בס"ד

<u>המד"ריך</u>

או

<u>סיכום שיטות לפתרון מד"ר</u>

<u>תקציר מבוסס על הקורס המקוון: משוואות דיפרנציאליות רגילות - 2025</u>

<u>נכתב ע"י עדי מכנס</u>

אם מצאתם טעויות, או להבדיל יש לכם הערות / הארות / מסקנות / תובנות וכיוצ"ב דברו איתי! אני לא נושך.

התקציר מבוסס על הסרטונים של הקורס ביוטיוב של המחלקה לפיזיקה.

כמו כן, חלק לא מבוטל מן הסיכום מבוסס גם על התקציר של ד"ר ארז שיינר, באתר mathwiki.

תוכן העניינים

נוסחאות בסיסיות

אינטגרליים מידיים

$$\int x^a dx = \begin{cases} \ln|x| & a = -1 \\ \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} & a \neq -1 \end{cases}$$

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x$$

$$\int \log_a x\, dx = \frac{x\ln(x) - x}{\ln(a)}$$

שיטות אינטגרציה נפוצות

אינטגרציה בחלקים:

$$\boxed{\int f'g = fg - \int g'f}$$

שיטת ההצבה:

1. מציבים $t = f(x)$, ולכן:

$$dt = f'(x)dx$$

2. מחליפים את $f'(x)dx$ ב-dt ואת $f(x)$ ב-t.
3. פותרים את האינטגרל על המשתנה t.
4. חוזרים להצבה, ומחליפים בין t ל-$f(x)$.

פירוק לשברים חלקיים:

תהי פונקציה רציונלית מהצורה:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}$$

1. מחלקים פולינומים כך שדרגת המכנה תהא גדולה ממש מדרגת השארית.
2. מפרקים את הפולינום לגורמים (לינאריים או ריבועיים).
3. לכל גורם לינארי מריבוי k, מציבים:

$$\frac{A_0}{x-a}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ולכל גורם ריבועי (שאינו מתפרק) מריבוי k מציבים:

$$\frac{B_0 x + C_0}{x^2+bx+c}, \dots, \frac{B_k + C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

4. עושים מכנה משותף ומוצאים את הקבועים, זאת בשתי דרכים:
   a. לכל חזקה מגדירים משוואה בה הנעלמים הם הקבועים, ופותרים אותה.
   b. מציבים ערכים ספציפיים של x ובכך מוצאים כל קבוע בנפרד.

<u>טורי טיילור ידועים</u>

מקדמי טיילור:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

אקספוננט: (לכל x)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

הנדסי: (לכל $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

סינוס: (לכל x)

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

קוסינוס: (לכל x)

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

לוגריתם טבעי: (לכל $|x| < 1$)

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

ההופכית של טנגנס: (לכל $|x| \le 1$)

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

<u>סימונים נפוצים</u>

<u>נגזרת בחד-מימד:</u>

$$f'(x) = \dot{f}(x) = \frac{df}{dx}$$

<u>נגזרת בדו-מימד (נגזרות חלקיות):</u>

$$f_x(x,y), f_y(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>חוקים פיזיקליים [מכניקה]</u>

<u>קינמטיקה:</u>

$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

<u>נפילה חופשית:</u>

$$a(t) = g \approx 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

<u>החוק השני של ניוטון:</u>

$$F = ma = m\ddot{x}$$

<u>כוח קפיץ:</u>

$$F = -kx$$

<u>תנע:</u>

$$p = mv \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = F$$

<u>עבודה:</u>

$$W = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$$

<u>חוק הכבידה האוניברסלי:</u>

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

<u>גדילה ודעיכה אקספוננציאלית:</u>

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

הגדרות בסיסיות

הגדרה: מד"ר (משוואה דיפרנציאלית רגילה) היא משוואה מהצורה:

$$F(x, y, y', \dots,) = C$$

כאשר x משתנה, y פונקציה ו-C קבוע. מד"ר נותנת לנו קשר (תלות) בין הפונקציה לנגזרות שלה.

הגדרה: סדר של מד"ר הינו הנגזרת הגבוהה ביותר של הפונקציה y אשר נמצאת במשוואה.

