

# Engineering Fluid Mechanics

## 工程流体力学

### 第4章 流体动力学分析基础

教学团队：严 岩  
韩 煜  
吴 泽  
李 晓  
莫景文  
孙东科



东南大学机械工程学院  
2023/4/10

# 主要内容



4.1 系统与控制体

4.2 雷诺输运定理

4.3 流体流动的连续性方程

4.4 理想流体的能量方程

4.5 不可压缩理想流体一维流动的伯努利方程

4.6 动量定理

4.7 角动量定理

4.8 微分形式的守恒方程

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

# [1]

Fluid Flows

# 流体力学分析

## 系统与控制体

## 4.1 系统与控制体

### 流体力学两种分析方法

#### 1. 微分法

以流体微团为研究对象，建立运动微分方程

#### 2. 积分法

分析有限体积内流体的总体运动，建立积分守恒方程

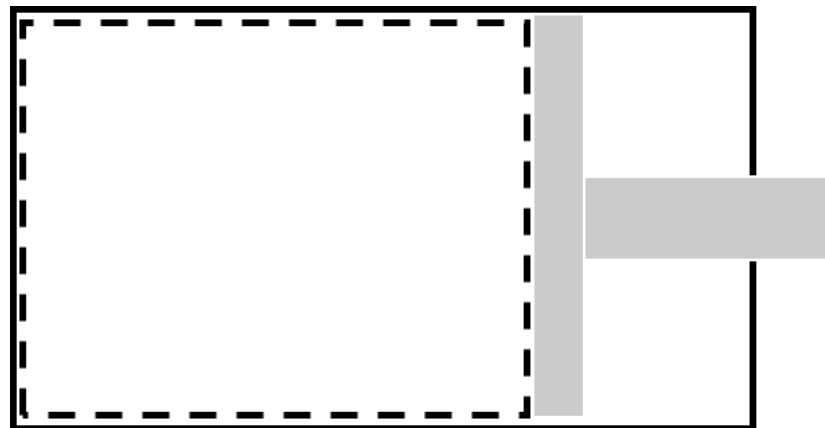
——控制体分析方法

## 4.1 系统与控制体

### 系统

一定质量的流体质点的集合

- 始终包含确定的流体质点
- 有确定的质量
- 系统的表面常常不断变形



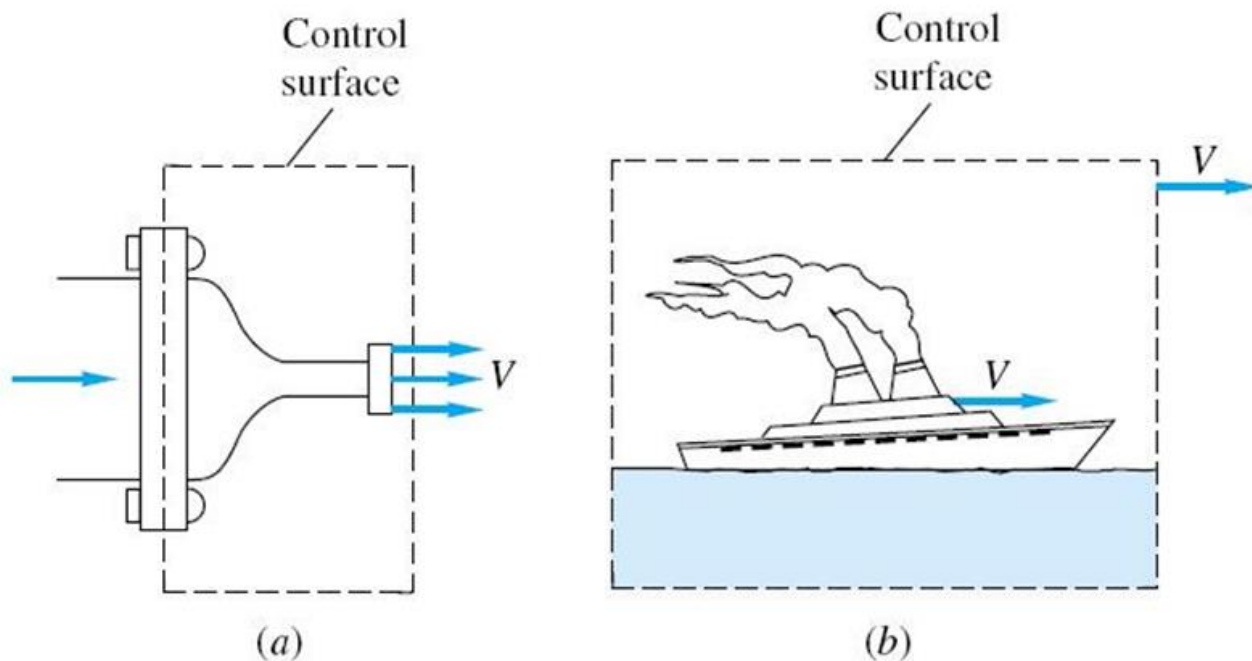
在拉格朗日参考系中，通常把注意力集中在流动的系统上。

## 4.1 系统与控制体

### 控制体

流场中某一确定的空间区域

- 控制体的边界称为控制面
- 一旦选定后，其形状和位置就固定不变



## 4.1 系统与控制体

### 控制体

- 控制体的界面上可以有流体流入或流出
- 控制体的边界面上有力的相互作用
- 控制体的边界面上可以有能量交换 (热交换或外力做功)



