דפי נוסחאות למד"ר - הלל בן חנוך

מבוא וסדר ראשון

הגדרות כלליות

- **מד"ר:** קשר מהצורה $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$.
- **סדר:** סדר הנגזרת הגבוהה ביותר.
- **מעלה:** החזקה של הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר (לאחר שהמשוואה פולינומיאלית בנגזרות).
- **תנאי התחלה:** מד"ר מסדר n דורשת n תנאי התחלה לקביעת פתרון פרטי.
- **ליניאריות:** אם ניתן לכתוב כ- $a_n(x)y^{(n)}+\dots+a_0(x)y=R(x)$.
- **פתרון:** כללי (עם קבועים), פרטי (עם ת"ה), סתום ($G(x,y)=C$), סינגולרי (לא נובע מהכללי).
- **משפט קיום ויחידות (פיקארד):** לבעיית התחלה $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. אם f, f'_y רציפות במלבן סביב (x_0,y_0), קיים פתרון יחיד.

משוואות פריקות (Separable)

- **צורה:** $y'=f(x)g(y)$ או $M(x)dx+N(y)dy=0$.
- **פתרון:** $\int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$.
- **הערה חשובה:** יש לבדוק בנפרד פתרונות קבועים $y=y_0$ המאפסים את $g(y_0)$, שכן ייתכן שהם "הולכים לאיבוד" בחלוקה.

משוואות הומוגניות

- **צורה:** $y'=f(y/x)$.
- **פתרון:** הצבה $y'=z'x+z \implies z=y/x$. המשוואה הופכת לפריקה: $\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$.

משוואות "כמעט הומוגניות"

צורה. $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$.

- **ישרים נחתכים ($a_1b_2\neq a_2b_1$):** מצא נק' חיתוך (x_0,y_0). הצב $x=X+x_0, y=Y+y_0$. המשוואה הופכת להומוגנית ב-X,Y.
- **ישרים מקבילים ($a_1b_2=a_2b_1$):** הצב $t=a_1x+b_1y$. המשוואה הופכת לפריקה.

משוואות מדויקות

- **צורה:** $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
- **תנאי:** מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.
- **פתרון:** אם מדויקת, קיים פוטנציאל $\phi(x,y)$ והפתרון הוא $\phi(x,y)=C$.
- **מציאת ϕ:** בצע אינטגרל על M לפי x ואינטגרל על N לפי y, וחשב:

$$\phi(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\int N(x,y)\,dy$$

התעלם מהאיברים שחוזרים פעמיים. הפתרון הוא $\phi(x,y)=C$.

גורם אינטגרציה (μ)

מטרה. הופך משוואה לא מדויקת למדויקת.

- אם $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)\Rightarrow \mu(x)=e^{\int f(x)\,dx}$
- אם $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=g(y)\Rightarrow \mu(y)=e^{\int g(y)\,dy}$
- אם המשוואה הומוגנית אז $\mu=\frac{1}{Mx+Ny}$ כאשר $Mx+Ny\neq 0$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

- **צורה:** $y'+P(x)y=Q(x)$.
- **גורם אינטגרציה:** $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$.
- **הפתרון הכללי:** $y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx+C\right)$.
- **מבנה:** $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$.

משוואת ברנולי

- **צורה:** $y'+P(x)y=Q(x)y^t$, ($t\neq 0,1$).
- **פתרון:** הצבה $z=y^{1-t}$ הופכת את המשוואה לליניארית: $z'+(1-t)P(x)z=(1-t)Q(x)$.

מד"ר מסדר שני

הורדת סדר (מקרים מיוחדים)

- **צורה 1: חסר y ($F(x,y',y'')=0$):** הצב $y'=z(x)$, $z'=y''$. מתקבלת מד"ר מסדר 1, $F(x,z,z')=0$. הפתרון הסופי הוא $y(x)=\int z(x)dx+C_2$.
- **צורה 2: חסר x ($F(y,y',y'')=0$):** הצב $y'=z(y)$, ואז $y''=z\frac{dz}{dy}$. מתקבלת מד"ר מסדר 1, $F(y,z,z\frac{dz}{dy})=0$. לאחר מציאת $z(y)$, פותרים את $\frac{dy}{dx}=z(y)$.