הגדרה: מעלה של מד"ר הינה המעלה הגבוהה של הנגזרת הגבוהה ביותר, כאשר הנגזרת מופיעה **כביטוי יחיד**, ולא כאשר היא נמצאת בביטוי מורכב ו/או ככפל בפונקציה ובעוד נגזרות.

הגדרה: מד"ר תיקרא לינארית אם היא מהצורה:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f(x)$$

כאשר $a_k(x), f(x)$ אלו פונקציות התלויות במשתנה x בלבד (ובפרט אם הן קבועים). כאשר $f(x) \equiv 0$ המד"ר נקראת "הומוגנית", אחרת תיקרא "לא הומוגנית".

משפט: נסמן את אוסף הפתרונות של המד"ר הלא הומוגנית דלעיל להיות $S(f)$ (כאשר f היא הפונקציה שבצד ימין). נביט בפתרון $y_0 \in S(f)$ אשר פותר את המד"ר הלא הומוגנית. אזי:

$$S(f) = \{ y_0 + y \mid y \in S(0) \}$$

במילים, פתרון *פרטי* ללא הומוגנית + פתרון *כללי* להומוגנית = פתרון *כללי* ללא הומוגנית.

הגדרה: פתרון של מד"ר הוא קשר בין y לבין x ללא נגזרות. נהוג לחלק בין כמה סוגי פתרונות למד"ר:

- פתרון מפורש, כלומר מהצורה:
  $$y = f(x)$$
  (מציאת הפונקציה ממש, "בידוד" של y)

- פתרון סתום, כלומר מהצורה:
  $$\phi(x, y) = C$$
  (אין יכולת לבודד את y, אך ללא נגזרות כמבוקש)

- פתרון סינגולרי, פתרון שמתקיים תחת אילוצים שונים (למשל ת.ה) ואינו נכלל בפתרון הכללי המתקבל בשיטות הפתירה השונות.

משפט: לכל מד"ר ממעלה n, יש בדיוק n קבועי אינטגרציה בפתרון.

הגדרה: פתרון אשר מכיל את כל קבועי האינטגרציה ייקרא פתרון כללי. הצבה של קבועים ספציפיים תיקרא פתרון פרטי של המד"ר.

מסקנה: כדי למצוא פתרון פרטי של מד"ר ממעלה n, עלינו לקבל n תנאי התחלה שונים, דהיינו ערכים נתונים של פתרון המד"ר המבוקש.

הגדרה: גורם אינטגרציה (או ג"א) הוא ביטוי שאנו כופלים את המד"ר בו על מנת שתהא "נוחה יותר לעבודה". בסיכום זה הוא יסומן ע"י μ.

מד"ר מסדר ראשון

אינטגרל "פשוט"

הגדרה: מד"ר אינטגרל היא המד"ר הבאה:

$$\boxed{y' = f(x)}$$

פתרון: פתרון המד"ר נתון ע"י:

$$\boxed{y = \int f(x)dx + C}$$

כלומר, כל חישוב אינטגרל הוא בעצם מד"ר.

הערה: באופן כללי, גם המשוואה:

$$y^{(n)} = f(x)$$

היא מד"ר (מסדר n), ופתרונה הוא האינטגרל ה-n-י על $f(x)$.

מד"ר פריקות / פרידות

הגדרה: מד"ר פריקה היא מד"ר מהצורה הבאה:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

פתרון: פתרון של מד"ר פריקה נתון ע"י:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

כאשר C קבוע.

ג"א של פריקות

תהי מד"ר מהצורה:

$$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0}$$

אזי ג"א $\boxed{\mu = \frac{1}{g_1(y)f_2(x)}}$ הופך את המד"ר לפריקה.

מד"ר הומוגניות

הגדרה: **פונקציה** $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר k אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים:

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)}$$

הגדרה: **מד"ר** תיקרא הומוגנית אם היא מהצורה:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

כאשר P, Q פונקציות הומוגניות מאותו סדר.

פתרון: נגדיר: $\boxed{z = \frac{y}{x}}$, או באופן שקול $y = zx$. לכן:

$$dy = zdx + xdz$$

ובאופן דומה גם:

$$y' = z'x + z$$

נציב זאת במד"ר ונקבל מד"ר פריקה, כאשר z פונקציה על x.

נפתור את המד"ר על z – ולאחר מכן נשוב להצבה.

