

Tugas Besar Matriks dan Ruang Vektor

Aplikasi Aljabar Linear pada Metode Numerik

Semester I Tahun 2021/2022

(Diadaptasi dari tugas besar MK Algeo ITB)

DESKRIPSI UMUM TUGAS BESAR

Tugas besar adalah salah satu komponen penilaian dalam mata kuliah Matriks dan ruang vektor. Tugas besar ini dirancang untuk menstimulasi mahasiswa untuk mengaplikasikan metode-metode yang telah dipelajari menjadi program yang dapat digunakan. Tugas besar ini adalah membuat program untuk menghitung solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) secara numerik dengan bahasa Python. SPL dapat memiliki solusi unik, banyak solusi atau tidak memiliki solusi sama sekali. Selain itu, SPL dapat juga digunakan untuk menentukan persamaan polinom interpolasi.

Karena perhitungan menggunakan representasi bilangan titik-kambang (floating point) di dalam komputer, maka untuk meminimalkan galat perhitungan, digunakan strategi pivoting dalam memilih baris yang dijadikan basis dalam operasi baris elementer.

PROSEDUR Pengerjaan

1. Tugas dikerjakan secara berkelompok yang terdiri dari 3 orang.
2. Tugas ini dikumpulkan hari Minggu 28 November 2021 paling lambat pukul 23.59 melalui google form.

BAHASA PEMROGRAMAN

1. Bahasa program yang digunakan adalah python.
2. Program tidak harus berbasis GUI, cukup text-based saja.

PROGRAM

Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang oleh masing-masing kelompok.

LAPORAN

1. Cover: Cover laporan ada foto anggota kelompok (foto bertiga, bebas gaya). Foto ini menggantikan logo itera.

Bab 1: Deskripsi masalah (dapat meng-copy paste file tugas ini)

Bab 2: Teori singkat mengenai metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss- Jordan, tatancang pemrosesan, polinom interpolasi, dll.

Bab 3: Implementasi program dalam python, meliputi *library* yang digunakan, kelas yang dibuat, lengkap dengan method dan atributnya.

Bab 4: Eksperimen. Bab ini berisi hasil eksekusi program terhadap contoh-contoh kasus yang diberikan berikut analisis hasil eksekusi tersebut

Bab 5: Kesimpulan dan saran (hasil yang dicapai, saran pengembangan).

Tuliskan juga referensi (buku, web), yang dipakai/diacu di dalam Daftar Referensi.

Keterangan laporan dan program:

- a) Laporan ditulis dalam bahasa Indonesia yang baik dan benar, tidak perlu panjang tetapi tepat sasaran dan jelas.
- b) Identitas per halaman harus jelas (misalnya : halaman, kode kuliah).

c) *Listing* program ataupun algoritma tidak perlu disertakan pada laporan.
d) Program disimpan di dalam folder Matvek-xxxxx. Lima digit terakhir adalah NIM anggota terkecil. Didalam folder tersebut terdapat tiga folder yaitu :

- Folder *source code* dari program python
- Folder test berisi data uji.
- Folder doc berisi dokumentasi program dan *readme*

PENGUMPULAN TUGAS

Tugas dikumpulkan dalam bentuk ekstraksi .zip pada laman google form.

PENILAIAN

Komposisi penilaian umum adalah sebagai berikut :

1. Program: 60 %
2. Laporan : 20 %
3. Presentasi : 20 %

SPESIFIKASI UMUM

1. Program harus dapat menerima input data dari
 - Papan ketik
 - File
2. Keluaran program harus dapat ditampilkan ke:
 - Layar monitor
 - Simpan ke dalam arsip

Format luaran (misalnya dalam bentuk tabel) didefinisikan sendiri. Luaran harus mudah dibaca dan informatif.

SPESIFIKASI MATERI

Tulislah program python secara umum untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL) dengan n peubah (variable) dan m persamaan:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

SPL dapat diselesaikan secara numerik dengan metode eliminasi Gauss dan metode eliminasi Gauss-Jordan. Di dalam kedua metode tersebut diterapkan tatancang pemerosan (*pivoting*) untuk mengurangi galat pembulatan.

Program harus dapat menangani kasus-kasus sebagai berikut:

- a) SPL memiliki solusi unik, tampilkan solusinya
- b) SPL memiliki solusi tak terbatas, tampilkan solusinya dalam bentuk parameter
- c) SPL tidak memiliki solusi, tuliskan tidak ada solusinya.

