LAPORAN TUGAS BESAR I

IF2123 ALJABAR LINIER DAN GEOMETRI

Laporan ini dibuat untuk memenuhi tugas

Mata Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Disusun Oleh :

Kelompok 7

Hilya Fadhilah Imania (13520024)

Roby Purnomo (13520106)

Jundan Haris (13520155)

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2021

DAFTAR ISI

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Setiap kelompok diminta untuk membuat sebuah pustaka dalam Bahasa Java. Pustaka atau *library* tersebut digunakan untuk menemukan solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan *n* peubah dan *n* persamaan), menghitung determinan matriks dengan reduksi baris dan dengan ekspansi kofaktor, dan menghitung balikan matriks.

Pustaka yang sudah dibuat akan digunakan untuk membuat sebuah program penyelesaian berbagai persoalan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier, menghitung matriks balikan, menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

Adapun spesifikasi program adalah sebagai berikut :

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari keyboard maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari keyboard adalah *m*, *n*, koefisien *aij*, dan *bi*. Masukan dari file berbentuk matriks augmented tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3 4.5 2.8 10 12
-3 7 8.3 11 -4
0.5 -10 -9 12 0
```

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari *keyboard* adalah *n* dan koefisien *aij* . Masukan dari file berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3 4.5 2.8 10
-3 7 8.3 11
0.5 -10 -9 12
```

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n, (x_0 , y_0), (x_1 , y_1), ..., (x_n , y_n), dan nilai *x* yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika

masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

```
8.0 2.0794
9.0 2.1972
9.5 2.2513
```

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari keyboard adalah *n* (jumlah peubah x), semua nilai-nilai x_{1i} , x_{2i} , ..., x_{ni} , nilai y_i , dan nilai-nilai xk yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.
5. Untuk persoalan SPL, luaran (output) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya $x_4 = -2$, $x_3 = 2s - t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$.)
6. Untuk persoalan determinan dan matriks balikan, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing.
7. Untuk persoalan polinom interpolasi dan regresi, luarannya adalah persamaan polinom/regresi dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.
8. Luaran program harus dapat ditampilkan pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file.
9. Bahasa program yang digunakan adalah Java.
10. Program tidak harus berbasis GUI, cukup text-based saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas Eclipse misalnya).
11. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang masing-masing. Misalnya, menu:

```
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
```

```
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
```

12. Untuk pilihan menu nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

```
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
```

13. Untuk pilihan menu nomor 2 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

```
1. Metode Reduksi Baris
2. Metode Kofaktor
```

14. Untuk pilihan menu nomor 3 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

```
1. Metode Gauss-Jordan
2. Metode Kofaktor
```

BAB II
TEORI SINGKAT

A. Abstraksi

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan *n* peubah dan *n* persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Sistem persamaan linier adalah sekumpulan persamaan linier yang terdiri dari beberapa variabel. Sistem persamaan linier yang paling sederhana adalah sistem persamaan dua variabel. Misalkan

$ax_1 + bx_2 = y_1$

$cx_1 + dx_2 = y_2$

Persamaan tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk matrix Ax = B. Dengan matriks tersebut akan didapatkan solusi dari x_1 dan x_2.

Contoh lainnya adalah terdapat sebuah SPL dengan m buah persamaan dan n variabel, $x_1, x_2, \ldots x_n$ dan memiliki bentuk

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Maka ketika diubah menjadi bentuk matriks Ax = B menjadi

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}$$

Selain bentuk Ax = B, persamaan linier juga dapat direpresentasikan dengan matriks augmented. Matriks augmented terlihat lebih ringkas daripada bentuk matriks sebelumnya.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

B. Determinan

Determinan adalah nilai yang hanya bisa dihitung dan didapatkan dari sebuah matriks persegi. Matriks persegi adalah matriks yang jumlah kolom dan jumlah barisnya sama. Determinan dari sebuah matriks bisa dituliskan dengan det(A), det A, atau |A|.

Beberapa cara yang dapat digunakan untuk menghitung suatu determinan dari sebuah matriks adalah dengan menggunakan reduksi baris atau OBE, metode *sarrus* dan menggunakan metode minor-kofaktor.

Metode sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12})$$

Metode minor-kofaktor

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = |A| = a\cdot\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\cdot\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Metode OBE

$$[A] \overset{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } \det(A) = (-1)^p \, a'_{11}a'_{22} \ldots a'_{nn}$$

Beberapa kegunaan determinan diantaranya adalah untuk menentukan inverse dari sebuah matriks, mencari penyelesaian dari sebuah sistem persamaan linier, dan lain-lain.

C. Inverse

Sebuah matriks persegi, matriks yang kolom dan barisnya sama, bisa memiliki sebuah invers atau balikan. Matriks balikan atau matriks invers akan menghasilkan matriks identitas ketika dikalikan dengan matriks asalnya. Sebuah matriks tidak akan memiliki inverse jika determinannya bernilai nol. Misalkan ada sebuah matriks A, makan matriks balikannya dilambangkan dengan A^{-1}. Dan sesuai definisi,

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Untuk matriks 2x2, menghitung matriksnya dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

dengan syarat $ad - bc \neq 0$

Sedangkan untuk matriks 3x3 atau lebih, bisa menggunakan metode metode lain sepeti gauss-jordan, reduksi barus atau OBE, dan kofaktor.

D. Metode Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

Sebelum membahas metode eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, terlebih dahulu harus memahami tentang matriks eselon baris dan matriks eselon baris tereduksi. Matriks eselon baris (*row echelon form*) adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol. Contoh matriks eselon baris adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keterangan: * adalah sembarang nilai

Sedangkan matriks eselon baris tereduksi adalah sama dengan matriks eselon baris, namun terdapat satu syarat tambahan yaitu setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol di tempat lain. Contoh matriks eselon tereduksi adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode eliminasi Gauss adalah salah satu metode yang digunakan untuk mencari penyelesaian dari suatu sistem persamaan linier. Caranya adalah dengan menerapkan operasi baris elementer atau OBE pada sebuah matriks augmented hingga menjadi matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi. Jika berakhir pada matriks eselon baris, maka disebut metode eliminasi Gauss, sedangkan jika berakhir pada matriks eselon baris tereduksi, disebut metode eliminasi Gauss-Jordan.

Terdapat tiga operasi baris elementer terhadap matriks augmented, yaitu :

1. Perkalian sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
2. Pertukaran dua buah baris.
3. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

E. Matriks Kofaktor dan Matriks Adjoin

Misalkan terdapat sebuah matriks berukuran *n* x *n*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka didefinisikan:

M_{ij} = minor entri a_{ij}

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}.

Minor sendiri merupakan determinan submatriks yang elemen-elemennya tidak berada pada baris *i* dan kolom *j*. Sedangkan matriks kofaktor merupakan matriks yang dibuat menggunakan minor yang mengikuti tanda

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin adalah transpose dari matriks kofaktor. Matriks adjoin dari A dituliskan dengan adj(A).

F. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan linier yang jumlah persamaan dan jumlah variabelnya sama. Dengan kata lain, kaidah Cramer hanya menghasilkan solusi unik atau solusi tunggal.

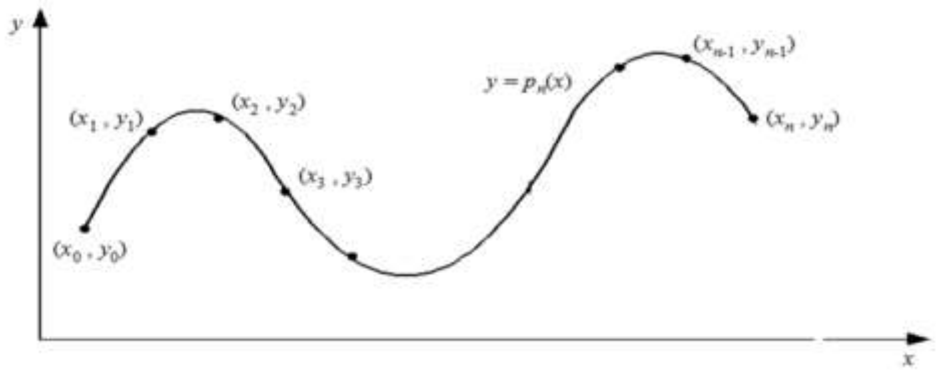
Sistem persamaan linier yang ingin dicari solusinya direpresentasikan dalam bentuk Ax = B. Setiap kolom dari A akan diganti dengan matriks B dan dihitung determinannya lalu dibagi dengan determinan matriks A. Dengan begitu akan menghasilkan sebuah solusi sejumlah variabel yang ada.

$$A_{nxn}\, X_{nx1} = C_{nx1}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_2|}{|A|} \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_n|}{|A|}$$

G. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan *n+1* buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai *y* di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$. Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat *n* untuk *n* yang lebih tinggi asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh *n* buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\
\ldots \qquad\qquad & \ldots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai $a_0, a_1, \ldots, a_n$, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

H. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcl}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots & & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III
IMPLEMENTASI PROGRAM

Pada tugas besar ini, kami mendeklarasikan 5 buah class, yaitu **:**

1. Matrix.java

   Pada class ini, dideklarasikan atribut matrix yakni berupa :

   - matrix: sebagai container matrix (menggunakan array of array yaitu Vector<Vector<Double>>)
   - nRows: untuk menyimpan banyaknya baris matriks efektif
   - nCols: untuk menyimpan banyaknya kolom matriks efektif

Method	Deskripsi
Matrix(int nRows, int nCols)	Konstruktor pembentuk matrix dinamis
int getNRows()	Mengembalikan panjang baris efektif matrix
int getNCols()	Mengembalikan panjang kolom efektif matrix
Double get(int i, int j)	Mengembalikan elemen matrix indeks baris ke-i dan kolom ke-j
Void set(int I, int j, double value)	Melakukan assign value pada matrix di indeks baris ke-i dan kolom ke-j
Void setall(double value, int iStart, int jStart, int iLength, int jLength)	Melakukan assign value pada indeks matrix baris iStart hingga iLength dan kolom jStart hingga jLength
void setAll(double value, int iStart, int jStart)	Melakukan assign value pada indeks matrix baris iStart dan kolom jStart hingga indeks efektif terakhir
void setAll(double value)	Melakukan assign value pada semua indeks matrix
void addRows(int length)	Menambahkan jumlah baris pada matrix sebanyak length

`void addCols(int length)`	Menambahkan jumlah kolom pada matrix sebanyak length
`void setRow(int i, Vector<Double> value)`	Melakukan assign value pada suatu baris i
`Matrix read(Scanner scanner, int nRows, int nCols)`	Membaca matrix dari input user
`Matrix read(Scanner scanner)`	Membaca matrix dari file
`String toString()`	Mengkonversi matrix menjadi string untuk ditampilkan ke layar
`boolean isNull()`	Mengembalikan true jika matrix berukuran 0x0
`boolean isSquare()`	Mengembalikan true jika matrix berukuran nxn
`boolean isValueInCol(int j, double val)`	Mengecek keberadaan value di kolom j
`void swapRows(int i1, int i2)`	Menukar elemen pada baris i1 dengan baris i2
`Vector<Double> getRowCopy(int i)`	Mengembalikan array of double yang berisi elemen pada matrix baris i
`Vector<Double> getMultipliedRow(int i, double factor)`	Mengembalikan array of double yang berisi elemen pada matrix baris i dikali dengan factor
`void multiplyRow(int i, double factor)`	Melakukan perkalian elemen matrix pada baris i dengan factor
`void divideRow(int i, double k)`	Melakukan pembagian elemen matrix pada baris i dengan factor
`void elementaryRowAdd(int i1, int i2, double factor)`	Melakukan operasi penambahan elemen pada baris i1 dengan baris i2 yang dikali dengan factor
`Matrix copy()`	Menyalin matrix
`Matrix subMatrix(int iStart, int jStart, int iLength, int jLength)`	Mengembalikan submatrix dari matrix dari indeks iStart hingga

	iStart + iLength dan kolom jStart hingga jStart + jLength
Matrix subMatrix(int iStart, int jStart)	Mengembalikan submatrix dari matrix dari indeks iStart dan kolom jStart hingga indeks terakhir
Matrix cofactor(int iC, int jC)	Mengembalikan matrix tanpa row iC dan jC
int pivotRowIndex(int iStart, int j)	Mengembalikan indeks baris jika merupakan pivot
Matrix toEchelon()	Mengembalikan matriks eselon
Matrix toReducedEchelon()	Mengembalikan matrik eselon tereduksi
Vector<int[]> getPivots()	Mengembalikan array of array of integer dari indeks {baris,kolom} yang merupakan pivot
Matrix transpose()	Melakukan transpose matrix
Matrix toCofactor()	Mengembalikan cofactor dari matrix
Matrix divide(double x)	Mengembalikan matrix yang tiap elemennya dibagi dengan x
Matrix multiplyMatrix(Matrix m)	Melakukan perkalian matrix dengan matrix
boolean isIdentity ()	Mengecek apakah matrix merupakan matrix identitas

2. Determinant.java

Pada class ini tidak dilakukan deklarasi atribut apapun karena atribut yang digunakan adalah atribut matrix.