# [2]

Fluid Flows

## 流体动力学分析

### 雷诺输运定理

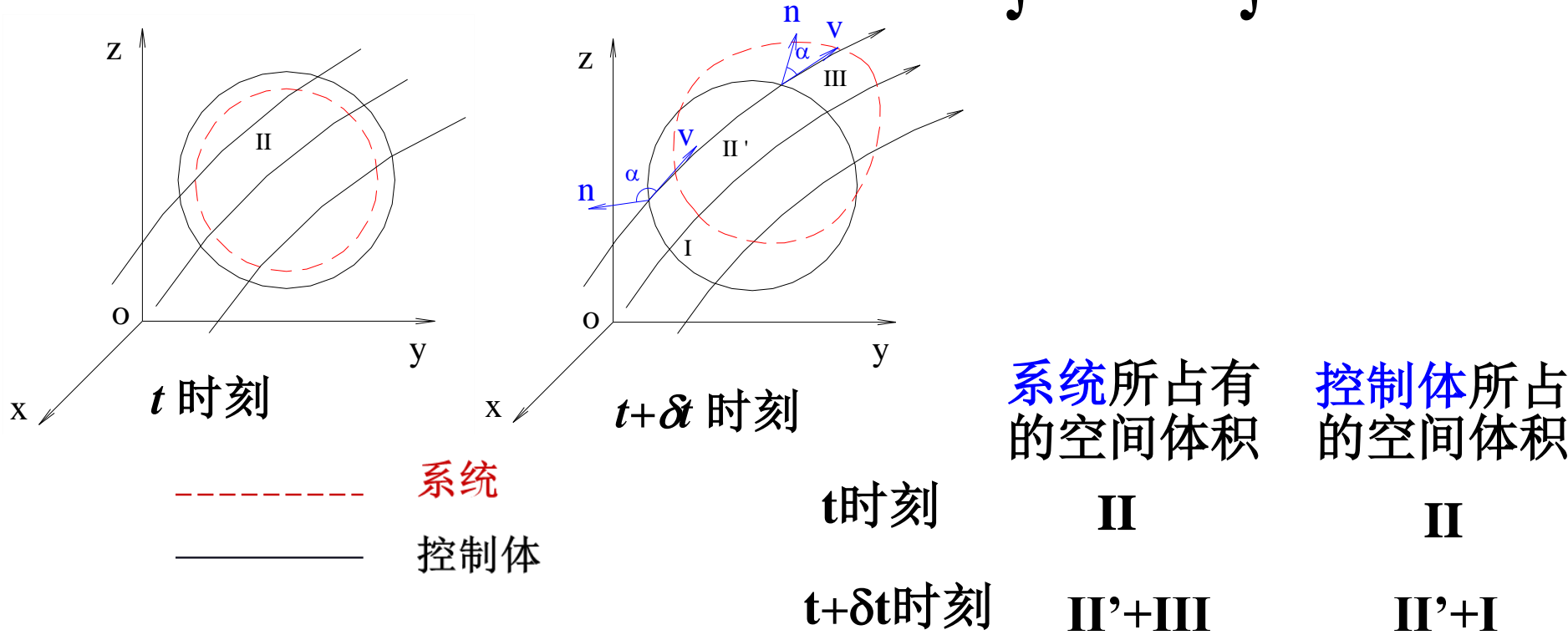


# 4.2 雷诺输运定理

系统内流体参数的变化与控制体内流体参数的变化之间的关系

$B$ :  $t$  时刻系统内流体所具有的某种物理量(如质量、动量、能量)