מד"ר כמעט הומוגנית – חיתוך

תהי מד"ר מהצורה הבאה:

$$(A_1x + B_1y + C_1)dx + (A_2x + B_2y + C_2)dy = 0$$

ונניח שלישרים:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

קיימת נקודת חיתוך (יחידה).

פתרון: נשנה משתנים בצורה הבאה:

$$\begin{cases} x^* = x - x_0 \\ y^* = y - y_0 \end{cases}$$

כאשר (x_0, y_0) היא נקודת החיתוך של הישרים במד"ר.

לכן:

$$\begin{cases} dx^* = dx \\ dy^* = dy \end{cases}$$

נציב, נפתור את המד"ר <u>ההומוגנית</u> אשר מתקבלת, ונחזור למשתנים המקוריים.

<u>כמעט הומוגניות – מקבילים</u>

תהי מד"ר מהצורה הבאה:

$$(A_1x + B_1y + C_1)dx + (A_2x + B_2y + C_2)dy = 0$$

ונניח שהישרים:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

מקבילים. ז"א $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

<u>פתרון:</u> נגדיר משתנה מהצורה:

$$t = A_1x + B_1y$$

לכן:

$$dt = A_1dx + B_1dy$$

נציב, נפתור את המד"ר <u>ההומוגנית</u> אשר מתקבלת ($t(x)$) ונחזור למשתנים המקוריים.

<u>מד"ר מדויקות</u>

<u>הגדרה:</u> מד"ר מדוייקת היא מד"ר מהצורה הבאה

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

כאשר:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}}$$

<u>פתרון:</u> הפתרון של המד"ר נתון ע"י:

$$\boxed{\Phi = \underbrace{\int f(x, y)dx}_{\Phi_x} + \underbrace{\int g(x, y)dy}_{\Phi_y} = C}$$

<u>הערות:</u>

1) כאשר מחשבים את האינטגרל על f או על g, חשוב לשים לב כי קבוע האינטגרציה תלוי במשתנה השני. זאת מכיוון שבשעת חישוב האינטגרציה, הוא נחשב קבוע. בפתרון הסופי אין זה משנה, ויש לאחד את כלל הקבועים לקבוע אחד.

2) במידה ויש ביטוי שחוזר על עצמו בפתרון שני האינטגרלים, רושמים אותו פעם אחת בפתרון הסתום.

<u>**מד"ר כמעט מדויקות**</u>

תני מד"ר מהצורה $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$.

1) נניח כי מתקיים:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}}{g(x,y)}=N(x)$$

(דהיינו פונקציה התלויה ב-x בלבד, או קבוע)

אזי ג"א:

$$\boxed{\mu=e^{\int N(x)dx}}$$

יהפוך את המד"ר למדויקת.

2) נניח כי מתקיים:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}}{f(x,y)}=N(y)$$

(דהיינו פונקציה התלויה ב-y בלבד, או קבוע)

אזי ג"א:

$$\boxed{\mu=e^{\int N(y)dy}}$$

יהפוך את המד"ר למדויקת.

3) נניח כי המד"ר הומוגנית, וגם $f(x,y)x+g(x,y)y\neq 0$.
אזי ג"א:

$$\boxed{\mu=\frac{1}{f(x,y)x+g(x,y)y}}$$

יהפוך את המד"ר למדוייקת.

מד"ר ליניאריות מסדר ראשון

תזכורת: משוואה ליניארית מסדר ראשון הומוגנית היא מד"ר מהצורה:

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

כאשר $P(x), Q(x)$ פונקציות התלויות במשתנה x בלבד.

הערה: כאשר $Q(x) \equiv 0$ אזי המשוואה נקראת הומוגנית. אחרת תיקרא לא הומוגנית.

פתרון: הפתרון של המד"ר **ההומוגנית** לעיל נתון ע"י:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}}$$

הפתרון של המד"ר **הלא הומוגנית** נתון ע"י:

$$\boxed{y = H\left(\int \frac{Q(x)}{H}dx + C\right)}$$

כאשר H הוא פתרון ההומוגנית המתאימה, דהיינו פתרון המד"ר $y' + P(x)y = 0$, כמתואר לעיל.