Method	Deskripsi
double cofactorMethod(Matrix mat)	Mengembalikan nilai determinan matrix mat dengan menggunakan metode cofactor
double reductionMethod(Matrix mat)	Mengembalikan nilai determinan matrix mat dengan menggunakan metode reduksi

3. Inverse.java

Pada class ini tidak dilakukan deklarasi atribut apapun karena atribut yang digunakan adalah atribut matrix.

Method	Deskripsi
`double cofactorMethod(Matrix mat)`	Mengembalikan matriks yang sudah diinvers dengan menggunakan metode kofaktor
`double gaussMethod(Matrix mat)`	Mengembalikan matriks yang sudah diinver dengan menggunakan metode Gauss

4. Solution.java

Merepresentasikan nilai sebuah solusi, misal x_0. Bukan sekumpulan solusi SPL.

Pada class ini dideklarasikan atribut yaitu:

- `double constant`: menyimpan nilai konstanta dari solusi
- `HashMap<String, Double> parameters`: menyimpan pasangan nama dan koefisien dari parameter, jika solusi tersebut mengandung parameter.

Sifat dari objek Solution adalah:

- Apabila solusi tersebut hanya berupa bilangan, maka atribut `parameters` tidak memiliki elemen.
- Apabila solusi tersebut hanya berupa parameter, maka `constant` bernilai nol dan `parameters` berisi sebuah parameter dengan koefisien 1.
- Apabila solusi tersebut merupakan kombinasi dari bilangan dan parameter, maka kedua atribut terisi nilai.

Method	Deskripsi
`Solution(double constant)`	Konstruktor dengan bilangan.
`Solution(String param)`	Konstruktor dengan nama parameter.
`Solution(String param, double coeff)`	Konstruktor dengan nama parameter dan koefisiennya.
`void add(String param, double coeff)`	Menambahkan parameter beserta koefisiennya.

`double get(String param)`	Mengambil koefisien sebuah parameter.
`boolean hasParams()`	Mengembalikan true jika solusi mengandung parameter.
`toString()`	Mengubah ke String untuk ditampilkan

5. LinearSystem.java

Pada class ini tidak dilakukan deklarasi atribut apapun karena atribut yang digunakan adalah atribut matrix. Untuk solusi unik (`gaussUnique()`, `gaussJordanUnique()`, `cramerMethod()`, `inverseMethod()`) dipastikan bahwa array solusi hanya mengandung solusi bilangan (objek `Solution` dengan `constant` terdefinisi dan `parameters` tanpa elemen).

Method	Deskripsi
`Solution[] gaussUnique(Matrix mEchelon)`	Mengembalikan solusi pada SPL metode Gauss yang memiliki solusi unik
`Solution[] gaussInfinite(Matrix mEchelon)`	Mengembalikan solusi pada SPL metode Gauss yang memiliki solusi banyak
`Solution[] gaussJordanUnique(Matrix mRed)`	Mengembalikan solusi pada SPL metode Gauss Jordan yang memiliki solusi unik
`Solution[] gaussJordanInfinite(Matrix mRed)`	Mengembalikan solusi pada SPL metode Gauss Jordan yang memiliki solusi banyak
`Solution[] cramerMethod(Matrix m)`	Mengembalikan solusi pada SPL metode Cramer
`Solution[] inverseMethod(Matrix m)`	Mengembalikan solusi pada SPL metode Invers

`SolutionType checkSolutionType(Matrix mEchelon)`	Mengecek solusi pada SPL matrix dengan metode Gauss dan Gauss Jordan apakah merupakan solusi unik, banyak, atau tidak memiliki solusi

BAB IV
EKSPERIMEN

Studi Kasus

Temukan solusi SPL Ax = b berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
================ Solusi SPL: Metode Gauss ================

----------------------- Input SPL -----------------------

x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 1.0
2.0 * x_0 + 5.0 * x_1 - 7.0 * x_2 - 5.0 * x_3 = -2.0
2.0 * x_0 - x_1 + x_2 + 3.0 * x_3 = 4.0
5.0 * x_0 + 2.0 * x_1 - 4.0 * x_2 + 2.0 * x_3 = 6.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
2.0 5.0 -7.0 -5.0 -2.0
2.0 -1.0 1.0 3.0 4.0
5.0 2.0 -4.0 2.0 6.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
0.0 1.0 -1.6666666666666667 -1.0 -1.3333333333333333
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0

---------------------- Solusi SPL ----------------------

SPL tidak memiliki solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Gauss Jordan :

```
============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

----------------------- Input SPL -----------------------

x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 1.0
2.0 * x_0 + 5.0 * x_1 - 7.0 * x_2 - 5.0 * x_3 = -2.0
2.0 * x_0 - x_1 + x_2 + 3.0 * x_3 = 4.0
5.0 * x_0 + 2.0 * x_1 - 4.0 * x_2 + 2.0 * x_3 = 6.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
2.0 5.0 -7.0 -5.0 -2.0
2.0 -1.0 1.0 3.0 4.0
5.0 2.0 -4.0 2.0 6.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
0.0 1.0 -1.6666666666666667 -1.0 -1.3333333333333333
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0

------------- Matriks Eselon Baris Tereduksi -------------

1.0 0.0 0.0 0.666666666666667 0.0
0.0 1.0 0.0 -2.666666666666667 0.0
0.0 0.0 1.0 -1.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0

----------------------- Solusi SPL -----------------------

SPL tidak memiliki solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
--------------------- Input Matriks ---------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_1a.txt


======================== Error ========================

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan metode invers karena SPL memiliki nol atau tak hingga solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

```
--------------------- Input Matriks ---------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_1a.txt

======================== Error ========================

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan kaidah Cramer karena SPL memiliki nol atau tak hingga solusi.
```

Hasil analisis :

Dengan menggunakan metode Gauss dan metode Gauss-Jordan menghasilkan jawaban “SPL tidak memiliki solusi”. Hal ini dikarenakan pada baris terakhir matriks eselon baris memiliki elemen nol dan elemen terakhirnya konstanta bukan nol , pada kasus ini konstantanya adalah 1. Sehingga, matriks tidak memiliki solusi.

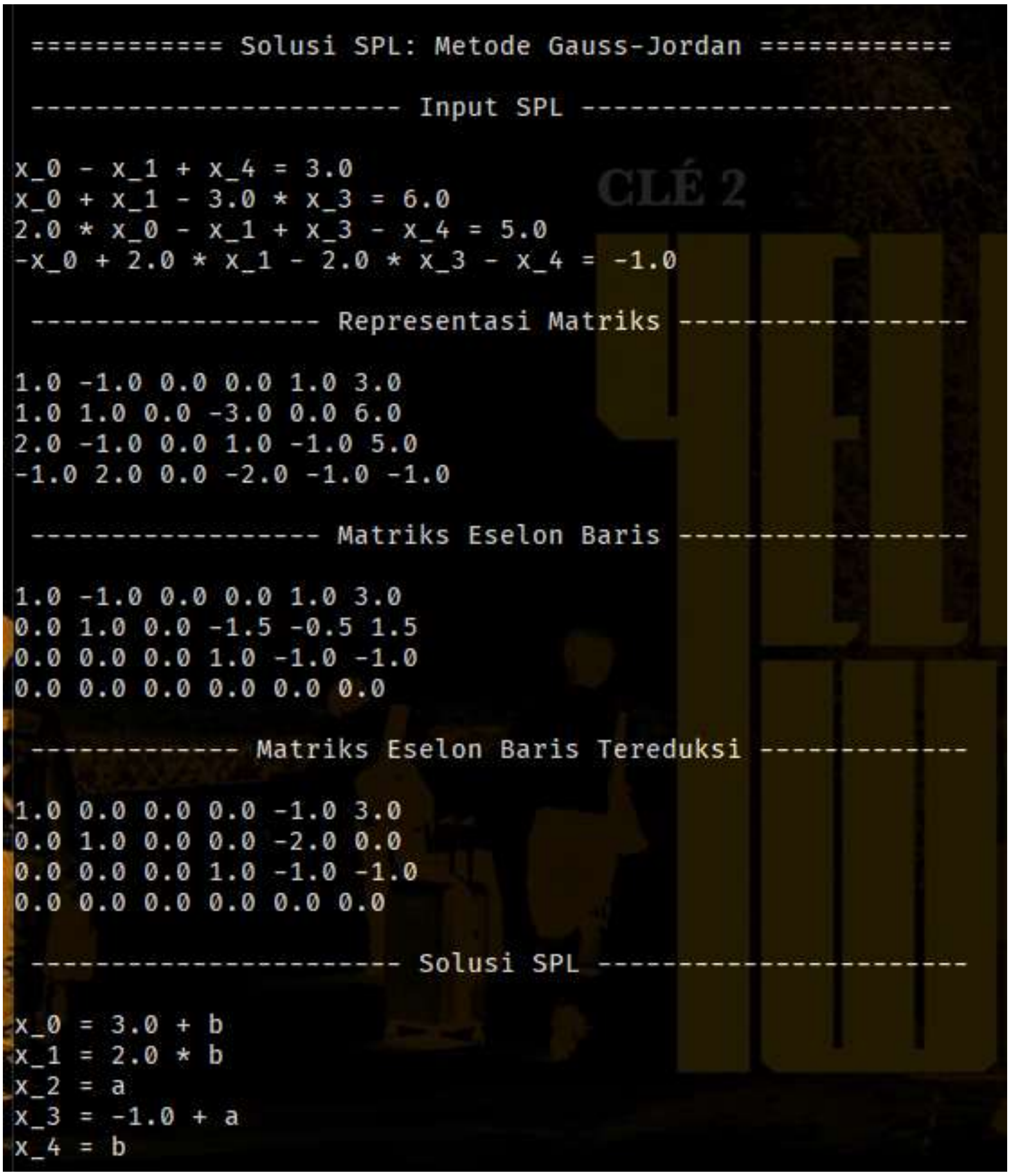
Dengan menggunakan metode Cramer dan metode Invers menghasilkan jawaban SPL memiliki nol atau tak hingga solusi. Hal ini dikarenakan matriks A memiliki determinan bernilai nol. Sehingga fungsi tidak bisa mencari solusi. Salah satu syarat untuk menggunakan kedua meetode ini adalah determinan dari matriks tidak boleh bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
 ================ Solusi SPL: Metode Gauss ================

 ----------------------- Input SPL -----------------------

x_0 - x_1 + x_4 = 3.0
x_0 + x_1 - 3.0 * x_3 = 6.0
2.0 * x_0 - x_1 + x_3 - x_4 = 5.0
-x_0 + 2.0 * x_1 - 2.0 * x_3 - x_4 = -1.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0
2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0
-1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0

 ------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
0.0 1.0 0.0 -1.5 -0.5 1.5
0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

 ----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 3.0 + b
x_1 = 2.0 * b
x_2 = a
x_3 = -1.0 + a
x_4 = b
```