מד"ר ליניארית, מקדמים קבועים - הומוגנית

צורה. $ay''+by'+cy=0$.

- **משוואה אופיינית:** $ar^2+br+c=0$.
- **הפתרון $y_h(x)$ תלוי בשורשים r_1,r_2:**
  1. **ממשיים ושונים:** $y_h(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
  2. **ממשי כפול:** $y_h(x)=(C_1+C_2x)e^{rx}$
  3. **מרוכבים צמודים ($r=\alpha\pm i\beta$):** $y_h(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x))$
- **הרחבה לסדר n:** כל שורש r של המשוואה האופיינית בעל ריבוי k תורם לפתרון ההומוגני איבר מהצורה $(C_1+C_2x+\dots+C_kx^{k-1})e^{rx}$.

מד"ר ליניארית, מקדמים קבועים - לא הומוגנית

צורה. $ay''+by'+cy=R(x)$.

- **פתרון כללי:** $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$.

שיטת הניחוש המושכל (מקדמים לא ידועים) למציאת y_p:

1. **בניית קבוצת הניחוש (S):** בהתבסס על אגף ימין $R(x)$, בנה קבוצה S הכוללת את כל הפונקציות שמופיעות ב-$R(x)$ וכל הנגזרות הבלתי תלויות-ליניארית שלהן. השתמש בטבלה הבאה:

אם $R(x)$ מכיל איבר מהצורה...	אז קבוצת הניחוש S מכילה את האיברים...
$P_n(x)$ (פולינום)	$\{x^n,x^{n-1},\dots,x,1\}$
$e^{\alpha x}$	$\{e^{\alpha x}\}$
$\sin(\beta x)$ או $\cos(\beta x)$	$\{\sin(\beta x),\cos(\beta x)\}$
שילובים (לפי מכפלות)	
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$\{x^ne^{\alpha x},\dots,e^{\alpha x}\}$
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\{e^{\alpha x}\sin(\beta x),e^{\alpha x}\cos(\beta x)\}$
$P_n(x)\sin(\beta x)$	$\{x^k\sin(\beta x),x^k\cos(\beta x)\mid k=0,\dots,n\}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\{x^ke^{\alpha x}\sin(\beta x),x^ke^{\alpha x}\cos(\beta x)\mid k=0,\dots,n\}$

2. **ניחוש ראשוני:** הפתרון הפרטי y_p הוא צירוף ליניארי של כל האיברים בקבוצה S עם מקדמים לא ידועים ($A,B,C...$).
3. **בדיקת תהודה (Resonance) ותיקון:** אם איבר כלשהו בניחוש הראשוני y_p הוא גם פתרון של המשוואה ההומוגנית (y_h), קיימת תהודה. **התיקון:** יש להכפיל את **כל הניחוש** ב-x^k, כאשר k היא החזקה השלמה החיובית הנמוכה ביותר שמבטלת את כל החפיפות עם y_h.

שיטת האופרטור המפרק.

- **שלב 1: פירוק האופרטור.** כותבים את המשוואה כ:

$$(D-r_1)(D-r_2)y=\frac{R(x)}{a}$$

כאשר $D=\frac{d}{dx}$ ו-r_1,r_2 הם שורשי המשוואה האופיינית.

- **שלב 2: פתרון מדורג.**
  (א) הגדר: $g(x)=(D-r_2)y$.

טכניקות נוספות

- **שימוש בקשר ההופכי:** אם המשוואה $y' = f(x,y)$ מסובכת, נסו לפתור את $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ עבור $x(y)$. שימושי במיוחד כשהמשוואה הופכת לליניארית ב-$x(y)$.

