# בדידה

בדידה הוא תחום מתמט׳ העוסק בלוגיקה.

# דוגמאות וקשרים

ערן חכם וגם מצחיק

אם המשפט זה נכון: ערן חכם וגם מצחיק

אם המשפט לא נכון: ערן לא חכם או אינו מצחיק.

גם, או - קשרים. הם מקשרים בין 2 העובדות.

אם יורד גשם אז יש עננים בשמ״ים.

קשר מסוג אם...אז... לא עובד בהכרח ל-2 הכיוונים

למשל, המשפט אם יש עננים אז יורד גשם לא נכון כי גם ביום רגיל יש עננים.

אם יש קישור בשני מושגים ועובדות נשתמש בקשר ״אם ורק אם״

אריק נמצא בביתו אם ורק אם רכבו נמצא בחניה

בתחום המתמט׳: מספר מתחלק ב-3 אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב-3. משפט זה נכון לשני הכיוונים וניתן לראות שיש שימוש ב-אם ורק אם).

# כמתים

יש 2 כמתים בתחום. כל וקיים.

כל תלמידי הכיתה חכמים - כולם.

קיים תלמיד חכם בכיתה - לפחות 1 יכול להיות חכם.

לכל סיר יש מכסה שמתאים לו. יש = קיים

# שלילה

כאשר נרצה להוכיח פסוק אמת נרצה לראות מתי הוא לא אמת.

בשלילה של ״גם״ יהיה ״או״

בשלילה של ״כל״ יהיה ״קיים״

# טבלת אמת

אסף רעב או צמא.

| אסף רעב | אסף צמא | אסף צמא או רעב |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

* מטרת הטבלה היא לעזור לנו להחליט מתי פסוק הוא פסוק אמת/שקר.

בקשר של או- $\underbrace{B}_{\text{עובדה}} \underbrace{\vee}_{\text{או}} \underbrace{A}_{\text{עובדה}}$ נראה טבלה מסוג או:

| B | A | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

נראה טבלה מסוג וגם:

אם גם נסמן - $\wedge$. $A \wedge B$

| B | A | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

# טבלת אמת (המשך)

קשר אם... אז... נסמן את הקשר כך: →

ניקח כדוגמה לטבלה את המשפט: אם יורד גשם אז יש עננים.

נגדיר: יורד גשם - B

יש עננים - A

| B | A | B→A |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

* שקר גורר הכל.

אם בצד B של הקשר B→A יש שקר המשפט תמיד יהיה נכון.

מסוג קשר "Not A" נסמן את הקשר כך: ¬

הטבלה תיראה כך:

| ¬A | A |
|---|---|
| F | T |
| T | F |

אם אנחנו רוצים לומר שפסוק שווה לפסוק מסוים נשתמש בסימן השקילות: ≡

ננסה לפתור טבלה שמשמעה: אם לא נכון לומר שערן גבוה ומצחיק אז ערן אינו גבוה או שאינו מצחיק.

| A | B | ¬(A∧B) | (¬A)∨(¬B) |
|---|---|---|---|
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

*לשים ♥ שאין פה גרירה ולכן אין קשר של שקר → אמת.

# חוק דה מורגן

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

# כללים נוספים

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee B)$

$(A \to B) \equiv (\neg A) \vee B$

$(A \vee B) \to B \equiv [\neg(A \vee B)] \vee B$

$(A \to B) \equiv (\neg B) \to (\neg A)$

# אינדוקציה מתמטית

תהי סדרת טענות כך ש:

1. הטענה הראשונה נכונה
2. לכל טענה אם טענה זו נכונה אז הטענה הבאה נכונה.

# אינדוקציה מלאה

יש הבדל בין אינדוקציה רגילה למלאה.

| רגילה | מלאה |
| --- | --- |
| טענה 1 נכונה | טענה 1 נכונה |
| $1 \to 2$ | $1,2 \to 3$ |
| $2 \to 3$ | $1,2,3 \to 4$ |
| וכך כל טענות הסדרה נכונות | וכך כל טענות הסדרה נכונות |
| מניחים שצעד 1 אחורה עבד | מניחים שכל הטענות הקודמות עבדו |

# קבוצות ופעולות על קבוצות

מהי קבוצה? קבוצה היא אוסף של איברים.

דוגמה לקבוצה: $\{1,2\}$ , {אצחס} ....

בקבוצה אסור שאיבר יופיע פעמיים. למשל קבוצה כזאת: $\{1,2,2\}$ לא נכונה.

פעולת שייכות (שייך): $\in$

פעולת הכלה (מוכל): $\subseteq$

שייך: איבר שייך לקבוצה

מוכל: קבוצה מוכלת בקבוצה אחרת

דוגמה: $A=\{1,2,3\}$

שייכות: $1\in A$ , $2\in A$, $3\in A$

הכלה: כדי להראות הכלה ניקח 2 קבוצות חדשות $B=\{1,3\}$ $C=\{1,4\}$

$B\subseteq A$ איברי B נמצאים גם בקבוצה A

$C\nsubseteq A$ איברי C אינם נמצאים גם ב-A (איבר 4)

# חזרה לכמתים

כל- $\forall$ (All)

קיים - $\exists$ (Exist)

קבוצה A מוכלת ב-B ( $A\subseteq B$ ) אם לכל איקס ששייך ל-A ( $\forall x\in A$ ) מתקיים x ששייך ל-B ( $x\in B$ )

לכן, כאשר מתקיים: (A לא מוכלת ב-B) $A\nsubseteq B$

(לא כל x קיים ב-A מתקיים x שייך ל-B) או $\neg(\forall x\in A : x\in B)$

כלומר, קיים x שייך ל-A כך שלא נכון ש-x שייך ל-B. $\exists x\in A : \neg(x\in B)$

$\exists x\in A : x\notin B$

קיים x שייך ל-A כך שאיקס לא שייך ל-B.