מד"ר ברנולי

הגדרה: משוואת ברנולי היא מד"ר מהצורה:

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^n}$$

סיווג: זו מד"ר ליניארית מסדר ראשון וממעלה n (כאשר n ממשי כלשהו)

פתרון:

1) נציב $z = y^{1-n}$. לכן $z' = (1-n)y^{-n}y'$ [גזירה לפי המשתנה x, דהיינו נגזרת של הרכבה]
2) כעת נחלק את שני הצדדים ב y^n ונקבל כי:

$$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

3) נציב את z במשוואה ונקבל כי:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

$$\boxed{z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)}$$

4) זוהי מד"ר ליניארית מסדר ראשון! נפתורה.
5) נחזור להצבה המקורית.

הערה: אם $y = 0$ או ש $n = 1$ או ש $n = 0$, אזי אלו מקרים טריוויאליים, ויש לטפל בהם בנפרד.

משוואת קלרו

הגדרה: משוואת קלרו היא המשוואה הבאה:

$$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

סיווג: סדר ראשון, ללא מעלה מוגדרת, לא לינארית.

פתרון: פתרון המשוואה נתון על ידי:

$$\boxed{y' = C}$$

כאשר C קבוע.

או באופן שקול, פתרון המד"ר הוא: $y = Cx + f(C)$.

ובנוסף, קיים פתרון סינגולרי (יחיד) אשר משיק לפתרון שלעיל לכל C. כדי למצוא אותו, יש למצוא את הפתרון של המד"ר:

$$x + \frac{df(y')}{dy'} = 0$$

זאת בשני דרכים:

1. לפתור בשיטה של מד"ר פריקה רגילה.
2. להביע את המד"ר ע"י פונקציה של x בלבד, ולהציב זאת בחזרה במד"ר המקורית.

מד"ר מסדר שני

מד"ר ללא y

הגדרה: מד"ר ללא y היא מד"ר מהצורה הבאה:

$$F(x, y', y'') = 0$$

כאשר y היא פונקציה של המשתנה x.

פתרון: הורדת סדר המד"ר

1. נגדיר:

$$\begin{cases} z = y' \\ z = y'' \end{cases}$$

[הסבר: x הוא משתנה ולכן אין בעיה לגזור לפיו]

2. נפתור את המד"ר כאשר z פונקציה וכן x המשתנה (סדר ראשון).
3. נחזור להצבה ונבצע אינטגרציה לשני הצדדים.

<u>מד"ר ללא x</u>

<u>הגדרה:</u> מד"ר מסדר שני ללא x היא מד"ר מהצורה הבאה:

$$F(y, y', y'') = 0$$

כאשר y פונקציה של המשתנה x.

<u>פתרון:</u> הורדת סדר המד"ר:

1. נגדיר:

$$\begin{cases} z(y) = y' \\ zz' = \dfrac{dz}{dx} \cdot y' = y'' \end{cases}$$

[הסבר: y הוא פונקציה, שתלויה ב-x. לכן כדי לגזור את z, צריך לגזור את y' ולהכפיל בנגזרת הפנימית, שהיא y']

2. נפתור את המד"ר כאשר z פונקציה של המשתנה y (סדר ראשון).
3. נחזור להצבה ע"י פתרון המד"ר.

<u>מד"ר ליניאריות מסדר שני (ויותר)</u>

<u>מד"ר קושי-אויילר</u>

<u>הגדרה:</u> מד"ר קושי-אויילר היא מד"ר מהצורה הבאה:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{(i)} = p(x)}$$

כאשר a_i קבועים, ו- $p(x)$ פולינום.

<u>פתרון:</u>

ראשית, נטפל במקרה בו מדובר במשוואה הומוגנית ($p(x) = 0$):

$$\boxed{a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0}$$

1. נציב במד"ר את הניחוש x^r. ניתן לצמצם את x^r ולקבל משוואה אלגברית. המשוואה הנוצרת נקראת <u>המשוואה האינדנציאלית</u> של המד"ר.