Penyelesaian dengan metode Gauss Jordan :



```
============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

----------------------- Input SPL -----------------------

x_0 - x_1 + x_4 = 3.0
x_0 + x_1 - 3.0 * x_3 = 6.0
2.0 * x_0 - x_1 + x_3 - x_4 = 5.0
-x_0 + 2.0 * x_1 - 2.0 * x_3 - x_4 = -1.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0
2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0
-1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
0.0 1.0 0.0 -1.5 -0.5 1.5
0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

------------- Matriks Eselon Baris Tereduksi -------------

1.0 0.0 0.0 0.0 -1.0 3.0
0.0 1.0 0.0 0.0 -2.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = 3.0 + b
x_1 = 2.0 * b
x_2 = a
x_3 = -1.0 + a
x_4 = b
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
-------------------- Input Matriks --------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_1b.txt

************************* Error *************************

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan metode invers karena SPL memiliki nol atau tak hingga solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

Hasil Analisis :

Menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan, dihasilkan matriks eselon baris dengan semua elemen baris terakhir bernilai nol. Hal ini menandakan SPL memiliki banyak solusi. Setelah dihitung, didapatkan nilai

$$x_0 = 3.0 + b$$
$$x_1 = 3.0 \cdot b$$
$$x_2 = a$$
$$x_3 = -1.0 + a$$
$$x_4 = b$$

dengan a dan b bilangan real.

Dengan $a, b \ \in R$

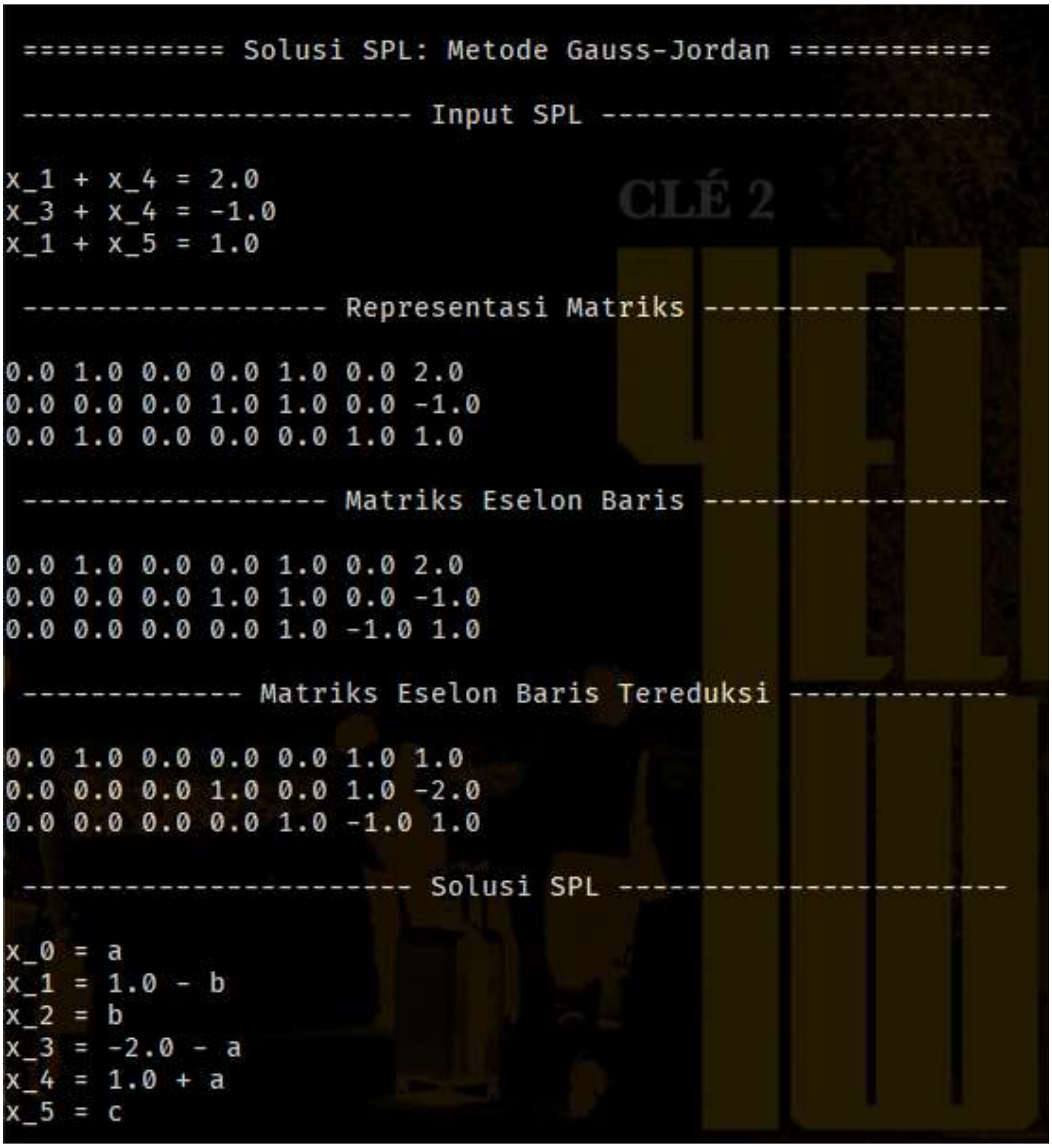
SPL tidak bisa dihitung menggunakan metode Cramer maupun metode Invers. Kedua metode tersebut tidak bisa digunakan karena matriks A bukan matriks persegi. Matriks yang bukan matriks persegi tidak memiliki determinan dan invers. Invers dan determinan hanya dimiliki oleh matriks persegi, atau matriks dengan ukuran $n \ x \ n$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
================ Solusi SPL: Metode Gauss ================

----------------------- Input SPL -----------------------

x_1 + x_4 = 2.0
x_3 + x_4 = -1.0
x_1 + x_5 = 1.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = a
x_1 = 1.0 - b
x_2 = b
x_3 = -2.0 - a
x_4 = 1.0 + a
x_5 = c
```

Penyelesaian dengan metode Gauss Jordan :



```
============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

---------------------- Input SPL ----------------------

x_1 + x_4 = 2.0
x_3 + x_4 = -1.0
x_1 + x_5 = 1.0

----------------- Representasi Matriks -----------------

0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0

----------------- Matriks Eselon Baris -----------------

0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0

------------ Matriks Eselon Baris Tereduksi ------------

0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 -2.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0

---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = a
x_1 = 1.0 - b
x_2 = b
x_3 = -2.0 - a
x_4 = 1.0 + a
x_5 = c
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
-------------------- Input Matriks --------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_1c.txt

======================== Error ========================

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan metode invers karena SPL memiliki nol atau tak hingga solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

Hasil analisis :

Menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan, dihasilkan matriks eselon baris dengan semua elemen baris terakhir bernilai nol. Hal ini menandakan SPL memiliki banyak solusi. Setelah dihitung, didapatkan nilai :

$$x_0 = a$$
$$x_1 = 1 - b$$
$$x_2 = b$$
$$x_3 = -2 - a$$
$$x_4 = 1 + a$$
$$x_5 = c$$

Dengan $a, b, c \in R$

SPL tidak bisa dihitung menggunakan metode Cramer maupun metode Invers. Kedua metode tersebut tidak bisa digunakan karena matriks A bukan matriks persegi. Matriks yang bukan matriks persegi tidak memiliki determinan dan invers. Invers dan determinan hanya dimiliki oleh matriks persegi, atau matriks dengan ukuran $n\ x\ n$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk $n = 6$ dan $n = 10$.

$$n = 6$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
**************** Solusi SPL: Metode Gauss ****************

------------------------ Input SPL ------------------------

x_0 + 0.5 * x_1 + 0.33333333333 * x_2 + 0.25 * x_3 + 0.2 * x_4 + 0.16666666666 * x_5 = 1.0
0.5 * x_0 + 0.33333333333 * x_1 + 0.25 * x_2 + 0.2 * x_3 + 0.16666666666 * x_4 + 0.14285714285 * x_5 = 0.0
0.33333333333 * x_0 + 0.25 * x_1 + 0.2 * x_2 + 0.16666666666 * x_3 + 0.14285714285 * x_4 + 0.125 * x_5 = 0.0
0.25 * x_0 + 0.2 * x_1 + 0.16666666666 * x_2 + 0.14285714285 * x_3 + 0.125 * x_4 + 0.11111111111 * x_5 = 0.0
0.2 * x_0 + 0.16666666666 * x_1 + 0.14285714285 * x_2 + 0.125 * x_3 + 0.11111111111 * x_4 + 0.1 * x_5 = 0.0
0.16666666666 * x_0 + 0.14285714285 * x_1 + 0.125 * x_2 + 0.11111111111 * x_3 + 0.1 * x_4 + 0.0909090909 * x_5 = 0.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 1.0
0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.0
0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.0
0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.0
0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0
0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 1.0
0.0 1.0 1.0000000000600004 0.9000000000360003 0.799999999952 0.7142857142685717 -6.000000000240002
0.0 0.0 1.0 1.4999999993400017 1.7142857149714383 1.7857142876857213 30.000000030000226
0.0 0.0 0.0 1.0 1.9999999811997975 2.77777770182199 -139.9999954079855
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.500001413797323 630.0002305772276
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -2772.1293092744972

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 36.00057462660169
x_1 = -630.0166128544058
x_2 = 3360.1131842622362
x_3 = -7560.295717387342
x_4 = 7560.327422992468
x_5 = -2772.1293092744972
```

