פרידה / פריקה:

$$f(x)dx = g(y)dy \Rightarrow \int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

הומוגנית:

מד"ר מהצורה $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$
נקראת הומוגנית קיים $k \in \mathbb{R}$ ולכל $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y) \\ g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{y}{x} \\ y' = z + z'x \\ dy = zdx + xdz \end{cases}$$

כמעט הומוגניות:

$$(A_1x + B_1y + C_1)dx + (A_2x + B_2y + C_2)dy = 0$$

אם יש חיתוך *יחיד* בנקודה (x_0,y_0):

$$\begin{cases} x^* = x - x_0 \Rightarrow dx^* = dx \\ y^* = y - y_0 \Rightarrow dy^* = dy \end{cases}$$

אם מקבילים:

$$\begin{cases} t = A_1x + B_1y \\ dt = A_1dx + B_1dy \end{cases}$$

מדוייקת:

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

כך ש:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

אזי הפתרון הוא:

$$\underbrace{\int f dx}_{\Phi(x)} + \underbrace{\int g dy}_{\Phi(y)} = C$$

לא לחזור פעמיים על אותו ביטוי!

ג"א של מדוייקות:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = h(x) \Rightarrow \mu = e^{\int h(x)dx}$$

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{f} = h(y) \Rightarrow \mu = e^{\int h(y)dy}$$

ליניאריות I:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$\Rightarrow y_H = e^{-\int P(x)dx}, y = y_H\left[\int \frac{Q(x)}{y_H}dx + C\right]$$

ברנולי:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y^{1-n} \\ z' = (1-n)y^{-n}y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

קלרו:

$$y = y'x + f(y')$$

1. $y' = C \Rightarrow y = Cx + f(C)$
2. $x + \frac{df(y')}{dy'} = 0$

ללא y:

$$\begin{cases} z(x) = y' \\ z' = y'' \end{cases} \Leftrightarrow y = \int z dx$$

ללא x:

$$\begin{cases} z(y(x)) = y' \\ zz' = y'' \end{cases}$$

קושי:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{(i)} = f(x)$$

מציבים x^r ופותרים את המשוואה האינדציאילית.

- שורש $\lambda_i \in \mathbb{R}$ מריבוי k תורם
  $x^{\lambda_i}, \dots, \ln^{k-1}|x| \cdot x^{\lambda_i}$
- שורש $\lambda_i = a + bi$ **והצמוד** שלו מריבוי k (כל אחד) תורמים:
  $x^a \ln|b\cos(x)|, \dots, \ln^{k-1}|x|\, x^a \ln|b\cos(x)|$
  $x^a \ln|b\sin(x)|, \dots, \ln^{k-1}|x|\, x^a \ln|b\sin(x)|$

הפתרון למד"ר ההומוגנית y_H הוא צ"ל של כל התורמים.

שיטת הניחוש (קושי):

אם $f(x) = x^a$, וכן a שורש של המשוואה האינדציאלית מריבוי k ננחש:

$$y_p = Cx^a \ln^k|x|$$

הפתרון הכללי הוא $y = y_H + y_p$

ליניארית מקדמים קבועים:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = f(x)$$

מוצאים את כל השורשים של הפ"א: $p(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^n = 0$.

- שורש $\lambda_i \in \mathbb{R}$ מריבוי k תורם:
  $e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_i x}$
- שורש $\lambda_i = a + bi$ **והצמוד** שלו מריבוי k (כל אחד) תורמים:
  $e^{ax}\cos(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)$
  $e^{ax}\sin(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$

הפתרון למד"ר ההומוגנית y_H הוא צ"ל של כל התורמים.

שיטת הניחוש (מקדמים קבועים):

- אם $f(x) = e^{ax}p_n(x)$, $a \in \mathbb{R}$ שורש של הפ"א עם ריבוי k:
  $y_p = x^k e^{ax} p_n(x)$
- אם $f(x) = e^{ax}\cos(bx)p_n(x)$ **או** $f(x) = e^{ax}\sin(bx)p_n(x)$, $a \pm bi$ שורשים של הפ"א עם ריבוי k:
  $y_p = x^k e^{ax} p_{n_1}(x)\cos(x) + x^k e^{ax} p_{n_2}(x)\sin(x)$

הפתרון הכללי הוא $y = y_H + y_p$

שיטת האינטגרציה:

מפרקים את המד"ר בעזרת שורשי הפ"א:

$$(D - \lambda_1 I) \cdots (D - \lambda_n I)y = f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 = (D - \lambda_n I)y \\ \vdots \\ g' - \lambda g = (D - \lambda I)g = f(x) \end{cases}$$

טורים:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

מציאת פתרון אחד על סמך השני:

מציאת פתרון כללי להומוגנית על סמך פתרון נתון:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx$$

מציאת פתרון כללי ללא הומוגנית על סמך פתרון נתון להומוגנית:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

$$\Rightarrow y = y_1 v, \qquad v'' + \left[\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right]v' = \frac{R(x)}{y_1}$$

המקוצמד"ר המוקלד
מבוסס על המד"ריך
עדי מכנס
תהנו ☺

אינטגרלים ידועים:

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+c$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|$$

for $a>0,\ b^2-4ac\neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| \quad \text{for } a>0,\ b^2-4ac=0$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-x+c$$

$$\int \sec x\,dx = \ln(\tan x+\sec x)+c$$

$$\int \csc x\,dx = \ln(\tan(x/2))+c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x+c$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x+c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln(\cos x)+c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln(\sin x)+c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x+c$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int x^2e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2-\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$$

$$\int x^ne^{ax} = \frac{x^ne^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$

המלצות כלליות לפתרון מד"ר

חשוב לשים לב לקשרים בין גורמים שונים בתוך המד"ר! הם יכולים לעזור לפתור אותה!