2. נמצא את כל שורשי הפולינום המתקבל (כולל המרוכבים), ונסמנם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

אזי לכל λ_i ישנו פתרון למד"ר, כדלהלן:

- אם $\lambda_i \in \mathbb{R}$, וכמו כן הוא מריבוי m, אזי כל הנ"ל פתרונות למד"ר:
$$x^{\lambda_i}, \dots, x^{\lambda_i} \ln^{m-1}|x|$$

- אם $\lambda_i = a + bi \in \mathbb{C}$, וכמו כן הוא מריבוי m, אזי גם הצמוד $\overline{\lambda_i}$ שורש, ולפיכך לכל הנ"ל פתרונות למד"ר:
$$x^a \cos(b \ln|x|), \dots, x^a \ln^{m-1}|x| \cos(b \ln|x|)$$
$$x^a \sin(b \ln|x|), \dots, x^a \ln^{m}|x| \sin(b \ln|x|)$$

ובסה"כ הפתרון הכללי יהיה צירוף לינארי של כל פונקציות הפתרון:

$$\boxed{y = \sum_{i=0}^{n} A_i S_i(x)}$$

כאשר A_i קבוע וכן S_i היא פונקציית פתרון למד"ר (לעיל).

<u>הערה:</u> ניתן לשים לב כי למעשה, הפתרונות של מד"ר קושי-אויילר הם הרכבת $\ln|x|$ על הפתרונות של מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים, אך לא אוכיח זאת מפורשות.

כעת נפתור את המד"ר הלא הומוגנית, עבור $f(x)$ פולינום (שכן עבור פונקציות אחרות הנ"ל קשה יותר):

הכוונה בלנחש, היא לתת למצוא את הקבוע עבורו הנ"ל יהיה פתרון. זוהי אינה בעיה ממשית, שכן לאחר ההצבה מדובר במשוואה אלגברית (או במערכת של משוואות).

אם $f(x) = A \cdot x^k$, וכמו כן k הוא ריבוי של המשוואה האינדנציאלית מסדר m אזי ננחש:

$$\boxed{y_p = C \ln^m|x| \, x^k}$$

בהנתן סכום של פונקציות פולינומיות דלעיל, ננחש את סכום של כל הצבה)

<u>לינארית מסדר שני (ויותר) עם מקדמים קבועים</u>

<u>הגדרה:</u> מד"ר עם מקדמים קבועים היא מד"ר מהצורה:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n)} = f(x)$$

עבור a_i קבוע.

פתרון:

נפתור תחילה את המד"ר ההומוגנית, דהיינו כאשר $f(x) \equiv 0$:

הגדרה: הפולינום האופייני של המד"ר הינו:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

כאשר a_i הם המקדמים של המד"ר לעיל.

נסמן: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שורשים לפ"א. אזי:

1) אם $\lambda_i \in \mathbb{R}$, והוא בעל ריבוי m – אזי כל הללו פתרונות למד"ר:

$$e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_i x}$$

2) אם $\lambda_i = a + bi \in \mathbb{C}$, אזי גם הצמוד שלו $\overline{\lambda_i}$ שורש, ולכן כל הללו פתרונות למד"ר:

$$e^{ax}\cos(bx), \dots, x^{m-1}e^{ax}\cos(bx)$$
$$e^{ax}\sin(bx), \dots, x^{m-1}e^{ax}\sin(bx)$$

ובסה"כ הפתרון הכללי יהיה צ"ל של כל הפתרונות דלעיל:

$$\boxed{y = \sum_{i=0}^{n} A_i s_i(x)}$$

כאשר A_i קבוע וכן s_i היא פתרון למד"ר (לעיל).

הערה: חדי העין ישימו לב כי מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים היא למעשה ה"ל, ולכן הפתרון ההומוגני הכללי הוא צ"ל של איברי הבסיס של הגרעין.

שיטת הניחוש:

שיטת הניחוש היא שם כולל לצורות של פתרונות פרטיים של מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים, בהינתן מבנה של $f(x)$.

הכוונה בלנחש, היא לתת למצוא את הקבועים (שבאים לידי ביטוי בפולינום המוכפל בפונקציות, כפי שנראה) עבורו הנ"ל יהיה פתרון. זוהי אינה בעיה ממשית, שכן לאחר ההצבה מדובר במשוואה אלגברית (או במערכת של משוואות).

הערה לגבי המינוח: $p_k(x)$ זהו פולינום ממעלה k.