משוואת קלרו

- **צורה:** $y = xy' + f(y')$.
- **פתרון כללי:** $y = Cx + f(C)$.
- **פתרון סינגולרי:** פתרון המערכת (עם $p = y'$):

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

אינטגרלים נפוצים

הפונקציה	האינטגרל (ללא קבוע C)
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert$
$\int e^{ax}\,dx$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\int \sin(ax)\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\int \cos(ax)\,dx$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \ln(x)\,dx$	$x\ln(x) - x$
$\int \tan(x)\,dx$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\int \sec^2(x)\,dx$	$\tan(x)$

זהויות טריגונומטריות

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
- $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

שיטות אינטגרציה

- **אינטגרציה בחלקים:**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **שיטת ההצבה (שינוי משתנה):**

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad u = g(x)$$

שימושי כאשר חלק מהאינטגרנד הוא נגזרת של ביטוי פנימי.

- **שברים חלקיים:** לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (כאשר מעלת P קטנה ממעלת Q).

(א) פרק את המכנה $Q(x)$ לגורמים ליניאריים ו/או ריבועיים אי-פריקים.

(ב) רשום את השבר כסכום של שברים חלקיים:
- גורם $(ax+b)$ תורם: $\frac{A}{ax+b}$
- גורם $(ax+b)^k$ תורם: $\frac{A_1}{ax+b} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$
- גורם (ax^2+bx+c) תורם: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

(ג) מצא את הקבועים $(A, B, \ldots)$ ע"י השוואת מונים או הצבת ערכי x נוחים.

(ב) פתור את המד"ר מסדר ראשון: $g' - r_1 g = \frac{R(x)}{a}$. הפתרון $g(x)$ יכיל קבוע C_1.

(ג) פתור את המד"ר השנייה: $y' - r_2 y = g(x)$. הפתרון $y(x)$ הוא הפתרון הכללי המבוקש ויכיל קבוע נוסף C_2.

מד"ר ליניארית, מקדמים כלליים

צורה. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$.

- **שלב 1: מציאת פתרון הומוגני y_1:**
  - אם $1 + P(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^x$
  - אם $1 - P(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^{-x}$
  - אם $P(x) + xQ(x) = 0 \implies y_1 = x$
  - אם $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0 \implies y_1 = e^{mx}$
- **שלב 2: מציאת y_2 (הורדת סדר):**

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$$

הפתרון ההומוגני הכללי הוא: $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$.

- **שלב 3: פתרון לא-הומוגני (וריאציית פרמטרים)** הפתרון הפרטי הוא $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, כאשר:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2 R}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1 R}{W(y_1, y_2)}$$

פתרון בעזרת טורים

שיטה. מציאת פתרון סביב $x_0 = 0$ (נק' רגולרית):

1. **הנחת הפתרון:** $y = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2}$
2. **הצבה במד"ר** וסידור לפי חזקות x^k.
3. **נוסחת נסיגה:** השוואת מקדמים ⇐ קשר בין a_n.
4. **חישוב:** מקדמים לפי $a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$.
5. **פתרון כללי:** $y(x) = a_0 \cdot y_{\text{even}}(x) + a_1 \cdot y_{\text{odd}}(x)$.

טורי טיילור שימושיים (סביב 0)

פונקציה	טור חזקות
e^x	$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^\infty x^k$

פונקציה	טור חזקות
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k}$
$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{k=1}^\infty k x^{k-1}$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$

משוואת אוילר-קושי

- **צורה:** $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$.
- **פתרון:** נחש פתרון $y = x^m$. הצבה מובילה למשוואה אינדיציאלית (עזר) עבור m:

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

- **הפתרון תלוי בשורשי המשוואה העזר, m_1, m_2:**
1. **ממשיים ושונים:** $y(x) = C_1|x|^{m_1} + C_2|x|^{m_2}$
2. **ממשי כפול:** $y(x) = (C_1 + C_2\ln|x|)|x|^m$
3. **מרוכבים צמודים ($m = \alpha \pm i\beta$):**

$$y(x) = |x|^\alpha\left[C_1\cos(\beta\ln|x|) + C_2\sin(\beta\ln|x|)\right]$$