$\beta$ : 单位质量流体所具有的物理量  $B = \int \beta dm = \int \beta \rho dV$



# 4.2 雷诺输运定理

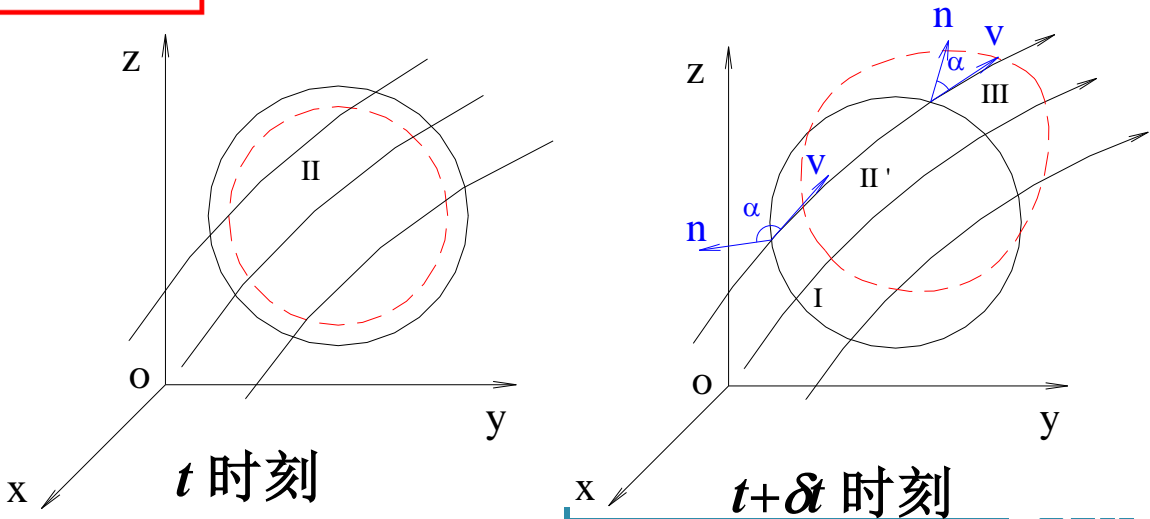
系统内物理量B随时间的变化率

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_s)_{t+\delta t} - (B_s)_t}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_{CV} - B_I + B_{III})_{t+\delta t} - (B_{CV})_t}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_{CV})_{t+\delta t} - (B_{CV})_t}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_{III})_{t+\delta t} - (B_I)_t}{\delta t} \end{aligned}$$

净流出率

物理量B通过控制面的流出率/流入率

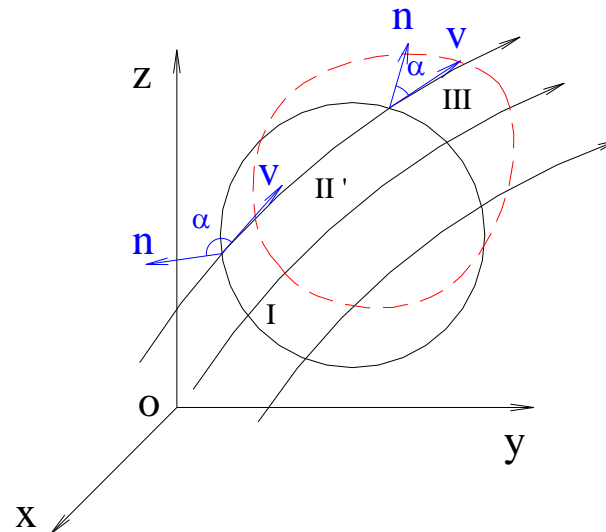
$$\frac{dB}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \iiint_{CV} \beta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left( \iiint_{CV} \beta \rho dV \right)_t}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \left( \iiint_{III} \beta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left( \iiint_I \beta \rho dV \right)_t \right]$$



## 4.2 雷诺输运定理

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \iiint_{CV} \beta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left( \iiint_{CV} \beta \rho dV \right)_t}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV$$

控制体内物理量B随时间的变化



$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \iiint_{III} \beta \rho dV \right)_{t+\delta t}}{\delta t} = \iint \beta \rho v \cos \alpha dA = \iint \beta \rho v_n dA$$

物理量B通过控制面的净流出率

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left( \iiint_I \beta \rho dV \right)_t}{\delta t} = \iint \beta \rho v \cos \alpha dA = -\iint \beta \rho v_n dA$$

$$\iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

## 4.2 雷诺输运定理

物理意义：

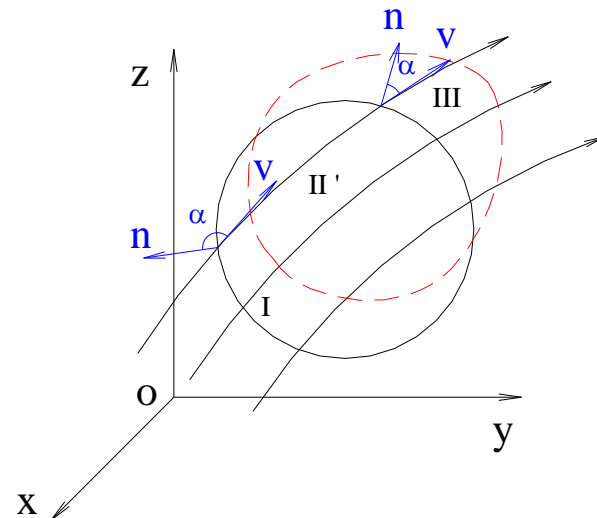
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV + \iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