- אם $f(x) = e^{ax} \cdot p_k(x)$, וכן a הוא שורש של הפ"א עם ריבוי m, אזי ננחש
$$\boxed{y_p = x^m e^{ax} \cdot q_k(x)}$$

- אם $f(x) = e^{ax}\sin(bx) \cdot p_k(x)$ **או** $f(x) = e^{ax}\cos(bx) \cdot p_k(x)$, וכן $a \pm bi$ שורשים של הפ"א עם ריבוי m (כל אחד), אזי ננחש

$$\boxed{y_p = x^m e^{ax}\cos(bx)\cdot q_k^1(x) + x^m e^{ax}\sin(bx)\cdot q_k^2(x)}$$

שימו לב! אנחנו מנחשים צירוף של $\cos(x)$, $\sin(x)$ גם אם הופיע רק אחד מהם.
(הערה: הסימון q_k^n משמעו לנחש n פולינומים ממעלה k)

- אם $f(x) = p_k(x)$ פולינום מדרגה k, וכמו כן 0 הוא שורש של הפ"א בריבוי m, אזי:
$$\boxed{y_p = x^m q_k(x)}$$
(כלומר להציב עוד פולינום, כפול x בחזקת הריבוי של 0)

- אם $f(x)$ היא סכום צירוף לינארי של שתי צורות שתיארתי קודם לכן, מנחשים סכום של הניחושים.

יש להציב את הניחוש למד"ר, ולמצוא את הקבועים.

<u>שיטת האינטגרציה (אופרטורים):</u>

תהי מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = R(x)$$

נסמן ב D את אופרטור הגזירה, על מרחב הפונקציות הגזירות אינסוף פעמים. כמו כן, נסמן ב I את אופרטור הזהות.

הערה לצורך נוחות הכתיבה:

$$D^n = \underbrace{D\circ \ldots \circ D}_{n \text{ פעמים}} = \frac{d^n y}{dx^n}, \qquad D^0 = I$$

לפיכך ניתן לרשום את המד"ר בצורה הבאה:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\right) y = R(x)$$

ונסמן את שורשי הפ"א $r_1, \ldots, r_n$

<u>פתרון:</u>

1. נכתוב את המד"ר בצורה של טרינום:
$$(D - r_1 I)\cdots(D - r_n I)y = R(x)$$

2. נציב $g(x) = (D - r_n I)y$ ונקבל:
$$(D - r_1 I)\cdots(D - r_{n-1} I)g(x) = R(x)$$
עד שנגיע לבסיס, ז"א לצורה:
$$(D - r_1 I)g(x) = R(x)$$
כלומר:
$$g'(x) - r_1 g(x) = R(x)$$

3. נפתור את המד"ר הלינארית המתקבלת, נחזור להצבה ונפתור עוד פעם את המד"ר הלינארית:

$$y' - r_2 y = g(x)$$

וכו' n פעמים.

<u>מציאת פתרון אחד על סמך השני</u>

<u>משפט:</u> נביט במד"ר הלינארית ה<u>הומוגנית</u> מסדר שני:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

עוד נניח כי קיים פתרון למד"ר, ונסמנו y_1.

אזי, הפתרון הבת"ל השני, y_2 מקיים:

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = -\frac{1}{y_1} e^{-\int P(x)dx}$$

או בצורה שהיא יותר straight forward:

$$\boxed{y_2 = -y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx}$$

וביחד נקבל פתרון כללי למד"ר:

$$y = Ay_1 + By_2$$

<u>משפט:</u> נביט במד"ר הלינארית (לאו דווקא הומוגנית) מסדר שני:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

יהי פתרון כללי למד"ר ההומוגנית: y_H.

אזי הפתרון הכללי של המד"ר הינו:

$$y = y_H \cdot v(x)$$

כאשר v הוא פתרון המד"ר:

$$\boxed{v'' + \left[\frac{2y_H'}{y_H} + P(x)\right] v' = \frac{R(x)}{y_H(x)}}$$

שימו לב כי זוהי מד"ר ללא v וניתן להגדיר $u = v'$.

<u>שיטות לנחש פתרונות למד"ר לינאריות הומוגניות מסדר שני:</u>

ניחוש	מקרה
$y = x$	$P(x) + xQ(x) = 0$
$y = e^{mx}$	$mP(x) + Q(x) + m^2 = 0$

<u>פתרון מד"ר בעזרת טורי טיילור</u>

<u>פתרון:</u> ננחש טור טיילור (בסיכום אשתמש בטור טיילור אשר מפותח סביב הנק' $x = 0$, אך זה נועד לצורך הנוחות בלבד, ובוודאי שניתן לנחש סביב נק' אחרת) וכן נניח שהוא מתכנס בכל הממשיים (עד אשר נקבע שהטור שמצאנו מתכנס בתחום קטן יותר, אם בכלל):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

פתרון המד"ר יהיה למצוא את סדרת המקדמים, ובתקווה להשיג צורה ידועה בכדי לקבל פונקציה אלמנטרית.