Penyelesaian dengan metode Gauss Jordan :

```
══════════ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ══════════

─────────────────── Input SPL ───────────────────

x_0 + 0.5 * x_1 + 0.33333333333 * x_2 + 0.25 * x_3 + 0.2 * x_4 + 0.16666666666 * x_5 = 1.0
0.5 * x_0 + 0.33333333333 * x_1 + 0.25 * x_2 + 0.2 * x_3 + 0.16666666666 * x_4 + 0.14285714285 * x_5 = 0.0
0.33333333333 * x_0 + 0.25 * x_1 + 0.2 * x_2 + 0.16666666666 * x_3 + 0.14285714285 * x_4 + 0.125 * x_5 = 0.0
0.25 * x_0 + 0.2 * x_1 + 0.16666666666 * x_2 + 0.14285714285 * x_3 + 0.125 * x_4 + 0.11111111111 * x_5 = 0.0
0.2 * x_0 + 0.16666666666 * x_1 + 0.14285714285 * x_2 + 0.125 * x_3 + 0.11111111111 * x_4 + 0.1 * x_5 = 0.0
0.16666666666 * x_0 + 0.14285714285 * x_1 + 0.125 * x_2 + 0.11111111111 * x_3 + 0.1 * x_4 + 0.0909090909 * x_5 = 0.0

─────────────── Representasi Matriks ───────────────

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 1.0
0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.0
0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.0
0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.0
0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0
0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.0

─────────────── Matriks Eselon Baris ───────────────

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 1.0
0.0 1.0 1.0000000000600004 0.9000000000360003 0.799999999952 0.7142857142685717 -6.000000000240002
0.0 0.0 1.0 1.4999999993400017 1.7142857149714383 1.7857142876857213 30.000000030000226
0.0 0.0 0.0 1.0 1.9999999811997975 2.77777770182199 -139.9999954079855
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.500001413797323 630.0002305772276
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -2772.1293092744972

─────────── Matriks Eselon Baris Tereduksi ───────────

1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 36.00057462660152
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -630.0166128544047
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 3360.1131842622362
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -7560.295717387343
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 7560.327422992468
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -2772.1293092744972

─────────────────── Solusi SPL ───────────────────

x_0 = 36.00057462660152
x_1 = -630.0166128544047
x_2 = 3360.1131842622362
x_3 = -7560.295717387343
x_4 = 7560.327422992468
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
=============== Solusi SPL: Metode Invers ===============

------------------------ Input SPL ------------------------

x_0 + 0.5 * x_1 + 0.33333333333 * x_2 + 0.25 * x_3 + 0.2 * x_4 + 0.16666666666 * x_5 = 1.0
0.5 * x_0 + 0.33333333333 * x_1 + 0.25 * x_2 + 0.2 * x_3 + 0.16666666666 * x_4 + 0.14285714285 * x_5 = 0.0
0.33333333333 * x_0 + 0.25 * x_1 + 0.2 * x_2 + 0.16666666666 * x_3 + 0.14285714285 * x_4 + 0.125 * x_5 = 0.0
0.25 * x_0 + 0.2 * x_1 + 0.16666666666 * x_2 + 0.14285714285 * x_3 + 0.125 * x_4 + 0.11111111111 * x_5 = 0.0
0.2 * x_0 + 0.16666666666 * x_1 + 0.14285714285 * x_2 + 0.125 * x_3 + 0.11111111111 * x_4 + 0.1 * x_5 = 0.0
0.16666666666 * x_0 + 0.14285714285 * x_1 + 0.125 * x_2 + 0.11111111111 * x_3 + 0.1 * x_4 + 0.0909090909 * x_5 = 0.0

------------------- Representasi Matriks -------------------

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 1.0
0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.0
0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.0
0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.0
0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0
0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.0

----------------- Invers Matriks Koefisien -----------------

36.00065565887285 -630.0182868956892 3360.122412345051 -7560.316398051131 7560.34837234185 -2772.136947531308
-630.0183212355919 14700.520855690673 -88203.5083017994 211689.10962669845 -220510.0438159549 83163.95443995329
3360.122527884852 -88203.50872911987 564503.7711944523 -1411261.873939822 1512068.321401843 -582146.9270869192
-7560.316657484312 211689.10985263844 -1411261.8740521476 3628961.309854707 -3969178.318951585 1552390.3362830558
7560.348256414939 -220510.0434657326 1512068.3217473456 -3969178.318787946 4410197.289997749 -1746437.8713830262
-2772.136947531308 83163.95439402442 -582146.9269881464 1552390.3363851887 -1746437.8711995732 698574.7537906473

------------------------ Solusi SPL ------------------------

x_0 = 36.00065565887285
x_1 = -630.0183212355919
x_2 = 3360.122527884852
x_3 = -7560.316657484312
x_4 = 7560.348256414939
x_5 = -2772.136947531308
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

Hasil Analisis :

Dengan mensubtitusikan $n = 6$ pada matriks rumus Hilberts, didapatkan sebuah matriks Hilberts baru. Selanjutnya matriks tersebut dihitung menggunakan fungsi yang sudah dibuat. Baik menggunakan metode Gauss, metode Gauss-Jordan, metode Cramer, maupun metode Invers semuanya menghasilkan jawaban atau solusi yang sama. Matriks bisa dihitung menggunakan metode Cramer dan metode Invers karena matriks Hilberts merupakan matriks persegi dan memiliki determinan bukan nol. Hasil atau solusi yang didapat tertera pada gambar.

$$n = 10$$

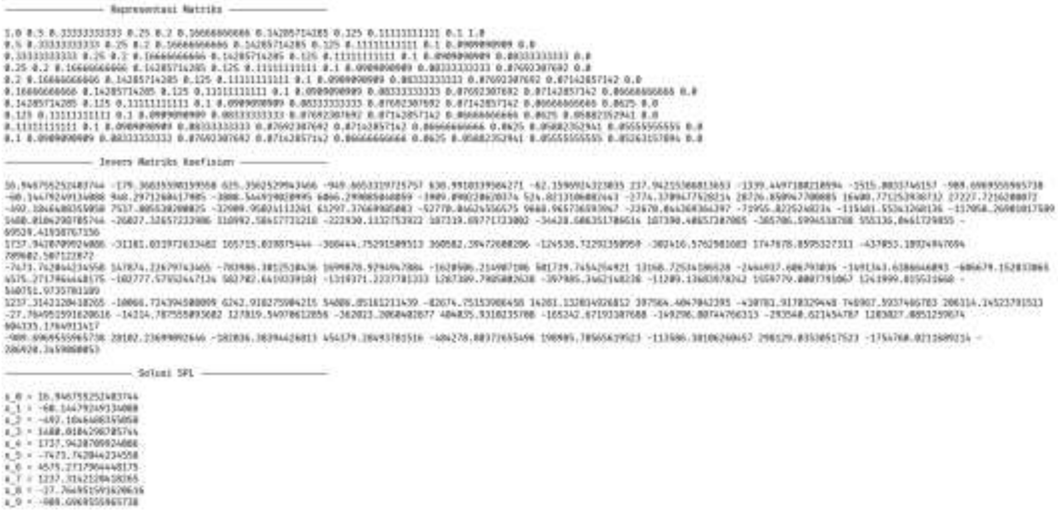
Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
——————————— Representasi Matriks ———————————

1.0 0.5 0.3333333333 0.25 0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 1.0
0.5 0.3333333333 0.25 0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0
0.3333333333 0.25 0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.0
0.25 0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.0
0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0
0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0666666666 0.0
0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0666666666 0.0625 0.0
0.125 0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0666666666 0.0625 0.05882352941 0.0
0.1111111111 0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0666666666 0.0625 0.05882352941 0.0555555555 0.0
0.1 0.0909090909 0.0833333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0666666666 0.0625 0.05882352941 0.0555555555 0.05263157894 0.0

——————————— Matriks Eselon Baris ———————————

1.0 0.5 0.3333333333 0.25 0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 1.0
0.0 1.0 1.0000000000600004 0.900000000360003 0.799999999952 0.7142857142685717 0.6428571429257144 0.5833333333433334 0.5333333333613336 0.49090909081963646 -6.0000000002400002
0.0 0.0 1.0 1.4999999993400017 1.7142857149714383 1.7857142876857213 1.7857142862357198 1.7500000011500108 1.6969696962442486 1.6363636383272793 30.000000030000226
0.0 0.0 0.0 1.0 1.9999999811997975 2.77777770182199 3.333333259299763 3.7121210892399623 3.9595958887488523 4.1118879951297025 -139.99999954079855
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.500001413797323 4.090910727333524 5.568185383017327 6.853150066607693 7.930073077905978 630.0002305772276
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 3.000074262075052 5.653975067909469 8.615618878905641 11.631112124626734 -2772.1293092744972
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 3.5032443259878696 7.475481727086126 12.616431573245535 12040.79781944512
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 4.072442931592111 9.798215501110663 -55911.810667961654
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 13.078520056049278 4204926.184838479
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 475835.650856199

——————————— Solusi SPL ———————————

x_0 = 57.80304900948977
x_1 = -1522.3418238886807
x_2 = 9062.615261726198
x_3 = 19844.938098750543
x_4 = -380443.2623787471
x_5 = 1563278.551664356
x_6 = -3168958.987126532
x_7 = 3501159.1751134917
x_8 = -2018299.9182675807
x_9 = 475835.650856199
```

Penyelesaian dengan metode Gauss Jordan :

```
——————————— Matriks Eselon Baris ———————————

1.0 0.5 0.3333333333 0.25 0.2 0.1666666666 0.14285714285 0.125 0.1111111111 0.1 1.0
0.0 1.0 1.0000000000600004 0.900000000360003 0.799999999952 0.7142857142685717 0.6428571429257144 0.5833333333433334 0.5333333333613336 0.49090909081963646 -6.0000000002400002
0.0 0.0 1.0 1.4999999993400017 1.7542857149714383 1.7857142876857213 1.7857142862357198 1.7500000011500108 1.6969696962442486 1.6363636383272793 30.000000030000226
0.0 0.0 0.0 1.0 1.9999999811997975 2.77777770182199 3.333333259299763 3.7121210892399623 3.9595958887488523 4.1118879951297025 -139.99999954079855
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.500001413797323 4.090910727333524 5.568185383017327 6.853150066607693 7.930073077905978 630.0002305772276
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 3.000074262075052 5.653975067909469 8.615610878905641 11.631112124626734 -2772.1293092744972
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 3.5032443259878696 7.475481727086126 12.616431573245535 12040.79781944512
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 4.072442931592111 9.798215501110663 -55911.810667961654
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 13.078520056049278 4204926.184838479
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 475835.650856199

——————————— Matriks Eselon Baris Tereduksi ———————————

1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 57.803049009748975
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -1522.3418238895356
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 9062.615261726693
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 19844.938098750892
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -380443.26237874664
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1563278.5516643561
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 -3168958.987126531
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 3501159.1751134917
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 -2018299.9182675807
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 475835.650856199

——————————— Solusi SPL ———————————

x_0 = 57.803049009748975
x_1 = -1522.3418238895356
x_2 = 9062.615261726693
x_3 = 19844.938098750892
x_4 = -380443.26237874664
x_5 = 1563278.5516643561
x_6 = -3168958.987126535
x_7 = 3501159.1751134917
x_8 = -2018299.9182675807
x_9 = 475835.650856199
```

Penyelesaian dengan metode Invers :



Penyelesaian dengan metode Cramer :

```
------------------- Representasi Matriks -------------------

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 1.0
0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.0
0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.0
0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.0
0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0
0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0
0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.0
0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.05882352941 0.0
0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.05882352941 0.05555555555 0.0
0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.05882352941 0.05555555555 0.05263157894 0.0

------------------------ Solusi SPL ------------------------

x_0 = 16.946755252403744
x_1 = -60.14479249134088
x_2 = -492.1840488355058
x_3 = 1480.0104298705744
x_4 = 1737.9420709924086
x_5 = -7473.742044234558
x_6 = 4575.2717964448175
x_7 = 1237.3142120418265
x_8 = -27.764951591620616
x_9 = -989.6969555965738
```

```
------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 1.0
0.5 0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.0
0.33333333333 0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.0
0.25 0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.0
0.2 0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.0
0.16666666666 0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0
0.14285714285 0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.0
0.125 0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.05882352941 0.0
0.11111111111 0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.05882352941 0.05555555555 0.0
0.1 0.0909090909 0.08333333333 0.07692307692 0.07142857142 0.06666666666 0.0625 0.05882352941 0.05555555555 0.05263157894 0.0

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 16.946755252403744
x_1 = -60.14479249134088
x_2 = -492.1840488355058
x_3 = 1480.0104298705744
x_4 = 1737.9420709924086
x_5 = -7473.742044234558
x_6 = 4575.2717964448175
x_7 = 1237.3142120418265
x_8 = -27.764951591620616
x_9 = -989.6969555965738
```

Hasil Analisis :

Dengan mensubtitusikan $n = 10$ pada matriks rumus Hilberts, didapatkan sebuah matriks Hilberts baru. Selanjutnya matriks tersebut dihitung menggunakan fungsi yang sudah dibuat. Hasil dengan metode Gauss dan metode Gauss-Jordan nilainya sama. Hasil dengan metode invers dan kaidah Cramer juga nilainya hampir sama. Namun antara kelompok pertama yang sama dan kelompok kedua berbeda. Dan semua solusi tersebut salah, tidak sesuai dengan jawaban sebenarnya. Hal ini diperkirakan karena pembulatan disebabkan angka yang begitu kecil.

