הטור לא משפיע על התכנסות הטור.
כעת, אם $L = \infty$, אזי החל משלב מסוים מתקיים כי:

$$\frac{a_n}{b_n} > 1$$

$$a_n > b_n$$

ובאופן דומה, נקבל שהטור $\sum b_n$ מתכנס.
לבסוף, אם $0 < L < \infty$, נוכיח את הגרירה הדו כיוונית:
$\boxed{\Rightarrow}$ נניח כי הטור $\sum b_n$ מתכנס. לכן החל משלב מסוים:

$$\frac{a_n}{b_n} - L < 1$$

$$a_n < (1 + L)\, b_n$$

והרי מכיוון שהטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי גם $\sum (\varepsilon + L)\, b_n$ מתכנס ולכן כמו מקודם נקבל הדרוש.
$\boxed{\Leftarrow}$ נניח כי הטור $\sum a_n$ מתכנס. לכן החל משלב מסוים:

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L$$

$$\frac{L}{2} b_n < a_n$$

ולכן, כמו ממקודם, הטור $\sum \frac{L}{2} b_n$ מתכנס, ומכאן שבפרט גם הטור $\sum b_n = \sum 2L \cdot \frac{L}{2} b_n$ מתכנס.
□

הערה. גם כאן, כללי ההתבדרות כמו במבחן ההשוואה הראשון תקפים. הקוראים יותר ממוזמנים להוכיח כתרגיל.

משפט 1.19 (מבחן המנה). יהי טור חיובי $\sum a_n$ כך שהגבול $\lim \sqrt[n]{a_n}$ קיים, ונסמנו ב L. אזי:

- אם $0 \leq L < 1$, הטור $\sum a_n$ מתכנס.
- אם $1 < L \leq \infty$, הטור $\sum a_n$ מתבדר.

הערה. אם $L = 1$ המשפט לא תקף, ויש להיעזר במבחנים אחרים.

הוכחה. נוכיח כל סעיף.

תחילה, נניח כי הגבול $L \in [0, 1)$. לכן החל משלב מסוים:

$$\sqrt[n]{a_n} - L < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}L$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}L$$

$$a_n < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\right)^n$$

אבל, כיוון ש $0 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}L < 1$ אזי הטור $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\right)^n$ הוא טור הנדסי מתכנס, וע"כ ממבחן ההשוואה הראשון $\sum a_n$ מתכנס.

כעת, נחלק למקרים עבור גבול סופי ואין סופי.

נניח כי $L \in (1, \infty)$, לכן החל משלב מסוים:

$$\frac{1}{2} - \frac{L}{2} < \sqrt[n]{a_n} - L$$

ולכן:

$$\frac{1}{2} + \frac{L}{2} < \sqrt[n]{a_n}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{L}{2}\right)^n < a_n$$

אבל הרי הטור $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{L}{2}\right)^n$ הינו טור הנדסי, ומכיוון ש $\frac{1}{2} + \frac{L}{2} > 1$ הטור מתבדר, ולכן ממבחן ההשוואה הראשון נקבל הדרוש.

כמו כן, אם $L = \infty$, החל משלב מסוים מתקיים כי:

$$\sqrt[n]{a_n} > 2$$

$$a_n > 2^n$$

ובאופן דומה ממקודם, כיוון שהטור ההנדסי $\sum 2^n$ מתבדר, אזי גם $\sum a_n$ מתבדר. $\square$

הערה. שימו לב כי זוהי גרסה חלשה יותר של מבחן השורש. הגרסה החזקה יותר עוסקת בגבולות עליונים ($\overline{\lim}$), דבר שאינו נכלל בקורס שלנו.

משפט 1.20 (מבחן המנה). יהי טור חיובי $\sum a_n$. נניח כי הגבול $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים, נסמנו ב L. אזי:

- אם $0 \leq L < 1$ אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס.
- אם $1 < l \leq \infty$ אזי הטור $\sum a_n$ מתבדר.

הערה. אם $L = 1$ אזי המשפט לא עוזר, ויש להיעזר במבחן אחר.

הוכחה. נניח כי $L \in [0,1)$. לכן, כמו מקודם, החל משלב מסוים:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}L$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}L$$

כעת ניתן להכפיל במכנה (כי הסדרה חיובית) ונקבל כי:

$$a_{n+1} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\right) a_n$$

כעת קל לוודא באינדוקציה שלכל n, אחרי השלב הנתון k, מתקיים כי:

$$a_{n+1} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\right)^n a_k$$

והרי הטור ההנדסי מתכנס, וכפל בקבוע a_k לא ישפיע על התכנסות - ומכאן לפי מבחן ההשוואה הראשון נקבל הדרוש.

קצרה היריעה מלהוכיח את שאר המקרים, אך הם דומים מאוד לנ"ל וכן להוכחה במבחן השורש. $\square$

הערה. שימו לב כי זוהי גרסה חלשה יותר של מבחן המנה. הגרסה היותר חזקה עוסקת בגבולות עליונים ותחתונים ($\underline{\lim}, \overline{\lim}$), דבר שאינו נכלל בקורס שלנו.

הערה 1.21. שימו לב שהוכחנו בנוסף כי הוכחנו שבמקרה השני של שני המבחנים מתקיים כי $a_n \to \infty$ (חצי סנדוויץ'). לפיכך ברור כי לפי התנאי ההכרחי הטור יתבדר.

משפט 1.22 (מבחן האינטגרל). תהי פונקציה $f\left(x\right)$ חיובית, מונוטונית יורדת, ורציפה בקטע $[i,\infty)$. אזי הטור $\sum_{n=i}^{\infty}f(n)$ מתכנס אמ"מ האינטגרל הלא אמיתי $\int_{i}^{\infty}f(x)dx$ מתכנס.

הערה 1.23. האינטגרל הלא אמיתי $\int_{a}^{\infty}$ על פונקציה רציפה $f\left(x\right)$ מוגדר להיות:

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt=\lim_{x\to\infty}\left[F\left(t\right)\right]_{a}^{x}=\lim_{x\to\infty}F\left(x\right)-F\left(a\right)$$

כאשר F היא הקדומה של f.

הוכחה. כיוון ש f יורדת, אזי מתקיים לכל n טבעי כי:

$$\min_{[n,n+1]}f(x)=f(n+1)$$

$$\max_{[n,n+1]}f(x)=f(n)$$

כעת, מכיוון ש f חיובית מתקיים לכל n כי:

$$f(n+1)=f(n+1)\cdot(n+1-n)\leq\int_{n}^{n+1}f(x)dx\leq f(n)\cdot(n+1-n)=f\left(n\right)$$

שהרי אלו הם המלבן החוסם (צד ימין) והחסום (צד שמאל). כעת, מחוקי אינטגרלים:

$$\int_{i}^{n}f(x)dx=\int_{i}^{i+1}f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)dx$$

והרי:

$$\int_{i}^{i+1}f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)dx\leq f(i+1)+\cdots+f(n-1)=S_{n-1}\left(f(n)\right)$$

לכן ממבחן ההשוואה הראשון, אם הטור $\sum f(n)$ מתכנס, אזי גם $S_{n-1}\left(f(n)\right)$ מתכנס וביחד נקבל שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס אף הוא. זאת, עקב הכללת המשפטים הקודמים לאינטגרלים (אינטגרל לא אמיתי חיובי וחסום מתכנס).

באופן דומה, אם האינטגרל מתכנס, אזי:

$$S_{n}\left(f(n)\right)-f(1)\leq f(i+1)+\cdots+f(n)\leq\int_{i}^{i+1}f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)dx$$

לכן כיוון שהאינטגרל מתכנס, אזי הוא חסום ולכן לפי טענות קודמות הטור גם כן יתכנס, ובס"כ קיבלנו הדרוש. $\square$

הערה. למתמטיקאים יש משפט אחר במקומו, אשר הוא נקרה "מבחן העיבוי".

דוגמה 1.24 (הטור ההרמוני המוכלל). הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס $\Longleftrightarrow p > 1$.

הוכחה. תחילה, אם $p \leq 0$, אזי הסדרה $\frac{1}{n^p}$ שואפת לאינסוף ולכן הטור מתבדר.
אחרת, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^p}$ אכן חיובית, מונוטונית יורדת ורציפה בקטע $[1, \infty)$. נחשב לפי מבחן האינטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \left[-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} + \frac{1}{p(p-1)}$$

ואכן קל לוודא שהגבול קיים (וסופי) אמ"מ $p > 1$. $\square$

1.3 טורים כללים, התכנסות בהחלט ומבחן לייבניץ

נרצה לטפל בטורים כללים. לאו דווקא חיובים.

הגדרה 1.25 (התכנסות בהחלט). אומרים כי הטור $\sum a_n$ <u>מתכנס בהחלט</u> אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס.

הגדרה 1.26 (התכנסות בתנאי). אומרים כי הטור $\sum a_n$ <u>מתכנס בתנאי</u> אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אך הטור $\sum |a_n|$ מתבדר.

משפט 1.27. אם טור מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

הוכחה. יהי טור $\sum a_n$. נגדיר את סדרת האיברים החיוביים:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ואת סדרת האיברים השליליים:

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & a_n \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כעת, קל לוודא כי לכל n מתקיים כי $0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$. לכן כיוון שהטור $\sum |a_n|$ מתכנס, ממבחן ההשוואה הראשון גם הטורים $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ מתכנסים. כעת, כיוון ששני הטורים הללו מתכנסים, אזי כל צירוף שלהם מתכנס - ובפרט הטור:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^+ - \sum_{n=1}^\infty a_n^- = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

מתכנס. $\square$

הערה. שימו לב כי בנוסף מתקיים: $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.

טענה 1.28 (אי שוויון המשולש). יהי טור מתכנס בהחלט $\sum a_n$. אזי מתקיים כי:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

הוכחה. נביט בסס"ח של הטור $\sum |a_n|$:

$$S_n(|a_n|) = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

כעת, כיוון שזוהי כמות סופית של איברים, אזי הסס"ח של זו קטנה שווה מהביטוי:

$$|S_n(a_n)| = |a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| = S_n(|a_n|)$$

לכן כיוון ששתי הסדרות קטנות שוות אחת מן השנייה, וכן שתיהן מתכנסות - אזי הגבולות קטנים שווים בהתאמה. $\square$

כעת, כאשר הטור החיובי מתבדר, כיצד נוכל לבדוק התכנסות של הטור הרגיל? זאת ע"י מבחני דיריכלה ולייבניץ.

משפט 1.29 (מבחן דיריכלה). תהי סדרה a_n חיובית, מונוטונית יורדת, ושואפת ל0. כמו כן, תהי סדרה b_n כך שהטור $\sum b_n$ חסום. ז"א, קיים M כך שלכל n מתקיים כי $|S_n(b)| \leq M$. אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

משפט 1.30 (מבחן לייבניץ). תהי סדרה a_n חיובית, מונוטונית יורדת ושואפת ל0. אזי הטור $\sum (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס. בנוסף, הטור מתכנס למספר שהוא בין a_1 לבין 0. לרוב קוראים לטור כזה: טור לייבניץ

הערה 1.31. למעשה, מבחן לייבניץ הוא מקרה פרטי של מבחן דיריכלה. אך כיוון שמבחן דיריכלה הוצג רק בתרגול, אסתפק בהוכחה רק עבור מבחן לייבניץ.

הוכחה. נביט בתתי הסדרות הזוגיות והאי-זוגיות של הסס"ח:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n}$$

$$S_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1}$$

(שימו לב שהמשמעות של תתי הסדרות הללו היא כמה איברים סוכמים, לא איזה איברים סוכמים)
כעת, נשים לב כי הסדרה S_{2n} מונוטונית עולה. יהי n טבעי. אזי:

$$S_{2n+2}-S_{2n}=-a_{2n+2}+a_{2n+1}\geq 0$$

שהרי a_n מונוטונית יורדת. לכן $a_{2n+2}\leq a_{2n+1}$.
כמו כן, נשים לב כי הסדרה S_{2n-1} מונוטונית יורדת. יהי n טבעי. אזי:

$$S_{2n+1}-S_{2n-1}=a_{2n+1}-a_{2n}\leq 0$$

שכן הסדרה a_n מונוטונית יורדת ולכן $a_{2n}\geq a_{2n+1}$.
כמו כן, נשים לב כי לכל n מתקיים כי $S_{2n}\leq S_{2n-1}$. יהי n טבעי, אזי:

$$S_{2n}-S_{2n-1}=-a_{2n}\leq 0$$

ולכן נקבל כי:

$$0\leq a_1-a_2=S_2\leq S_{2n}\leq S_{2n-1}\leq S_1=a_1$$

עקב המונוטוניות של שתי הסדרות. כיוון שחסמנו את שתיהן, אזי S_{2n} וגם S_{2n-1} מתכנסות לגבול סופי (L_{2n-1},L_{2n}) אשר נמצא בין 0 לבין a_1. כעת, נשים לב כי:

$$S_{2n-1}-S_{2n}=a_{2n}$$

ולכן מחשבון גבולות נובע כי:

$$L_{2n-1}-L_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}-S_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$$

ומכאן $L_{2n-1}=L_{2n}$. מכאן כיוון שחילקנו את הסס"ח לשתי תתי-סדרות אשר מתכנסות לאותו הגבול, אזי כלל הסס"ח שואפת אף היא לאותו הגבול (משפט מאינפי 1 למתמטיקאים). □

מסקנה 1.32. קל להוכיח כי הטור $\sum(-1)^n a_n$ כאשר a_n חיובית מונוטונית יורדת שואפת לאפס מתכנס גם כן, וגם הוא טור לייבניץ.

נסכם את הפרק באלגוריתם שמתאר כיצד מסווגים טורים.

אלגוריתם 1.33 (אלגוריתם לבדיקת התכנסות של טור)**.** יהי טור $\sum a_n$. על מנת לקבוע האם הטור מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר, נבצע את השלבים הבאים:

1. (תנאי הכרחי) נבדוק האם $a_n\to 0$. אם לא, נפסיק ונקבע כי הטור מתבדר.
2. (טור חיובי) שמים ערך מוחלט על a_n, ובודקים התכנסות של הטור $\sum|a_n|$ בעזרת חמשת מבחני ספוק:
   (א) מבחן ההשוואה הראשון
   (ב) מבחן ההשוואה הגבולי

(ג) מבחן השורש

(ד) מבחן המנה

(ה) מבחן האינטגרל

אם הטור החיובי מתכנס, נפסיק ונקבע כי הטור מתכנס בהחלט.

3. (טור כללי) ננסה להיעזר במבחני דיריכלה ולייבניץ, או שנעבוד ישיר עם הסס"ח (כמו בטור טלסקופי). אם הצלחנו לקבוע כי הטור הזה מתכנס, נקבע כי הטור מתכנס בתנאי.

לא לשכוח את שני הטורים הידועים שיכולים לבוא לידי שימוש - הטור ההנדסי והטור ההרמוני המוכלל.

2 סדרות וטורי פונקציות

עד עכשיו דיברנו על סדרות - שאלו הלכה למעשה פונקציות למספר ממשי יחיד ($a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)
כעת, נדון בסדרות עם משתנה או פרמטר, מה שמוביל אותנו לעיסוק בפונקציה של פונקציות.
(בדידה רפרנס ☺)

2.1 סדרות של פונקציות, פונקציית הגבול

הגדרה 2.1 (סדרה של פונקציות)**.** סדרה של פונקציות היא $f_n(x) : \mathbb{N} \to D^{\mathbb{R}}$, עבור $D \subseteq \mathbb{R}$.
ז"א, אוסף של פונקציות על המשתנה x, אשר כולן מאוגדות ע"י מספר טבעי n.

שימו לב כי לכל x שנציב, נקבל סדרה בפני עצמה. המטרה שלנו היא לאחד את ההתנהגות של כל הסדרות הללו.

הגדרה 2.2 (פונקציית הגבול)**.** תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$. נגדיר את פונקציית הגבול $f(x)$ להיות:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

הגדרה 2.3 (תחום הגדרה של פונקציית הגבול)**.** תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$. תחום ההגדרה של פונקציית הגבול הינו אוסף כל ה-x כך שהגבול קיים וסופי.

הערה. שימו לב! בעת חישוב פונקציית הגבול, יש לחשב את הגבול לפי המשתנה n. x עבורנו פרמטר קבוע, בעת ביצוע החישוב.
כמו כן, יש לשים לב להתנהגות שונה עבור ערכי x שונים. זכרו, הוא פרמטר קבוע.

דוגמה. נביט בסדרת הפונקציות $f_n\left(x\right)=\sin^n\left(x\right)$. אזי פונקציית הגבול הינה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ \text{undefined} & x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

כאשר $k\in\mathbb{Z}$. זאת כיוון ש $\sin\left(x\right)$ חסומה בקטע $[-1,1]$. לכן יש לחלק למקרים: $1,-1$ או שאר המקרים (שבהם קל לטפל כמקשה אחת).

2.2 התכנסות במידה שווה, תכונות של התכנסות במידה שווה

כעת, כיוון שבפונקציות עסקינן, נרצה לדעת כיצד פעולות (כמו נגזרת ואינטגרל) על סדרת הפונקציות משפיעות על פונקציית הגבול. לפיכך, נצטרך לכלי חדש.

הגדרה 2.4 (התכנסות במידה שווה לפי קושי). תהי סדרת פונקציות $f_n\left(x\right)$ אשר שואפת לפונקציית הגבול $f\left(x\right)$ בקטע A. אזי נגיד כי הסדרה מתכנסת במידה שווה (במ"ש) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ טבעי מתקיים עבור כל $x\in A$:

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

במילים, סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש אם הפונקציות, החל משלב מסויים, נמצאות קרוב ככל שנרצה לפונקציית הגבול.

הגדרה 2.5 (התכנסות במידה שווה לפי היינה). תהי סדרת פונקציות $f_n\left(x\right)$ אשר שואפת לפונקציית הגבול $f\left(x\right)$ בקטע A. אזי נגיד כי הסדרה מתכנסת במ"ש אם מתקיים כי סדרת החסמים:

$$d_n=\sup_{x\in A}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|$$

מקיימת $d_n\to 0$.
במילים, ככל ש n גדול יותר, אזי המרחק בין הסדרה לפונקציית הגבול קטן.

סימון 2.6. כדי לומר כי הסדרה $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש בקטע A לפונקציית הגבול $f\left(x\right)$, רושמים:

$$f_n\left(x\right)\overset{A}{\rightrightarrows}f\left(x\right)$$

טענה 2.7. התנכסות במ"ש לפי קושי שקולה להתכנסות במ"ש לפי היינה. כלומר, סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש לפי קושי אמ"מ היא מתכנסת במ"ש לפי היינה.

הוכחה. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ אשר שואפת לפונקציית הגבול $f(x)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח כי היא מתכנסת במ"ש לפי היינה. צ"ל כי הסדרה מתכנסת במ"ש לפי קושי.
אכן, יהי $\varepsilon > 0$. לכן החל משלב מסויים N_0 מתקיים לכל $n > N_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| = d_n < \varepsilon$$

שכן $d_n \to 0$, ולכן מתקיים הנ"ל לפי הגדרת התכנסות של סדרות.

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח כי היא מתכנסת במ"ש לפי קושי. צ"ל כי סדרת החסמים שואפת ל0. נב"ש שהיא לא שואפת ל0. לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N_0 טבעי קיים $n > N_0$ עבורו:

$$\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת, לכל n שכזה, ניתן לקחת סדרת איברים מהקבוצה $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in A\}$ כך שתשאף לחסם העליון שלה (תרגיל לקוראים, אם כי לאודיסאה זה אכן היה תרגיל לבית). אבל, לפי ההתכנסות במ"ש לפי קושי כלל האיברים קטנים יותר מ $\frac{\varepsilon}{2}$, החל משלב מסוים (שנסמנו לצורך העניין n') לכן, עבור $n = n^*$, הטבעי שמקיים שהחסם העליון קטן מ $\frac{\varepsilon}{2}$ עבור n' מתקיים כי החסם העליון של הקבוצה הזו גם גדול מ $\frac{\varepsilon}{2}$ (לפי הנחת השלילה) וגם קטן מ $\frac{\varepsilon}{2}$ (לפי ההתכנסות לפי קושי). בסתירה.
$\square$

כיוון שההגדרה לפי קושי מסורבלת, ניתן ואף רצוי להשתמש בהגדרה לפי היינה. נסכם את השלבים לבדיקת התכנסות במ"ש של סדרת פונקציות:

אלגוריתם 2.8 (בדיקת התכנסות במ"ש). כדי לקבוע האם $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ נבצע את הבאים:

1. נחשב את פונקציית הגבול. בשלב זה x הינו פרמטר ו-n מושאף לאינסוף.
2. נחשב את סדרת החסמים (ראו לעיל). בשלב זה ה n קבוע ו-x נע בין ערכי הקטע A. לרוב חקירה עוזרת כאן.
$$d_n = \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|$$
3. בודקים האם $d_n \to 0$. אם כן, הסדרה מתכנסת במ"ש - אחרת לא.

שימו לב כי לא תמיד עושים את כל השלבים. ניתן לחסום את סדרת החסמים ולקבוע שהיא לא שואפת ל-0 מבלי לחשב אותה ממש.

כעת נשים לב למספר תכונות מעניינות של התכנסות במ"ש:

משפט 2.9. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ רציפות (ז"א, כל אחת מן הפונקציות רציפה בפני עצמה) בנקודה $x_0 \in A$. עוד נניח כי הסדרה מתכנסת במ"ש לפונקציית הגבול $f(x)$ בקטע הנ"ל. אזי הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה x_0.