系统内部的某一物理量的时间变化率是由两部分组成，等于**控制体内**的该物理量的时间变化率加上单位时间内**通过控制面**的该物理量的净通量

定常流动：

$$\frac{dB}{dt} = \iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

在定常流动条件下，整个系统内部的流体所具有的某种**物理量的变化率只与通过控制面的流动有关**，而不必知道系统内部流动的详细情况



## 4.2 雷诺输运定理

物理意义：

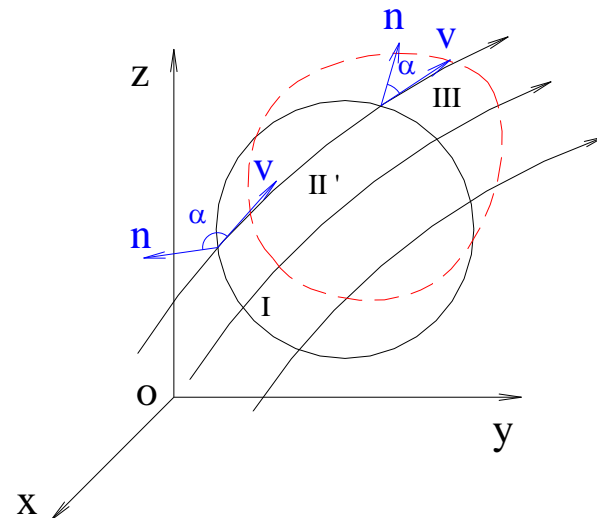
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV + \iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

系统内部的某一物理量的时间变化率是由两部分组成，等于**控制体内**的该物理量的时间变化率加上单位时间内**通过控制面**的该物理量的净通量

定常流动：

$$\frac{dB}{dt} = \iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

在定常流动条件下，整个系统内部的流体所具有的某种物理量的变化率只与通过控制面的流动有关，而不必知道系统内部流动的详细情况



## 4.2 雷诺输运定理

### 输运公式

$$\frac{D}{Dt} \int_s B dV = \iiint_{CV} \frac{\partial B}{\partial t} dV + \iint_{CS} B(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

当地导数项

流场的非稳定性

迁移导数项

流场的非均匀性引起

### 输运公式的具体含义：

任一瞬时，系统内物理量 $B$ （如质量、动量和能量等）的随体导数等于该瞬时其控制体内物理量的局部导数与通过控制体表面的输运量之和。

# [3]

Fluid Flows

## 流体力学分析

### 流体流动的连续性方程

## 4.3 流体流动的连续性方程

流体连续地充满所占据的空间，当流体流动时在其内部不形成空隙，这就是**流体运动的连续性条件**。

**本质：**质量守恒定律  $\frac{dm}{dt} = 0$

**雷诺输运方程** 
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV + \iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

此时， $B = m$

**单位质量** 
$$\beta = dB/dm = dm/dm = 1$$

**质量保持不变**  $\frac{dm}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho v_n dA = 0}$  **连续性方程**

**物理意义：**单位时间内控制体内流体质量的增量，等于通过控制体表面的质量的净通量



# 质量守恒定律

Mass keeps unchanged in the movement of a fluid system.



$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\tau(t)} \rho d\tau = 0$$

所以雷诺输运方程成为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho v_n dA = 0$$


上式是积分形式的连续性方程，它表示通过控制面的**净质量流出率**等于**控制体内部质量的减少率**。

## 4.3 流体流动的连续性方程

质量守恒定律(**conservation of mass**) :

- 若在某一定时间内，流出的流体质量和流入的流体质量不相等时，则这封闭曲面内一定会有流体密度的变化，以便使流体仍然充满整个封闭曲面内的空间；

- 如果流体是定常流动，则  $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV = 0$

 
$$\iint_{CS} \rho v_n dA = 0$$

即：流出的流体质量必然等于流入的流体质量。

若为不可压缩流体呢？

## 4.3 流体流动的连续性方程

### 连续方程的其它形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho v_n dA = 0$$

定常流动:

$$\iint_{CS} \rho v_n dA = 0$$

定常流动条件下，通过控制面的流体质量等于零

不可压缩定常流:

$$\iint_{CS} v_n dA = 0$$

不可压缩流体的质量守恒简化为体积守恒。

不可压缩一维定常流:  $\bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2$  计算管内流体流动时经常用到。

# [4]

Fluid Flows

## 流体力学分析

### 理想流体的能量方程

## 4.4 理想流体的能量方程 本质：能量守恒定理

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV + \iint_{CS} \beta \rho v_n dA$$