SPL Augmented

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
 =============== Solusi SPL: Metode Gauss ===============

 ----------------------- Input SPL -----------------------

x_0 - x_1 + 2.0 * x_2 - x_3 = -1.0
2.0 * x_0 + x_1 - 2.0 * x_2 - 2.0 * x_3 = -2.0
-x_0 + 2.0 * x_1 - 4.0 * x_2 + x_3 = 1.0
3.0 * x_0 - 3.0 * x_3 = -3.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0

 ------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

 ----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = -1.0 + b
x_1 = 2.0 * a
x_2 = a
x_3 = b
```

Penyelesaian dengan metode Gauss-Jordan :

```
 ============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

 ----------------------- Input SPL -----------------------

x_0 - x_1 + 2.0 * x_2 - x_3 = -1.0
2.0 * x_0 + x_1 - 2.0 * x_2 - 2.0 * x_3 = -2.0
-x_0 + 2.0 * x_1 - 4.0 * x_2 + x_3 = 1.0
3.0 * x_0 - 3.0 * x_3 = -3.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0

 ------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

 ------------- Matriks Eselon Baris Tereduksi -------------

1.0 0.0 0.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

 ----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = -1.0 + b
x_1 = 2.0 * a
x_2 = a
x_3 = b
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
 -------------------- Input Matriks --------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_2a.txt

 ======================== Error ========================

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan metode invers karena SPL memiliki nol atau tak hingga solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

Hasil Analisis :

Dengan menggunakan metode Gauss dan metode Gauss-Jordan menghasilkan solusi banyak. Hal ini dikarenakan pada dua baris terakhir matriks eselon baris, semua elemennya bernilai nol. Solusi dari matriks augmented tersebut adalah

$$x_0 = -1.0 + b$$
$$x_1 = 2.0 \cdot a$$
$$x_2 = a$$
$$x_3 = b$$

$$dengan\ a, b \in R$$

Dengan menggunakan metode Cramer dan metode Invers menghasilkan jawaban SPL memiliki nol atau tak hingga solusi. Hal ini dikarenakan matriks $4\ x\ 4$ dari matriks $4\ x\ 5$ di atas memiliki determinan bernilai nol. Sehingga fungsi tidak bisa mencari solusi. Salah satu syarat untuk menggunakan kedua meetode ini adalah determinan dari matriks tidak boleh bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
 ================ Solusi SPL: Metode Gauss ================

 ----------------------- Input SPL -----------------------

2.0 * x_0 + 8.0 * x_2 = 8.0
x_1 + 4.0 * x_3 = 6.0
-4.0 * x_0 + 6.0 * x_2 = 6.0
-2.0 * x_1 + 3.0 * x_3 = -1.0
2.0 * x_0 - 4.0 * x_2 = -4.0
x_1 - 2.0 * x_3 = 0.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

2.0 0.0 8.0 0.0 8.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
-4.0 0.0 6.0 0.0 6.0
0.0 -2.0 0.0 3.0 -1.0
2.0 0.0 -4.0 0.0 -4.0
0.0 1.0 0.0 -2.0 0.0

 ------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 0.0 4.0 0.0 4.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

 ---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = 0.0
x_1 = 2.0
x_2 = 1.0
x_3 = 1.0
```

Penyelesaian dengan metode Gauss-Jordan :

```
============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

----------------------- Input SPL -----------------------

2.0 * x_0 + 8.0 * x_2 = 8.0
x_1 + 4.0 * x_3 = 6.0
-4.0 * x_0 + 6.0 * x_2 = 6.0
-2.0 * x_1 + 3.0 * x_3 = -1.0
2.0 * x_0 - 4.0 * x_2 = -4.0
x_1 - 2.0 * x_3 = 0.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

2.0 0.0 8.0 0.0 8.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
-4.0 0.0 6.0 0.0 6.0
0.0 -2.0 0.0 3.0 -1.0
2.0 0.0 -4.0 0.0 -4.0
0.0 1.0 0.0 -2.0 0.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 0.0 4.0 0.0 4.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

------------- Matriks Eselon Baris Tereduksi -------------

1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 2.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 0.0
x_1 = 2.0
x_2 = 1.0
x_3 = 1.0
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

Penyelesaian dengan metode Cramer :

Hasil Analisis :

Menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan, dihasilkan matriks eselon baris yang memiliki solusi unik. Setelah dihitung, didapatkan nilai :

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 1$$

SPL tidak bisa dihitung menggunakan metode Cramer maupun metode Invers. Kedua metode tersebut tidak bisa digunakan karena matriks tersebut bukan matriks persegi. Matriks yang bukan matriks persegi tidak memiliki determinan dan invers. Invers dan determinan hanya dimiliki oleh matriks persegi, atau matriks dengan ukuran $n \ x \ n$.

SPL

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
================ Solusi SPL: Metode Gauss ================

------------------------ Input SPL ------------------------

8.0 * x_0 + x_1 + 3.0 * x_2 + 2.0 * x_3 = 0.0
2.0 * x_0 + 9.0 * x_1 - x_2 - 2.0 * x_3 = 1.0
x_0 + 3.0 * x_1 + 2.0 * x_2 - x_3 = 2.0
x_0 + 6.0 * x_2 + 4.0 * x_3 = 3.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

8.0 1.0 3.0 2.0 0.0
2.0 9.0 -1.0 -2.0 1.0
1.0 3.0 2.0 -1.0 2.0
1.0 0.0 6.0 4.0 3.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 0.125 0.375 0.25 0.0
0.0 1.0 -0.2 -0.2857142857142857 0.11428571428571428
0.0 0.0 1.0 -0.19480519480519481 0.7597402597402597
0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = -0.2243243243243243
x_1 = 0.18243243243243246
x_2 = 0.7094594594594594
x_3 = -0.25810810810810797
```

Penyelesaian dengan metode Gauss-Jordan :

```
============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

----------------------- Input SPL -----------------------

8.0 * x_0 + x_1 + 3.0 * x_2 + 2.0 * x_3 = 0.0
2.0 * x_0 + 9.0 * x_1 - x_2 - 2.0 * x_3 = 1.0
x_0 + 3.0 * x_1 + 2.0 * x_2 - x_3 = 2.0
x_0 + 6.0 * x_2 + 4.0 * x_3 = 3.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

8.0 1.0 3.0 2.0 0.0
2.0 9.0 -1.0 -2.0 1.0
1.0 3.0 2.0 -1.0 2.0
1.0 0.0 6.0 4.0 3.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 0.125 0.375 0.25 0.0
0.0 1.0 -0.2 -0.2857142857142857 0.11428571428571428
0.0 0.0 1.0 -0.19480519480519481 0.7597402597402597
0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797

------------- Matriks Eselon Baris Tereduksi -------------

1.0 0.0 0.0 0.0 -0.2243243243243243
0.0 1.0 0.0 0.0 0.18243243243243246
0.0 0.0 1.0 0.0 0.7094594594594594
0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = -0.2243243243243243
x_1 = 0.18243243243243246
x_2 = 0.7094594594594594
x_3 = -0.25810810810810797
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
============== Solusi SPL: Metode Invers ==============

---------------------- Input SPL ----------------------

8.0 * x_0 + x_1 + 3.0 * x_2 + 2.0 * x_3 = 0.0
2.0 * x_0 + 9.0 * x_1 - x_2 - 2.0 * x_3 = 1.0
x_0 + 3.0 * x_1 + 2.0 * x_2 - x_3 = 2.0
x_0 + 6.0 * x_2 + 4.0 * x_3 = 3.0

----------------- Representasi Matriks -----------------

8.0 1.0 3.0 2.0 0.0
2.0 9.0 -1.0 -2.0 1.0
1.0 3.0 2.0 -1.0 2.0
1.0 0.0 6.0 4.0 3.0

--------------- Invers Matriks Koefisien ---------------

0.13783783783783785 -0.01891891891891892 0.010810810810810811 -0.07567567567567568
-0.033783783783783786 0.14189189189189189 -0.08108108108108109 0.06756756756756757
-0.02027027027027027 -0.11486486486486487 0.35135135135135137 0.04054054054054054
-0.004054054054054054 0.17702702702702702 -0.5297297297297298 0.20810810810810812

---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = -0.22432432432432434
x_1 = 0.18243243243243243
x_2 = 0.7094594594594594
x_3 = -0.25810810810810814
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

```
============== Solusi SPL: Kaidah Cramer ==============

----------------------- Input SPL -----------------------

8.0 * x_0 + x_1 + 3.0 * x_2 + 2.0 * x_3 = 0.0
2.0 * x_0 + 9.0 * x_1 - x_2 - 2.0 * x_3 = 1.0
x_0 + 3.0 * x_1 + 2.0 * x_2 - x_3 = 2.0
x_0 + 6.0 * x_2 + 4.0 * x_3 = 3.0

----------------- Representasi Matriks -----------------

8.0 1.0 3.0 2.0 0.0
2.0 9.0 -1.0 -2.0 1.0
1.0 3.0 2.0 -1.0 2.0
1.0 0.0 6.0 4.0 3.0

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = -0.22432432432432434
x_1 = 0.18243243243243243
x_2 = 0.7094594594594594
x_3 = -0.2581081081081081
```

Hasil Analisis :

Menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan, dihasilkan matriks eselon baris yang memiliki diagonal 1 utama, yang berarti merupakan solusi unik. Lalu karena matrix input sudah nxn dan $\det \neq 0$, maka matrix ini juga dapat diselesaikan melalui metode Invers dan Cramer. Setelah dihitung, didapatkan nilai :

$$x_0 = -0.22432432432434$$
$$x_1 = 0.18243243243243$$
$$x_2 = 0.709459459459459$$
$$x_3 = -0.2581081081081081$$

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
════════════ Solusi SPL: Metode Gauss ════════════

──────────────── Input SPL ────────────────

x_6 + x_7 + x_8 = 13.0
x_3 + x_4 + x_5 = 15.0
x_0 + x_1 + x_2 = 8.0
0.04289 * x_2 + 0.04289 * x_4 + 0.75 * x_5 + 0.04289 * x_6 + 0.75 * x_7 + 0.61396 * x_8 = 14.79
0.25 * x_1 + 0.91421 * x_2 + 0.25 * x_3 + 0.91421 * x_4 + 0.25 * x_5 + 0.91421 * x_6 + 0.25 * x_7 = 14.31
0.61396 * x_0 + 0.75 * x_1 + 0.04289 * x_2 + 0.75 * x_3 + 0.04289 * x_4 + 0.04289 * x_6 = 3.81
x_2 + x_5 + x_8 = 18.0
x_1 + x_4 + x_7 = 12.0
x_0 + x_3 + x_6 = 6.0
0.04289 * x_0 + 0.75 * x_1 + 0.61396 * x_2 + 0.04289 * x_4 + 0.75 * x_5 + 0.04289 * x_8 = 10.51
0.91421 * x_0 + 0.25 * x_1 + 0.25 * x_3 + 0.91421 * x_4 + 0.25 * x_5 + 0.25 * x_7 + 0.91421 * x_8 = 16.13
0.04289 * x_0 + 0.75 * x_3 + 0.04289 * x_4 + 0.61396 * x_6 + 0.75 * x_7 + 0.04289 * x_8 = 7.04