הוכחה. צ"ל כי:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

נוכיח זאת לפי ההגדרה של קושי.
יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא סביבה של x_0 בה לכל x מתקיים כי $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. כעת:
כיוון ש $d_n \to 0$, החל משלב מסויים (נסמן ב N) מתקיים כי $\sup_{x\in A} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
לכן בפרט עבור x_0 מתקיים כי:

$$|f(x_0) - f_N(x_0)| \le \sup_{x\in A} |f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

כמו כן, כיוון ש f_N רציפה, אזי קיימת סביבה של x_0 בה לכל x מתקיים כי:

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

סה"כ מתקיים כי בסביבה זו:

$$|f(x) - f(x_0)| \overset{\text{WIN}}{=} |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \le$$
$$|f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| <$$
$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\square$

משפט 2.10. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$, אשר מתכנסת במ"ש בקטע זה לפונקציית הגבול $f(x)$. אזי:

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

הוכחה. לפי הגדרה, מתקיים כי:

$$d_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

לכן, לכל x בקטע ולכל n טבעי מתקיים עקב כך כי:

$$f_n(x) - f(x) \le d_n = |d_n|$$

כלומר:

$$-d_n \le f_n(x) - f(x) \le d_n$$
$$f(x) - d_n \le f_n(x) \le f(x) + d_n$$

נבצע אינטגרל מסוים $\int_b^a$ על שני הצדדים:

$$\int_a^b (f(x) - d_n)\,dx \le \int_a^b f_n(x)\,dx \le \int_a^b (f(x) + d_n)\,dx$$

(תרגיל לקוראים להוכיח כי אכן אי-השוויון נשמר, אם כי זהו אכן היה תרגיל לאודיסאה בממפיס1).

כעת, מחוקי אינטגרלים נקבל כי:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b d_n dx \le \int_a^b f_n(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b d_n dx$$

אבל, d_n לא תלוי ב-x ולכן האינטגרל המסוים הזה הינו (לפי המשפט היסודי של החדו"א):

$$\int_a^b d_n dx = [d_n]_a^b = d_n(b-a) \to 0$$

שכן $b-a$ קבוע, ואינו משפיע על התכנסות הסדרה. כלומר, האגף השמאלי והימני של אי השוויון שואפים לאותו הגבול ($\int_a^b f(x)\,dx$) ולכן ממשפט הסנדוויץ' נקבל שגם הסדרה $\int_a^b f_n(x)\,dx$ שואפת אל האינטגרל המסויים. □

הערה. שימו לב שהיינו צריכים את המשפט הקודם, שכן לא בהכרח פונקציית הגבול תהיה רציפה - ואז לא מובטח שפונקציית הגבול אינטגרבילית, לכאורה.

ראינו כי התכנסות של סדרה במ"ש לפונקציית הגבול $\Longleftarrow$ האינטגרלים על איברי הסדרה מתכנסים לאינטגרל על פונקציית הגבול. יפתיע, או אולי לא יפתיע שבנגזרות זה עובד הפוך (מדוע?)

משפט 2.11. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ גזירות, ובעלות נגזרות רציפות, כך שסדרת הנגזרות $f_n'(x)$ מתכנסת במ"ש בקטע $[a,b]$ לפונקציה אשר נסמנה כרגע כ- $g(x)$. עוד נניח כי סדרת הפונקציות המקורית $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציית הגבול $f(x)$ בנקודה a. אזי:

1. הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציית הגבול $f(x)$ בכל $[a,b]$. (התכנסות בקצה הקטע מעידה על התכנסות בכל הקטע).
2. פונקציית הגבול $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$, וכן מתקיים לכל x בקטע הנ"ל כי $f'(x) = g(x)$. (סדרת הנגזרות מתכנסת לנגזרת)

הוכחה. כיוון שסדרת הנגזרות $f_n'(x)$ רציפה ומתכנסת במ"ש בקטע $[a,b]$, אזי לכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי:

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt \to \int_a^x g(t)\,dt$$

ולכן לפי המשפט היסודי של החדו"א נקבל:

$$[f_n(t)]_a^x \to [G(t)]_a^x$$

(כאשר $G(t)$ היא הקדומה של $g(t)$).

$$f_n(x) - f_n(a) \to G(x) - G(a)$$

ומכיוון ש $f_n(a) \to f(a)$ (התכנסות בקצה הקטע) אזי ניתן לומר כי:

$$f_n(x) \to G(x) - G(a) + f(a)$$

מכאן ניתן להסיק כי לכל $x \in [a,b]$ הגבול של סדרת הפונקציות קיים והוא:

$$f(x) = G(x) - G(a) + f(a)$$

נגזור את שני הצדדים (לפי x) ונקבל:

$$f'(x) = G'(x) + 0 - 0 = g(x)$$

□

2.3 טורי פונקציות והתכנסות במ"ש של טורי פונקציות

כיוון שדיברנו על סדרות של פונקציות, ניתן גם להכליל את הרעיון של טורים לפונקציות! סכום אינסופי של פונקציות.

למעשה, מרבית ההגדרות והמשפטים דלעיל מתיישרים עם הרעיון של טורים רגילים - ולכן רק אציינן בקצרה:

הגדרה 2.12 (סס"ח של סדרת פונקציות)**.** תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות. נגדיר את הסס"ח של הסדרה:

$$S_n(f)(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

הגדרה 2.13 (טור פונקציות)**.** תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות. נגדיר את טור הפונקציות להיות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f)(x)$$

שימו לב כי לכל הצבה של x נקבל טור מספרים "רגיל"

הגדרה 2.14 (התכנסות של טור פונקציות)**.** יהי טור $\sum f_n(x)$. נגיד כי הטור מתכנס לפונקציה $S(x)$ אם:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = S(x)$$

אם לא קיימת פונקציה שכזו, נאמר כי הטור מתבדר.

הגדרה 2.15 (התכנסות של טור במ"ש)**.** יהי טור $\sum f_n(x)$. אומרים כי הטור מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$ לפונקציית הגבול $S(x)$ אם הסס"ח, $S_n(f)(x)$ מתכנסת במ"ש ל-$S(x)$. הסימון זהה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

כעת ניתן להשליך מהמשפטים שהוכחנו לגבי התכנסות במ"ש של סדרות של פונקציות, גם לטורים של פונקציות.

משפט 2.16. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ רציפות בנקודה $x_0 \in [a,b]$. עוד נניח כי הטור $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה $S(x)$ באותו הקטע. אזי $S(x)$ רציפה בנקודה x_0.

הוכחה. נשים לב כי הסס"ח של הטור הינה:

$$S_n(f)(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

ולכן אם כל הפונקציות הללו רציפות ב-x_0, אזי נובע כי הסס"ח גם כן בנקודה זו, שכן זהו צירוף של רציפות.

כמו כן, כיוון שהטור מתכנס במ"ש ל-$S(x)$, אזי הסס"ח מתכנס במ"ש ל-$S(x)$ ולפי המשפט דלעיל, גם $S(x)$ רציפה ב-x_0. □

משפט 2.17 (אינטגרציה איבר איבר). יהי טור פונקציות $\sum f_n(x)$ בו הפונקציות רציפות, כך שהטור מתכנס במ"ש בקטע A. אזי לכל $[a,b]\subseteq A$ מתקיים כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx$$

במילים, האינטגרל על הסכום האינסופי שווה לסכום אינסוף האינטגרלים. למעשה זוהי הכללה של כלל האדטיביות של האינטגרל - אשר מדבר על אינטגרל על סכום סופי של פונקציות.

הוכחה. נסמן את פונקציית הגבול של הטור כ- $S(x)$. כעת, לפי ההגדרה מתקיים כי:

$$S_n(f)(x)\overset{A}{\rightrightarrows}S(x)$$

כלומר:

$$\sum_{k=1}^{n}f_n(x)\overset{A}{\rightrightarrows}S(x)$$

לכן לפי משפטים קודמים נקבל כי:

$$\int_a^b\sum_{k=1}^{n}f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_a^b S(x)\,dx$$

אבל מכיוון שהסכום סופי, ניתן להשתמש בחוקי האינטגרלים ולקבל כי:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_n(x)\,dx\to\int_a^b S(x)\,dx$$

כעת ניתן לחזור לסימונים שלנו ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b S(x)\,dx$$

□

משפט 2.18 (גזירה איבר איבר). יהי טור פונקציות גזירות, ובעלות נגזרות רציפות $\sum f_n(x)$, כך שהוא מתכנס בנקודה a. עוד נניח כי טור הנגזרות, $\sum f_n'(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$. אזי:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$$

כמו כן, זה אומר שפונקציית הגבול אליה הטור $\sum f_n(x)$ מתכנס גזירה בקטע $[a,b]$.

הוכחה. ההוכחה דומה מאוד למשפט אינטגרציה איבר איבר, וע"כ אשאיר זאת כתרגיל לקוראים.
□

כעת, אנו יודעים כי קשה מאוד לרוב לחשב לאן טור מספרים רגיל מתכנס, ועל אחת כמה וכמה התכנסות של טור פונקציות. אנו רוצים לדעת על הטור תכונות, מבלי לדעת לאן הטור מתכנס - בדומה לטורי מספרים.

משפט 2.19 (מבחן ה- M של ויירשטראס). יהי טור פונקציות $\sum f_n(x)$ ויהי קטע A. נסמן את סדרת החסמים:

$$M_n = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$$

אזי, אם טור החסמים $\sum M_n$ מתכנס:

1. לכל $x \in A$, הטור מתכנס בהחלט.
2. הטור מתכנס במ"ש בקטע A.

הוכחה. תחילה, ברור כי אם טור החסמים מתכנס, אזי גם טור הפונקציות מתכנס, שכן לכל $x \in A$:

$$|f_n(x)| \le M_n$$

ולכן אם הטור $\sum M_n$, נובע ממבחן ההשוואה הראשון כי $\sum |f_n(x)|$ מתכנס - ומכאן שהוא מתכנס בהחלט.

כעת, נסמן את פונקציית הגבול ב-$S(x)$, שכן אנו יודעים כי הטור מתכנס. כעת, עלינו להוכיח כי סדרת החסמים שואפת ל0. כלומר:

$$d_n = \sup_{x\in A} |S_n(f)(x) - S(x)| \to 0$$

אבל, נשים לב כי:

$$\sup_{x\in A} |S_n(f)(x) - S(x)| = \sup_{x\in A} |S(x) - S_n(f)(x)| = \sup_{x\in A} \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\right|$$

$$= \sup_{x\in A} \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)\right|$$

והרי מאי-שוויון המשולש נובע כי:

$$\le \sup_{x\in A} \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n - \sum_{n=1}^{k} M_n \to 0$$

כיוון שהטור $\sum M_n$. לכן נקבל מחצי סנדוויץ' על הרצפה את הדרוש. □

3 טורי חזקות / טיילור

בממפי"ס 1 למדנו על פולינום טיילור, שהוא דרך לקרב פונקציות דרך פולינומים. כמובן שהקירוב אף פעם לא מדויק, כיוון שפולינום הוא סופי. אבל עכשיו, כשיש לנו את הכלים של טור חזקות - ניתן "לקרב" במדויק את הפונקציה.

3.1 הגדרה של טורי חזקות

הגדרה 3.1 (טור חזקות). טור חזקות סביב הנקודה a הוא טור פונקציות מהצורה:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n} = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots$$

כאשר a_n סדרה.

שאלות שעולות מיידית מההגדרה הן, מתי הטור מתכנס.

מסקנה 3.2. טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ מתכנס לכל היותר בנקודה $x=a$. שם, הטור מתכנס לערך a_0.

הוכחה. הצבת $x=a$ בטור תגרום לכלל האיברים להיות 0, למעט האיבר הראשון - שהוא a_0. לפיכך ברור שהטור יתכנס ל a_0. □

טענה 3.3. יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ ויהי x_0 עבורו הטור מתכנס. אזי לכל x המקיים כי $|x-a| < |x_0-a|$, טור החזקות מתכנס בהחלט.

הוכחה. ניעזר בעיקרון WIN:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (x_0-a)^n \cdot \frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (x_0-a)^n \cdot \left(\frac{x-a}{x_0-a} \right)^n \right|$$

אבל, כיוון שהטור $\sum a_n (x-a)^n$ מתכנס, מהתנאי ההכרחי נובע כי $a_n (x_0-a) \to 0$ ולכן החל משלב מסויים (נסמנו ב k) הסדרה תהא קטנה מ1 (בערך מוחלט). כעת, כיוון ששינוי מספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות, אזי נסתכל על הפונקציות ונשים לב כי:

$$|a_n (x_0-a)^n| \cdot \left(\frac{x-a}{x_0-a} \right)^n \le \left(\frac{x-a}{x_0-a} \right)^n$$

אבל הטור $\sum \left(\frac{x-a}{x_0-a} \right)^n$ הוא טור הנדסי מתכנס (המנה קטנה מאחד לפי הנתונים) ולכן גם הטור המקורי מתכנס.

הערה: שימו לב כי אכן היה מותר לחלק ב $x_0 - a$, שכן אז לא היה קיים x כנ"ל, אבל אז הטענה הייתה נכונה באופן ריק, שכן הטור מתכנס עבור $x=a$. □

טענה 3.4. יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ ויהי x_0 עבורו טור החזקות מתכנס. אזי, לכל x המקיים כי $|x-a| < |x_0-a|$ מתקיים כי טור הנגזרות:

$$\sum_{n=\mathbf{1}}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1}$$

מתכנס בהחלט.

הוכחה. די דומה להוכחה שלמעלה, רק שה- WIN יהיה:

$$n a_n (x-a)^{n-1} = a_n (x_0-a)^n \cdot \frac{n (x-a)^{n-1}}{(x_0-a)^n}$$

וקל להוכיח באמצעות מבחן המנה כי הטור לעיל מתכנס. □

טענה 3.5. יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ ויהי x_0 עבורו טור החזקות מתכנס. אזי לכל x המקיים כי $|x-a| < |x_0-a|$ טור האינטגרלים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^n$$

מתכנס בהחלט.

הוכחה. די דומה להוכחות הקודמות - ואשאיר זאת כהוכחה עבור הקוראים. □

3.2 רדיוס התכנסות, נוסחאות המנה והשורש

כמסקנה מהחלק הקודם, ניתן להגדיר:

הגדרה 3.6 (רדיוס התכנסות)**.** יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$. נגדיר את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות:

$$R = \sup\left\{|x-a| \mid \sum a_n (x-a)^n \text{ converges}\right\}$$

שימו לב, שאם $R=\infty$, אזי הטור מתכנס בהחלט בכל הממשיים, ואם $R=0$ אזי הטור מתכנס בנקודה אחת ויחידה - $x=a$.

מסקנה 3.7. לכל x המקיים $|x-a|<R$ הטור מתכנס בהחלט, ולכל x המקיים כי $|x-a|>R$ הטור מתבדר.

הוכחה. 1. כיוון ש $|x-a|<R$ אזי ישנו x_0 כך שהטור מתכנס עבורו וכן $|x-a|<|x_0-a|$ ולכן לפי הטענה דלעיל נקבל הדרוש.

2. טריוויאלי לפי הגדרה. □

הערה 3.8. **שימו לב!** עבור $\pm R$ אין המשפט מבטיח לגבי התכנסות. יש להציב ולבדוק ממש האם עבורם הטור מתכנס או לאו.

כעת, נרצה דרך לחשב את רדיוס ההתכנסות בצורה נוחה לכל נפש. איזה מזל שיש כזו. אפילו כמה דרכים.

משפט 3.9 (נוסחת השורש)**.** רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n (x-a)^n$ מקיים כי:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

בהנחה שהגבול קיים. כמו כן, אם הגבול הוא 0, אזי רדיוס ההתכנסות הוא ∞, ואם הגבול הוא ∞ אזי רדיוס ההתכנסות הוא 0.

הערה 3.10. לרוב, ייתכן שלסדרה a_n אין גבול, כיוון שחלק מן האיברים יהיו 0. לכן, ניתן לקחת את כל האיברים שאינם אפסים, ז"א שהטור יהיה מהצורה:

$$\sum a_n (x-a)^{b_n}$$

כאשר b_n סדרת אינדקסים (סדרה מונוטונית עולה ממש, בה כל האיברים טבעיים), ואז רדיוס ההתכנסות יקיים:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[b_n]{|a_n|}}$$

זאת, כיוון שההגדרה המדויקת יותר היא עם גבולות עליונים, דבר שאינו נכלל במסגרת קורס זה.

משפט 3.11 (נוסחת המנה). רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n (x-a)^n$ מקיים כי:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

בהנחה שהגבול קיים

הוכחה. נוכיח את נוסחת המנה בלבד. ההוכחה של מבחן השורש זהה.
נסמן את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

ונניח כי הוא סופי ואינו 0. תרגיל לקוראים להוכיח את המקרים האחרים.
כעת, נבצע את מבחן המנה על טור החזקות בערך מוחלט:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n (x-a)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-a| = L|x-a|$$

וכעת, אם $|x-a| < \frac{1}{L}$, אזי גבול המנה מקיים כי:

$$L|x-a| < L \cdot \frac{1}{L} = 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל x שמקיים את התנאי לעיל. אחרת, אם $|x-a| > \frac{1}{L}$ הטור מתבדר, ומכאן ממש לפי ההגדרה בהכרח מתקיים כי $R = \frac{1}{L}$ כנדרש. □

3.3 התכנסות במ"ש של טורי חזקות

ראינו כי רדיוס ההתכנסות R נותן מידע על התכנסות הטור. מה לגבי התכנסות במ"ש?

טענה 3.12. יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ עם רדיוס התכנסות $R > 0$. אזי לכל r המקיים $0 < r < R$, הטור מתכנס במ"ש בקטע $[a-r, a+r]$.

הוכחה. נשים לב כי בנקודה $x = a + r$, טור החזקות מתכנס בהחלט, שכן $|x-a| = r < R$.
לפיכך, מתקיים לכל $x \in [a-r, a+r]$ כי:

$$a - r \le x \le a + r$$

$$-r \le x - a \le r$$

$$|x-a| \le r$$

ולכן $r = \sup \{|x-a| \mid x \in x \in [a-r, a+r]\}$ (max למען האמת, אבל לא משנה להוכחה).
מכאן, כיוון ש:

$$|a_n (x-a)^n| \le |a_n r^n|$$

וכן מכיוון הטור הזה מתכנס (הצבה בטור החזקות), ממבחן ה-M של ויירשטראס נקבל הדרוש.
□

כעת, מכלל הטענות לעיל נגיע לכמה משפטים חשובים:

משפט 3.13 (גזירה ואינטגרציה איבר איבר של טורי חזקות)**.** יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ אשר מתכנס לפונקציית הגבול $f(x)$ בתחום ההתכנסות $R > 0$. אזי לכל x המקיים כי $|x-a| < R$:

1. מתקיים כי:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

2. מתקיים כי:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

הערה: אכן נקבל מהמשפט כי אכן פונקציית הגבול גזירה ואינטגרבילית.

הוכחה. הוכחנו בחלק הקודם כי גם לטור הנגזרות וגם לטור האינטגרלים אותו רדיוס התכנסות. לפיכך, כיוון ש $R > 0$, אזי בכל תת קטע סגור $[a-r, a+r]$ הטור מתכנס במ"ש. לפיכך גם טור הנגזרות וגם טור האינטגרלים מתכנס במ"ש בכל תחום שכזה. לבסוף, כיוון שהפונקציות פולינומאליות שבטור רציפות, וכן שני הטורים מתכנסים בקצה הקטע (שכן הם מתכנסים לכל נקודה בקטע הסגור דלעיל) אזי אכן נקבל שטור הנגזרות מתכנס לנגזרת, וכן טור האינטגרלים מתכנס לאינטגרל המסוים, כפי שהוכחנו קודם לכן. $\square$

נסכם את כלל המשפטים החשובים שהצגנו לעיל:

סיכום 3.14. יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ בעל רדיוס התכנסות $R > 0$.

1. לכל $x \in (a-R, a+R)$ הטור מתכנס (יש להציב ולבדוק התכנסות בקצוות בנוסף). אם $R = 0$ אזי הטור מתכנס בנקודה אחת ויחידה: $x = a$.

2. לכל רדיוס קטן יותר $0 < r < R$, לכל $x \in [a-r, a+r]$ הטור מתכנס במ"ש.

3. אינטגרציה וגזירה איבר איבר על הטור לא משפיעה על רדיוס ההתכנסות (וכן ההתכנסות במ"ש).

3.4 קיום ויחידות טור טיילור וטורי טיילור ידועים

כעת אנו מוכנים ומזומנים למשפט המרכזי של הפרק:

משפט 3.15 (קיום ויחידות טור טיילור)**.** יהי טור חזקות $\sum a_n (x-a)^n$ בעל רדיוס התכנסות $R > 0$. נסמן את פונקציית הגבול שלו ב $f(x)$. אזי מתקיים כי טור החזקות הוא טור טיילור. ז"א, סדרת המקדמים הינה:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

הוכחה. לפי הנתונים, מתקיים כי:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

קל להוכיח באינדוקציה כי לכל n:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k k!\,(x-a)^{k-n}$$

זאת עקב גזירה איבר איבר. לפיכך, עבור n כלשהו, נציב $x=a$ בטור ונקבל:

$$f^{(n)}(a)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k k!\,(a-a)^{k-n}$$

כעת, כלל האיברים מתאפסים, פרט עבור החזקה 0, כלומר כאשר $k=n$ (כן, הרגע אמרתי זאת: $0^0=1$). לפיכך נקבל:

$$f^{(n)}(a)=a_n n!$$

ולבסוף:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

□

סימון 3.16. כעת, כיוון שהראנו כי כל טור חזקות שמתכנס, מקדמיו הם מקדמי טיילור - לעיתים נקרא לטורי חזקות טורי טיילור.
כמו כן, לעיתים קוראים לטורי טיילור אשר מפותחים סביב הנקודה $a=0$ טורי מקלורן.