# קבוצות ופעולות על קבוצות

קבוצה יכולה להיות איבר.

למשל:

$A=\{1,2\}$

$B=\{1,\{1,2\}\}$

הקבוצה $B$ ישנם 2 איברים: $\{1,2\}$ ,1 ולכן $2\notin B$.

לכן, $A\not\subseteq B$. הקבוצה $A$ ישנם 2 איברים: 1,2. בגלל ש- $2\in A$

אבל הראנו ש- $2\notin B$ ניתן להבין: $A\not\subseteq B$

קבוצה $A$ מופיעה ב-$B$ כאיבר ולכן ניתן לומר - $A\in B$.

# הקבוצה הריקה

$\{\}=\emptyset$

תרגיל (סוגשל):

$\{\{\}\}\stackrel{?}{=}\emptyset$

$\{\{\}\}\stackrel{?}{=}\{\}$

שוויון זה לא מתקיים. קבוצת $\emptyset$ לא מוכלת ב $\{\{\}\}$

אך ניתן לומר ש- $\emptyset\in\{\{\}\}$

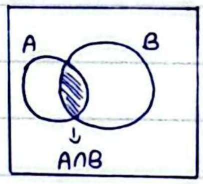
* לכל קבוצה $A$ מתקיים: $\emptyset\subseteq A$

# הגדרות חדשות

תהינה קבוצות $A$ ו-$B$.

$(A\cap B)$ חיתוך הקבוצות. מכילה את האיברים שנמצאים גם ב-$A$ וגם ב-$B$.

נמחיש זאת ע"י דיאגרמת ון (הסתברות ט"פ ש"ב)




$$x\in A\cap B \underset{\text{אם ורק אם}}{\iff} (x\in A)\wedge(x\in B)$$

נראה דוגמאות:

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,5\}$ $\Rightarrow$ $A\cap B=\{2\}$

חיתוך בין קבוצות ללא איברים משותפים - הקבוצה הריקה

$C=\{1,2\}$, $D=\{3,4\}$ $\Rightarrow$ $C\cap D=\{\}=\emptyset$

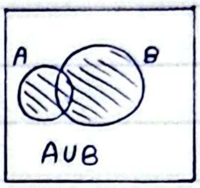
# הגדרות חדשות

תהינה קבוצות A ו-B

$(A\cup B)$ איחוד הקבוצות. מכילה את האיברים ב-A או ב-B.

נמחיש זאת ע"י דיאגרמת ון

$$x\in A\cup B \iff (x\in A)\vee(x\in B)$$



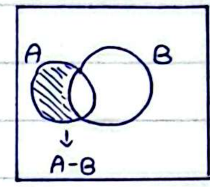

נראה דוגמאות:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{1,2,3\} \\ B=\{2,4,5\} \end{array}\right\} A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$

תהינה קבוצות A ו-B

$(A\setminus B)$ קבוצת ההפרש בין A ל-B. מכיל את כל איברי A שלא נמצאים ב-B

$$x\in A\setminus B \iff (x\in A)\wedge(x\notin B)$$




נראה דוגמאות:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{1,2,3\} \\ B=\{2,4,5\} \end{array}\right\} A\setminus B=\{1,3\}$$

בניגוד לחיתוך ואיחוד שהן פעולות סימטריות פעולת ההפרש אינה סימטרית.

נראה את זה בדוגמה לקבוצת ההפרש $(A\setminus B)$.

$$B\setminus A=\{4,5\}$$

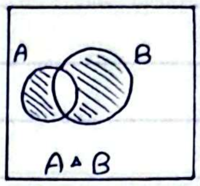
# הגדרות חדשות

תהינה קבוצות A ו-B

($A \triangle B$) קבוצת ההפרש הסימטרי של A ו-B. מכילה את כל איברי A אבל לא ב-B וכל איברי B אבל לא ב-A.

נמחיש זאת ע"י דיאגרמת ון:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$




נראה דוגמאות:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{1,2,3\} \\ B=\{2,4,5\} \end{array}\right\} A \triangle B=\{1,3,4,5\}$$

תהינה קבוצות A ו-B

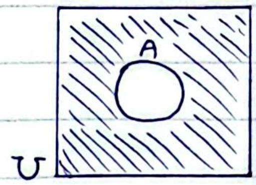
($A^c$ , $\bar{A}$) קבוצת האיברים שלא נמצאים ב-A אבל כן נמצאים בעולם מוסכם.

כדי לדעת משלים צריך לסכם מהי קבוצת העולם.

$U$ - קבוצת העולם.

נמחיש זאת ע"י דיאגרמת ון:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in U \setminus A$$




נראה דוגמאות:

$$\left.\begin{array}{l} U=\{1,2,3,4,5\} \\ A=\{1,2,3\} \\ B=\{2,4,5\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \bar{A}=\{4,5\} \\ \bar{B}=\{1,3\} \end{array}$$

*בלי הגדרת עולם למשלים אין משמעות.