──────────────── Representasi Matriks ────────────────

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 13.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 15.0
1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 8.0
0.0 0.0 0.04289 0.0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0.0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0.0 0.04289 0.0 0.0 3.81
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 18.0
0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 12.0
1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 6.0
0.04289 0.75 0.61396 0.0 0.04289 0.75 0.0 0.0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0.0 0.25 0.91421 0.25 0.0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0.0 0.0 0.75 0.04289 0.0 0.61396 0.75 0.04289 7.04

──────────────── Matriks Eselon Baris ────────────────

1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 8.0
0.0 1.0 3.65684 1.0 3.65684 1.0 3.65684 1.0 0.0 57.24
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 17.48659361156447 1.0 17.48659361156447 14.31475868500816 344.8356260200513
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 15.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.6154626809719337E17 -5.530000054440778E15 -1.6707632815163414E17 -1.3777398900004456E17 -3.1558965052728571E18
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0342320507900167 1.0342320507900167 0.8528453841233499 19.535558093945756
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 13.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 17.0 13.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -16.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

──────────────── Solusi SPL ────────────────

SPL tidak memiliki solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Gauss-Jordan :

```
————————— Matriks Eselon Baris —————————

1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 8.0
0.0 1.0 3.65684 1.0 3.65684 1.0 3.65684 1.0 0.0 57.24
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 17.48659361156447 1.0 17.48659361156447 14.314758685008816 344.8356260200513
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 15.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.61548268097193376E17 -5.530060054440778E15 -1.07076328151634144E17 -1.37773989069844456E17 -3.15589650527285718E18
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0342320507900107 1.0342320507900107 0.8528453841233499 19.535550093945756
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 13.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 17.0 13.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -16.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

————————— Matriks Eselon Baris Tereduksi —————————

1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

————————— Solusi SPL —————————

SPL tidak memiliki solusi.
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
-------------------- Input Matriks --------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_3b.txt

======================= Error =======================

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan metode invers karena jumlah persamaan lebih dari jumlah peubah.
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

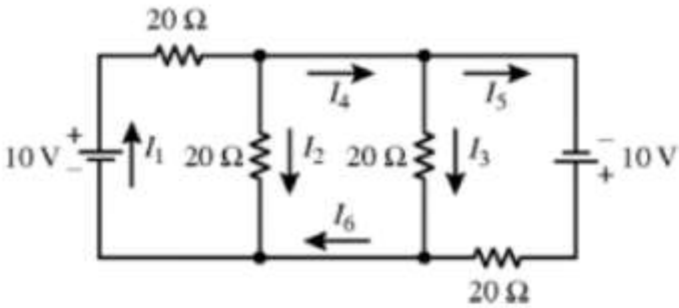
```
-------------------- Input Matriks --------------------

Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_3b.txt

======================= Error =======================

Tidak dapat mencari solusi SPL dengan kaidah Cramer karena jumlah persamaan lebih dari jumlah peubah.
```

Hasil Analisis :

Dengan menggunakan metode Gauss dan metode Gauss-Jordan menghasilkan jawaban “SPL tidak memiliki solusi”. Hal ini dikarenakan pada baris ketiga dari bawah matriks eselon baris ataupun matriks eselon tereduksi semua elemen bernilai nol dan elemen terakhirnya konstanta bukan nol , pada kasus ini konstantanya adalah 1. Sehingga, matriks tidak memiliki solusi.

Dengan menggunakan metode Cramer dan metode Invers menghasilkan jawaban tidak dapet menggunakan metode invers maupun metode Cramer. Hal ini dikarenakan jumlah persamaan lebih banyak dari jumlah peubah atau variabel, yang artinya matriks yang terbentuk bukan merupakan matriks persegi. Syarat untuk menggunakan kedua metode ini adalah matriks merupakan matriks persegi dan memiliki determinan bukan nol.

Persoalan



Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
=============== Solusi SPL: Metode Gauss ===============

 ----------------------- Input SPL -----------------------

40.0 * x_0 - 20.0 * x_3 = 10.0
-20.0 * x_0 + 40.0 * x_3 - 20.0 * x_4 = 0.0
-20.0 * x_3 + 40.0 * x_4 = 10.0
-x_0 + x_1 + x_3 = 0.0
x_2 - x_3 + x_4 = 0.0
-x_3 + x_5 = 0.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

40.0 0.0 0.0 -20.0 0.0 0.0 10.0
-20.0 0.0 0.0 40.0 -20.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -20.0 40.0 0.0 10.0
-1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0

 ------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 0.0 0.0 -0.5 0.0 0.0 0.25
0.0 1.0 0.0 0.5 0.0 0.0 0.25
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 -0.6666666666666666 0.0 0.16666666666666666
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.49999999999999994
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.4999999999999999

 ----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 0.49999999999999994
x_1 = 5.551115123125783E-17
x_2 = -5.551115123125783E-17
x_3 = 0.4999999999999999
x_4 = 0.49999999999999994
x_5 = 0.4999999999999999
```

Penyelesaian dengan metode Gauss-Jordan :

```
═══════════ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ═══════════

────────────────────── Input SPL ──────────────────────

40.0 * x_0 - 20.0 * x_3 = 10.0
-20.0 * x_0 + 40.0 * x_3 - 20.0 * x_4 = 0.0
-20.0 * x_3 + 40.0 * x_4 = 10.0
-x_0 + x_1 + x_3 = 0.0
x_2 - x_3 + x_4 = 0.0
-x_3 + x_5 = 0.0

───────────────── Representasi Matriks ─────────────────

40.0 0.0 0.0 -20.0 0.0 0.0 10.0
-20.0 0.0 0.0 40.0 -20.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -20.0 40.0 0.0 10.0
-1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0

───────────────── Matriks Eselon Baris ─────────────────

1.0 0.0 0.0 -0.5 0.0 0.0 0.25
0.0 1.0 0.0 0.5 0.0 0.0 0.25
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 -0.6666666666666666 0.0 0.16666666666666666
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.49999999999999994
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.4999999999999999

──────────── Matriks Eselon Baris Tereduksi ────────────

1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.49999999999999994
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 5.551115123125783E-17
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 -5.551115123125783E-17
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.4999999999999999
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.49999999999999994
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.4999999999999999

────────────────────── Solusi SPL ──────────────────────

x_0 = 0.49999999999999994
x_1 = 5.551115123125783E-17
x_2 = -5.551115123125783E-17
x_3 = 0.4999999999999999
x_4 = 0.49999999999999994
x_5 = 0.4999999999999999
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
=============== Solusi SPL: Metode Invers ===============

---------------------- Input SPL -----------------------

40.0 * x_0 - 20.0 * x_3 = 10.0
-20.0 * x_0 + 40.0 * x_3 - 20.0 * x_4 = 0.0
-20.0 * x_3 + 40.0 * x_4 = 10.0
-x_0 + x_1 + x_3 = 0.0
x_2 - x_3 + x_4 = 0.0
-x_3 + x_5 = 0.0

----------------- Representasi Matriks -----------------

40.0 0.0 0.0 -20.0 0.0 0.0 10.0
-20.0 0.0 0.0 40.0 -20.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -20.0 40.0 0.0 10.0
-1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0

--------------- Invers Matriks Koefisien ---------------

0.0375 0.025 0.0125 0.0 0.0 0.0
0.0125 -0.025 -0.0125 1.0 0.0 0.0
0.0125 0.025 -0.0125 0.0 1.0 0.0
0.025 0.05 0.025 0.0 0.0 0.0
0.0125 0.025 0.0375 0.0 0.0 0.0
0.025 0.05 0.025 0.0 0.0 1.0

---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = 0.5
x_1 = 0.0
x_2 = 0.0
x_3 = 0.5
x_4 = 0.5
x_5 = 0.5
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

```
=============== Solusi SPL: Kaidah Cramer ===============

 ----------------------- Input SPL -----------------------

40.0 * x_0 - 20.0 * x_3 = 10.0
-20.0 * x_0 + 40.0 * x_3 - 20.0 * x_4 = 0.0
-20.0 * x_3 + 40.0 * x_4 = 10.0
-x_0 + x_1 + x_3 = 0.0
x_2 - x_3 + x_4 = 0.0
-x_3 + x_5 = 0.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

40.0 0.0 0.0 -20.0 0.0 0.0 10.0
-20.0 0.0 0.0 40.0 -20.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -20.0 40.0 0.0 10.0
-1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0

 ----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 0.5
x_1 = 0.0
x_2 = 0.0
x_3 = 0.5
x_4 = 0.5
x_5 = 0.5
```

Hasil Analisis :

Dari rangkaian listrik pada soal tersebut didapat beberapa persamaan :

$$40i_1 - 20i_4 = 10$$

$$-20i_1 + 40i_4 - 20i_5 = 0$$

$$-20i_4 + 4i_5 = 10$$

$$-i_1 + i_2 + i_4 = 0$$

$$i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

$$-i_4 + i_6 = 0$$

Menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan, dihasilkan matriks eselon baris yang memiliki diagonal 1 utama, yang berarti merupakan solusi unik. Lalu karena matrix input sudah nxn dan $\det \neq 0$, maka matrix ini juga dapat diselesaikan melalui metode Invers dan Cramer. Setelah dihitung, didapatkan nilai pada Gauss dan Gauss Jordan sedikit berbeda dengan metode Invers dan Cramer yakni pada beberapa angka dibelakang koma, untuk solusi dengan Invers dan Cramer yakni :

$$i_1 = 0.5$$

$$i_2 = 0$$

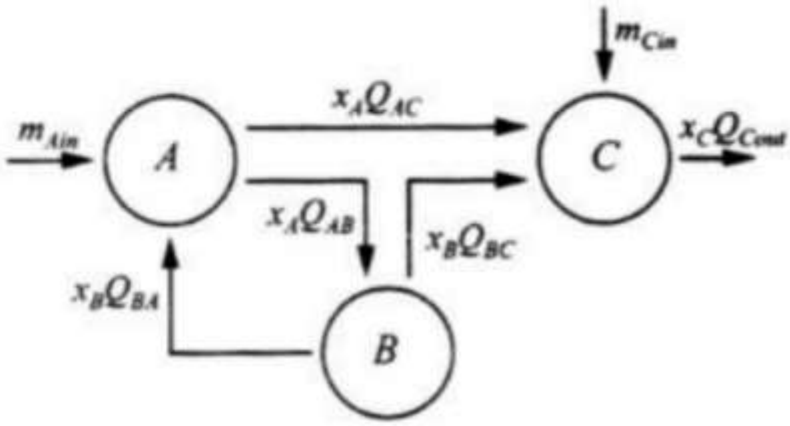
$$i_3 = 0$$

$$i_4 = 0.5$$

$$i_5 = 0.5$$

$$i_6 = 0.5$$

Sistem reaktor



Dengan laju volume Q dalam m3/s dan input massa min dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&\text{A:} \quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
&\text{B:} \quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
&\text{C:} \quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}
$$

Tentukan solusi xA, xB, xC dengan menggunakan parameter berikut : QAB = 40, QAC= 80, QBA = 60, QBC = 20 dan QCout = 150 m3/s dan mAin = 1300 dan mCin = 200mg/s.

Penyelesaian dengan metode Gauss :

```
 =============== Solusi SPL: Metode Gauss ===============

 ---------------------- Input SPL ----------------------

-120.0 * x_0 + 60.0 * x_1 = -1300.0
40.0 * x_0 - 80.0 * x_1 = 0.0
80.0 * x_0 + 20.0 * x_1 - 150.0 * x_2 = -200.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

-120.0 60.0 0.0 -1300.0
40.0 -80.0 0.0 0.0
80.0 20.0 -150.0 -200.0

 ------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 -0.5 0.0 10.833333333333334
0.0 1.0 0.0 7.222222222222223
0.0 0.0 1.0 10.0