הערה 3.17. שימו לב שהוכחנו כי אם טור מתכנס (עם רדיוס התכנסות חיובי), אזי הוא בהכרח טור הטיילור של פונקציית הגבול. אבל ההפך אינו נכון. לא בהכרח טור הטיילור של פונקציה שווה לה. להלן דוגמה נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

הקוראים מוזמנים להראות כי טור הטיילור הינו הקבועה 0, אך אינו שווה באף נקודה אחרת ל f.

נסיים את הפרק במספר טורים חשובים ואלגוריתמים לפתרון בעיות בעזרת טורי טיילור.

דוגמה 3.18 (הטור ההנדסי כטור טיילור). ניתן לחשוב על הטור ההנדסי $\sum x^n$ כעל טור חזקות (סביב הנקודה $a=0$). שימו לב כי קל לוודא שרדיוס ההתכנסות שלו הינו 1 וכן הטור אינו מתכנס בקצוות. לפיכך תחום ההתכנסות שלו הוא $(-1,1)$ ובאמת אכן שם מוגדרת פונקציית הגבול:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

דוגמה 3.19 (טור הטיילור של e^x). נביט בטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

קל לוודא כי $R=\infty$. לכן הטור מתכנס בכל הממשיים. כעת, נסמן את פונקציית הגבול ב-f. לכן:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

שכן ניתן להציב $k=n-1$ ואז לחזור למשתנה n.
מכאן שפונקציית הגבול מקיימת את המד"ר (משוואה דיפרנציאלית רגילה) לעיל בכל הממשיים:

$$f'(x)=f(x)$$

ישנם מספר דרכים לפתור את ה הזו. אבחר באחת מהן (שהיא הכי אינטואיטיבית).
ניחוש מושכל לפתרון המד"ר הוא e^x. לפיכך, נסתכל על הביטוי:

$$\left(\frac{f}{e^x}\right)'=\frac{f'e^x-e^xf}{e^{2x}}=\frac{0}{e^{2x}}=0$$

כלומר המנה היא קבועה:

$$\frac{f}{e^x}=C$$

ולכן בסה"כ:

$$f(x)=Ce^x$$

כעת, נציב $x=0$ ונקבל:

$$f(0)=C$$

אבל זהו טור החזקות! הצבת 0 בטור $\sum\frac{x^n}{n!}$ מאפסת את כלל האיברים למעט האיבר הראשון - שהוא 1. לפיכך $C=1$ ומכאן נקבל את טור הטיילור של האקספוננט:

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

דוגמה 3.20 (טור הטיילור של ln)**.** נביט בטור ההנדסי:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

נציב $-x$ במקום x (ונשים לב כי תחום ההתכנסות אינו מושפע) ונקבל:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

נבצע אינטגרציה על שני הצדדים ונקבל:

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt$$

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

כאשר תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$

דוגמה 3.21 (טור הטיילור של arctan). נביט שוב בטור ההנדסי שוב:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

נציב בטור $-x^{2}$ ונקבל (נשים לב כי תחום ההתכנסות נשאר זהה):

$$\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{2n}$$

נבצע אינטגרציה על שני הצדדים ונקבל:

$$\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{2}}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{x}\left(-1\right)^{n}t^{2n}dt$$

$$\boxed{\arctan\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

כאשר רדיוס ההתכנסות הוא $\left(-1,1\right)$.

דוגמה 3.22 (טור הטיילור של sin). נרצה למצוא את טור הטיילור של $\sin\left(x\right)$. כמובן שנרצה לפתחו לצורך הנוחות סביב הנקודה $x=0$. לפי המשפט הקיום והיחידות, המקדמים של טור הטיילור הם הנגזרות ב0 חלקי העצרת.
מכאן קל להוכיח באינדוקציה כי:

$$\left(\sin\left(x\right)\right)^{(n)}=\begin{cases}\sin\left(x\right) & n\bmod 4=0\\ \cos\left(x\right) & n\bmod 4=1\\ -\sin\left(x\right) & n\bmod 4=2\\ -\cos\left(x\right) & n\bmod 4=3\end{cases}$$

ומכאן ניתן להסיק כי טור הטיילור של סינוס הינו:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

כל שנשאר להוכיח הוא שהטור מתכנס. נוכיח זאת למען האמת בצורה אלגנטית ונחמדה. יהי $x\in\mathbb{R}$. צ"ל כי:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^{i}\frac{x^{2i+1}}{\left(2i+1\right)!}=\sin\left(x\right)$$

או בצורה שקולה:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^{i}\frac{x^{2i+1}}{\left(2i+1\right)!}-\sin\left(x\right)=0$$

שימו לב כי למעשה, הסס"ח של טור החזקות הוא פולינום טיילור! כלומר צריך להוכיח כי:

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n+1}\left(\sin\left(x\right),0\right)\left(x\right)-\sin\left(x\right)=0$$

אבל זוהי בדיוק ההגדרה של השגיאה! לכן ממשפט שארית טיילור בצורת לגראנז', קיים איזשהו $0 < c < x$ (או ההפך אם x שלילי) כך ש:

$$\left|R_{2n+1}\left(\sin\left(x\right),0\right)\left(x\right)\right| = \left|\frac{\left(\sin\left(x\right)\right)^{(n)} x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

שכן הראינו כי כלל הנגזרות של sin הם $\pm\sin, \pm\cos$ שחסומות ע"י אחד. קל להוכיח בעזרת מבחן המנה ומסדר גודל כי:

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$$

וע"כ הוכחנו הדרוש. מכאן נסיק כי:

$$\boxed{\sin\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

דוגמה 3.23 (טור הטיילור של cos)**.** באופן די דומה למקודם, ניתן להוכיח כי טור הטיילור של פונקציית cos הינה:

$$\boxed{\cos\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

סיכום 3.24 (מציאת טורי טיילור של פונקציות). תהי פונקציה f הגזירה אינסוף פעמים סביב נקודה מסוימת. כיצד נוכל לקבוע מהו טור הטיילור שלה? וכן להפך, בהנתן טור טיילור, כיצד נוכל לקבוע לאיזו פונקציה הטור מתכנס?

- להציב בטורים ידועים ערכים על מנת להגיע לתוצאה הרצוייה. שימו לב כי בכל הצבה יש לפרט על תחום ההתכנסות ותחום ההגדרה (אם מחלקים ב x, למשל). כך עשינו כאשר חישבנו את טור הטיילור של $\ln, \arctan$.
- לבטא את הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה, ולחשב ידנית את רדיוס ההתכנסות. כך עשינו כאשר חישבנו את טור הטיילור של $\sin, \cos$.

3.5 הערכת שגיאות של קירובי טורים

נציג דרך מסודרת ורחבה להערכה לקירובים של טורים בכלל וטורי טיילור בפרט.

הגדרה 3.25 (קירוב של טור)**.** יהי טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. אזי <u>הקירוב מסדר k</u> של הטור יהיה הסכום החלקי:

$$\sum_{n=0}^{k-1} a_n$$

הגדרה 3.26 (שגיאה של קירוב)**.** יהי טור $\sum a_n$ עם קירוב מסדר k. אזי <u>השגיאה מסדר k</u> מוגדרת להיות:

$$R_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

כעת נציג מספר דרכים להעריך ולחסום את השגיאה:

סיכום 3.27 (דרכים לחסימת שגיאה). יהי טור $\sum a_n$, אשר יכול להיות תלוי במשתנה, ואם כן נסמנו x.

שארית טיילור בצורת לגראנז': אם הטור הוא טור טיילור, ז"א מהצורה $\sum a_n \left(x-a\right)^n$, ונסמן את פונקציית הגבול של הסכום $f\left(x\right)$, ורוצים להעריך שגיאה של קירוב מסדר k, ניתן להיעזר במשפט שארית טיילור בצורת לגראנז'. השגיאה מקיימת:

$$\left|R_k\left(f\right)\left(x\right)\right| = \left|\frac{f^{(k)}\left(c\right)\left(x-a\right)^{k+1}}{\left(k+1\right)!}\right|$$

כאשר $c \in \left(x-a, x+a\right) \setminus \{0\}$.

טור לייבניץ: אם הטור הוא טור לייבניץ ($a_n = \left(-1\right)^n b_n$, כאשר b_n חיובית מונוטונית שואפת לאפס), אזי השגיאה מקיימת:

$$\left|R_k\right| \leq \left|a_k\right|$$

שכן טור הלייבניץ $\sum a_k = \sum \left(-1\right)^k b_k$ מתכנס למספר בין 0 ל-a_k.

טור הנדסי: אם הטור חסום ע"י טור הנדסי מתכנס, ז"א, קיימים $c, \in \mathbb{R}$ וכן $q \in \left(-1,1\right)$ עבורו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot q^n$$

אזי מתקיים כי:

$$\left|R_k\right| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n \leq c\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \sum_{n=0}^{k-1} q^n\right) = c\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1-q^k}{1-q}\right) = \frac{c \cdot q^k}{1-q}$$

בכדי למצוא את הקירוב, סוכמים עד האיבר עבורו החסם הרצוי מתקבל על השגיאה.

4 מבוא לפונקציות מרובות משתנים

הערה: החל מחלק זה והלאה אין הסיכום יהיה מתמטי כדי הצורך, שכן בשביל להגדיר את המושגים באופן פורמלי, יש להיעזר בקורסים מתמטיים כמו טופולוגיה, וחשבון אינפיטסימלי 3 ו- 4. לפיכך, אנסה כמה שאפשר לתת את רעיון ההוכחות או סקירה.

עד כה עסקנו בחדו"א במשתנה אחד. הפונקציה שלנו הייתה בשני צירים, x, y והכל היה יפה.
אבל, עכשיו אנחנו בשלושה צירים! פונקציה על שני משתנים: $z = f\left(x,y\right)$. אפילו יותר!
מן הסתם, נרצה את הכלים של גבולות, נגזרות ואינטגרלים מסיבות ברורות (ובפרט רעיונות פיזיקליים).
אך קודם לכן, עלינו להכיר (ולהיזכר) מושגים בסיסים על מנת להתחיל להבין פונקציות שכאלה.

4.1 פונקציות בשתי משתנים + דוגמאות

הגדרה 4.1 (פונקציה ב n משתנים). פונקציה ב - n משתנים היא: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
בפרט, פונקציה ב 2 משתנים היא: $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

הערה. שם נוסף לפונקציות מהצורה הזו היא פונקציה סקלרית.

הגדרה 4.2 (פונקציה וקטורית). פונקציה וקטורית היא פונקציה $\vec{v}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

הערה. שם נוסף לפונקציות וקטוריות הוא העתקה.
כמו כן, פונקציה וקטורית $r: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ נקראת מסילה.
הרעיון של מסילה היא שניתן לייצגה ע"י:

$$r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

פיזיקלית, מסילה מתארת תנועה של חלקיק בצירים השונים. אעיר כי צורה זו נקראת פרמטריזציה.

בקורס זה ניעזר בסוגים מיוחדים של פונקציות, אשר נעסוק בהם כאן:

הגדרה 4.3 (מישור ב-$\mathbb{R}^3$). מישור היא פונקציה בשני משתנים מהצורה:

$$f(x, y) = Ax + By + C$$

כאשר $A, B, C \in \mathbb{R}$ ולא כולם אפס. למעשה זוהי הכללה של מושג הישר ב $\mathbb{R}^2$.
צורה שקולה למישור היא (תרגיל לקוראים להוכיח כי זו אכן צורה שקולה למישור):

$$\{(x, y, z) \mid A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\}$$

עבור $A, B, C \in \mathbb{R}$ ולא כולם אפס. לעיתים נהוג לסמן $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ ולקבל צורה שקולה:

$$Ax + By + Cz = D$$

אעיר כי צורה זו נפוצה לשימוש כאשר רוצים למצוא מישור שעובר בנקודה מסויימת.

הגדרה 4.4 (נורמל). יהי מישור מהצורה:

$$Ax + By + Cz = D$$

נגדיר את הנורמל של המישור להיות הוקטור (A, B, C).

סימון. סימונים נפוצים של נורמל הם האותיות: $N, n, \widehat{N}, \widehat{n}$.

טענה 4.5. כל נקודה במישור ניצבת לנורמל.

הוכחה. יהי מישור $Ax + Bx + Cz + D = 0$, ותהי נקודה במישור (x, y, z). נזכור כי צורה שקולה לכתיבת המישור היא:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

אבל נשים לב כי מדובר במכפלה סקלרית:

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ומלינאריות של המכפלה הסקלרית:

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (A, B, C) \cdot (x, y, z) + D = -D + D = 0$$

$\square$

מסקנה 4.6. ניתן לייצג כל מישור בעזרת הנורמל שלו ונקודה D: אוסף כל הנקודות $v \in \mathbb{R}^3$ שמקיימות:

$$N \cdot v + D = 0$$

טענה 4.7 (מרחק בין נקודה למישור). יהי מישור $Ax + By + Cz + D = 0$ ונקודה $p = (x_0, y_0, z_0)$. אזי המרחק בין הנקודה למישור הוא:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

הוכחה. נסמן תחילה את המישור בצורה:

$$S \coloneqq A\left(x - x'\right) + B\left(y - y'\right) + C\left(z - z'\right) = 0$$

כמו כן, נשים לב כי המרחק הוא למעשה אורך ההיטל של וקטור הקטע בין הנקודות p לבין $A = (x', y', z')$, על הנורמל.

לפיכך:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{pA} \cdot N\right|}{|N|}$$

(ערך מוחלט מכיוון שמרחק תמיד חיובי). נפתח:

$$= \frac{\left|(x_0 - x', y_0 - y', z_0 - z') \cdot (A, B, C)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|A\left(x_0 - x'\right) + B\left(y_0 - y'\right) + C\left(z_0 - z'\right)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax' + By' + Cz')\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

□

הגדרה 4.8 (מצב הדדי בין מישורים)**.** יהיו S_1, S_2 מישורים. אזי:

- המישורים נקראים <u>מתלכדים</u> אם הם זהים לחלוטין (כל נקודה על האחד נמצאת על השני) ומסמנים: $S_1 \equiv S_2$
- המישורים נקראים <u>מקבילים</u> אם הם מתלכדים או שאין להם אף נקודה משותפת (ז"א הנורמלים שלהם מקבילים, תרגיל לקוראים) ומסמנים: $S_1 \parallel S_2$
- המישורים נקראים <u>נחתכים</u> אם הם מתלכדים או שאוסף כל הנקודות המשותפות מהווה ישר
- המישורים נקראים <u>ניצבים</u> אם הם נחתכים ויוצרים זווית של 90° ביניהם (ז"א הנורמלים שלהם ניצבים, תרגיל לקוראים) ומסמנים: $S_1 \perp S_2$

הגדרה 4.9 (מרחק בין מישורים)**.** יהיו S_1, S_2 מישורים. אזי:

- אם $S_1 \parallel S_2$ וגם המישורים אינם מתלכדים, אזי המרחק בין שני המישורים הוא <u>המרחק בין נקודה שנמצאת על מישור אחד למישור השני</u>. כיוון שהמישורים מקבילים, בחירת הנקודות לא משנה, והמרחק יישאר זהה. טענה זו הושארה להוכחה לקוראים.
- בכל שאר המקרים, המרחק מוגדר להיות 0 (כי יש חיתוך, ואז המרחק המינימלי הוא 0).

טענה 4.10 (זווית בין מישורים). יהיו מישורים:

$$\begin{cases} S_1 := N_1\overrightarrow{x} + D_1 = 0 \\ S_2 := N_2\overrightarrow{x} + D = 0 \end{cases}$$

אזי הזווית בין שני המישורים הינה:

$$\theta = \arccos\left(\frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| \cdot |N_2|}\right)$$

(כאשר מדובר בזווית החדה מבין שתי הזוויות הנוצרות)

הוכחה. נביט במרובע הנוצר מהמפגש בין הנורמלים של שני הישרים ומפגש של ישרים על שני הישרים.

סכום הזוויות במרובע הוא בוודאי 360°. אבל, כיוון שהנורמלים ניצבים, נקבל שסכום הזוויות הנותרות (הזווית בין המישורים ובין הנורמלים), לפיכך הזווית המבוקשת היא 180° פחות הזווית בין הוקטורים - אך מזהויות טריגונומטריות אין זה משפיע על ה $\cos$ שבחישוב הזווית בין שתי הוקטורים. $\square$

נעבור לדבר על ישר.

הגדרה 4.11 (ישר ב-$\mathbb{R}^3$). ישר העובר בנקודה r_0 בכיוון הווקטור $\vec{A}$ הוא אוסף של נקודות ב-$\mathbb{R}^3$ שמקיימות:

$$\left\{\overline{r} \in \mathbb{R}^3 \middle| \overline{r} = r_0 + t\vec{A}\right\}$$

הערה. אם נסמן: $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, וכן $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ אזי ניתן לרשום את $\overline{r}$ מההגדרה כך:

$$\overline{r} = (x_0 + tA_x, y_0 + tA_y, z_0 + tA_z)$$

טענה 4.12 (צורה אלגברית של ישר). תהי נקודה $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ויהי וקטור כיוון $\vec{A} = (a, b, c)$. אזי צורה שקולה לישר העובר בנקודה r_0 ובכיוון הוקטור A הוא:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\right\}$$

הוכחה. לפי ההערה הקודמת, כל נקודה $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ שנמצאת על הישר מקיימת:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

מכולם ניתן לבטא את t ולקבל:

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{a} \\ t = \frac{y - y_0}{b} \\ t = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

ומכאן נקבל הדרוש. $\square$

טענה 4.13 (מרחק בין נקודה לישר). יהי ישר ℓ העובר בנקודה $r_0 = (x', y', z')$ ובעל וקטור כיוון $\overrightarrow{v}$. כמו כן, תהי נקודה $p = (x_0, y_0, z_0)$. אזי המרחק בין הישר לנקודה הינו:

$$d = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{r_0 p}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

הוכחה. ראשית, נשים לב כי אנו מחפשים את המרחק המינימלי, והוא יהיה אורך הוקטור המחבר בין הנקודה p לנקודה על הישר כך שיהא מאונך לישר. כיצד נמצא וקטור זה? אם נעביר את הקו המאונך המבוקש, וכן מספר קטעים נוספים, ניתן לקבל מקבילית שצלע אחת שלה היא וקטור הכיוון, וצלע נוספת שהנקודה p נמצאת עליה - כך שהאנך הוא גובה המקבילית. אבל שטח המקבילית הוא:

$$S = d \cdot |\overrightarrow{v}|$$

אבל נזכור כי:

$$S = |\vec{v} \times \overrightarrow{r_0 p}|$$

שכן גודל המכפלה הוקטורית מהווה את השטח של המקבילית הנפרשת בניהם. לפיכך, ניתן להעביר אגפים ולקבל:

$$d = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{r_0 p}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

□

הגדרה 4.14 (מצב הדדי בין ישרים). יהיו ℓ_1, ℓ_2 ישרים. אזי:

- הישרים נקראים <u>מתלכדים</u> אם הם זהים לחלוטין (כל נקודה על האחת נמצאת על האחרת). מסמנים: $\ell_1 \equiv \ell_2$
- הישרים נקראים <u>מקבילים</u> אם וקטורי הכיוון של שני הווקטורים מקבילים. מסמנים: $\ell_1 \parallel \ell_2$
- הישרים נקראים <u>נחתכים</u> אם הם נפגשים בנקודה אחת בלבד.
- הישרים נקראים <u>מצטלבים</u> אם הם אינם מתלכדים, אינם מקבילים ואינם נחתכים.

הגדרה 4.15 (מרחק בין ישרים). יהיו ℓ_1, ℓ_2 ישרים. אזי:

- אם $\ell_1 \equiv \ell_2$ או ℓ_1, ℓ_2 נחתכים, המרחק בינהם מוגדר להיות 0 (כי יש חיתוך)
- אם $\ell_1 \parallel \ell_2$ וגם $\ell_1 \not\equiv \ell_2$, אזי המרחק ביניהם מוגדר להיות מרחק בין נקודה אחת על הישר האחד לישר השני. תרגיל לקוראים הוא להוכיח שאכן לכל נקודה שנבחר המרחק יהיה שווה.
- אם ℓ_1, ℓ_2 מצטלבים, ונסמנם:

$$\begin{cases} \ell_1 := \overrightarrow{a} + t_1 \overrightarrow{v} \\ \ell_2 := \overrightarrow{b} + t_2 \overrightarrow{u} \end{cases}$$

אזי המרחק יוגדר להיות המרחק בין המישור $S := \overrightarrow{a} + t_1 \overrightarrow{v} + t_2 \overrightarrow{u}$ (שמכיל את ℓ_1 ומקביל ל ℓ_2) לישר ℓ_2.

טענה 4.16 (זווית בין שני ישרים). יהיו שני ישרים:

$$\begin{cases} \ell_1 := \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v} \\ \ell_2 := \overrightarrow{p_0} + t\overrightarrow{u} \end{cases}$$

אזי הזווית בין שני הישרים הינה:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{u}|}\right)$$

הוכחה. הזווית בין הישרים תלויה באופן ישיר באיזה כיוון הם מתקדמים, ולפיכך הזווית של כלל הישר תהיה הזווית בין וקטורי הכיוון, שכן הם ורק הם משפיעים על הזווית ממש. $\square$

הערה. קל לוודא כי אם הישרים מתלכדים או מקבילים, הזווית הינה 0.

לסיום, נדבר על הסתכלות של ישר ומישור.