流体系统中能量随时间的变化率等于作用于控制体上的表面力、系统内流体受到的质量力对系统内流体所作的功和外界与系统交换的热量之和。

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}$$

单位质量流体的能量  $\beta = \frac{dE}{dm} = e$

雷诺输运方程：
$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV + \iint_{CS} \beta \rho (\vec{V} \vec{n}) dA$$

单位时间质量力和表面力对系统所做的功  $\dot{W} \Rightarrow \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_A \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA$

单位时间外界与系统交换的热量  $\dot{Q}$

$$\Rightarrow \left(\frac{dE}{dt}\right)_s = \iiint_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \iint_{CS} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA + \dot{Q}$$

定常流动 
$$\iint_{CS} \beta \rho (\vec{V} \vec{n}) dA = \iiint_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \iint_{CS} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA + \dot{Q}$$

## 4.4 理想流体的能量方程

### 一维流动的能量方程：例如 重力场

假设条件：不考虑与外界的热量交换  $\dot{Q} = 0$   
质量力仅有重力  $\vec{f} = \vec{g}$

系统单位质量的能量可表示为： $\beta = u + gz + \frac{v^2}{2}$ （重力做功=位势能）

雷诺输运方程和  
能量守恒：
$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \beta \rho dV + \iint_{CS} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \dot{Q} + \dot{W}$$

$$\dot{W} \Rightarrow \iint_{CS} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA \quad \begin{matrix} \vec{p}_n = \vec{p}_m + \vec{\tau} = -p\vec{n} + \vec{\tau} \\ = \end{matrix} - \iint_{CS} p\vec{n} \cdot \vec{v} dA + \iint_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA = - \iint_{CS} p v_n dA + \iint_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_{CS} \rho v_n \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = \iint_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA$$


## 4.4 理想流体的能量方程

### 一维流动的能量方程：例如 重力场

理想流体： $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$

粘性流体（管壁）： $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$

进、出截面： $\vec{\tau}$  垂直于  $\vec{v} \Rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \iint_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA = 0$



$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_{CS} \rho v_n \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0$$

定常流动条件下：

$$\iint_{CS} \rho v_n \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0$$

重力场中理想流体作绝热定常流动的能量方程

# [5]

Fluid Flows

## 流体力学分析 伯努利方程及其应用



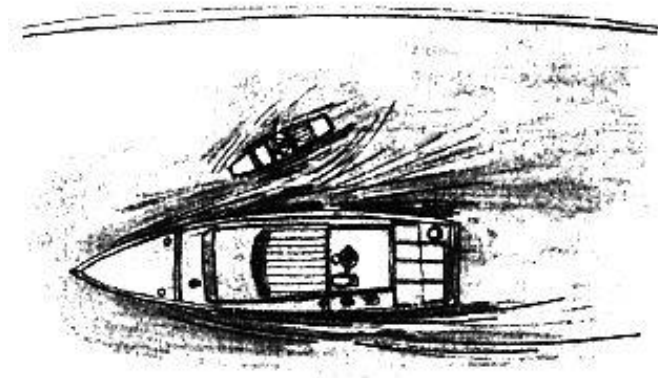
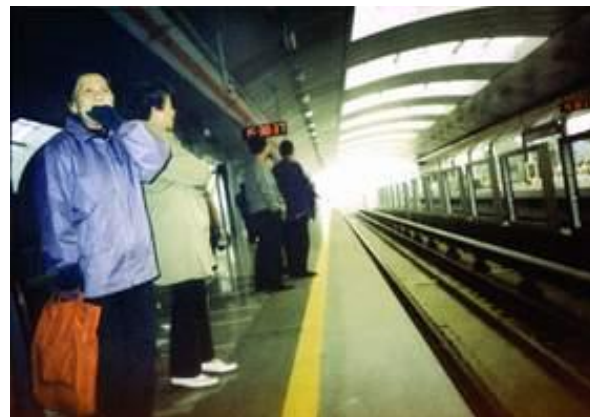
## 4.5 伯努利方程及其应用

### 引言

#### 20世纪初的两个惨案

- 1905年初冬，莫斯科至西伯利亚的小火车站站长率领一批随从迎接俄国沙皇派往西伯利亚的一位钦差大臣，造成极其严重的人身伤亡事故。**火车站站台警戒线的由来。**
- 1912年秋天，世界上最大远洋轮“奥林匹克”号正在大海上航行，与一艘比它小得多的铁甲巡洋舰“豪克”号相撞，酿成一件重大海难事故。