לפעמים משתלם לסדר את המשוואה בסדר שונה, כדי לקבל פרספקטיבה שונה על המד"ר.

לפעמים כדאי להחליף בין משתנה לפונקציה: $y(x) \leftrightarrow x(y)$, או יותר מכך, להגדיר פונקציה חדשה ומשתנה חדש (שכוללים בתוכם גם את x וגם את y) ואז על פיהם לפתור את המד"ר.

לא מומלץ להתעכב על מציאת ג"א, לפעמים יש שיטות טובות יותר.

כאשר פותרים מד"ר בעזרת טורי טיילור, לעיתים אין צורך להציג את הטור, אלא ניתן להשיג את נוסחת המקדמים ישירות דרך המד"ר.

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \Rightarrow$$

מקרה	פתרון ידוע
$xQ(x)+P(x)=0$	$y=x$
$mP(x)+Q(x)+m^2=0$	$y=e^{mx}$

טורי טיילור ידועים:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \text{for all } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{for all } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \quad \text{for } |x|<1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \text{for all } x$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \text{for all } x$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{for all } x$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} \quad \text{for } |x|<1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad \text{for } |x|\le 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad \text{for } |x|<1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

שינויי משתנים חשובים

אם רואים פונקציה שמכילה ביטוי של קו ישר נוח להגדיר:

$$z = ax+by+c$$

אם נתקלים בביטוי מהצורות האלה, כדאי לשים לב כי:

$$y'x+y=(xy)'=z'$$

לכן נגדיר $z=xy$.

$$y''y+(y')^2=(yy')'=z'$$

ולכן נגדיר $z=yy'$.

זהויות טריגונומטריות:

Euler formula: $\exp(i\alpha)=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$.

$\cos(\alpha)=[\exp(i\alpha)+\exp(-i\alpha)]/2, \quad \sin(\alpha)=[\exp(i\alpha)-\exp(-i\alpha)]/(2i)$.

$1-\cos(\alpha)=2\sin^2(\alpha/2), \quad 1+\cos(\alpha)=2\cos^2(\alpha/2), \quad \sin(\alpha)\pm\sin(\beta)=2\sin(\alpha/2\pm\beta/2)\cos(\alpha/2\mp\beta/2)$.

$\cos(\alpha)\pm\cos(\beta)=2\sin(\alpha/2\pm\beta/2)\cos(\alpha/2\mp\beta/2), \quad \sin(\alpha)\cos(\beta)=[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]/2$.

$\sin(\alpha)\sin(\beta)=[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]/2, \quad \cos(\alpha)\cos(\beta)=[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta), \quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$.

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{[\tan(\alpha)+\tan(\beta)]}{[1-\tan(\alpha)\tan(\beta)]}, \quad \tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{[1-\tan^2(\alpha)]}, \quad \cosh(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}, \quad \sinh(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$.

שיטת וריאצית הפרמטרים:

מציאת פתרון פרטי (עבור $g(x)$) על סמך פתרונות ללינארית-ההומוגנית y_1, y_2:

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$$

$$y_p = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

$$u_1(x) = -\int\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx$$

$$u_2(x) = \int\frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx$$

שיטות אינטגרציה:

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f'g = fg-\int g'f$$

שיטת ההצבה:

1. מציבים $t=f(x)$, ולכן: $dt=f'(x)dx$
2. מחליפים את $f'(x)dx$ ב-dt ואת $f(x)$ ב-t.
(אם ההצבה לא עוזרת, אולי כדאי להביע את x בעזרת t)
3. פותרים את האינטגרל על המשתנה t.
4. חוזרים להצבה, ומחליפים בין t ל-$f(x)$.

פירוק לשברים חלקיים:

תהי פונקציה רציונלית מהצורה:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}$$

1. מחלקים פולינומים כך שדרגת המכנה תהא גדולה ממש מדרגת השארית.
2. מפרקים את הפולינום לגורמים (לינאריים או ריבועיים).
3. לכל גורם לינארי מריבוי k, מציבים: $\frac{A_0}{x-a}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$
ולכל גורם ריבועי (שאינו פריק) מריבוי k מציבים: $\frac{B_0x+C_0}{x^2+bx+c}, \dots, \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$
4. עושים מכנה משותף ומוצאים את הקבועים, זאת בשתי דרכים:
   a. לכל חזקה מגדירים משוואה בה הנעלמים הם הקבועים, ופותרים אותה.
   b. מציבים ערכים ספציפיים של x ובכך מוצאים כל קבוע בנפרד.