הלל בן חנוך

1) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פו' בעלת נגזרת שלישית רציפה בקטע $[-1,1]$, המקיימת:

$$f(0) = f(-1) = 0$$

$$f(1) = 1, f'(0) = 0$$

<u>הוכיחו:</u> קיימת $c \in [-1,1]$ כך ש $f^{(3)}(c) \geq 3$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(\varepsilon)}{3!}x^3$$

נציב את הנתונים ונקבל

$$f(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(\varepsilon)}{3!}x^3$$

נציב $x = 1$

$$1 = \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f^{(3)}(c_1)}{3!}$$

נציב $x = -1$

$$0 = \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f^{(3)}(c_2)}{3!} \to \frac{f''(0)}{2!} = \frac{f^{(3)}(c_2)}{3!}$$

נציב במשוואה הראשונה

$$1 = \frac{f^{(3)}(c_2)}{3!} + \frac{f^{(3)}(c_1)}{3!} \to f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2) = 6$$

נניח בשלילה שלכל $x \in [-1,1]$ מתקיים $f^{(3)}(x) < 3$ ולכן גם זה מתקיים על c_1, c_2 ונקבל בסתירה ש

$$f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2) < 6$$

ולכן קיימת נקודה $c \in [-1,1]$ עבורה

$$f^{(3)}(c) \geq 3$$

2) <u>קירובי טיילור:</u>

א. קרבו את $\sqrt[3]{30}$ עד כדי שגיאה של $5 \cdot 10^{-4}$.

ב. קרבו את $\sqrt{e}$ בדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א.

נשתמש בפיתוח טיילור סביב הנקודה $a = 27$, $x = 30$

הפונקציה היא

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \to f(27) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \to f'(27) = \frac{1}{27}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \to f''(27) = -\frac{2}{2187}$$

$$f'''(x) = 1 = \frac{}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$

השגיאה בקירוב מסדר n נתונה על ידי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$c \in (27,30)$$

עבור $n = 1$

$$|R_1(30)| = \cdots = |c^{-\frac{5}{3}}|$$

הפונקציה $g(c) = c^{-5/3}$ היא יורדת ולכן המקסימום שלה בקטע הוא 27 ולכן

$$\left|c^{-\frac{5}{3}}\right| \le \left|27^{-\frac{5}{3}}\right| = \frac{1}{243} > 5 \cdot 10^{-4}$$

עבור $n = 1$

$$|R_1(30)| = \cdots = |c^{-\frac{5}{3}}|$$

הפונקציה $g(c) = c^{-5/3}$ היא יורדת ולכן המקסימום שלה בקטע הוא 27 ולכן

$$|R_1(30)| \le 27^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{243} > 5 \cdot 10^{-4}$$

עבור $n = 2$

$$|R_2(30)| = \cdots = |\frac{5}{3}c^{-\frac{8}{3}}|$$

הפונקציה $g(c) = c^{-8/3}$ היא יורדת ולכן המקסימום שלה בקטע הוא 27 ולכן

$$|R_2(30)| \le \frac{5}{3}27^{-\frac{8}{3}} = \frac{5}{19683} < 5 \cdot 10^{-4}$$

נחשב את הקירוב מסדר 2

$$P_2(x) = f(27) + f'(27)(x-27) + f''(27)(x-27)^2 \to P_2(30) = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243}$$
$$= 3 + \frac{26}{243}$$

ב.

הפונקציה היא

$$f(x) = e^x$$

השגיאה היא

$$5 \cdot 10^{-5}$$

הנגזרות הן $f^{(n)}(x) = e^x$ לכל n.

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

לכל n.

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|$$

עבור $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!\,(2)^{n+1}}\right|$$

e^x היא פונקציה עולה ולכן המקסימום מתקבל בנקודה $c = \frac{1}{2}$

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(n+1)!\,(2)^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)!\,(2)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!\,(2)^n}$$

עבור $n = 1$

$$\left|R_1\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

עבור $n = 5$

$$\left|R_5\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{23040}$$

השגיאה פה קטנה מ$5 \cdot 10^{-5}$ ולכן נדרש פולינום מסדר 5.

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

ולכן

$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) = 1.6487$$

3) <u>פיתוחי טיילור:</u> מצאו את פיתוח טיילור של הפונקציות הבאות סביב $x = 0$,
והוכיחו מתי הן מתכנסות לפונקציה (כלומר לאילו ערכי x).

א. $f(x) = \sin(x^k)$ עבור $k \in \mathbb{N}$.
ב. $g(x) = \arctan(x)$.
ג. $h(x) = \sin^3(x)$.

א.

1. **מציאת טור טיילור (מקלורן):**

הדרך הפשוטה ביותר היא להשתמש בטור המקלורן הידוע של $\sin(u)$:

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots$$

טור זה מתכנס לכל $u \in \mathbb{R}$.
כעת, נציב $u = x^k$ בטור הידוע:

$$f(x) = \sin(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^k)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נפשט את הביטוי בחזקה:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{k(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

זהו טור המקלורן של הפונקציה $f(x)$. אם נרשום את האיברים הראשונים:

$$f(x) = x^k - \frac{x^{3k}}{3!} + \frac{x^{5k}}{5!} - \frac{x^{7k}}{7!} + \dots$$

נגדיר את האיבר הכללי של הטור $a_n = \frac{(-1)^n x^{k(2n+1)}}{(2n+1)!}$.