长江的水流量/流速为多少？



## 4.5 伯努利方程及其应用

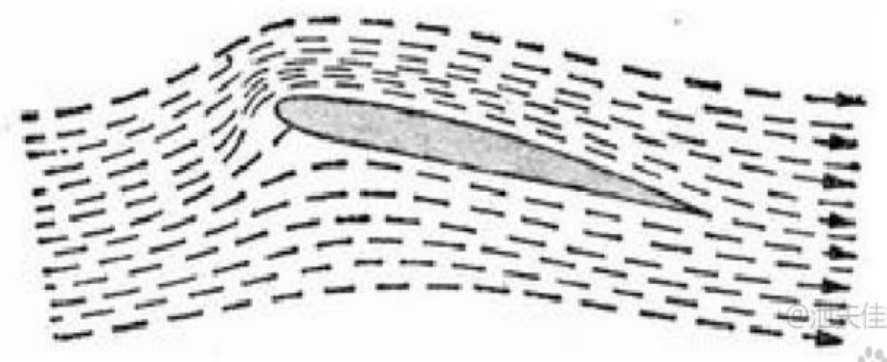
### 引言

1. 在海洋中平行航行的两艘大轮船，相互不能靠得太近，否则就会有相撞的危险，为什么？
2. 逆流航行的船只行到水流很急的岸边时，会自动地向岸靠拢；
3. 汽车驶过时，路旁的纸屑常被吸向汽车；
4. **简单的实验**：用两张窄长的纸条，相互靠近，用嘴从两纸条中间吹气，会发现二纸条不是被吹开而是相互靠拢，就是“速大压小”的道理。
5. 打开的门窗，有风吹过，门窗会自动的闭合，然后又张开；

## 4.5 伯努利方程及其应用

### 引言

6. 飞机的机翼的翼型使得飞行中前面的空气掠过机翼向后时，流经机翼上部的空气要通过的路程大于流经机翼下部的空气通过的路程，因此**上部空气流速大于下部空气的流速**，上部空气对机翼向下的压力就会小于下部空气对机翼向上的压力，从而产生升力；



## 4.5 伯努利方程及其应用

重力场中理想流体在作绝热定常流动的能量方程

$$\iint_{CS} \rho v_n \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0$$

取微流管为控制体,  $\downarrow$  管壁  $v_n = 0$

$$\iint_{A_2} \rho v \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA - \iint_{A_1} \rho v \left( u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0$$

$$\left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \iint_{A_2} \rho v dA - \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \iint_{A_1} \rho v dA = 0$$

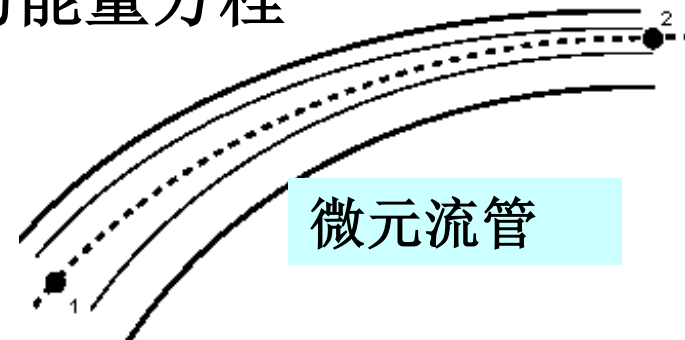
$\downarrow$  质量守恒

$$u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}$$

不可压缩、与外界无热交换

$$\longrightarrow \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$

理想流体在重力场中的一维绝热定常流动的能量方程



微元流管

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$

伯努利方程

## 4.5 伯努利方程及其应用

### 伯努利方程

(Bernoulli, 1738)