הגדרה 4.17 (מצב הדדי בין ישר ומישור). יהי ישר ℓ ויהי מישור S. אזי:

- ℓ מתלכד עם S אם כל נקודה ב ℓ נמצאת ב S. מסמנים: $\ell \subset S$.
- ℓ מקביל ל S אם הוא מתלכד, או שאין אף נקודת חיתוך בינהם. מסמנים: $\ell \parallel S$.
- ℓ נחתך עם S עם קיימת נקודת חיתוך משותפת יחידה.

הגדרה 4.18 (מרחק בין ישר למישור). יהי ℓ ישר ויהי S מישור. אזי:

- אם $S \parallel \ell$, המרחק מוגדר להיות מרחק בין נקודה על הישר למישור. המרחק שווה לכל נקודה כיוון שהמישור מקביל, אשאיר את ההוכחה כתרגיל לקוראים.
- אחרת, המרחק מוגדר להיות 0 (המרחק הקטן ביותר נמצא בחיתוך, והוא 0).

טענה 4.19 (זווית בין ישר למישור). יהי ℓ ישר ויהי S מישור. נסמן:

$$\begin{cases} \ell := \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v} \\ S := N\overrightarrow{x} + d = 0 \end{cases}$$

אזי הזווית בין הישר למישור היא:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{|\overrightarrow{v} \cdot N|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |N|}\right)$$

הוכחה. נשים לב כי:

$$\arccos\left(\frac{|\overrightarrow{v} \cdot N|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |N|}\right)$$

מהווה את הזווית בין הישר, לישר המאונך למישור (שכן ישר עם וקטור כיוון של נורמל, מאונך למישור). לפיכך, נצטרך את הזוית המשלימה ל $90°$, בכדי לקבל את הזווית המתאימה. לפיכך נחליף את $\arccos$ עם $\arcsin$. $\square$

אסכם את תת פרק זה במספר המלצות לעבודה עם שאלות מהסוג לעיל.

סיכום (טיפים לעבודה עם וקטורים, מישורים וישרים).

- כדי למצוא וקטור נורמל של מישור בהינתן וקטורי הכיוון, ניתן לעשות מכפלה וקטורית עם שני הווקטורים.
- טריק קליל לבדיקת תלות לינארית בין וקטורים ב $\mathbb{R}^3$: v, w ת"ל אמ"מ :

$$\frac{v_x}{w_x} = \frac{v_y}{w_y} = \frac{v_z}{w_z}$$

- בשאלות שמבקשות למצוא ישר או מישור שעובר בשתי נקודות או יותר, מומלץ להשתמש בווקטור הקטע בין שתי הנקודות כווקטור כיוון.

4.2 סביבות ב $\mathbb{R}^n$ (טופולוגיה בקטנה)

חלק מרכזי בהבנה של פונקציות, היא תחומים שונים ומשונים שבתוכם ניתן לומר דברים על הפונקציה.
בחד מימד, הייתה לנו הפריווילגיה של "קטעים" או "קרנות". ז"א איזשהו תת ישר מתוך ישר המספרים.
אצלנו כמובן זה לא יהיה ככה. יש כמה סוגים של סביבות ותחומים. משמעותם די קריטית לקורס שלנו, ואשתדל להציג את ההגדרות בקצרה, שכן גישה זו אינה רלוונטית לנו ממש.
אשתדל להכניס העשרה תחת הנספח : "העשרות הכרחיות"

הגדרה 4.20 (תיבה סגורה)**.** יהיו קטעים סגורים $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$. נגדיר את התיבה הסגורה להיות :

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \left\{ \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \forall 1 \le i \le n : x_i \in [a_i, b_i] \ \right\}$$

בפרט, תיבה מלבנית ב $\mathbb{R}^2$ מוגדרת להיות :

$$[a, b] \times [c, d] = \left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \begin{matrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{matrix} \ \right\}$$

באופן דומה ניתן להגדיר גם תיבה פתוחה :

הגדרה 4.21 (תיבה פתוחה)**.**

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \left\{ \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \forall 1 \le i \le n : x_i \in (a_i, b_i) \ \right\}$$

סימון 4.22 (סביבה מלבנית)**.** כאשר נקודה x כלשהי נמצאת בתיבה פתוחה, אומרים שזוהי סביבה מלבנית של x.

כעת נעסוק בדברים עגולים, הלא הם הכדורים.

הגדרה 4.23 (כדור פתוח)**.** כדור פתוח סביב הנקודה $x \in \mathbb{R}^n$ ברדיוס R מוגדר להיות :

$$B(x, R) = \left\{ \ y \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ d(x, y) < R \ \right\}$$

כאשר d היא המטריקה הסטנדרטית.
בפרט, ב $\mathbb{R}^2$ זהו מעגל. כמו כן הכדור $B((0,0), 1)$ הוא מעגל היחידה (אך לא כולל הקצוות).

הגדרה 4.24 (כדור סגור)**.** כדור סגור סביב הנקודה $x \in \mathbb{R}^n$ ברדיוס R מוגדר להיות :

$$\overline{B(x, R)} = \left\{ \ y \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ d(x, y) \le R \ \right\}$$

סימון 4.25 (סביבה כדורית). כאשר נקודה x כלשהי נמצאת בכדור פתוח, אומרים שזוהי סביבה כדורית של x.

דוגמה חשובה ורלוונטית לסביבות הן סביבות סביב נקודה מסויימת. לסביבות הללו נקרא "סביבות-ε"

הגדרה 4.26 (סביבת-ε)**.** תהי $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ויהי $\varepsilon>0$.

- סביבת-ε כדורית של x היא הכדור הפתוח סביב x וברדיוס ε:

$$B(x,\varepsilon)=\left\{\ y\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ d(x,y)<\varepsilon\ \right\}$$

- סביבת-ε מלבנית של x היא התיבה הפתוחה:

$$\left\{\ (\widetilde{x_1},\dots,\widetilde{x_n})\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ |x_1-\widetilde{x_1}|<\varepsilon,\dots,|x_n-\widetilde{x_n}|<\varepsilon\ \right\}$$

וסביבת-ε כללית היא כל סביבת ε כדורית או מלבנית.

כעת נעבור לדבר על שפה של קבוצה, שהמשמעות שלו היא "הקצוות" של התחומים השונים בהם נעסוק.

הגדרה 4.27 (נקודה חיצונית ופנימית)**.** תהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$.

- נקודה $x\in D$ נקראת נקודה פנימית של D אם קיימת סביבת-ε של x שנסמנה E, כך ש:

$$E\subseteq D$$

- נקודה $x\in\mathbb{R}^n$ (לאו דווקא ב D) נקראת נקודה חיצונית של D אם קיימת סביבת-ε של x, שנסמנה E, כך ש:

$$E\subseteq\mathbb{R}^n\setminus D$$

כלומר כל הסביבה נמצאת במשלים.

- נקודה $x\in\mathbb{R}^n$ נקראת נקודת שפה של D אם אינה חיצונית ואינה פנימית.

סימון. תחום D בו כל נקודה היא פנימית נקראת "קבוצה פתוחה".
תחום D בו כל נקודות השפה נמצאות בו נקראת "קבוצה סגורה".
את אוסף כל נקודות השפה של D, מכנים בקצרה "שפה" ומסמנים אותה כ ∂D.

4.3 הבנה של פונקציות בשני משתנים

בכדי להבין פונקציות בשתי משתנים, נרצה כלי שמאפשר לנו להסתכל על הגרף של פונקציה בשני משתנים, כיוון שלרוב יהיה קשה מאוד לעשות כן.

הגדרה 4.28 (קו גובה)**.** תהי f פונקציה בשתי משתנים. נגדיר את קו הגובה של f בנקודה a:

$$G_a(f)=\{(x,y)\mid f(x,y)=a\}$$

דוגמה. קו הגובה בנקודה 1 של הפונקציה: $f(x,y)=x^2+y^2$ הוא מעגל היחידה.

הצעה 4.29 (צבע)**.** ניקח את הממד השלישי (ציר z) ונהפוך אותו לצבע של הפונקציה בדו מימד.

דוגמה. מפות של טמפרטורות ומפות של גבהים בדו מימד, מיוצגות ע"י מפה דו מימדית וצבע! למעשה מפות אלה מעידות על פונקציה בשני משתנים.

5 גבולות ורציפות בשתי משתנים

בשביל לדבר על נגזרות ואינטגרלים, כמו בחדו"א במשתנה אחד, אנו חייבים לדבר על גבולות, וכיוצ"ב לדבר על רציפות.

5.1 גבולות בשתי משתנים

הגדרה 5.1 (הגדרת גבול לפי סביבות (קושי)). אומרים כי:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=L$$

אם לכל סביבה של L (קטע) קיימת סביבה של (x_0,y_0) (עיגול) כך שעבור כל הנקודות בסביבה המנוקבת של (x_0,y_0) מתקיים כי $f\left(x,y\right)$ נמצא בסביבה לעיל של L.
ובצורה יותר פורמלית, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל (x,y) המקיימות:

$$0<d\left(\left(x,y\right),\left(x_0,y_0\right)\right)<\delta$$

מתקיים כי:

$$\left|f\left(x,y\right)-L\right|<\varepsilon$$

נרצה להגדיר גבול לפי סדרות (היינה), אך כמו בשתי משתנים, זה תמיד מסובך יותר.

הגדרה 5.2 (הגדרת הגבול לפי מסלולים (היינה)). תהי פונקציה $f\left(x,y\right)$. אומרים כי:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=L$$

אם לכל בחירה של פונקציות $f\left(t\right),g\left(t\right)$ כך שכאשר $t\to0^+$ מתקיים כי:

$$g\left(t\right)\to x_0$$

$$h\left(t\right)\to y_0$$

וכן לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים כי: $\left(g\left(t\right),h\left(t\right)\right)\neq\left(x_0,y_0\right)$ - מתקיים כי:

$$\lim_{t\to0^+} f\left(h\left(t\right),g\left(t\right)\right)=L$$

הערה. הבחירה ב $t\to0^+$ שרירותית ונועדה לנוחות בלבד.

עובדה 5.3. הגדרת הגבול לפי סביבות שקולה להגדרת הגבול לפי מסלולים.

כמובן שניעזר בהגדרה לפי היינה, כי הרבה יותר נוחה.

טענה 5.4. כלל משפטי הגבולות אשר נכונים עבור פונקציות במשתנה אחד, נכונים גם לפונקציות בשני משתנים.

הוכחה. קל להוכיח לפי היינה ושימוש במשפטי גבולות לפונקציות. □

בכדי לחשב גבול במשתנה אחד, או בכדי להראות שהגבול לא קיים, השתמשנו בכלים שנכונים למשתנה אחד, בפרט גבולות חד צדדים. זאת על סמך ההנחה שפונקציה יכולה להגיע או בכיוון ימין או בכיוון שמאל. בשני משתנים ויותר, שיטה זו נהיית לא רלוונטית. לפיכך עלינו למצוא כלים חדשים לכך.

סיכום 5.5 (סיכום שיטות לחישוב גבולות בשני משתנים). תהי פונקציה $f\left(x,y\right)$ בשני משתנים או יותר. נציג דרכים לחישוב הגבול.

לפי הגדרה: שיטה זו אינה מומלצת, אך יכולה לעבוד. לרוב כמובן נעדיף להיעזר בהגדרה לפי היינה. אעיר כי הבחירה בגבול המסלול להיות 0^{+} היא שרירותית, וכמובן שניתן להחליפה בעת הצורך (אם כי לא מומלץ).

אעיר כי בכדי להוכיח שגבול אינו קיים ניתן לקחת שני מסלולים שונים. הבעיה בזה, היא שכמובן קשה לרוב לחשוב על מסלולים שכאלה.

סנדוויץ' (ובפרט חצי סנדוויץ' על הרצפה): עקב משפטי גבולות, לרוב קל יותר להוכיח ש $f\left(x,y\right)\to L$ ע"י הוכחה ש:

$$\left|f\left(x,y\right)-L\right|\xrightarrow[\left(x,y\right)\to\left(x_{0},y_{0}\right)]{}0$$

ולעיתים, (וזו השיטה המקובלת) ניתן לחסום את הפונקציה מלמעלה ולנסות לעבור לגבול במשתנה אחד, מה שיבטיח גבול אם הפונקציה החוסמת שואפת לאפס.

קואורדינטות קוטביות: (שיטה זו רלוונטית לפונקציה בשני משתנים בלבד) ידוע כי כל נקודה במישור מהצורה $\left(x,y\right)$ ניתן לייצג בצורה טריגונומטרית. דהיינו בצורה:

$$\left(x,y\right)\mapsto\left(x_{0}+r\cos\left(\theta\right),y_{0}+r\sin\left(\theta\right)\right)$$

לכן, אם מתקיים כי:

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_{0}+r\cos\left(\theta\right),y_{0}+r\sin\left(\theta\right)\right)\leq g\left(r\right)\cdot h\left(\theta\right)$$

אזי אם $g\left(r\right)\xrightarrow[x\to0]{}0$, וכן $h\left(\theta\right)$ חסומה, ממשפט חסומה כפול אפסה ומחצי סנדוויץ' נקבל ש:

$$\lim_{\left(x,y\right)\to\left(x_{0},y_{0}\right)}f\left(x,y\right)=0$$

הרציונל הוא להעביר את הגבול לפונקציה של משתנה יחיד (r) ו"לצמצם" את השפעת המשתנה הנוסף (θ).

הערה. ניתן להכליל את שיטה זו להצבה של פונקציות הפיכות, דבר שלא נעשה במסגרת הקורס.

5.2 רציפות בשתי משתנים

הגדרה 5.6 (רציפות בנקודה בשני משתנים). תהי פונקציה $f\left(x,y\right)$. אומרים כי f רציפה בנקודה $\left(x_{0},y_{0}\right)$ אם:

$$\lim_{\left(x,y\right)\to\left(x_{0},y_{0}\right)}f\left(x,y\right)=f\left(x_{0},y_{0}\right)$$

טענה 5.7. צירוף של רציפות (סכום, הפרש, מכפלה, מנה כאשר מכנה שונה מאפס, הרכבה) מניב פונקציה רציפה.

הוכחה. נובע ממשפטים דומים במשתנה אחד, לפי שימוש בהגדרת הגבול לפי מסלולים. □

דוגמה. האם הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$?

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

פתרון. נראה שהיא לא רציפה. נבחר את המסלול:

$$(t,0)$$

ונקבל כי:

$$\lim_{t\to 0} f(t,0)=\frac{t^2}{t^2+0}=1\neq 0$$

ולכן היא אינה רציפה בנקודה זו.

דוגמה. האם הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $(0,0)$?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון. נחליף לקואורדינטות פולאריות:

$$(x,y)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

וכעת:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}\cos^2\theta$$

אך קל לראות שעבור זוויות שונות לא נקבל 0. לפיכך הפונקציה אינה רציפה בנקודה זו.

דוגמה. האם הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $(0,0)$?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון. נשים לב כי:

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{\left|x^3\right|}{x^2+y^2}$$

נקטין את המונה ולפיכך נגדיל את הביטוי:

$$\leq\frac{\left|x^3\right|}{x^2}=x$$

ולפיכך:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}x=0$$

ומכאן לפי חצי סנדוויץ' על הרצפה נקבל הנ"ל.

הערה. שימו לב כי הקטנת המכנה נכונה לכל מסלול בו $x\neq 0$ (שכן אנו מחלקים ב-x!). אך הרי עבור מסלול בו $x=0$, נקבל כי הפונקציה המקורית היא:

$$f(0,y)=\frac{0}{0+y^2}=0$$

ובמקרה זה אכן נקבל הדרוש.

6 גזירות בשני משתנים

כעת נתחיל לדבר על גזירות של פונקציה רבת משתנים. לרעיון הגזירות יש כמה וכמה גישות, שאליהן נלמד בפרק הזה.

6.1 דיפרנציאביליות בשני משתנים

תחילה, בכדי להבין מהי נגזרת בשני משתנים (ויותר), נרצה להבין לעומק את רעיון הנגזרת במשתנה אחד.
במשתנה אחד, הרעיון של נגזרות הוא גבול של שיפועי המיתרים על הפונקציה.
לפיכך, נרצה להבין מהו שיפוע.

הגדרה 6.1 (שיפוע בקו ישר). יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ נקודות ב $\mathbb{R}^2$. נגדיר את השיפוע של הישר העובר בנקודות הללו כ:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

נוטציה מקובלת לכתיבת הביטוי היא:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

אבל ב $\mathbb{R}^3$ אנו מדברים על מישור, ולא על ישר. לפיכך ההגדרה תהיה מעט שונה ממה שאנו מכירים, שכן במישור, יש משמעות לבחירת הנקודות - שכן לא בהכרח לכל שתי נקודות אותו שיפוע של קו ישר. לפיכך ניעזר בהגדרה האינטואיטיבית יותר.
הרעיון של שיפוע, הוא לקחת את השינוי בציר y, ולחלק אותו בשינוי בציר x. כעת, מהו שינוי? המרחק בין הנקודות! ז"א מטריקה!

הגדרה 6.2 (שיפוע במישור). יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ נקודות ויהי $f(x, y) = Ax + By + C$ מישור. נגדיר את השיפוע של המישור שעובר בין שתי הנקודות להיות:

$$m = \frac{f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)}{d((x_2, y_2), (x_1, y_1))} = \frac{f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{A(x_2 - x_1) + B(y - y_0)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$= (A, B) \cdot \frac{v}{|v|}$$

כאשר v מוגדר להיות וקטור הקטע בין $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

הערה. שימו לב כי כאן משפיע סדר בחירת הנקודות.
כמו כן, שימו לב כי כיוון שוקטור הקטע מנורמל, אזי השיפוע אינו תלוי באורכו של וקטור זה, אלא רק בכיוון שלו - מה שהגיוני לרעיון השיפוע.

כעת, עם הכלים הללו נרצה להגדיר גזירות.
במשתנה אחד, הרעיון של גזירות בנקודה הוא שבמבט מקרוב, הפונקציה נראית כמו ישר. הישר הזה נקרא הישר המשיק.
בשני משתנים, הרעיון דומה. במבט מקרוב הפונקציה נראית כמו מישור.
באופן כללי (וללא הוכחה), הרעיון של גזירות היא "לקרב" את הנקודה להיות פונקציה לינארית.

הגדרה 6.3 (דיפרנציאביליות)**.** אומרים על פונקציה בשני משתנים $f(x,y)$ שהיא דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) (גזירה אבל מתנשא יותר) אם קיים מישור $g(x,y)=Ax+Bx+C$, שעובר בנקודה, כך ש:

$$\boxed{\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-\frac{g(x_0+h_1,y_0+h_2)-g(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0}$$

למישור g קוראים המישור המשיק לפונקציה f בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

אינטואיטיבית, פונקציה היא דיפרנציבאלית אם הגבול של שיפוע הפונקציה ''דומה'' לשיפוע המישור.

הערה 6.4. שימו לב כי:

$$g(x_0+h_1,y_0+h_2)-g(x_0,y_0)=Ah_1+Bh_2$$

וניתן לרשום את הגבול מההגדרה כך:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-\frac{Ah_1+Bh_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

טענה 6.5. תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0). אזי $f(x,y)$ רציפה בנקודה זו.

הוכחה. ההוכחה דומה מאוד להוכחה במשתנה אחד, ע"כ הושארה כתרגיל לקוראים. $\square$

כעת, בהנחה שקיים מישור משיק, מי אמר שיש יחיד? כיצד נוכל למצוא אותו? אנו נראה זאת בהמשך.

6.2 נגזרות חלקיות

הגדרה 6.6 (נגזרת חלקית)**.** תהי $f(x,y)$ פונקציה עם שני משתנים. הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x בנקודה (x_0,y_0) מוגדרת להיות הגבול:

$$f_x=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ובאותו אופן הנגזרת לפי y מוגדרת להיות הגבול:

$$f_y=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

טענה 6.7. נגזרת חלקית של פונקציה $f(x,y)$ לפי x שקולה ל:

1. הצבת y_0 בפונקציה f ולקבל פונקציה במשתנה אחד: $g(x)=f(x,y_0)$.
2. $f_x(x_0,y_0)=g'(x_0)$.

במילים, לגזור לפי x ולהציב (x_0,y_0).

הטענה לגבי הנגזרת החלקית בציר y זהה.

הוכחה. טריוויאלית. $\square$

סימון 6.8. באופן כללי, בכדי לסמן נגזרת חלקית של f לפי משתנה כלשהו x_i, כותבים:

$$f_{x_i}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

טענה 6.9. תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0). אזי:

1. הנגזרות החלקיות לפי x,y קיימות.
2. המישור המשיק של f בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ מקיים:

$$g(x,y)=f_x(x_0,y_0)\,x+f_y(x_0,y_0)\,y+C$$

הוכחה. נוכיח עבור f_x. עבור f_y ההוכחה זהה.
נתון כי הפונקציה דיפרנציאבילית. לכן קיים מישור $g(x,y)=Ax+By+C$ שמקיים:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-Ah_1-Bh_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

לכן לכל מסלול הגבול הוא 0. בפרט עבור המסלול:

$$(h_1,h_2)=(t,0)$$

כלומר:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)-At}{|t|}=0$$

ובאותו אופן גם עבור המסלול $(h_1,h_2)=(-t,0)$ הגבול הוא 0. לכן:

$$\lim_{t\to0^-}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)-At}{t}=0$$

כעת, לכל אחד מן ההצבות של המסלול, ניתן לצמצם ולקבל:

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}-A=0$$

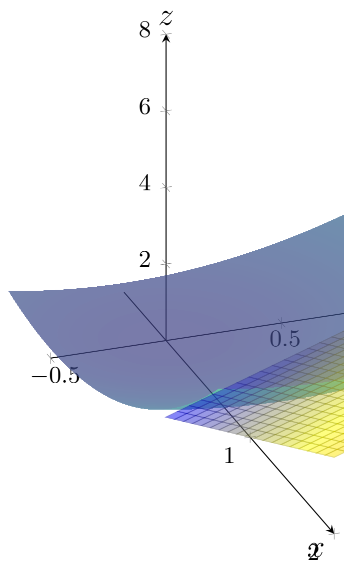
לכן:

$$A=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)$$

$\square$

מסקנה 6.10. נוסחה כללית לחישוב מישור משיק לפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) (כאשר $z_0=f(x_0,y_0)$):

$$\boxed{z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$



כעת נשאל, האם הכיוון ההפוך נכון?
כלומר, אם קיימות הנגזרות החלקיות של f, האם היא בהכרח דיפרנציאבילית?