<u>טור הנגזרות הינו:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(לא לשכוח להגדיל את הערך ההתחלתי כאשר מורידים מהחזקה)

לרוב נרצה "להזיז את האינדקסים" כך ש<u>כלל החזקות יהיו אחידות</u>, בכדי שיהיה ניתן לאחד את כל הטורים לטור אחד.

<u>אלגוריתם להזזת אינדקס של טור:</u>

$$\sum_{n=i}^{\infty} a_n x^{b_n}$$

נרצה להזיז את האינדקסים כך ש $b_n = c_k$. לשם כך נעשה את הבאים:

1. נציב $n = i$ במשוואה $b_n = c_k$ ונקבל את הערך ההתחלתי של k.
2. נמצא את n כפונקציה על k.
3. נציב חזרה את הביטוי שפיתחנו בסדרת החזקות ובסדרת המקדמים.

בנוסף, הגיוני שנצטרך "להעיף" כמה איברים החוצה מטורים מסויימים, על מנת שכלל הטורים יתחילו מאותו האינדקס, בכדי שיהיה ניתן לאחד את כל הטורים שנמצאים במד"ר לטור אחד:

$$\sum_{n=i}^{\infty} a_n x^n = a_i x^i + \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n x^n$$

איברים אלה יהיו הקבועים (לרוב).

<u>הערה:</u> אם המד"ר לינארית הומוגנית, האיברים שיצאו עתידים להתאפס. באופן כללי, האיברים שיצאו יהיו שווים יחד

כעת, לאחר האיחוד, מקיום ויחידות טורי טיילור, נרצה למצוא את סדרת המקדמים (שלרוב יהיו בצורה רקורסיבית, ויהיו תלויים במקדמים ספציפיים, שהם יהיו קבועי המד"ר). נפתור את הנוסחה הרקורסיבית, ונמצא ביטוי כללי עבור הטור.

אם אפשר, ניתן יהיה להמיר את הטור לפונקציה ידועה (כפי שתיארתי לפני כן)

עוד טריקים, טיפים והערות

שינויי משתנים חשובים

אם רואים פונקציה שמכילה ביטוי של קו ישר נוח להגדיר:

$$z = ax + by + c$$

אם נתקלים בביטוי מהצורות האלה, כדאי לשים לב כי:

$$y'x + y = (xy)' = z'$$

לכן נגדיר $z = xy$.

$$y''y + (y')^2 = (yy')' = z'$$

ולכן נגדיר $z = yy'$.

גורמי אינטגרציה נפוצים

$$xdy - ydx$$

ניתן להכפיל בג"א: $\mu = \frac{1}{x^2}$ ולקבל: $d\left(\frac{x}{y}\right)$.

ניתן להכפיל בג"א: $\mu = \frac{1}{y^2}$ ולקבל: $d\left(-\frac{y}{x}\right)$.

ניתן להכפיל בג"א: $\mu = \frac{1}{xy}$ ולקבל: $d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

ניתן להכפיל בג"א: $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ ולקבל: $d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

המלצות כלליות לפתרון מד"ר

חשוב לשים לב לקשרים בין גורמים שונים בתוך המד"ר! הם יכולים לעזור לפתור אותה!

לפעמים משתלם לסדר את המשוואה בסדר שונה, כדי לקבל פרספקטיבה שונה על המד"ר.

לפעמים כדאי להחליף בין משתנה לפונקציה: $y(x) \leftrightarrow x(y)$, או יותר מכך, להגדיר פונקציה חדשה ומשתנה חדש (שכוללים בתוכם גם את x וגם את y) ואז על פיהם לפתור את המד"ר.

לא מומלץ להתעכב על מציאת ג"א, לפעמים יש שיטות טובות יותר.

כאשר פותרים מד"ר בעזרת טורי טיילור, לעיתים אין צורך להציב את הטור, אלא ניתן להשיג את נוסחת המקדמים ישירות דרך המד"ר.