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数} = H$$

速度  
水头

位置  
水头

压强  
水头

总  
水头

应用范围：

- (1) 不可压缩、理想流体在重力场中的定常流动；
- (2) 同一条流线上的不同的点；沿不同的流线时，积分常数的值一般不相同。

物理意义：

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位质量流体的动能、位势能和压强势能之和是常数。



## 4.5 伯努利方程及其应用

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数} = H$$

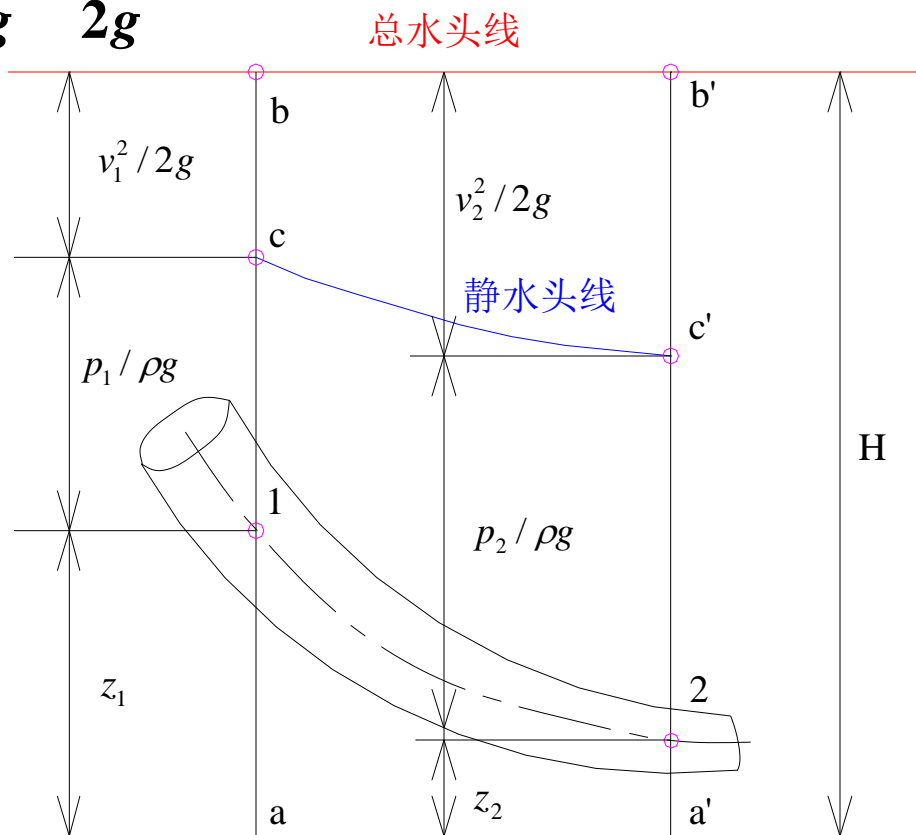
速度  
水头

位置  
水头

压强  
水头

总  
水头

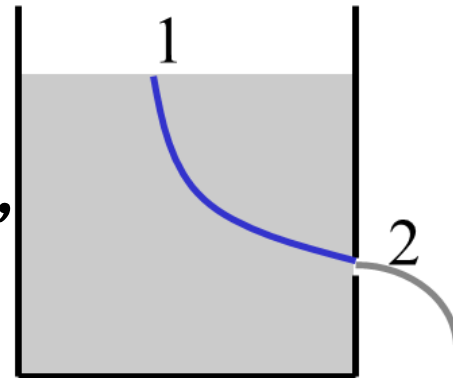
不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线



## 4.5 伯努利方程及其应用

### 1. 小孔出流 (Torricelli, 1644)

如图，一装有液体的容器，壁面开一小孔，求小孔出口流速。



选取1到2之间的一条流线，应用伯努利方程，有

$$gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = gz_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}$$

$$V_1 \rightarrow 0 \quad p_1 = p_a \quad p_2 = p_a$$

$$V_2^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh$$

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

## 4.5 伯努利方程及其应用

### 2. 皮托管（Pitot, 1733）——测流速

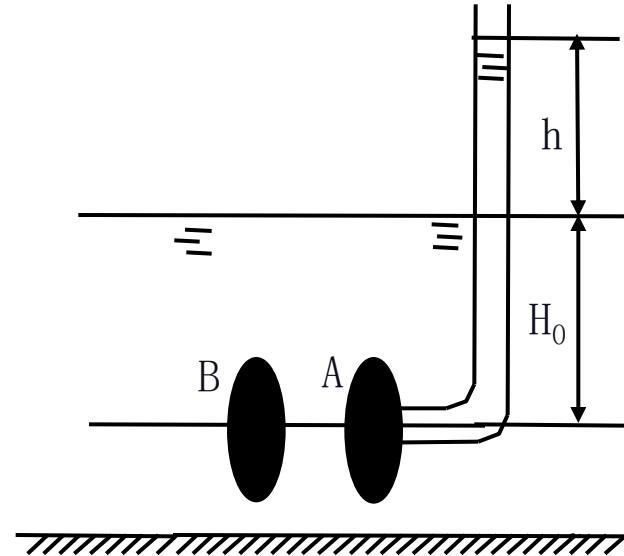
原理：弯成直角的玻璃管两端开口，一端的开口面向来流，另一端的开口向上，管内液面高出水面 $h$ ，水中的A端距离水面 $H_0$

由B至A建立伯努利方程

$$\frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} = \frac{p_A}{\rho}$$

$$p_B = \rho g H_0 \quad \Downarrow \quad p_A = \rho g (H_0 + h)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A - p_B)} = \sqrt{2gh}$$