משפט 6.11 (תנאי מספיק לדיפרנציאביליות)**.** תהי $f(x,y)$ כך ש f_x וכן f_y קיימות ורציפות בסביבת הנקודה (x_0,y_0). אזי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0).

טענה 6.12. (ללא הוכחה כרגע) תהי $f(x,y)$ כך שקיימות עבורה נגזרות חלקיות ורציפות מסדר שני, בסביבת הנקודה (x_0,y_0) אזי:

$$f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$$

כלומר, סדר הגזירה לא משנה.

6.3 נגזרת כיוונית

נרצה לבחון את השינוי בכיוון מסויים, לאו דווקא בכיוון של הצירים. נעשה זאת ע"י וקטור כיוון.

הגדרה 6.13 (נגזרת כיוונית)**.** תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $w=(x_0,y_0)$ נקודת מוצא ויהי וקטור כיוון $\vec{0}\neq v=(a,b)$.
נגדיר את הנגזרת הכיוונית להיות:

$$f'_{\vec{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+ta,y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t\sqrt{a^2+b^2}}$$

הרעיון הוא ללכת מרחק אינפיניטיסמלי בכיוון וקטור הכיוון, לנקודה $w+t\vec{v}$.

הגדרה 6.14 (גראדינאט)**.** תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות בנקודה (x_0,y_0). נגדיר את הגראדיאנט להיות:

$$\boxed{\nabla f(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))}$$

הערה. ניתן להכליל את הגראדיאנט לפונקציה ב n משתנים:

$$\nabla f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\left(f_{x_1}\left(t\right),\ldots,f_{x_n}\left(t\right)\right)$$

טענה 6.15. תהי $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$. אזי לכל $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ הנגזרת הכיוונית בכיוון $\vec{v}$ קיימת, והינה:

$$\boxed{f'_{\vec{v}}\left(x_0,y_0\right)=\nabla f\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\vec{v}}{|v|}}$$

הוכחה. נסמן:

$$v=\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^2$$

כעת, כיוון ש f דיפרנציאבילית, קיים מישור כך ש:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f\left(x_0+h_1,y_0+h_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-\frac{Ah_1+Bh_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

בפרט, ניתן להציב את המסלול:

$$\left(ta,tb\right)\to\left(0,0\right)$$

לפיכך:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f\left(x_0+ta,y_0+tb\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\sqrt{\left(ta\right)^2+\left(tb\right)^2}}-\frac{Ata+Btb}{\sqrt{\left(ta\right)^2+\left(tb\right)^2}}=0$$

כלומר:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f\left(x_0+ta,y_0+tb\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{t\sqrt{\left(ta\right)^2+\left(tb\right)^2}}-\frac{Aa+Bb}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

כלומר:

$$f'_{\vec{v}}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f\left(x_0+ta,y_0+tb\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\sqrt{\left(ta\right)^2+\left(tb\right)^2}}=\frac{Aa+Bb}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

או בצורה יותר נוחה:

$$f'_{\vec{v}}\left(x_0,y_0\right)=\frac{Aa+Bb}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left(A,B\right)\cdot\frac{\vec{v}}{|v|}$$

ונזכור כי A,B הם f_x,f_y בהתאמה:

$$f'_{\vec{v}}\left(x_0,y_0\right)=\left(f_x\left(x_0,y_0\right),f_y\left(x_0,y_0\right)\right)\cdot\frac{\vec{v}}{|v|}=\nabla f\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\vec{v}}{|v|}$$

$\square$

כעת, בהינתן פונקציה דיפרנציאבילית, מהי הנגזרת הכיוונית הגדולה ביותר? ובאיזה כיוון?

הערה 6.16. נשים לב כי מאי שוויון קושי שוורץ:

$$\left|\nabla f\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\vec{v}}{|v|}\right|=\left|\nabla f\left(x_0,y_0\right)\right|\cdot\underbrace{\left|\frac{\vec{v}}{|v|}\right|}_{=1}\cdot\underbrace{\left|\cos\left(\theta\right)\right|}_{\leq1}\leq\left|\nabla f\left(x_0,y_0\right)\right|$$

לפיכך, גודל **העלייה המקסימלי** מתקבל עבור $\theta=0,\pi$. עבור $\theta=0$, מתקיים שהנגזרת הכיוונית הגדולה ביותר היא בכיוון הגראדינט! כמו כן, הגודל **הירידה המקסימלי** מתקבל עבור $\theta=\pi$, כלומר מינוס הגראדינאט.

סיכום 6.17 (משמעות הגראדינאט).

1. כיוון העלייה התלולה ביותר הוא כיוון הגראדינט.
2. כיוון הירידה התלולה ביותר הוא בכיוון ההפוך לגראדינט (מינוס הגראדיאנט).
3. שיפוע העלייה התלולה ביותר הוא אורך הגראדינט.
4. הכיוון בו הנגזרת היא אפס הוא המאונך לגראדינט.

הערה 6.18 (וקטור הכיוון הגדול ביותר). בהינתן הגראדיאנט בנקודה (x_0,y_0) של הפונקציה f, אשר הליכה בכיוונו תוביל לעלייה הגדולה ביותר, מהו וקטור הכיוון של העלייה הגדולה ביותר, בפועל?

ידוע כי וקטור זה הוא לכל הפחות:

$$\overrightarrow{v}=\left(f_x\left(x_0,y_0\right),f_y\left(x_0,y_0\right),c\right)$$

ועלינו למצוא את אותו קבוע c. נשים לב כי $\overrightarrow{v}$ הוא למעשה וקטור כיוון של המישור המשיק! מכיוון שאנו דורשים שהליכה בכיוון שלו תיתן עלייה מקסימלית, כלומר שאנו הולכים בכיוון הנגזרת הכיוונית, כמתואר במשפטים קודמים. לפיכך הוא מאונך לנורמל של המישור המשיק, שהוא:

$$N=\left(f_x\left(x_0,y_0\right),f_y\left(x_0,y_0\right),-1\right)$$

לכן:

$$\overrightarrow{v}\cdot N=0\iff f_x^2\left(x_0,y_0\right)+f_y^2\left(x_0,y_0\right)-c=0$$

כלומר:

$$c=f_x^2\left(x_0,y_0\right)+f_y^2\left(x_0,y_0\right)=\left|\nabla f\left(x_0,y_0\right)\right|^2$$

ובסה"כ נקבל כי וקטור הכיוון של העלייה הגדולה ביותר הינו:

$$\overrightarrow{v}=\left(x_0,y_0,\left|\nabla f\left(x_0,y_0\right)\right|^2\right)$$

6.4 כלל השרשרת

בפונקציות במשתנה אחד, למדנו על נגזרת של הרכבה.
כעת, כיצד נגזור הרכבה בשני משתנים? בכלל, מהי הרכבה בשני משתנים?

הגדרה 6.19 (הרכבה בשני משתנים). תהי $f\left(x,y\right):\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $h_{1}\left(t\right),h_{2}\left(t\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר את ההרכבה של h_{1},h_{2} על f להיות:

$$\varphi\left(t\right)\coloneqq f\left(h_{1}\left(t\right),h_{2}\left(t\right)\right)$$

הערה. שימו לב כי הרכבה של שתי פונקציות בשתי משתנים לא מוגדרות, שכן:

$$f\left(x,y\right):\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$$

$$g\left(x,y\right):\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$$

ולכן לא ניתן להרכיב את הפונקציות (תחום וטווח שונים!)

משפט 6.20 (כלל השרשרת בשני משתנים). תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_{0},y_{0}\right)$ ותהיינה $h_{1}\left(t\right),h_{2}\left(t\right)$ גזירות בנקודה t_{0} כך ש:

$$x_{0}=h_{1}\left(t_{0}\right)$$

$$y_{0}=h_{2}\left(t_{0}\right)$$

אזי נגזרת ההרכבה $\varphi\left(t\right)$ קיימת בנקודה t_{0} ומתקיים כי:

$$\boxed{\varphi'\left(t_{0}\right)=f_{x}\left(x_{0},y_{0}\right)\cdot h_{1}'\left(t_{0}\right)+f_{y}\left(x_{0},y_{0}\right)\cdot h_{2}'\left(t_{0}\right)}$$

סימון 6.21. נציג את הסימון המקביל של פיזיקאים לכלל השרשרת. תהי $f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ (לצורה זו קוראים פרמטיזציה של המשתנים x,y). אזי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

הוכחה. (לא מדויקת ממש) כיוון ש $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנק' $\left(x_{0},y_{0}\right)$, כמו כן, $x\left(t\right),y\left(t\right)$ גזירות בt_{0} כך ש $\left(x\left(t_{0}\right),y\left(t_{0}\right)\right)=\left(x_{0},y_{0}\right)$. כמו כן, נניח לצורך הפשטות ההוכחה כי $\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\neq\left(x_{0},y_{0}\right)$ באף נקודה, פרט ל t_{0}.

נביט בפונקציה:

$$g\left(t\right)=f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$$

ועלינו לחשב את $g'\left(t_{0}\right)$. כלומר:

$$\lim_{t\to t_{0}}\frac{f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)-f\left(x\left(t_{0}\right),y\left(t_{0}\right)\right)}{t-t_{0}}=\lim_{t\to t_{0}}\frac{f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)}{t-t_{0}}$$

כעת, מכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, ההפרש בין שיפוע הפונקציה לשיפוע המישור המשיק שואפים לאפס. כלומר:

$$\frac{f\left(x_{0}+h_{1},y_{0}+h_{2}\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)-f_{x}\left(x_{0},y_{0}\right)h_{1}-f_{y}\left(x_{0},y_{0}\right)h_{2}}{\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}}}\to0$$

נציב את המסלול:

$$\left(h_{1},h_{2}\right)\mapsto\left(x\left(t\right)-x\left(t_{0}\right),y\left(t\right)-y\left(t_{0}\right)\right)$$

ולכן:

$$\left(x_{0}+h_{1},y_{0}+h_{2}\right)\mapsto\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$$

לכן אנו דורשים שהפרמטזציה שונה ממש מ (x_0, y_0), אחרת לא ניתן להציב אותו בגבול!
נציב ונקבל את הביטוי:

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) - f_x(x_0, y_0)(x(t) - x(t_0)) - f_y(x_0, y_0)(y(t) - y(t_0))}{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}$$

נעשה WIN, ונכפול את המונה והמכנה ב $t - t_0$ ונקבל:

$$\frac{\frac{f(x(t),y(t)) - f(x(t_0),y(t_0))}{t-t_0} - f_x(x_0, y_0)\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} - f_y(x_0, y_0)\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}{\pm\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}}$$

($\pm$ בגלל שמכניסים את הביטוי $t - t_0$ לתוך השורש).
ונשים לב:

$$f_x(x_0, y_0)\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \to f_x(x_0, y_0)\, x'(t_0)$$

$$f_y(x_0, y_0)\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \to f_y(x_0, y_0)\, y'(t_0)$$

כי נתון גזירות של $x(t), y(t)$. לכן, בגלל שהצבנו מסלול, המונה שואף לאפס.
כמו כן, המכנה שואף ל:

$$\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$$

(שוב, מגזירות של $x(t), y(t)$). לפיכך כלל הביטוי שואף לאפס, ומכאן שאכן נקבל כי:

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} - f_x(x_0, y_0)\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} - f_y(x_0, y_0)\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \to 0$$

ולכן:

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} = f_x(x_0, y_0)\, x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\, y'(t_0)$$

אבל זה הגבול שרצינו, כמבוקש. $\square$

6.5 כללי גזירה וקטורית (מהתרגול)

טענה 6.22 (גזירה וקטורית). תהיינה $\overline{A}, \overline{B} : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ פונקציות וקטוריות, ותהי $f : D_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית. נסמן:

$$\overline{A}(t) = A_x(t)\,\hat{x} + A_y(t)\,\hat{y} + A_z(t)\,\hat{z}$$

(ובאופן דומה גם $\overline{B}$) אזי:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \cdot \overline{A} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \cdot \overline{A} + f \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{d}\overline{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overline{A} \times \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{d}\overline{A}}{\mathrm{d}t} \times \overline{B} + \overline{A} \times \frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}$$

7 פולינום טיילור בשני משתנים

במשתנה אחד, פולינום טיילור נועד לקרב את הפונקציה לפולינום, סביב נקודה מצוייה (שאפשר להציב בפונקציה) ונקודה רצויה (שרוצים להציב)
אנחנו נראה שבשני משתנים, העבודה תנבע מפולינום טיילור במשתנה יחיד.

הטריק הוא, ללכת בקו ישר בין המצויה לרצויה, ובכך להגיע למשתנה אחד.

הגדרה. תהי פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית $n+1$ פעמים. נגדיר:

$$g(t)=f(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))$$

הערה 7.1. נשים לב כי:

$$g(0)=f(x_0,y_0)$$

וכן:

$$g(1)=f(x,y)$$

אבל, נשים לב כי הפונקציה g היא פונקציה במשתנה אחד (t)! לכן ניתן לחשב את פולינום הטיילור מסדר n של g סביב הנקודה 0:

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

(שימו לב לשגיאה לפי לגראנז')

כמו כן, ניתן להציב $t=1$ ולקבל:

$$f(x,y)=g(1)=g(0)+g'(0)+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}+\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

כאשר $0<c<1$.
לפיכך ניתן להגדיר פולינום טיילור בצורה הבאה:

הגדרה 7.2 (פולינום טיילור לפונקציה ב 2 משתנים)**.** תהי פונקציה $f(x,y)$. נגדיר את <u>פולינום טיילור</u> מסדר n סביב הנקודה (x_0,y_0) להיות:

$$P_n(f(x,y),(x_0,y_0))(x,y)=g(1)=g(0)+g'(0)+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

כאשר הפונקציה g מוגדרת להיות:

$$g(t)=f(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))$$

כעת, נחשב את הנגזרות ממש, בכדי לקבל אינטואיציה לגבי מהו הפיתוח:

$$f(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))$$

$$\begin{aligned}g'(t)=&f_x(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))\cdot(x-x_0)+\\&f_y(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))\cdot(y-y_0)\end{aligned}$$

ובפרט עבור $t=0$:

$$g'(0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

כמו כן:

$$g''(t)=(x-x_0)\left[f_{xx}\cdot(x-x_0)+f_{xy}\cdot(y-y_0)\right]+(y-y_0)\left[f_{yx}\cdot(x-x_0)+f_{yy}\cdot(y-y_0)\right]$$

ולכן אם נציב $t=0$ נקבל:

$$g''(0)=f_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2$$

שימו לב, זה דומה מאוד לבינום של ניוטון:

$$((x-x_0)+(y-y_0))^2$$

נסכם את הנ"ל עם צורה כללית של פולינום טיילור בשני משתנים

מסקנה 7.3 (צורה כללית של פולינום טיילור בשני משתנים)**.** האיבר ה k של פולינום טיילור של הפונקציה $f(x,y)$ סביב הנקודה $P=(x_0,y_0)$ הוא:

$$\frac{1}{k!}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot f_{x^{k-i}y^{i}}(P)\cdot(x-x_0)^{k-i}\cdot(y-y_0)^{i}$$

ובאופן כללי, פולינום טיילור בשני משתנים של f סביב הנקודה P הינו מסדר n הינו:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\cdot f_{x^{k-p}y^{p}}(P)\cdot(x-x_0)^{k-p}\cdot(y-y_0)^{p}$$

8 קיצון בשני משתנים

8.1 נקודות קיצון מקומיות

במשתנה אחד, האלגוריתם למציאת קיצון היה די פשוט. מוצאים נקודות חשודות, עושים "טבלה" (בודקים בסביבה של הנקודה) ומציבים בנגזרת – וכך ניתן להסיק את סוג הקיצון (אם זו באמת קיצון)
בשני משתנים השיטה של הטבלה קורסת, שכן ניתן "להתקרב" אל נקודה מסויימת מהמון דרכים שונות, ולפיכך לא ניתן לומר דבר.

הגדרה 8.1 (מינימום ומקסימום מקומיים)**.** נקודה (x_0,y_0) נקראת מינימום מקומי אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בה מתקיים:

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

ההגדרה של מקסימום מקומי זהה.

הרציונל יהיה להשתמש במבחן הנגזרת השנייה, בגרסה המוכללת.

משפט 8.2 (מבחן הנגזרת השנייה במשתנה אחד)**.** תהי פונקציה $f(x)$ הגזירה פעמיים בנקודה x_0 כך ש $f''(x)$ רציפה בנקודה x_0, וכן $f'(x_0)=0$ אזי:

* אם $f''(x_0) > 0$, אזי x_0 נקודת מינימום מקומי.
* אם $f''(x_0) < 0$, אזי x_0 נקודת מקסימום מקומי.

הוכחה. אוכיח עבור המקרה הראשון, כי המקרה השני זהה.
נביט בפולינום טיילור של הפונקציה f מסדר 1 סביב x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{=0} + \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - x_0)^2$$

כאשר c בסביבה של $(x_0 - x, x_0 + x)$. כעת, נובע מהרציפות של $f''(x)$ בx_0, שישנה סביבה מסויימת בה $f''(x)$ חיובית. לכן לכל x בסביבה הזו, c מקיים ש:

$$\frac{f''(c)}{2} \geq 0$$

לפיכך, לכל x בסביבה זו:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

(שכן החסרנו גודל חיובי) ולפיכך נקבל שx_0 מינימום מקומי. $\square$

נרצה להכליל את הרעיון לעיל בפונקציות בשני משתנים. נביט בביטוי המייצג את השגיאה של פולינום טיילור של הפונקציה $f(x, y)$ מסדר 1:

$$\frac{g''(c)}{2} = \frac{1}{2} f_{xx}(cx + (1 - c)x_0 cy + (1 - c)y_0)(x - x_0)^2 +$$
$$f_{xy}(cx + (1 - c)x_0, cy + (1 - c)y_0)(x - x_0)(y - y_0) +$$
$$\frac{1}{2} f_{yy}(cx + (1 - c)x_0, cy + (1 - c)y_0)(y - y_0)^2$$

כעת, עבור x "קרוב" (זה מצריך צידוק מתמטי שלא אעשה אך נכון, דומה מאוד לרעיון של הסביבה בהוכחה דלעיל) מספיק לx_0 נקבל:

$$\frac{g''(c)}{2} = \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

אבל! נשים לב כי מכיוון ש:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ולפיכך ביטוי השגיאה הוא:

$$\frac{g''(c)}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

(זכרו שהפונקציה שלנו היא "נורמלית", ולכן $f_{yx} = f_{xy}$).
כעת, נניח כי v הינו ו"ע עם $\lambda \neq 0$ ע"ע. לפיכך:

$$v^t A v = v^t \lambda v = \lambda (v \cdot v)$$

כאשר $v\cdot v$ הינה dot product. לפיכך, סימן התוצאה תלוי בסימן הע"ע!
לפיכך, אם נניח כי כל הע"ע חיוביים, ניתן להוכיח כי השגיאה תמיד חיובית!
לכן, נקבל שעבור נקודות איפוס הגראדיאנט (ז"א $f_x=f_y=0$), מתקיים שפולינום הטיילור הוא הנקודה! לפיכך בנקודה זו:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=R_1(f,(x_0,y_0))(x,y)>0$$

שכן השגיאה תמיד חיובית במקרה זה!
ולפיכך נקבל כי:

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

ולכן זוהי נקודת מינימום!!!
כעת, כיצד נוכל למצוא את הע"ע, או יותר נכון את הסימן של הע"ע?
נזכור כי מכפלת הע"ע היא הדטרמיננטה של המטריצה, ולפיכך:

$$\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}=\lambda_1\cdot\lambda_2$$

לפיכך, אם הדטרמיננטה של המטריצה שלילית, סימני הע"ע הפוכים. כמו כן, אם הדטרמיננטה של המטריצה חיובית, הע"ע שווי סימן.

לפיכך, ניתן להכליל את מה שעשינו כאן לאלגוריתם משגע לסיווג נקודת קיצון מקומיות.

אלגוריתם 8.3 (אלגוריתם למיון נקודות קיצון מקומיות)**.** תהי פונקציה $f(x,y)$.