 ---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = 14.444444444444446
x_1 = 7.222222222222223
x_2 = 10.0
```

Penyelesaian dengan metode Gauss-Jordan :

```
============ Solusi SPL: Metode Gauss-Jordan ============

----------------------- Input SPL -----------------------

-120.0 * x_0 + 60.0 * x_1 = -1300.0
40.0 * x_0 - 80.0 * x_1 = 0.0
80.0 * x_0 + 20.0 * x_1 - 150.0 * x_2 = -200.0

------------------ Representasi Matriks ------------------

-120.0 60.0 0.0 -1300.0
40.0 -80.0 0.0 0.0
80.0 20.0 -150.0 -200.0

------------------ Matriks Eselon Baris ------------------

1.0 -0.5 0.0 10.833333333333334
0.0 1.0 0.0 7.222222222222223
0.0 0.0 1.0 10.0

------------- Matriks Eselon Baris Tereduksi -------------

1.0 0.0 0.0 14.444444444444446
0.0 1.0 0.0 7.222222222222223
0.0 0.0 1.0 10.0

----------------------- Solusi SPL -----------------------

x_0 = 14.444444444444446
x_1 = 7.222222222222223
x_2 = 10.0
```

Penyelesaian dengan metode Invers :

```
=============== Solusi SPL: Metode Invers ===============

 ---------------------- Input SPL ----------------------

-120.0 * x_0 + 60.0 * x_1 = -1300.0
40.0 * x_0 - 80.0 * x_1 = 0.0
80.0 * x_0 + 20.0 * x_1 - 150.0 * x_2 = -200.0

 ------------------ Representasi Matriks ------------------

-120.0 60.0 0.0 -1300.0
40.0 -80.0 0.0 0.0
80.0 20.0 -150.0 -200.0

 ---------------- Invers Matriks Koefisien ----------------

-0.011111111111111112 -0.008333333333333333 0.0
-0.005555555555555556 -0.016666666666666666 0.0
-0.006666666666666667 -0.006666666666666667 -0.006666666666666667

 ---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = 14.444444444444445
x_1 = 7.222222222222222
x_2 = 10.000000000000002
```

Penyelesaian dengan metode Cramer :

```
 -------------------- Input Matriks --------------------


Masukkan ukuran matriks dalam bilangan bulat,
dengan format "[jumlah baris]<spasi>[jumlah kolom]"
Jika matriks dalam file, masukkan path file tersebut

matriks> test\spl_5.txt

 =============== Solusi SPL: Kaidah Cramer ===============

 ---------------------- Input SPL ----------------------

-120.0 * x_0 + 60.0 * x_1 = -1300.0
40.0 * x_0 - 80.0 * x_1 = 0.0
80.0 * x_0 + 20.0 * x_1 - 150.0 * x_2 = -200.0

 ----------------- Representasi Matriks -----------------

-120.0 60.0 0.0 -1300.0
40.0 -80.0 0.0 0.0
80.0 20.0 -150.0 -200.0

 ---------------------- Solusi SPL ----------------------

x_0 = 14.444444444444445
x_1 = 7.222222222222222
x_2 = 10.0
```

Hasil Analisis :

Dari Sistem Reaktor pada soal tersebut didapat beberapa persamaan :

$$-120x_A + 60x_B = -1300$$

$$40x_A - 80x_B = 0$$

$$80x_A + 20x_B - 150x_C = -200$$

Menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan, dihasilkan matriks eselon baris yang memiliki diagonal 1 utama, yang berarti merupakan solusi unik. Lalu karena matrix input sudah nxn dan $\det \neq 0$, maka matrix ini juga dapat diselesaikan melalui metode Invers dan Cramer. Setelah dihitung, didapatkan nilai pada Gauss dan Gauss Jordan sedikit berbeda dengan metode Invers dan Cramer yakni pada beberapa angka dibelakang koma, untuk solusi dengan Invers dan Cramer yakni :

$$x_A = 14.4444444444444$$

$$x_B = 7.22222222222$$

$$x_C = 10$$

Interpolasi

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

$$x = 0.2$$

$$x = 0.55$$

$$x = 0.85$$

$x = 1.28$

Hasil Analisis :

Pada persoalan Interpolasi, input pada soal ini adalah menginput titik $(x, f(x))$ sebanyak 7 titik. Lalu dari input titik-titik ini dikonversi menjadi Matrix $n \times (n+1)$. Setelah dikonversi, SPL Matrix diselesaikan dengan Metode Gauss Jordan (pada program kami) dan menghasilkan persamaan :

$$\begin{aligned} f(x) = {} & -0.022976562500000138 + 0.2400000000000024x \\ & + 0.1973958333333196x^2 \\ & + 3.4409974869475946x^3 \times 10^{-14} \\ & + 0.026041666666624073x^4 \\ & + 2.550133859867565x^5 \times 10^{-14} \\ & - 5.910407676398067x^6 \times 10^{-15} \end{aligned}$$

Lalu x diinput lagi untuk menaksir nilai $f(x)$ nya :

- $x = 0.2$, menghasilkan $f(0.2) = 0.0329609373500000016$
- $x = 0.55$, menghasilkan $f(0.55) = 0.1711186523474998$
- $x = 0.85$, menghasilkan $f(0.85) = 0.33723583984375$
- $x = 1.28$, menghasilkan $f(1.28) = 0.6775418374999999$

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

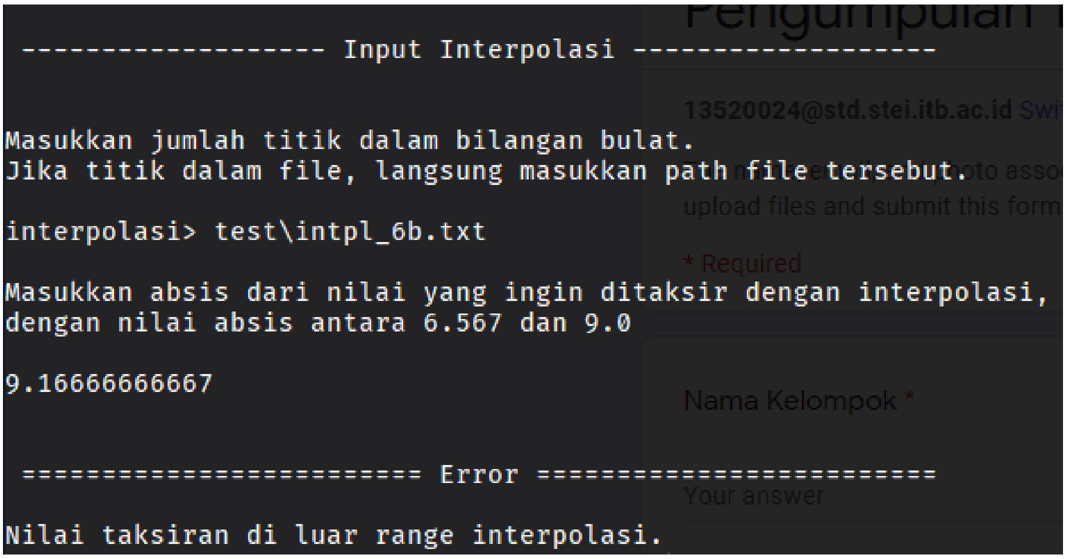
tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

16/07/2021

```
———————— Interpolasi Polinom ————————
———————— Input Dataset ————————
(6.567000,12624.000000)
(7.000000,21807.000000)
(7.258000,38391.000000)
(7.451000,54517.000000)
(7.548000,51952.000000)
(7.839000,28228.000000)
(8.161000,35764.000000)
(8.484000,20813.000000)
(8.709000,12408.000000)
(9.000000,10534.000000)

Nilai yang ingin ditaksir = 7.51612903226

———————— Representasi Matriks ————————
1.0 6.567 43.125489 283.205086263 1859.8878014091212 12213.357832379058 80205.12888523328 526707.028853327 3458885.0584787985 2.2714490179036833E7 12624.0
1.0 7.0 49.0 343.0 2401.0 16807.0 117649.0 823543.0 5764801.0 4.0353607E7 21807.0
1.0 7.258 52.678564 382.341017512 2775.031105102096 20141.175760831014 146184.65367211148 1061000.2563521852 7700797.63428616 5.589238922963443E7 38391.0
1.0 7.451 55.517400999999 413.66015485099996 3082.1618137948003 22965.336694585058 171114.72371135326 1274975.806373293 9499844.733287405 7.078334310772440E7 54517.0
1.0 7.548 56.972304 430.026950592 3245.843423068416 24499.626157320403 184923.17823545643 1395800.1493212099 1.0535499527876492E7 7.952195043037337E7 51952.0
1.0 7.839 61.449921 481.7059307190001 3776.0927909062416 29600.791387914032 232040.6036098581 1818966.2923247977 1.4258876765553409E7 1.1177533496502174E8 28228.0
1.0 8.161 66.601920999999 543.5382772809999 4435.8158080024 36200.083403945246 295433.05886059714 2411035.7222347023 1.9676462529150056E7 1.6057961070045008E8 35764.0
1.0 8.484 71.978256 610.663523904 5180.869336801536 43954.49545342423 372909.93942685117 3163767.926097405 2.6841407085038387E7 2.2772249770922813E8 20813.0
1.0 8.709 75.846680999999 660.5407448289999 5752.71901071576 50100.429933995554 436324.64429510724 3799951.3271666113 3.3093770188204018E7 2.8821309613713205E8 12408.0
1.0 9.0 81.0 729.0 6561.0 59049.0 531441.0 4782969.0 4.3046721E7 3.87420489E8 10534.0

———————— Persamaan Interpolasi Polinom ————————
y(x) = 7.187066071657867E12 - 9.346993079172328E12 * x + 5.334203055240195E12 * x^(2) - 1.7568101063613009E12 * x^(3) + 3.6055008737553394E11 * x^(4) -
5.1131876788132755E10 * x^(5) + 4.6950063154287935E9 * x^(6) - 2.7547453942066935E8 * x^(7) + 9372849.22818132 * x^(8) - 140993.71224863594 * x^(9)