נחשב את הגבול:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{k(2(n+1)+1)}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{k(2n+1)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2nk+3k}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2nk+k}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|x^{2k} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{2k}|}{(2n+3)(2n+2)}$$

לכל ערך x קבוע, המונה $|x^{2k}|$ הוא קבוע, בעוד המכנה שואף לאינסוף. לכן:

$$L = 0$$

מכיוון ש-$L = 0 < 1$ לכל x, הטור מתכנס בהחלט לכל x.

ב.

1. **מציאת טור טיילור:**

נשתמש בעובדה ש-$g'(x) = \frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

אנו מכירים את הטור הגיאומטרי:

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad \text{for } |u| < 1$$

נציב $u = -x^2$:

$$g'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

טור זה מתכנס כאשר $|-x^2| < 1$, כלומר $x^2 < 1$, שזה שקול ל- $|x| < 1$.

כעת, נבצע אינטגרציה איבר-איבר לטור של $g'(x)$ כדי לקבל את הטור של $g(x)$:

$$g(x) = \arctan(x) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור המקורי (עבור הנגזרת) היה $R = 1$. אינטגרציה אינה משנה את רדיוס ההתכנסות, לכן גם כאן $R = 1$. עלינו לבדוק את התכנסות הטור בקצוות התחום: $x = 1$ ו- $x = -1$.

בדיקה עבור $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

זהו טור לייבניץ (טור מתחלף), והוא מתכנס לפי מבחן לייבניץ כי סדרת הערכים המוחלטים $b_n = \frac{1}{2n+1}$ היא חיובית, מונוטונית יורדת ושואפת לאפס.

בדיקה עבור $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

זהו מינוס הטור שקיבלנו עבור $x = 1$, ולכן גם הוא מתכנס.

סיכום לסעיף ב':
פיתוח טיילור: $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
תחום התכנסות: הטור מתכנס לפונקציה בתחום $[-1, 1]$.

ג.

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

נבודד את $\sin^3(x)$:

$$4\sin^3(x) = 3\sin(x) - \sin(3x)$$

$$h(x) = \sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

כעת, נשתמש בטור הידוע של $\sin(u)$ ונציב אותו בביטוי שקיבלנו:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נציב חזרה בביטוי של $h(x)$:

$$h(x) = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נאחד את שני הטורים לטור אחד:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) x^{2n+1}$$

נוציא גורמים משותפים:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4\cdot(2n+1)!}(3 - 3^{2n+1})x^{2n+1}$$

2. **תחום ההתכנסות:**

הטור של $\sin(x)$ מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

הטור של $\sin(3x)$ מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

הפונקציה $h(x)$ היא צירוף לינארי של שתי פונקציות שהטורים שלהן מתכנסים לכל x. לכן, גם הטור של $h(x)$ יתכנס לכל x.

סיכום לסעיף ג':

פיתוח טיילור: $\sin^3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3-3^{2n+1})}{4\cdot(2n+1)!} x^{2n+1}$

תחום התכנסות: הטור מתכנס לפונקציה לכל $x \in \mathbb{R}$.

4) <u>חישוב סכום:</u> חשבו את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{2n+1} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

נתחיל עם כמה סידורים בארגון הטור.

ראשית, נשים לב ש-$n+\frac{1}{2}=\frac{2n+1}{2}$.

לכן, נוכל לשכתב את האיבר הכללי של הטור:

$$a_n = \frac{1}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2}} = \frac{2}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{2n+1} \cdot (2n+1)}$$

הטור הופך להיות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{2n+1} \cdot (2n+1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^{2n+1}$$

כעת, ננסה לקשר את הטור הזה לטור מקלורן מוכר. אנחנו יודעים את טור המקלורן של $\ln(1+x)$ ו-$\ln(1-x)$.

טור מקלורן של $\ln(1+x)$ הוא:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

וטור מקלורן של $\ln(1-x)$ הוא:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

שניהם מתכנסים עבור $|x| < 1$.

נחסר את שני הטורים:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots\right)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

כל האיברים הזוגיים מתבטלים, וכל האיברים האי-זוגיים מוכפלים ב-2:

$$= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ולכן,

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

אנחנו יודעים ש

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

לכן,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

עכשיו נשווה את הטור שקיבלנו לטור הזה:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

מכאן אנו מסיקים ש-

$$x=\frac{e-1}{e+1}$$

יש לוודא שתנאי ההתכנסות $|x|<1$ מתקיימים:

$$\left|\frac{e-1}{e+1}\right|<1$$

מכיוון ש-$e\approx 2.718$, אז $e-1\approx 1.718$ ו-$e+1\approx 3.718$.
ברור ש-$e-1<e+1$ ולכן היחס $\frac{e-1}{e+1}$ הוא חיובי וקטן מ-1, כך שתנאי ההתכנסות מתקיימים.

נציב את ערך x בנוסחה:

$$\mathrm{Sum}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e-1}{e+1}}{1-\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\frac{e+1+e-1}{e+1}}{\frac{e+1-(e-1)}{e+1}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\frac{2e}{e+1}}{\frac{e+1-e+1}{e+1}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\frac{2e}{e+1}}{\frac{2}{e+1}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\cdot\frac{e+1}{2}\right)$$

$$=\ln(e)$$

$$=1$$

לכן, סכום הטור הוא 1.