1. נחשב את כל בהן הגראדיאנט מתאפס: $\nabla f=(0,0)$. לנקודות אלה נקרא נקודות חשודות.
2. כל נקודה חשודה נציב בפונקציית הדלתא:

$$\Delta(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)$$

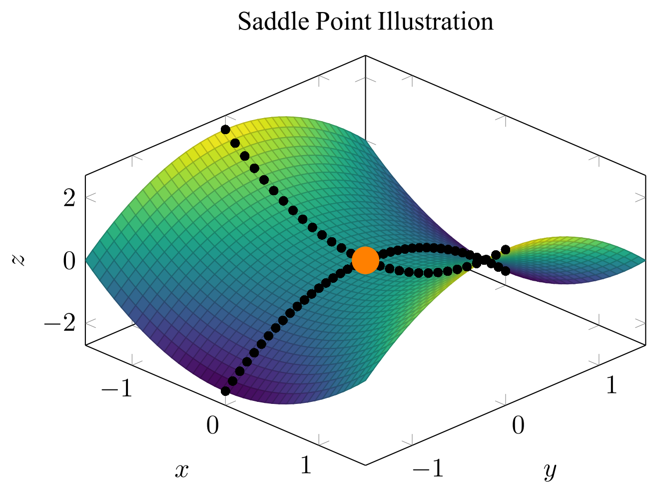
ונחלק למקרים:

(א) אם $\Delta(x_0,y_0)<0$, נקודה זו חשודה אך אינה קיצון, וקוראים לה נקודת אוכף. הרעיון הוא שבכיוון ציר x זוהי מקסימום / מינימום ובכיוון ציר y ההפך. צורה זו מזכירה אוכף (או פרינגלס) ומכאן השם

(ב) אם $\Delta(x_0,y_0)>0$:

i. אם $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ (או $f_{yy}(x_0,y_0)>0$) אזי נקודה זו מינימום מקומי.
ii. אם $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ (או $f_{yy}(x_0,y_0)<0$) אזי נקודה זו מקסימום מקומי.

שימו לב! אם $\Delta(x_0,y_0)=0$ האלגוריתם לא תקף, ויש לסווג בצורה אחרת.
חשבו, מה היה קורה אילו f_{xx} או f_{yy} שווים 0? מדוע אין אנו מתייחסים אליהם באלגוריתם?



הערה. לפעמים מכנים את המטריצה דלעיל עבור הפונקציה f:

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

בשם מטריצת הסיאן. כך מתקיים כי:

$$\Delta(x_0, y_0) = |H(f)|$$

8.2 משוואת המשיק לקו הגובה

תהי פונקציה $f(x,y)$ ויהי קו גובה $G_a(f)$. נרצה למצוא משיק לקו הגובה, ז"א משיק לנקודה $(x,y) \in G_a(f)$ עבור $y(x)$. נשים לב כי לכל נקודה $(x,y) \in G_a(f)$ מתקיים:

$$f(x, y(x)) = a$$

נגזור את שני הצדדים:

$$f_x(x, y(x)) \cdot 1 + f_y(x, y(x))\, y' = 0$$

כלומר:

$$(f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (1, y') = 0$$

לפיכך ניתן לומר שני דברים:

1. לחלץ את y' ולקבל:

$$y' = \frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

כאשר $f_y(x,y) \neq 0$.

2. נשים לב כי:

$$\nabla f \cdot (1, y') = 0$$

כלומר זהו וקטור מאונך לגראדיאט - ולפיכך, ניתן לומר כי כל וקטור אשר מאונך לגראדיאנט, הנגזרת הכיוונית בו יהיה 0. הא כיצד? משום שכך אנחנו נשארים על קו הגובה! ואין שינוי בפונקציה. לפיכך הנגזרת הכיוונית בכיוון וקטור זה היא 0!

8.3 קיצון מוחלט וכופלי לגראנז'

במשתנה אחד, יש את משפט ויירשטראס אשר אומר שלכל פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מינימום ומקסימום.
איפה הן נמצאות? בנקודות בהן הנגזרת של הפונקציה 0, או בקצוות.

ההוכחה של משפט ויירשטראס תקפה גם פה לשני משתנים, ולפיכך בכל תחום סגור יש מינימום ומקסימום. כיצד נמצא אותם?

אם ישנן נקודות חשודות פנימיות, ניתן להציב והכל סבבה. מה קורה אם הם בשפה? השפה היא למעשה קו גובה!

אם קיימת פונקציה המתארת את קו הגובה כפונקציה באיזור נקודת הקיצון, אשר נסמנה $g(x,y)$, מה נוכל לעשות על מנת למצוא את הנקודה?

אם $y(x)$ מתארת את קו הגובה, ובנקודה $(x_0, y(x_0))$ על השפה, וכמו כן הפונקציה f מקבלת קיצון בנקודה זו (קיצון מוחלט בתחום, ובפרט קיצון על השפה), אזי הנגזרת בx_0 של הפונקציה:

$$f(x, y(x))$$

הינה 0! כלומר:

$$f_x \cdot 1 + f_y \cdot y' = 0$$

וכמו כן, כיוון שהפונקציה y מתארת את קו הגובה של g, נקבל כי:

$$g(x, y(x)) = C$$

נגזור את שני הצדדים:

$$g_x \cdot 1 + g_y \cdot y' = 0$$

לפיכך, הוקטור $(1, y')$ מאונך גם לגראדיאנט של g וגם לגראדיאנט של f! ז"א שהם מקבילים!
כלומר, או שהגראדיאנט האחד הוא כפל בסקלר של האחר, או שאחד מהם הוא 0.
אסכם,

הנקודות החשודות על השפה, הן הנקודות בהן ∇g מתאפס על השפה, או מתקיימות שלושת המשוואות הבאות בשלושה נעלמים:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = C \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g = C \end{cases}$$

שני התנאים הראשונים הם לוודא שהגראדיאנטים מקבילים, השלישי נועד לסנן פתרונות שלא נמצאים בת"ה.

למעשה, λ מיותר לפתרון עצמו, פרט לעובדה שהוא קיים! אם הוא קיים, הגראדיאנטים אכן מקבילים.

אלגוריתם 8.4 (אלגוריתם למציאת קיצון מוחלט בתחום)**.** תהי פונקציה $f(x,y)$ ויהי תחום D.
נרצה למצוא את הערך המינימלי והמקסימלי של f בתחום.
תחילה, נבטא את התחום ע"י הפונקציה $g(x,y)$. לרוב מעבירים את כל התחום לצד אחד, כך שהצד השני יהיה 0.

1. מציאת נקודות חשודות בפנים התחום (בהם הגראדיאנט של $f(x,y)$ מתאפס). **שימו לב לוודא שהנקודות אכן נמצאות בתחום!**

2. מצאת נקודות חשודות על שפת התחום לפי שיטת כופלי לגראנז': למצוא את הפתרונות למערכת המשוואות:
$$\begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g(x,y) = C \end{cases}$$
(λ עצמה לא רלוונטית לפתרון, רק למצוא אותה).

3. אם יש "אילוצים" (חיתוכים בין תחומים שונים), נקודות החיתוך בין התחומים גם הם נקודות חשודות.

4. הצבת כל הנקודות החשודות בפונקציה f ומציאת מינימום, מקסימום בהתאמה.

9 אינטגרלים כפולים

כמובן, נרצה להכליל את מושג האינטגרל בחד מימד לאינטגרל בדו מימד.

9.1 סכומי רימן כפולים משפט פוביני

נרצה להכליל את הרעיון של אינטגרל מסויים לדו מימד.
בחד מימד, היה לנו את סכומי רימן, בו חתכנו את הפונקציה למלבנים אינפיניטסמליים. אזי השטח שמתחת לגרף היה סכום רוחבי המלבנים כפול גובהם
בדו מימד, נפרוס את הפונקציה לפרוסות של תיבות אינפיניטסמליות, ונכפול את שטח כל תיבה בעובי שלה. אזי הנפח מתחת לגרף יהיה סכום הנפחים דלעיל.
נשים לב, כי לפי האינטואיציה הזו, אין זה משנה אם אנו עושים תהליך זה בציר x או בציר y.

הגדרה 9.1 (סכום רימן כפול)**.** נביט בתחום המלבני:
$$D = [a,b] \times [c,d] = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b, c \le y \le d \right\}$$
נחלק אותו לרשת של מלבנים, סדרת נקודות, בדומה לחלוקות בחד מימד:
$$a = x_0 \le \cdots \le x_n = b$$
$$c = y_0 \le \cdots y_m = d$$
ונביט בפונקציה $f(x,y)$ ונבחר בכל מלבן נקודה:
$$(p_{ij}, q_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$
אזי סכום רימן הכפול המתאים יהיה:
$$S(f, x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(p_{ij}, q_{ij}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

סימון. נהוג לסמן:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$
$$y_j - y_{j-1} = \Delta y_i$$

למעשה זהו סכום נפחי התיבות בגרף הפונקציה.

הגדרה 9.2 (אינטגרביליות בשני משתנים)**.** פונקציה $f(x,y)$ נקראת אינטגרבילית בתחום המלבני D, אם קיים קבוע שנסמנו:

$$\iint_D f \in \mathbb{R}$$

כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה עבורה:

$$\Delta x_i, \Delta y_j < \delta$$

(לכל $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j \in \{0, \ldots, m\}$)
מתקיים כי:

$$\left| S(f, x_i, y_j) - \iint_D f \right| < \varepsilon$$

כלומר: פונקציה אינטגרבילית אם סכומי הרימן מתכנסים.

משפט 9.3. כל פונקציה רציפה היא אינטגרבילית.

הוכחה. ההוכחה זהה לפונקציה במשתנה אחד, אך יש גם להכליל את המושג של אינטגרל דרבו לשני משתנים, דבר שלא נעשה במסגרת הקורס הזה. $\square$

כיצד נוכל לחשב נפח של פונקציות בשני משתנים? נרצה לעשות זאת באופן דומה לפונקציות במשתנה אחד. ז"א לחשב נפח בעזרת שטחים!
למשפט פוביני (שנוכיח עבור פונקציות רציפות, אך ניתן להכליל לאינטגרביליות) יש משמעות רבה על הנ"ל.

משפט 9.4 (משפט פוביני)**.** תהי $f(x,y)$ רציפה בקטע המלבני $D = [a,b] \times [c,d]$. כמו כן, יהי $x \in [a,b]$. נסמן:

$$I(x) := \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

כלומר, זוהי שטח הפרוסה בציר y בנקודה x.
כמו כן, נביט באינטגרל אשר מייצג את "סכום הפרוסות":

$$\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x$$

אזי האינטגרל לעיל הוא האינטגרל הכפול המסויים. כלומר:

$$\iint_D f(x,y) = \int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

הערה (משפט הערך הממוצע האינטגרלי). תהי $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי קיימת $c \in [a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

כעת נוכיח את משפט פוביני.

הוכחה. נשים לב כי לכל חלוקה של x בקטע לעיל, עקב משפט הערך הממוצע האינטגרלי (שכן f רציפה):

$$\int_a^b I\left(x\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} I\left(x\right)\mathrm{d}x$$

מרציפות, הודות לסכומי רימן:

$$=\sum_{i=1}^{n} I\left(p_i\right)\cdot\Delta x_i$$

אבל, לכל חלוקה של y בקטע הנתון, לפי משפט הערך הממוצע האינטגרלי (בדומה למקודם):

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_c^d f\left(p_i,y\right)\mathrm{d}y\right)\Delta x_i$$

אבל מרציפות, ומסכומי רימן:

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(p_i,q_{ij}\right)\Delta y_j\Delta x_i$$

אבל זה בדיוק סכום רימן הכפול של הפונקציה בתחום המתואר. כיוון שהפונקציה רציפה, סכומי הרימן שואפים לאינטגרל הכפול כאשר רוחבי החלוקות שואפות לאפס.
אבל כל הסכומים הללו קבועים, והם שווים לאותו הערך!

$$\int_a^b I\left(x\right)\mathrm{d}x$$

ולכן הגבול, הלא הוא האינטגרל הכפול, הינו:

$$\iint_D f=\int_a^b I\left(x\right)\mathrm{d}x$$

□

במילים, הוכחנו שלכל f רציפה מתקיים כי:

$$\iint_d f=\int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

מסקנה 9.5 (סדר אינטגרציה לא משנה)**.** תהי $f\left(x,y\right)$ רציפה. אזי:

$$\boxed{\iint_D f=\int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y}$$

הוכחה. ניתן להוכיח בצורה סימטרית לחלוטין את הסדר שני, מה שגורס כי עדיין הנ"ל שווים לאותו הדבר, האינטגרל הכפול! □

סימון. לאינטגרל $\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קוראים אינטגרל כפול, בעוד שהאינטגרל $\int_c^d\int_a^b f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ נקרא אינטגרל חוזר (ז"א מחשבים אותו פעמיים).

הגדרה 9.6 (שטח של תחום)**.** יהי תחום D. אזי השטח של של התחום מוגדר להיות:

$$S\left(D\right)=\iint_D 1$$

שימו לב! למרות שאינטגרל כפול הוא נפח, אינטגרל על 1 הוא שטח!!! אפשר להסביר זאת אינטואיטיבית, שפשוט אין התקדמות בצירים, ולכן אין באמת נפח, אלא רק השטח.

9.2 שיטות לחישוב אינטגרלים כפולים

כעת, הרבה פעמים התחום אינו מלבני. אז כיצד נוכל לפתור אינטגרלים שכאלה?
עיקר העבודה היא, כידוע על התחום.

הגדרה 9.7 (תחום סטנדרטי לפי משתנה)**.** יהי תחום D דו-מימדי. אומרים שהצגה של התחום היא הצגה לפי x (או באופן סטנדרטי לפי x) אם היא הצגה מהצורה:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leq x\leq b,h_1\left(x\right)\leq y\leq h_2\left(x\right)\right\}$$

תחום סטנדרטי לפי y מוגדר באופן דומה.

טענה 9.8. יהי תחום סטנדרטי כנ"ל. אזי:

$$\boxed{\iint_D f=\int_a^b\left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x}$$

הוכחה. נוכיח עבור תחום סטנדרטי לפי x. ההוכחה עבור תחום סטנדרטי לפי y זהה.
ניקח תחום מלבני גדול, שנסמן אותו E, כך ש $D\subseteq E$. נרחיב את תחום ההגדרה של הפונקציה להיות:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}f\left(x,y\right) & (x,y)\in D\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ולכן נגדיר את האינטגרל הכפול של פונקציה זו להיות:

$$\iint_D f\left(x,y\right)=\iint_E f\left(x,y\right)$$

שכן הוא 0 בכל מקום שאינו D ואינו משפיע על הנפח! ועכשיו ניתן להשתמש במשפט פוביני ולקבל:

$$=\iint_D f\left(x,y\right)=\int_a^b\left(\int_{h_2(x)}^{h_1(x)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

שכן אלה קצוות התחום! □

שימו לב! לא ניתן באופן ישיר להחליף בין המשתנים, שכן לשם כך צריך למצוא את הפונקציה ההפוכה של y שחוסמת את x.

למה זה עוזר לנו? כי אם אינטגרל לפי משתנה אחד לא פתיר, ומצד שני כן, אזי אפשר לשנות את סדר האינטגרציה כך שנוכל לפתור אותו.

הערה. המתחכמים ישאלו מדוע מותר לעשות כן, שכן פונקציה זו אינה רציפה. אבל עדיין פונקציה זו אינטגרבילית (ללא הוכחה ☹), על אף שאינה רציפה. עדיין המשפטים דלעיל תקפים, ולכן דבר זה אכן מסתדר.

9.3 החלפת משתנים ב $\mathbb{R}^2$

נתאר את המשפט המרכזי של החלפת הקואורדינטות, אך הוכחתו תהיה לא מדוייקת ממש.

משפט 9.9 (החלפת משתנים)**.** יהיו תחומים D_1, D_2. עוד נניח שקיימת פונקציה הפיכה:

$$\left(x\left(r,t\right),y\left(r,t\right)\right):D_1\to D_2$$

כך ש:

1. הנגזרות החלקיות x_r, x_t, y_r, y_t קיימות ורציפות בכל נקודה בתחום.
2. היעקוביאן של הפונקציה הנ"ל אינו 0 לכל נקודה ב D_2.

אזי לכל פונקציה רציפה f מתקיים::

$$\iint_{D_1} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} f\left(x\left(r,t\right),y\left(r,t\right)\right)\left|J\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$

כאשר היעקוביאן מוגדר להיות:

$$\left|J\right|=\left|\det\begin{pmatrix}x_r & x_t\\ y_r & y_t\end{pmatrix}\right|$$

(למטריצה קוראים גם מטריצת יעקובי)

הוכחה. אם אנו נקבל יחידת נפח באינטגרל:

$$\iint_{D_1} f$$

ואנו רוצים להציגה בעזרת התחום השני.

$$f\left(x,y\right)\cdot\left(\text{floor of area}\right)\overset{\text{WIN}}{=}f\left(x\left(r,t\right),y\left(r,t\right)\right)\cdot\Delta r\Delta t\cdot\frac{\left(\text{floor of area}\right)}{\Delta r\Delta t}$$

כיצד נמצא את שטח הרצפה? נשלח יחידת שטח אינפיניטסימלית ריבועית אל יחידת שטח מקבילית אינפיניטיסימלית (זו הנחה ממש לא מבוססת, אבל נזרום עדיין).
לפיכך, כלל יחידת הנפח ב D_1 היא בערך:

$$f\left(x,y\right)\cdot\left|\det\begin{pmatrix}x\left(r_1,t_2\right)-x\left(r_1,t_1\right) & y\left(r_1,t_2\right)-y\left(r_1,t_1\right)\\ x\left(r_2,t_1\right)-x\left(r_1,t_1\right) & y\left(r_2,t_1\right)-y\left(r_1,t_1\right)\end{pmatrix}\right|\overset{\text{WIN}}{=}$$

(שכן הדטרמיננטה בערך מוחלט הינה שטח המקבילית)

$$f\left(x\left(r,t\right),y\left(r,t\right)\right)\cdot\frac{\det\begin{pmatrix}x\left(r_1,t_2\right)-x\left(r_1,t_1\right) & y\left(r_1,t_2\right)-y\left(r_1,t_1\right)\\ x\left(r_2,t_1\right)-x\left(r_1,t_1\right) & y\left(r_2,t_1\right)-y\left(r_1,t_1\right)\end{pmatrix}}{\Delta r\Delta t}\cdot\Delta r\Delta t$$

נכניס את הקבועים הללו לדטרמיננטה ונקבל:

$$=f\left(x\left(r,t\right),y\left(r,t\right)\right)\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\frac{x\left(r_1,t_2\right)-x\left(r_1,t_1\right)}{\Delta t} & \frac{y\left(r_1,t_2\right)-y\left(r_1,t_1\right)}{\Delta t}\\ \frac{x\left(r_2,t_1\right)-x\left(r_1,t_1\right)}{\Delta r} & \frac{y\left(r_2,t_1\right)-y\left(r_1,t_1\right)}{\Delta r}\end{pmatrix}\right|\cdot\Delta r\Delta t\approx$$

$$f\left(x\left(r,t\right),y\left(r,t\right)\right)\left|\det\left(\begin{array}{cc} x_t & y_t \\ x_r & y_r \end{array}\right)\right|\cdot\Delta r\Delta t$$

(שימו לב שזוהי דטרמיננטת המשוחלפת, שווה גם היא ליעקוביאן) וביחד האינטגרל הוא בערך:

$$=\iint_{D_1} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} f\cdot\left|J\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$

□

הדוגמה הנפוצה ביותר והשימושית ביותר היא החלפה לקואורדינטות קוטביות:

טענה 9.10 (קואורדינטות קוטביות). נביט בפונקציה הבאה $T:D_2\to D_1$

$$\begin{cases} x\left(r,\theta\right)=r\cos\left(\theta\right) \\ y\left(r,\theta\right)=r\sin\left(\theta\right) \end{cases}$$

אזי היעקוביאן הינו:

$$\left|J\right|=\left|\det\left(\begin{array}{cc} \cos\left(\theta\right) & -r\sin\left(\theta\right) \\ \sin\left(\theta\right) & r\cos\left(\theta\right) \end{array}\right)\right|=r\cos^2\left(\theta\right)+r\sin^2\left(\theta\right)=r$$

ולכן:

$$\iint_{D_1} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} f\left(r\cos\left(\theta\right),r\sin\left(\theta\right)\right)\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

10 אינטגרלים משולשים

פרק זה יהיה די זריז, כיוון שאת מרבית העבודה עשינו בפרק על אינטגרל כפול.

10.1 אינטואיציה והגדרות

טענה 10.1 (פוביני בשלושה מימדים). תהי V תיבה. אזי לכל f רציפה:

$$\iiint_V f=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

הוכחה. זהה לעבודה שעשינו בשני משתנים. □

משפט 10.2 (תחום סטנדרטי ב $\mathbb{R}^3$)**.** אם התחום V סטנדרטי, כלומר:

$$V=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{c}\left(x,y\right)\in D \\ h_1\left(x,y\right)\leq z\leq h_2\left(x,y\right)\end{array}\right\}$$

אזי:

$$\iiint_V f=\iint_D\left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

הגדרה 10.3 (מסה של תחום משולשי)**.** יהי תחום תלת מימדי $V\subseteq\mathbb{R}^3$ (האובייקט) ותהי $f\left(x,y,z\right)$ פונקציית צפיפות בכל נקודה בתחום זה. אזי <u>המסה</u> של האובייקט הינה:

$$m=\iiint_V f$$

הגדרה 10.4 (נפח של תחום)**.** יהי תחום תלת מימדי $D \subseteq \mathbb{R}^3$. אזי הנפח של התחום הינו:

$$V = \iiint_D 1$$

הערה 10.5. אם ניתן לבטא את קואורדינטת z בתחום בעזרת $f(x,y)$, אזי אינטגרל זה שווה ל:

$$\iint_D f(x,y)$$

10.2 שינוי משתנים ב $\mathbb{R}^3$

סיכום 10.6 (סיכום שינויי קואורדינטות).

קואורדינטות גליליות נגדיר:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

וקל לוודא (תרגיל לקוראים) כי היעקוביאן הינו r.