———————— Hasil Taksiran ————————
y(7.51612903226) = 53532.689453125
```

10/08/2021

05/09/2021



Hasil Analisis :

Dari data yang ada di tabel yang disediakan, dibuat seolah-olah menjadi sebuah titik-titik. Selanjutnya titik-titik tersebut akan digunakan untuk membuat persamaan interpolasi polinom. Dengan menggunakan fungsi yang sudah dibuat, didapatkan persamaan

$$y(x) = 7.187066071657867 \cdot 10^{12} - 9.346993079172328 \cdot 10^{12} \cdot x + 5.334203055240195 \cdot 10^{12} \cdot x^2 - 1.7568101863613809 \cdot 10^{12} \cdot x^3 + 3.6855080717553394 \cdot 10^{11} \cdot x^4 - 5.113187676013275 \cdot 10^{10} \cdot x^5 + 4.695806315428793 \cdot 10^{9} \cdot x^6 - 2.754745394206693 \cdot 10^{8} \cdot x^7 + 9372849.23910132 \cdot x^8 - 140993.71224863594 \cdot x^9$$

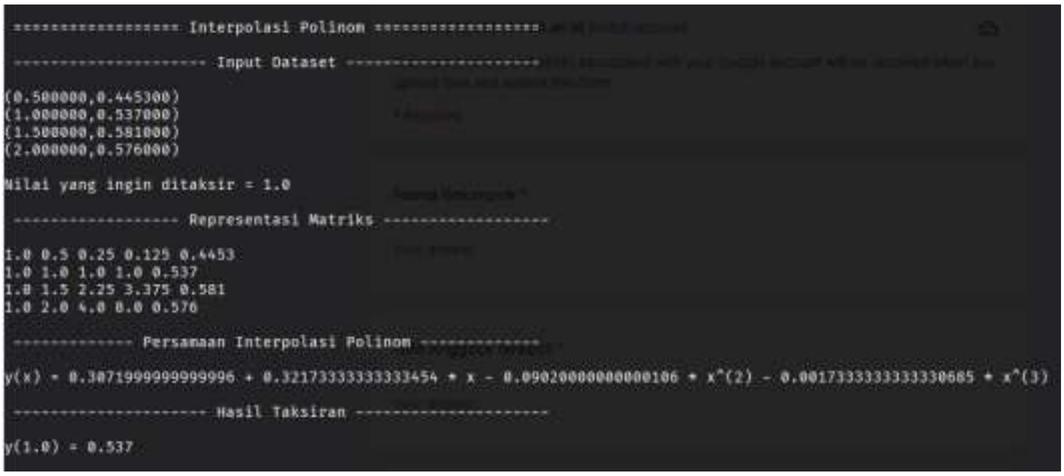
Selanjutnya dengan persamaan yang sudah didapatkan tersebut akan digunakan untuk menaksir beberapa tanggal yang diberikan.

1. Tanggal 16/07/2021
   Tanggal 16 Juli 2021 dalam desimal menjadi 7.51612903226. Dengan menggunakan persamaan di atas, untuk $x = 7.51612903226$ didapatkan nilai $y = 53532.68$
2. Tanggal 10/08/2021
   Tanggal 10 Agustus 2021 dalam desimal menjadi 8.32258064516. Dengan menggunakan persamaan di atas, untuk $x = 8.32258064516$, didapatkan nilai $y = 36315.671875$
3. Tanggal 05/09/2021
   Tanggal 5 September 2021 dalam desimal menjadi 9,16666666667. Tanggal tersebut tidak dapat ditaksir karena berada di luar range interpolasi (6,5 – 9.0).

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

Untuk menyederhanakan persamaan tersebut pada rentang [0, 2], maka diambil titik sampel sejumlah n dengan jarak antartitik berupa $h = \frac{2-0}{n}$

4 titik



```
================== Interpolasi Polinom ==================
--------------------- Input Dataset ---------------------
(0.500000,0.445300)
(1.000000,0.537000)
(1.500000,0.581000)
(2.000000,0.576000)

Nilai yang ingin ditaksir = 1.0
------------------ Representasi Matriks ------------------
1.0 0.5 0.25 0.125 0.4453
1.0 1.0 1.0 1.0 0.537
1.0 1.5 2.25 3.375 0.581
1.0 2.0 4.0 8.0 0.576
-------------- Persamaan Interpolasi Polinom --------------
y(x) = 0.3071999999999996 + 0.3217333333333454 * x - 0.0902000000000106 * x^(2) - 0.0017333333333330685 * x^(3)
--------------------- Hasil Taksiran ---------------------
y(1.0) = 0.537
```

Hasil Analisis :

Pada persoalan Interpolasi, input pada soal ini adalah menginput titik (x, y) sebanyak 4 titik. Lalu dari input titik-titik ini dikonversi menjadi Matrix $n \times (n + 1)$. Setelah dikonversi, SPL Matrix diselesaikan dengan Metode Gauss Jordan (pada program kami) dan menghasilkan persamaan :

$$y(x) = 0.3071999999999996 + 0.32173333333333454\, x - 0.09020000000000106\, x^2 - 0.0017333333333330685\, x^3$$

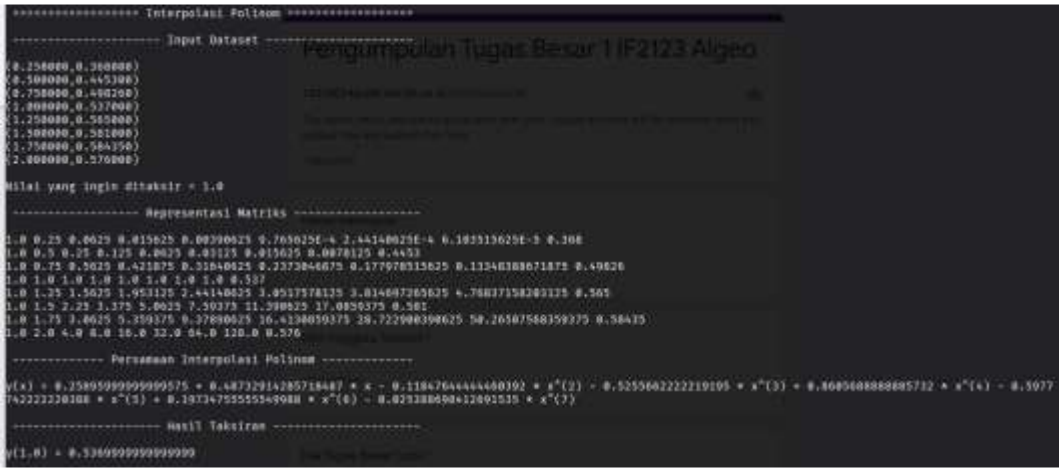
5 titik

Hasil Analisis :

Pada persoalan Interpolasi, input pada soal ini adalah menginput titik (x, y) sebanyak 5 titik. Lalu dari input titik-titik ini dikonversi menjadi Matrix $n \times (n + 1)$. Setelah dikonversi, SPL Matrix diselesaikan dengan Metode Gauss Jordan (pada program kami) dan menghasilkan persamaan :

$$\begin{aligned} y(x) = {} & 0.2910000000000008 + 0.36749999999999605x \\ & - 0.12812499999999336x^2 + 0.007812499999995717x^3 \\ & + 9.260893556646859 \times 10^{-16}\, x^4 \end{aligned}$$

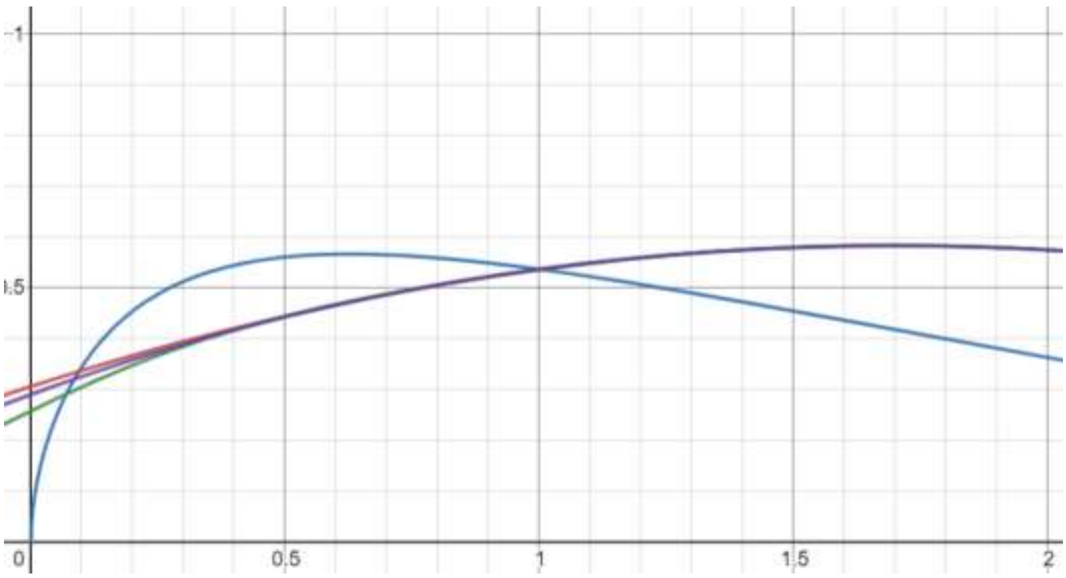
8 titik



Hasil Analisis :

Pada persoalan Interpolasi, input pada soal ini adalah menginput titik (x, y) sebanyak 8 titik. Lalu dari input titik-titik ini dikonversi menjadi Matrix $n \times (n + 1)$. Setelah dikonversi, SPL Matrix diselesaikan dengan Metode Gauss Jordan (pada program kami) dan menghasilkan persamaan :

$$\begin{aligned} y(x) = {} & 0.25895999999999575 + 0.48732914285718487\, x \\ & - 0.11847644444460392\, x^2 - 0.5255662222219195\, x^3 \\ & + 0.8605688888885732\, x^4 - 0.5977742222220388\, x^5 \\ & + 0.19734755555549988\, x^6 - 0.025388698412691535\, x^7 \end{aligned}$$



Perbandingan antara persamaan hasil interpolasi dengan berbagai jumlah titik, terhadap fungsi $f(x)$

- biru: fungsi $f(x)$
- merah: interpolasi dengan 4 titik
- ungu: interpolasi dengan 5 titik
- hijau: interpolasi dengan 8 titik

Regresi

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Pada persoalan Regresi Linear Berganda, tersedia data sebanyak 20 sampel dan 3 buah variabel bebas ($x_1 = Humidity, x_2 = Temperatur, dan\ x_3 = Pressure$) dan variabel terikat ($y = Nitrous\ Oxide$). Kemudian dari data itu dikonversi menggunakan teknik *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* dan diperoleh SPL dengan metode Gauss, didapat persamaan :

$$\begin{aligned} y = &-3.5334725459060814 - 0.0026222535628554485x_1 \\ &+ 8.2934508749206314x_2 \times 10^{-4} + 0.1549500076490866x_3 \end{aligned}$$

Setelah itu, dimasukkan nilai taksir $x_1 = 50$, $x_2 = 76$, dan $x_3 = 29.3$ didapat :

$$y = 0.9384802267187804$$

BAB V
KESIMPULAN, SARAN, DAN REFLEKSI

A. Kesimpulan

1. Kami telah berhasil membuat sebuah program yang mampu untuk menyelesaikan suatu SPL dengan metode Gauss dan Gauss Jordan yang dapat memilah SPL dengan solusi unik, solusi banyak, dan tidak ada solusi. Selain itu kami juga membuat program yang menyelesaikan suatu SPL solusi unik dengan metode Cramer dan Inverse, yaitu dengan syarat determinan tidak sama dengan 0 dan ukuran $n \times n$.
2. Kami telah berhasil membuat sebuah program yang mampu menghitung determinan dari suatu matrix dengan menggunakan metode Cofactor dan Reduction Matrix.
3. Kami telah berhasil membuat sebuah program yang mampu mengembalikan matrix invers dari suatu matrix dengan metode Cofactor dan Reduksi Baris.
4. Kami telah berhasil membuat sebuah program yang mampu menyelesaikan persoalan Interpolasi Polinom.
5. Kami telah berhasil membuat sebuah program yang mampu menyelesaikan persoalan Regresi Linear Berganda.

B. Saran

Dikarenakan pada tugas kali ini hanya diberi waktu 2-3 minggu, maka agak berat bagi mahasiswa untuk belajar bahasa pemrograman Java dan langsung mempraktikannya ke tugas besar (program yang lumayan besar) apalagi jika harus dibuat dengan GUI. Kedepannya (jika memungkinkan), jika waktunya ditambah lebih lama lagi, maka mungkin dapat untuk mengimplementasikannya dengan GUI.

C. Refleksi

Pada tugas besar kali ini, kami menemui kendala, yakni beberapa dari kami baru saja mengenal Java, dan harus mengerjakan tugas sambil belajar sekaligus, jadi lumayan banyak debug yang harus dilakukan.

BAB VI
REFERENSI

https://www.programcreek.com/2011/07/build-a-java-library-for-yourself/

https://developer.ibm.com/tutorials/j-javalibrary/

https://stackoverflow.com/questions/3612567/how-to-create-my-own-java-libraryapi

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/algeo21-22.htm