Contoh-contoh SPL yang dijadikan data eksperimen:

$$a) 0.31x_1 + 0.14x_2 + 0.30x_3 + 0.27x_4 = 1.02$$

$$0.26x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.00$$

$$0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34$$

$$0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.36x_3 + 0.17x_4 = 1.27$$

$$b) x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 8x_5 = -3$$

$$x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 + 14x_2 - 4x_3 + x_4 - 13x_5 = 3$$

$$2x_1 + 14x_2 - 4x_3 + 16x_5 = -6$$

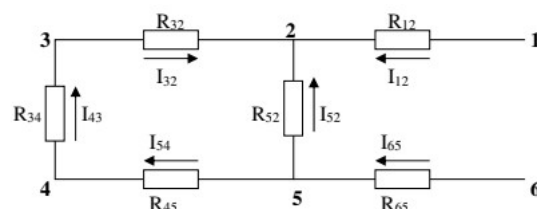
c) $HX = B$, yang dalam hal ini H adalah matriks Hilbert yang memiliki bentuk sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

dan $B = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$. Uji untuk $n = 10$ dan $n = 20$.

d) Sebuah perusahaan di AS memperoleh keuntungan (sebelum dipotong pajak) sebesar \$100,000. Perusahaan setuju untuk berkontribusi 10% dari keuntungannya (setelah dipotong pajak) untuk Corporate Social Responsibility (CSR). Perusahaan membayar pajak daerah sebesar 5% dari keuntungannya (setelah dipotong CSR) dan pajak federal sebesar 40% dari keuntungannya (setelah dipotong CSR dan pajak daerah). Berapa banyak uang yang dibayarkan perusahaan untuk pajak daerah, pajak federal, dan CSR? Modelkan ke dalam SPL dan selesaikan dengan Gauss/Gauss-Jordan.

e) Diberikan sebuah rangkaian listrik sbb :



Anda diminta menghitung arus pada masing-masing rangkaian. Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$I_{12} + I_{52} + I_{32} = 0$$

$$I_{65} - I_{52} - I_{54} = 0$$

$$I_{43} - I_{32} = 0$$

$$I_{54} - I_{43} = 0$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$I_{32}R_{32} - V_3 + V_2 = 0$$

$$I_{43}R_{43} - V_4 + V_3 = 0$$

$$I_{65}R_{65} + V_5 = 0$$

$$I_{12}R_{12} + V_2 = 0$$

$$I_{54}R_{54} - V_5 + V_4 = 0$$

$$I_{52}R_{52} - V_5 + V_2 = 0$$

Tentukan I_{12} , I_{52} , I_{32} , I_{65} , I_{54} , I_{13} , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 bila :

$$R_{12} = 5 \text{ ohm}, R_{52} = 10 \text{ ohm}, R_{32} = 10 \text{ ohm},$$

$$R_{65} = 20 \text{ ohm}, R_{54} = 15 \text{ ohm}, R_{14} = 5 \text{ ohm},$$

$$V_1 = 200 \text{ volt}, V_6 = 0 \text{ volt}$$

(f) **(Interpolasi)** Hampiri fungsi berikut

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + \sqrt{x + x^2}}$$

dengan polinom interpolasi derajat n:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

di dalam selang $[a, b]$. Gunakan titik-titik selebar h, yang dalam hal ini $h = (b - a)/n$. Sebagai tes, gunakan selang $[0, 5]$ dan selang $[-2, 2]$, $n = 5, 10$, dan 12 . Tentukan persamaan polinom interpolasi yang dihasilkan.

(g.) **(Interpolasi)** Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
f(x)	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

Selanjutnya, estimasi nilai fungsi $f(x)$ pada nilai-nilai x berikut:

$$x = 0.2 \quad f(x) = ?$$

$$x = 0.55 \quad f(x) = ?$$

$$x = 0.85 \quad f(x) = ?$$

$$x = 1.28 \quad f(x) = ?$$

(h) **(Interpolasi)** Harga rumah baru dari tahun 1950 hingga 1969 mengalami perubahan yang tercatat sebagai berikut:

Tahun	Harga (\$ juta)
1950	33,525
1955	46,519
1960	53,941
1965	72,319
1966	75,160
1967	76,160
1968	84,690
1969	90,866

Carilah polinom yang menginterpolasi data tersebut, lalu prediksilah harga rumah baru pada tahun 1957, 1964, 1970, 1975 (atau nilai lain sesuai masukan user) dengan menggunakan polinom interpolasi derajat 7.

(i) (**Interpolasi**) Viskositas kinematika air, ν , diukur pada suhu-suhu tertentu dan diperoleh hasil sebagai berikut:

T (°F)	40	50	60	70	80	90
ν (10^{-5} ft ² /detik)	1.66	1.41	1.22	1.06	0.93	0.84

Carilah polinom yang menginterpolasi data tersebut, dan taksirlah viskositas pada suhu T tertentu (misalnya T = 62°F, T = 75°F, dll)