קואורדינטות כדוריות נגדיר:

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

והיעקוביאן הינו:

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\cos(\theta)\cdot\det\begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}\right|$$

$$+r\sin(\theta)\cdot\det\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \cos(\theta)\,r^2\left(\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi)\right)$$

$$+r^2\sin(\theta)\left(\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)\right) =$$

$$= \cos^2(\theta)\,r^2\sin(\theta) + r^2\sin(\theta)\sin^2(\theta) = r^2\sin(\theta)$$

11 אינטגרל קווי (מסלולי)

11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון

נחשוב על בית בעל רצפה D, וגובה תקרה $f(x,y)$. נרצה לחשב את קירות הבית.
נדמיין את הקירות כרכבת הרים, ונרצה לסכום את כל עמודי התמיכה בכל נקודה.
למעשה, אפשר לחשוב על אינטגרל קווי כמו הכללה של אינטגרל לא על קו ישר, אלא על מסילה.

אנחנו נעבוד עם פרמטריזציה (וסימונה יהיה $\overrightarrow{r}(t)=(x(t),y(t))$), שכן כלי זה שימושי וחשוב באינטגרלים כאלה.

נבחר חלוקה:

$$a=t_0<\cdots<t_n=b$$

כל נקודה כזו מייצגת נקודה במסלול:

$$\overrightarrow{r}(t_i)$$

בין כל שתי נקודות במסלול עובר מיתר שאורכו:

$$|\Delta\overrightarrow{r}(t_k)|=|\overrightarrow{r}(t_k)-\overrightarrow{r}(t_{k-1})|$$

$$=\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

זהו מרחק אינפיניטסימלי בין שתי נקודות על המסילה. גובה הפונקציה בנקודה הזו הינו:

$$f(\overrightarrow{r}(t_k))$$

ובסה"כ שטח הקיר הוא שטח המלבן. ביחד סכום שטחי כל הקירות יהיה בערך סכום שטחי כל המלבנים:

$$\sum_{k=1}^{n}f(\overrightarrow{r}(t_k))\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

אבל זה לא סכום רימן! אנחנו רוצים את Δt_k! נכפיל ונחלק בו ונקבל:

$$=\sum_{k=1}^{n}f(\overrightarrow{r}(t_k))\sqrt{\left(\frac{x(t_k)-x(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)^2+\left(\frac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)^2}\Delta t_k$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}f(\overrightarrow{r}(t_k))\sqrt{(x'(t_k))^2+(y'(t_k))^2}\Delta t_k$$

זהו סכום רימן כפי שאנחנו רגילים ואוהבים, והוא שואף ל:

$$\to\int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

הגדרה 11.1 (אינטגרל קווי מסוג ראשון במישור)**.** תהי C מסילה ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה ב C. כמו כן, תהי פרמטריזציה של השפה $\overrightarrow{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$. אזי האינטגרל הקווי מסוג ראשון יהיה:

$$\int_C f\mathrm{d}r=\int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

כמובן שבאופן כללי ב $\mathbb{R}^n$ הדבר די דומה.

סימון 11.2. סימונים נוספים לאינטגרלים קווים מסוג ראשון:

$$\oint_C f\mathrm{d}r = \int_C f\mathrm{d}r = \int_r f\mathrm{d}\ell = \oint_C f\mathrm{d}\ell$$

משפט 11.3. לכל פרמטריזציה חח"ע ועל של המסילה מתקיים שהאינטגרל הקווי מסוג ראשון שווה.

הגדרה 11.4 (אורך של שפה)**.** תהי שפה C תהי פרמטריזציה $\overrightarrow{r}(t)$ של C. אזי אורך השפה הינו:

$$\ell_C = \int_C 1\mathrm{d}r$$

אעיר שב $\mathbb{R}^3$ המשמעות משתנה, כאשר $\rho(x,y,z)$ פונקציית צפיפות של אובייקט חד מימדי (כמו חבל), והאינטגרל הקווי הינו המסה של אותו האובייקט.

11.2 אינטגרל קווי מסוג שני

אינטגרל קווי מסוג שני משמעותו לדבר על עבודה. באופן לא פורמלי ודי פשטני, עבודה של גוף היא המכפלה (dot product) של הכוח הפועל על הגוף באורך המסלול שעבר הגוף.

נסמן את וקטור התנועה האינפיניטיסמלי v. כמו כן נסמן את הכוח הפועל F. לכוח יש שני רכיבים. אחד בכיוון התנועה (נסמנו u), אחד ניצב לכיוון התנועה.

סה"כ העבודה האינפיניטיסימלית הינה:

$$|u|\cdot|v| = |F|\cdot\cos(\theta)\cdot|v| = F\cdot v$$

ולכן בעזרת סכומי רימן העבודה הכוללת:

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot(\overrightarrow{r}(t_k)-\overrightarrow{r}(t_{k-1}))$$

ובוודאי שנכפיל ונחלק ב Δt_k ונקבל:

$$= \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\frac{(\overrightarrow{r}(t_k)-\overrightarrow{r}(t_{k-1}))}{\Delta t_k}\Delta t_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\left(\frac{x(t_k)-x(t_{k-1})}{\Delta t_k},\frac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)\Delta t_k$$

וזה שואף ל:

$$\to \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

נשים לב כי $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, שכן זוהי פונקציה שבהנתן מקום מחזירה את <u>הכוח</u> שפועל על הגוף.

הגדרה 11.5 (אינטגרל קווי מסוג שני). תהי מסילה C ותהי פרמטריזציה שלה $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. כמו כן, יהי שדה וקטורי $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. אזי האינטגרל הקווי מסוג שני על $\overrightarrow{F}$ הינו:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_C \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

סימון. סימון נוסף לאינטגרל קווי מסוג שני:

$$\int_C \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'\mathrm{d}t$$

אם נסמן:

$$\overrightarrow{F} = (P,Q)$$
$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$$

אז האינטגרל שווה למעשה:

$$\int_a^b \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'\mathrm{d}t = \int_a^b (Px' + Qy')\,\mathrm{d}t = \boxed{\int_C P\mathrm{d}x + \int_C Q\mathrm{d}y}$$

11.3 שדות משמרים

הרעיון של שדה משמר הוא שהעבודה שעשינו תלוי רק בנקודת ההתחלה ובסיומה.

הגדרה 11.6 (שדה משמר). תהי מסילה C. שדה וקטורי $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ נקרא שדה משמר אם לכל פרמטריזיציה של המסילה $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ בקטע $t \in [a,b]$ מתקיים כי:

$$\int_C U\mathrm{d}\overrightarrow{r} = U\left(\overrightarrow{r}(b)\right) - U\left(\overrightarrow{r}(a)\right)$$

כעת, תהי U פונקציה דיפרנציאבילית. נגדיר את השדה הוקטורי:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(U_x(x,y), U_y(x,y)\right)$$

כמו כן נביט במסילה $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ בקטע $t \in [a,b]$. העבודה של השדה הוקטורי הינה:

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(U_x(x(t), y(t))\, x'(t) + U_y(x(t), y(t))\, y'(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

אבל לפי כלל השרשרת:

$$= \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}U(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = U\left(\overrightarrow{r}(b)\right) - U\left(\overrightarrow{r}(a)\right)$$

כלומר, קיבלנו במקרה זה שהאינטגרל תלוי רק בקצוות!!!

ממשפט גרין ניתן לקבל את הטענה הבאה (ללא הוכחה) שחשובה מאוד במד"ר (ראו נספח):

טענה 11.7 (תנאי מספיק והכרחי לשדה משמר). תהי פונקציה דיפרנציאבילית U. אזי: $U = (P,Q)$ שדה משמר $\iff U_x = U_y$.

11.4 משפט גרין

משפט גרין הוא כלי חישובי שעוזר להפוך אינטגרל קווי מסוג שני לאינטגרל כפול.

משפט 11.8 (משפט גרין)**.** יהי D תחום סגור וחסום שהוא איחוד של מספר סופי של תחומים פשוטים (ביחס לשני הצירים) ותהי C שפתו. נגדיר על C כיוון נגד כיוון מחוגי השעות ותהיינה $P\left(x,y\right)$, $Q\left(x,y\right)$ פונקציות C' בתחום פתוח המכיל את D ואת שפתו C. אזי:

$$\boxed{\oint_{C}\overrightarrow{F}\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\oint_{C}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\left(Q_{x}-P_{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

הוכחה. נוכיח עבור המקרה בו ניתן להציג את התחום כסטנדרטי לפי שני המשתנים.

נסמן אותו כסטנדרטי לפי x:

$$D=\left\{ \left(x,y\right)\ \middle|\ \begin{array}{c} a\leq x\leq b\\ h_{1}\left(x\right)\leq y\leq h_{2}\left(x\right) \end{array}\right\}$$

למעשה ניתן לחשוב על התחום כמו מלבן, אשר צלעות ציר ה y מעוותות לפי h_{1},h_{2}.

נחשב את סכום האינטגרל של כל אחד מן ארבעת המקטעים שיוצרים את המלבן, ובכך נקבל את האינטגרל על המסילה.

$$r_{1}\left(t\right)=\left(a,t\right),t\in\left[h_{2}\left(a\right),h_{1}\left(a\right)\right]$$

(שימו לב שאנו הולכים נגד כיוון השעון!)

$$r_{2}\left(t\right)=\left(t,h_{1}\left(t\right)\right),t\in\left[a,b\right]$$

(אנחנו "מטיילים" על הפונקציה h_{1} בקטע זה)

$$r_{3}\left(t\right)=\left(b,t\right),t\in\left[h_{1}\left(b\right),h_{2}\left(b\right)\right]$$

$$r_{4}\left(t\right)=\left(t,h_{2}\left(t\right)\right),t\in\left[b,a\right]$$

(שימו לב שזה לא מוגדר היטב, הכוונה היא איפה הוא מתחיל ואיפה הוא נגמר, ולא ממש לקטעים בהם מוגדרת המסילה)

נחשב את $\int_{C}P\mathrm{d}x$ בכל אחד מהמקטעים, האינטגרל $\int_{C}Q\mathrm{d}y$ זהה.

$$r_{1}\left(t\right):\int_{h_{2}\left(a\right)}^{h_{1}\left(a\right)}P\left(a,t\right)\cdot0\mathrm{d}t=0$$

$$r_{3}\left(t\right)=\int_{h_{1}\left(b\right)}^{h_{2}\left(b\right)}P\left(b,t\right)\cdot0\mathrm{d}t=0$$

(שימו לב שמדובר בנגזרת של קבוע!) כל שנשאר הוא לחשב את האינטגרל על הקצוות האחרים:

$$\int_{C}P\mathrm{d}x=\underbrace{\int_{a}^{b}P\left(t,h_{1}\left(t\right)\right)\cdot1\mathrm{d}t}_{r_{2}\left(t\right)}+\underbrace{\int_{b}^{a}P\left(t,h_{2}\left(t\right)\right)\cdot1\mathrm{d}t}_{r_{4}\left(t\right)}$$

$$= \int_a^b \left(P\left(t, h_1\left(t\right)\right) - P\left(t, h_2\left(t\right)\right)\right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_{h_2(t)}^{h_1(t)} P_y\left(t, y\right)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}t$$

$$= -\int_a^b \left(\int_{h_1(t)}^{h_2(t)} P_y\left(t, y\right)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}t = -\iint_D P_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ובאופן דומה ניתן להוכיח כי:

$$\int_C Q\mathrm{d}y = \iint_D Q_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

וביחד, כיוון שהלכנו נגד כיוון השעון נקבל שבסה"כ:

$$\oint_C \overrightarrow{F}\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \iint_D \left(Q_x - P_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

כפי שרצינו. □

12 אינטגרלים משטחיים

12.1 אינטגרל משטחי מסוג ראשון

הרעיון הוא לחשב את שטח גרף הפונקציה בתחום נתון (שטח תקרת הבית). לשם כך נשתמש בפרמטריזציה דו מימדית. המטרה שלה לייצג

הגדרה 12.1 (פרמטריזציה דו מימדית)**.** פרמטריזציה דו מימדית היא:

$$\overrightarrow{s}\left(u, v\right) : D \to M$$

כאשר:

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$M \subseteq \mathbb{R}^3$$

אפשר לחשוב על זה כמו מלבן שמושלך על משטח, בצורה "כמעט הפיכה".

יהי בית בעל רצפה שצורתה התחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ וגובהו $f\left(x, y\right)$. נסמן את גרף הפונקציה בתחום (כלומר התקרה) ב M, אזי שטח הפנים של הגרף הינו:

$$A = \iint_M 1\mathrm{d}S$$

כמו כן, אם $g\left(x, y, z\right)$ פונקציית צפיפות בכל נקודה ב $\mathbb{R}^3$, אזי מסת התקרה הינה:

$$m = \iint_M g\mathrm{d}S$$

כעת, בשביל לחשב ממש את מסת התקרה, נרצה לקחת יחידת שטח אינפיניטיסמלית ולהפוך אותה ליחידת שטח על הפונקציה. כיצד נעשה זאת? ניקח את וקטורי הקטע של המקבילית האינפיטיסמליית הנוצרת משתי נקודות על הגרף (ממש כמו כדור דיסקו), וניקח את הגודל של

המכפלה הוקטורית - שהרי זוהי שטח המקבילית ונכפיל בפונקציה בכדי להשיג את המסה של יחידת השטח הנתונה. המסה הכוללת תהיה סכום של כל המקביליות הנ"ל, כפול הפונקציה בהם.

כעת, סכום הרימן המתאים יהיה, עבור תחום הפרמטרים:

$$D = \left\{ \ (u,v) \ \middle| \ \ldots \ \right\}$$

$$\overrightarrow{s} : D \to M$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

כאשר M הוא המשטח, $\overrightarrow{s}$ פמרטריזציה, f פונקציית הצפיפות. לכן נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} f\left(\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)\right)\left|\left(\overrightarrow{s}\left(u_i,v_{j-1}\right)-\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)\right)\times\left(\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_j\right)-\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)\right)\right|$$

נעשה את ה WIN הידוע ונקבל:

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} f\left(\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)\right)$$

$$\cdot\left|\left(\frac{\overrightarrow{s}\left(u_i,v_{j-1}\right)-\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)}{\Delta u_i}\right)\times\left(\frac{\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_j\right)-\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)}{\Delta v_j}\right)\right|\Delta u_i \Delta v_j$$

אבל זה שווה בערך ל:

$$\approx \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} f\left(\overrightarrow{s}\left(u_{i-1},v_{j-1}\right)\right)\cdot\left|\overrightarrow{s}_u\left(u_i,v_j\right)\times\overrightarrow{s}_v\left(u_i,v_j\right)\right|\Delta u_i \Delta v_j$$

וזה שואף ל:

$$\to \iint_D f\left(\overrightarrow{s}\left(u,v\right)\right)\left|\overrightarrow{s}_u\left(u,v\right)\times\overrightarrow{s}_v\left(u,v\right)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

סימון 12.2. מסמנים אינטגרל משטחי מסוג ראשון זה בצורה:

$$\oiint_M f\mathrm{d}S = \iint_M f\mathrm{d}S = \iint_D f\left(\overrightarrow{s}\left(u,v\right)\right)\left|\overrightarrow{s}_u\left(u,v\right)\times\overrightarrow{s}_v\left(u,v\right)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

משפט 12.3. כל עוד הפרמטריזציה חח"ע ועל, האינטגרל זהה.

טענה 12.4. שטח הפנים של פונקציה $f\left(x,y\right)$ בתחום D היא:

$$S = \iint_D \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

הוכחה. נבצע פרמטריזציה לגרף הפונקציה:

$$\overrightarrow{s}\left(x,y\right) = \left(x,y,g\left(x,y\right)\right), \left(x,y\right)\in D$$

פונקציית הצפיפות היא:

$$f\left(x,y,z\right) = 1$$

לכן שטח הפנים הוא:

$$\iint_M 1\mathrm{d}S = \iint_D 1 \cdot |\overrightarrow{s}_x \times \overrightarrow{s}_y| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

אבל נשים לב כי:

$$\overrightarrow{s}_x \times \overrightarrow{s}_y = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & g_x \\ 0 & 1 & g_y \end{pmatrix} = (g_x, g_y, 1)$$

ולכן שטח הפנים הוא:

$$= \iint_D \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\square$

12.2 אינטגרל משטחי מסוג שני

יש לנו משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויש לנו שדה וקטורי משולש! $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. אנחנו רוצים לחשב את השטף של השדה הוקטורי על המשטח (באחד הכיוונים, ז"א באחד מהכיוונים של הנורמל למשטח).

שימו לב! צריך לומר בשאלה באיזה כיוון הנורמל.

הערה. למי שאינו בקיא במושג השטף, אם השדה הוקטורי מתאר את עוצמת וכיוון הרוח בכל נקודה, השטף הוא "כמות" הרוח שפוגעת במשטח".

באופן דומה לאינטגרל משטחי מסוג ראשון, נפרק את המשטח למקביליות "מראות של כדור דיסקו", ובכל מקבילית נכפול את שטח המקבילית ברכיב של השדה הוקטורי המאונך למשטח.

נפרק לרכיבים את השדה הוקטורי, כך שהרכיב המאונך למשטח יוותר, והמקביל לו יהיה אפס. מטריגו, נקבל כי השטח הוא:

$$\left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \text{parallelgram of area} \cdot \cos(\theta)$$

אבל זוהי בדיוק המכפלה הסקלרית של:

$$\overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}$$

כאשר $\widehat{n}$ הוא וקטור הנורמל הנתון. לכן סכומי הרימן הינם:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} F\left(\overrightarrow{s}\left(u_{i-1}, v_{j-1}\right)\right) \cdot \left(\left(\overrightarrow{s}\left(u_i, v_{j-1}\right) - \overrightarrow{s}\left(u_{i-1}, v_{j-1}\right)\right) \times \left(\overrightarrow{s}\left(u_{i-1}, v_j\right) - \overrightarrow{s}\left(u_{i-1}, v_{j-1}\right)\right)\right)$$

קל לעשות את ה WIN המתקבל ולקבל כי זה בערך שואף ל:

$$\iint_D \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{s}(u,v)\right) \cdot \left(\overrightarrow{s}_u \times \overrightarrow{s}_v\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

סימון 12.5. סימון לאינטגרל משטחי מסוג שני:

$$\oiint_M \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_M \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_D \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{s}(u,v)\right) \cdot \left(\overrightarrow{s}_u \times \overrightarrow{s}_v\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

12.3 משפט גאוס (הדיברגנץ)

משפט גאוס הופך אינטגרל משטחי לאינטגרל משולש.

משפט 12.6. יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ עם מעטפת M. נביט בנורמל $\widehat{n}$ כלפי חוץ הגוף. אזי:

$$\iint_M \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\left(\overrightarrow{F}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

הערה 12.7. הדיברגנץ (div) מוגדר להיות:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

כאשר ∇ הוא הגראדיאנט, כלומר:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ואם נסמן:

$$\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$$

ונקבל:

$$P_x + Q_y + R_z$$

הצעה. בכדי למצוא את כיוון הנורמל, ניתן להציב נקודה ולראות את הכיוון

12.4 משפט סטוקס

משפט סטוקס הוא הכללה של משפט גרין בשני משתנים.

משפט 12.8. יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי C שפת המשטח. נניח שכיוון המסלול על שפת המשטח הוא נגד כיוון השעון, כאשר הולכים בכיוון נורמל $\widehat{n}$. אזי:

$$\boxed{\oint_C \overrightarrow{F} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \iint_M \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{F}\right) \widehat{n} \mathrm{d}S}$$

הערה 12.9. $\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{F}\right)$ מוגדר להיות $\nabla \times \overrightarrow{F}$. כלומר אם נסמן $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ אזי:

$$\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{F}\right) = \det\begin{pmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

מסקנה 12.10. משפט סטוקס הוא מקרה פרטי של גרין!

הוכחה. יהי משטח שמוכל בתוך מישור xy. נניח שהפרמטריזציה של המשטח היא:

$$\overrightarrow{s}(x, y) = (x, y, 0)$$

כאשר $(x, y) \in D$. כמו כן ניקח שדה וקטורי שכל הוקטורים הם במישור xy:

$$\overrightarrow{F}(P(x, y), Q(x, y), 0)$$

ניתן להפעיל את משפט סטוקס:

$$\oint_C \overrightarrow{F}\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \iint_M \operatorname{rot}\left(\overrightarrow{F}\right)\widehat{n}\mathrm{d}S$$

נחשב את $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{F}\right)$:

$$\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{F}\right) = \det\begin{pmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{pmatrix} = (Q_z - 0, P_z - 0, Q_x - P_y)$$

אבל כיוון שאלו פונקציות התלויות ב x, y בלבד נקבל אפסים בשתי הכניסות הראשונות. נחשב את הנורמל:

$$\overrightarrow{s}_x \times \overrightarrow{s}_y = \cdots (0,0,1)$$

$$\iint_M \operatorname{rot}\left(\overrightarrow{F}\right)\widehat{n}\mathrm{d}S = \iint_D (0,0,Q_x - P_y)\cdot(0,0,1) = \iint_D Q_x - P_x$$

□

נספחים

א׳ אלגברה לינארית (תזכורת)

א׳.1 הגדרות בסיסיות ואריתמטיקת וקטורים

הגדרה א׳.1 ($\mathbb{R}^n$). המרחב $\mathbb{R}^n$ מוגדר להיות:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \left(\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right) \middle| a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

כל איבר $v \in \mathbb{R}^n$ נקרא <u>וקטור מסדר n</u>. לעיתים כותבים גם $\bar{v}$, $\underline{v}$ או $\vec{v}$ בכדי להדגיש שמדובר בווקטור, בניגוד לסתם מספר ממשי, אשר בהקשרים שונים יכונה כ"סקלר".

הערה. לעיתים כותבים וקטור בצורה אופקית: $(a_1, \ldots, a_n)$.

הגדרה א׳.2 (אריתמטיקה של וקטורים). יהיו $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_n), \vec{u} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. נגדיר את הפעולות הבאות:

סכום: נגדיר את $v + w$ להיות:

$$\vec{v} + \vec{w} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

כפל בסקלר: נגדיר את $c \cdot v$ להיות:

$$c \cdot \vec{v} = (c \cdot a_1, \ldots, c \cdot a_n) \in \mathbb{R}^n$$

מכפלה סקלרית/פנימית (dot product): נגדיר את $v \cdot w$ להיות:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$$

אורך (נורמה): נגדיר את $|v|$ להיות:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \in \mathbb{R}^+$$

מרחק (מטריקה): נגדיר את $d(v, w)$ להיות:

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \in \mathbb{R}^+$$

הגדרה א׳.3 (וקטורים מיוחדים).

- <u>וקטור האפס</u>: $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. אינטואיטיבית ניתן לחשוב עליו כעל וקטור ללא כיוון.
- <u>הוקטור הנגדי</u> לוקטור $v \in \mathbb{R}^n$ הוא: $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$

קל לוודא שמתקיים עבור כל $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

- וקטור יחידה (נורמלי, מנורמל): וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ ייקרא <u>וקטור יחידה</u> אם $|\vec{v}| = 1$. שימו לב כי כל וקטור $\vec{v} \neq \vec{0}$ ניתן להפוך לוקטור יחידה (או נורמלי) ע"י תהליך הנרמול:

$$\vec{v} \mapsto \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

אם $\vec{v}$ וקטור מנורמל, לעיתים מסמנים אותו כך: $\hat{v}$. הרעיון בנרמול הוא שהוא מצביע בכיוון הווקטור המקורי, אך ללא חשיבות לגודל (הוא 1).

- שני וקטורים $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ייקראו <u>אורתוגונליים או א"ג (מאונכים, ניצבים)</u> אם $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. לרוב מסמנים $\vec{v} \perp \vec{w}$.

- באופן כללי, קבוצת וקטורים $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ נקראת א"ג אם לכל $i \neq j$ מתקיים כי $\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = 0$. כמו כן, קבוצת וקטורים $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ נקראת נורמלית אם לכל i מתקיים כי $|\vec{v_i}| = 1$. אעיר כי קבוצת וקטורים א"ג ונורמלית נקראת קבוצה אורתונורמלית (א"נ).

- <u>וקטור הקטע</u> של הנקודות $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2)$ מוגדר להיות (שימו לב לחשיבות הסדר!):

$$\vec{v}_{p_1,p_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

קל לראות שמתקיים כי וקטור הקטע v של p_1, p_2 מקיים:

$$|\vec{v}| = d(p_1, p_2)$$

עובדה א'.4 (תכונות של אריתמטיקת וקטורים)**.** : לכל $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ולכל $c, d \in \mathbb{R}$ מתקיים:

- פעולת החיבור של וקטורים היא חילופית (מקיימת את חוק החילוף) וקיבוצית (מקיימת את חוק הקיבוץ).
- פעולת הכפל בסקלר של וקטורים היא חילופית וקיבוצית.
- מתקיים חוק הפילוג:

$$c \cdot (v + w) = c \cdot v + \cdot w$$

וכמו כן:

$$(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$$

- תכונות של מכפלה סקלרית:
  - סימטריות:

$$v \cdot w = w \cdot v$$

  - הומוגניות:

$$(cv) \cdot w = c \cdot (v \cdot w)$$

  - פילוג:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

– אי שליליות:

$$v\cdot v=|v|^{2}\geq 0$$

וכן $v\cdot v=0 \iff v=0$.

- תכונות של נורמה:
  – הומוגניות:
  $$|c\cdot v|=|c|\cdot|v|$$
  – אי שוויון המשולש:
  $$|v+w|\leq|v|+|w|$$
  – אי שליליות:
  $$v\cdot v=|v|^{2}\geq 0$$
  וכן $v\cdot v=0 \iff v=0$.
- תכונות של מטריקה:
  – אי שליליות:
  $$d\left(v,w\right)\geq 0$$
  וכן $d\left(v,w\right)=0 \iff v=w$.
  – סימטריות:
  $$d\left(v,w\right)=d\left(w,v\right)$$
  – אי שוויון המשולש:
  $$d\left(v,u\right)\leq d\left(v,w\right)+d\left(w,u\right)$$
- אי שוויון קושי שוורץ (אשק"ש):
  $$|v\cdot w|\leq|v|\cdot|w|$$
  ושוויון מתקיים אמ"מ v,w ת"ל.

הערה א'.5. שימו לב כי לפי אי שוויון קושי שוורץ ניתן להגדיר זווית בין שתי וקטורים להיות:

$$\theta=\arccos\left(\frac{v\cdot w}{|v|\cdot|w|}\right)$$

שכן לפי אשק"ש מתקיים כי $-1\leq\frac{v\cdot w}{|v|\cdot|w|}\leq 1$ ולכן הנ"ל מוגדר היטב.
כמו כן ניתן לומר כי:

$$v\cdot w=|v|\cdot|w|\cdot\cos\left(\theta\right)$$

אעיר כי ב $\mathbb{R}^{2}$ ניתן להוכיח זאת בעזרת משפט הקוסינוסים.
כמו כן, מתקיים שאם הוקטורים מאונכים אזי המכפלה הסקלרית היא 0, ולכן הזווית שלהם שווה $\frac{\pi}{2}$.

א׳.2 צירופים לינארים, תלות לינארית ובסיס

הגדרה א׳.6 (צירוף לינארי)**.** תהי קבוצת וקטורים $v_1,\dots,v_n$. אומרים כי v הוא צירוף לינארי (צ"ל) אם קיימים סקלרים $c_1,\dots c_n$ כך ש:

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$$

הגדרה א׳.7 (פרישה)**.** תהי קבוצת וקטורים $v_1,\dots v_n$. נגדיר את המרחב הנפרש להיות קבוצת כל הצירופים הלינאריים של הקבוצה דלעיל, בתוספת וקטור האפס (אם הקבוצה ריקה):

$$\text{span}\left\{v_1,\dots,v_n\right\} = \left\{v \mid \exists c_1,\dots c_n \in \mathbb{R} : c_1v_1+\cdots+c_nv_n = v\right\} \cup \left\{\vec{0}\right\}$$

הגדרה א׳.8 (תלות לינארית)**.** קבוצת וקטורים $v_1,\dots,v_n$ תיקרא תלויה לינארית (ת"ל) אם קיימים סקלרים (לא כולם אפס) $c_1,\dots,c_n$ כך ש:

$$c_1v_1+\cdots+c_nv_n = \vec{0}$$

אחרת תיקרא בלתי תלוייה לינארית (בת"ל). כלומר, אם $c_1v_1+\cdots+c_nv_n = \vec{0}$ אזי $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

אינטואיטיבית, מושג זה שקול לכך שווקטורים נמצאים על אותו ישר, מישור וכדומה, או בצורה יותר אלגנטית: "מקבילים".

מסקנה א׳.9. קבוצת וקטורים ת"ל $\iff$ וקטור אחד הוא צירוף של שאר הוקטורים.

הוכחה. נסמן c_i את הסקלר ששונה מ 0 (כי נתון שלא כולם אפס). לפיכך:

$$c_1v_1+\cdots+c_iv_i+\cdots+c_nv_n = \vec{0}$$

$$\iff c_iv_i = -c_1v_i - \cdots - c_{i-1}v_{i-1} - c_{i+1}v_{i+1} - \cdots - c_nv_n$$

$$\iff v_i = -\frac{c_1}{c_i}v_i - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}v_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}v_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i}v_n \in \text{span}\left\{v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n\right\}$$

□

הגדרה א׳.10 (בסיס)**.** קבוצת וקטורים בת"ל ופורשת (כאשר $\text{span}\left\{v_1,\cdots,v_n\right\} = V \subseteq \mathbb{R}^n$) נקראת בסיס.

משפט א׳.11 (יחידות ההצגה)**.** יהי בסיס סדור $B = \left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ ל- $\mathbb{R}^n$. אזי לכל $v \in \mathbb{R}^n$ קיים צ"ל יחיד כך ש:

$$v = c_1v_1+\cdots+c_nv_n$$

הוכחה. יהי $v \in \mathbb{R}^n$.

קיום: טריוויאלי כי בסיס פורש את כל $\mathbb{R}^n$. לפיכך קיים צ"ל שכזה.

יחידות: יהיו שני צ"ל של v:

$$c_1v_1+\cdots+c_nv_n = d_1v_1+\cdots+d_nv_n$$

לפיכך:

$$\left(c_1-d_1\right)v_1+\cdots+\left(c_n-d_n\right)v_n = \vec{0}$$

אבל מכיוון שהוקטורים בבסיס בת"ל מתקיים כי:

$$c_1 - d_1 = \cdots = c_n - d_n = 0 \iff c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$$

$\square$

הגדרה א'.12 (בסיסים מיוחדים).

- בסיס ייקרא בסיס אורתוגנולי (בא"ג) אם כל הוקטורים בבסיס א"ג זה לזה.
- בסיס ייקר בסיס נורמלי (ב"נ) אם כל הוקטורים בבסיס נורמליים.
- בסיס ייקרא אורתונורמלי (בא"נ) אם כל הוקטורים בבסיס נורמליים ואורתוגונליים.

ביתר פירוט, מתקיים כי לכל i, j:

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(הדלתא של קרונקר)

דוגמה א'.13 (הבסיס הסטנדרטי). הבסיס הסטנדרטי (שהוא גם בא"נ) ל $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

אינטואיטיבית, בסיס זה אומר כמה ללכת ימינה/שמאלה, למעלה/למטה, אחורה/קדימה בשביל לקבל את הוקטור.

מסקנה. כל וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ ניתן לכתיבה בצורה: $v = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$, כאשר $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\right\}$ בא"נ ל $\mathbb{R}^3$. סימון זה שימושי כאשר מדברים על הצגות שונות של וקטורים (הצגה מלבנית / קרטזית, הצגה כדורית, והצגה גלילית).

א'.3 היטלים

הגדרה א'.14 (היטל על וקטור). יהיו וקטורים $v, w \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את <u>ההיטל של v על הוקטור w</u> להיות:

$$\text{proj}_w(v) = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w$$

הגדרה א'.15 (היטל על בא"ג). יהי וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ ויהי בא"ג $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ לתת המרחב $V \subseteq \mathbb{R}^n$. נגדיר את ההיטל של v על $\text{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$ להיות:

$$\pi_B(v) = \sum_{i=1}^{n} \text{proj}_{w_i}(v) = \frac{v \cdot w_1}{|w_1|} w_1 + \cdots + \frac{v \cdot w_n}{|w_n|} w_n$$

עובדה א'.16 (היטל הוא הקרוב ביותר). יהי וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ ויהי תת המרחב $V \subseteq \mathbb{R}^n$ עם בסיס B. אזי מתקיים כי ההיטל הוא הוקטור <u>היחיד</u> שקרוב ביותר (מטריקה) ל v. ביתר פירוט, וקטור ההיטל הוא הוקטור היחיד כך שעבורו מתקבל המינימום של הקבוצה:

$$\{ d(v - w) | \, w \in V \}$$

לפיכך, ניתן להגדיר מרחק וזווית בין וקטור למרחב ע"י המרחק והזווית בינו לבין ההיטל.

א'.4 מכפלה וקטורית

הגדרה א'.17 (מכפלה וקטורית (cross product)). יהיו $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{R}^3$. נסמן:

$$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$$

$$\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$$

(קואורדינטות קרטזיות). אזי המכפלה הווקטורית מוגדרת להיות:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\,\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\,\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\,\hat{z}$$

מובן שההגדרה לפי דטרמיננטה (צד שמאל) לא באמת מוגדרת היטב, אלא זה סימון שנועד להקל על זכירת ההגדרה (שכן איך אפשר להציב וקטור בכניסה של סקלר?). מפתחים לפי לפלס על השורה הראשונה (הווקטורים עצמם).

טענה א'.18 (גודל של מכפלה וקטורית). . יהיו $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{R}^3$ אזי:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\sin(\theta)$$

כאשר θ מוגדרת להיות הזווית בין הוקטורים.

באופן גאומטרי, גודל המכפלה הווקטורית היא שטח המקבילית הנוצרת מהווקטורים.

הוכחה. נסתכל על הגודל בריבוע של צד ימין:

$$\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2\sin^2(\theta)=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2\left(1-\cos^2(\theta)\right)=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2-\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2\cos^2(\theta)$$

אבל מהזהות של אשק"ש:

$$=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2-(A\cdot B)^2=\left(A_x^2+A_y^2+A_z^2\right)\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2$$

לא אלאה את הקוראים בפתיחת הסוגריים, אך ניתן לראות כי:

$$=(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2$$

זה אכן נראה מוכר. זהו האורך בריבוע של הווקטור:

$$\left|(A_yB_z-A_zB_y)\,\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\,\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\,\hat{z}\right|^2$$

אבל זוהי המכפלה הווקטורית:

$$|A\times B|^2$$

כמו שרצינו. $\square$

טענה א'.19 (כיוון מכפלה וקטורית). יהיו $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{R}^3$. אזי:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\perp\vec{A}$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\perp\vec{B}$$

הוכחה. נוכיח עבור A, ההוכחה עבור B זהה. נסמן:

$$A = (A_x, A_y, A_z)$$

$$B = (B_x, B_y, B_z)$$

נחשב ממש את ה dot product:

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = A_x \left(A_y B_z - A_z B_y\right) + A_y \left(A_z B_x - A_x B_z\right) + A_z \left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

$$= \underbrace{A_x A_y B_z}_{(1)} - \underbrace{A_x A_z B_y}_{(2)} + \underbrace{A_y A_z B_x}_{(3)} - \underbrace{A_y A_x B_z}_{(1)} + \underbrace{A_z A_x B_y}_{(2)} - \underbrace{A_z A_y B_x}_{(3)} = 0$$

$\square$

נשים לב, כי באופן כללי, אם ניקח שלושה וקטורים $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3$, אזי לפי הגדרה מתקיים כי:

$$\vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = C_x \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{x} + C_y \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \hat{y} + C_z \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \hat{z}$$

ולפיכך, לפי פיתוח הדטרמיננטה לפי לפלס ניתן לומר כי זהו:

$$= \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

עקב ההגדרה לפי דטרמיננטה, רוב התכונות שלה די זהות לתכונות הדטרמיננטה, וע"כ אשאיר אותם כתרגיל לקוראים.

טענה א'.20 (תכונות המכפלה הוקטורית). יהיו $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$ ויהיו $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$. אזי:

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
2. $\alpha\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \left(\alpha \overrightarrow{a}\right) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\alpha \overrightarrow{b}\right)$
3. $\overrightarrow{a} \times \left(\beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}\right) = \beta\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}\right)$
4. $\left(\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \alpha\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}\right) + \beta\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$
5. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0 \iff \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ ת"ל.

ב' העשרות הכרחיות

הגדרת האקספוננט המרוכב וזהות אוילר

ראינו שטור הטיילור של האקספוננט הינו:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. בעזרתו, ניתן להגדיר את האקספוננט בחזקת המספר המרוכב.

הגדרה. יהי $z \in \mathbb{C}$. אזי נגדיר:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

למעשה, כלל חוקי החזקות והאקספוננטים נגזרים מתוקף ההגדרה הזו. דבר שלא אעשה במסגרת ההעשרה ההכרחית אך אתן זאת כנקודה למחשבה.
כעת, יהי $z \in \mathbb{C}$. נשים לב כי:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot \frac{z^n}{n!}$$

ניתן לפצל את הטור הזה (כיוון שהוא מתכנס) לחלק המדומה והמרוכב, לפי החזקה ה n של i.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

אבל אלה טורי החזקות ידועים:

$$= \cos(z) + i \cdot \sin(z)$$

ובסה"כ קיבלנו את נוסחת אויילר:

$$e^{zi} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$$

ובפרט עבור $z = \pi$ נקבל את זהות אויילר:

$$e^{i\pi} = -1$$

אלגוריתם Gradient-Decent

אלגוריתם זה מאוד חשוב בבינה מלאכותית ובמדעי המחשב בפרט.
בהינתן פונקציה דיפרנציאבילית בשני משתנים, רוצים למצוא את המינימום של הפונקציה (בקירוב).

האלגוריתם הוא ללכת בעקבות מינוס הגראדיאנט מספר מסוים של צעדים שרירותיים מנקודת התחלה ספציפית כלשהי, ולשמור את הערך המינימלי שמצאנו.
זאת, כיוון שראינו שמינוס הגראדיאנט מצביע על הכיוון בו הערך של הפונקציה הוא הנמוך ביותר, ביחס לנקודה מסוימת.

אציג פסאדו קוד אשר ימחיש את הרעיון. נניח ש `f` הפונקציה וכן הנגזרות החלקיות שלה הן `f_x`, `f_y`

```
# functions:
func f(x, y) = ...
func f_x(x, y) = ...
func f_y(x, y) = ...

# gradient of function f.
func grad(x0, y0) = grad(v):
    return (f_x(x0, y0), f_y(x0, y0))

# length of a vector.
func length(v):
    return v_x ^ 2 + v_y ^ 2

# apply a step to vector v with direction of gradient.
func apply_step(v, step):
    g = grad(v_x, v_y)
    g_len = length(g)

    # ecxactly at a stationary point.
    if g_len == 0 then return v

    return (v_x - step / g_len, v_y - step / g_len)

# Actual computing method
func Gradient_Decent(start, step, tries):
    # point we will be travel on.
    point = start
    min_val = f(start_x, start_y)
    for i to [0, tries) do:
        # go along with gradient and save value.
        point = apply_step(v, step)
        val = f(point_x, point_y)

        # if found smaller than minimum, keep it instead.
        if val < min_val then min_val = val

    return min_val
```

מד"ר מדוייקת

אציג תחילה הסבר קצר למהי מד"ר.
מד"ר זה קיצור למשוואה דיפרנציאלית רגילה.
משוואה רגילה, היא תלות בין ערכים של משתנה נעלם. המטרה בפתירת המשוואה היא למצוא ערך (אולי יותר או להראות שאין בכלל) שמקיים את האילוצים שבאים לידי ביטוי במשוואה.

באופן דומה, משוואה דיפרנציאלית היא תלות בין פונקציה, נגזרות ומשתנים. המטרה שלנו היא למצוא את הפונקציה שעומדת בכל האילוצים שבאים לידי ביטוי במד"ר. פתרתי כאן (3.19) מד"ר כדוגמה.

מד"ר מדוייקת, היא מד"ר מהצורה:

$$f_x\left(x,y\right)+f_y\left(x,y\right)y'=0$$

כאשר אנחנו רוצים למצוא פונקציה $y\left(x\right)$ שמקיימת את הדרוש, כאשר $f\left(x,y\left(x\right)\right)$ פונקציה כלשהי בשני המשתנים בהתאמה (ודיפרנציאבילית כמובן). אבל נשים לב כי לכל x בקטע, מתקיים לפי כלל השרשרת:

$$f'\left(x,y\right)=f_x\left(x,y\right)\cdot 1+f_y\left(x,y\right)y'=0$$

ולכן, מתקיים שהפתרון הוא:

$$f\left(x,y\left(x\right)\right)=C$$

כאשר C קבוע. זאת עקב אינטגרציה על שני הצדדים. (האינטגרל על 0 הוא קבוע, שנסמנו C).
ככה קיבלנו פתרון סתום, ז"א פתרון שהוא לא בדיוק מהצורה $y\left(x\right)=\cdots$, אלא איזשהו קשר, אבל ללא נגזרות - וזהו פתרון המד"ר.

חישוב שטחים ונפחים מוכרים

בסעיף זה נחשב ונוכיח מספר גדלים מוכרים.

תרגיל (שטח מעגל). נחשב את השטח של התחום:

$$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq R^2\ \right\}$$

(אנחנו מניחים למען הנוחות ולמען הפשטות שראשית המעגל בראשית הצירים). נחשב את שטח חצי המעגל. (מטעמי סימטריה, שכן חצי סימטרי של המעגל הינו מתחת לציר ה x).

$$D'=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ \begin{array}{c} x^2+y^2\leq R^2\\ y\geq 0\end{array}\ \right\}$$

השטח הינו:

$$S=2\iint_D 1$$

נעביר לקואורדינטות קוטביות:

$$\begin{cases} x=r\cos\left(\theta\right)\\ y=r\sin\left(\theta\right)\end{cases}$$

$$|J|=r$$

כאשר $0\leq r\leq R$ וכן $0\leq\theta\leq\pi$ (כי החצי החיובי של המעגל)
ולכן:

$$S=2\int_0^\pi\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{1}{2}r^2\Big|_0^R\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^\pi\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{1}{2}R^2\theta\Big|_0^\pi=\pi R^2$$

ולכן:

$$\boxed{\text{circle a of area}=\pi R^2}$$

תרגיל (היקף מעגל)**.** נחשב את היקף המסילה:

$$C=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2=R^2\ \right\}$$

(אנחנו מניחים למען הנוחות ולמען הפשטות שראשית המעגל בראשית הצירים). יש לחשב את האינטגרל הקווי מסוג ראשון על אחד:

$$\ell=\oint_C 1\mathrm{d}r$$

נביט בפרמטריזציה:

$$\overrightarrow{r}(t)=(R\cos(t)\,,R\sin(t))$$

כאשר $t\in[0,2\pi]$. כעת:

$$\ell=\int_0^{2\pi}1\cdot\sqrt{(-R\cdot\sin(t))^2+(R\cdot\cos(t))^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}R\mathrm{d}t=2\pi R$$

(הערה: שימו לב כי $R\geq 0$ ולכן הערך המוחלט מתבטל). לפיכך:

$$\boxed{\text{circle a of perimiter}=2\pi R}$$