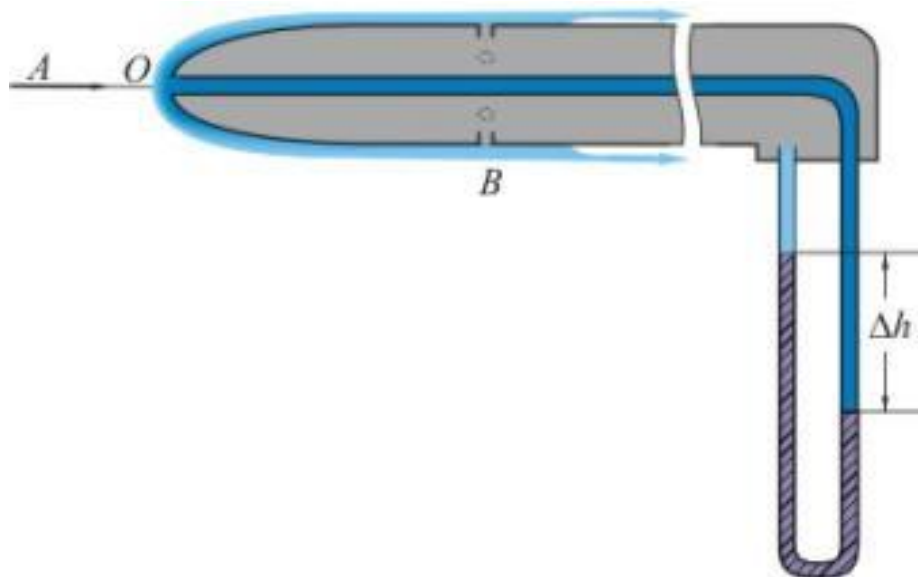


## 4.5 伯努利方程及其应用

动压管：

静压管与皮托管组合成一体，由差压计给出总压和静压的差值，从而测出测点的流速

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A - p_B)}$$



## 4.5 伯努利方程及其应用

### 新型流速测量技术:

现代流体力学、空气动力学、热力学、水力学、生态学、以及环境工程、化工工程、航空航天工程、水利水电工程、热能工程、燃烧工程、石油工程等都提出了一系列复杂的流动问题。其中包括高速流、低速流、旋转流、涡流、管道流、燃烧流、振荡流、反向流、两相流等，这些都需要新的测量方法和测量工具，要求新的测量技术和仪器能够适应由单点向多点、平面向空间、稳态向瞬态、单相向多相发展。

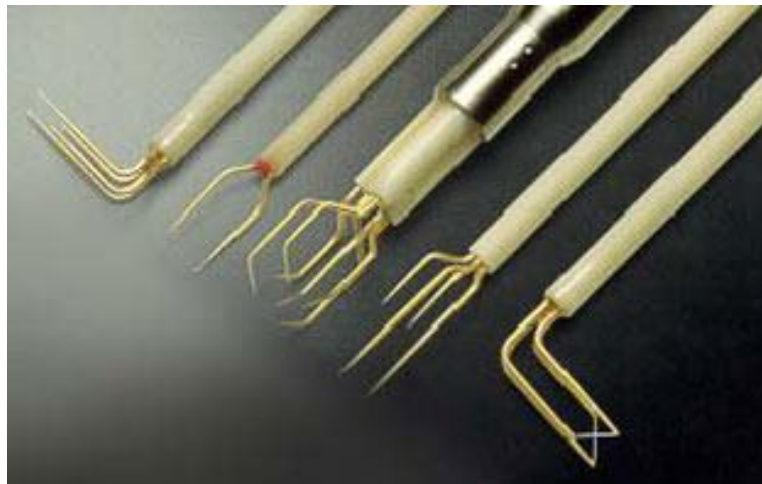
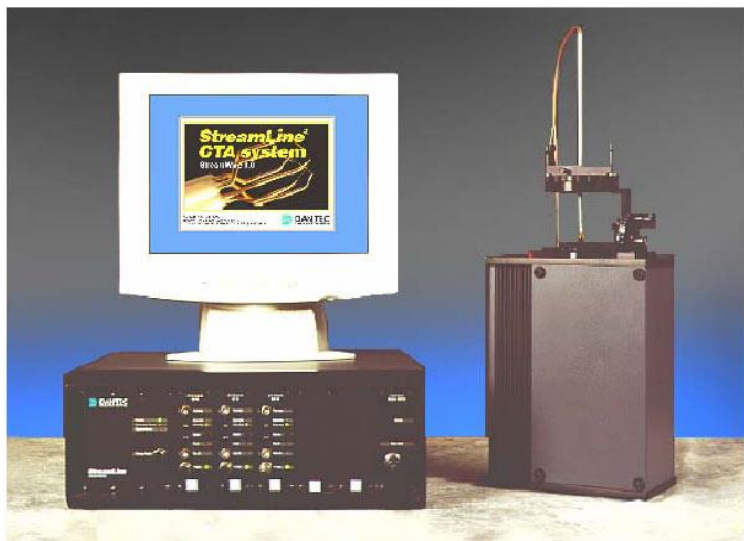
### 20世纪90年代以后出现的新流动测量技术:

- 1、热线热膜风速仪
- 2、激光测速仪
- 3、粒子成像速度仪(PIV)——流场显示技术

## 4.5 伯努利方程及其应用

### 热线热膜风速仪

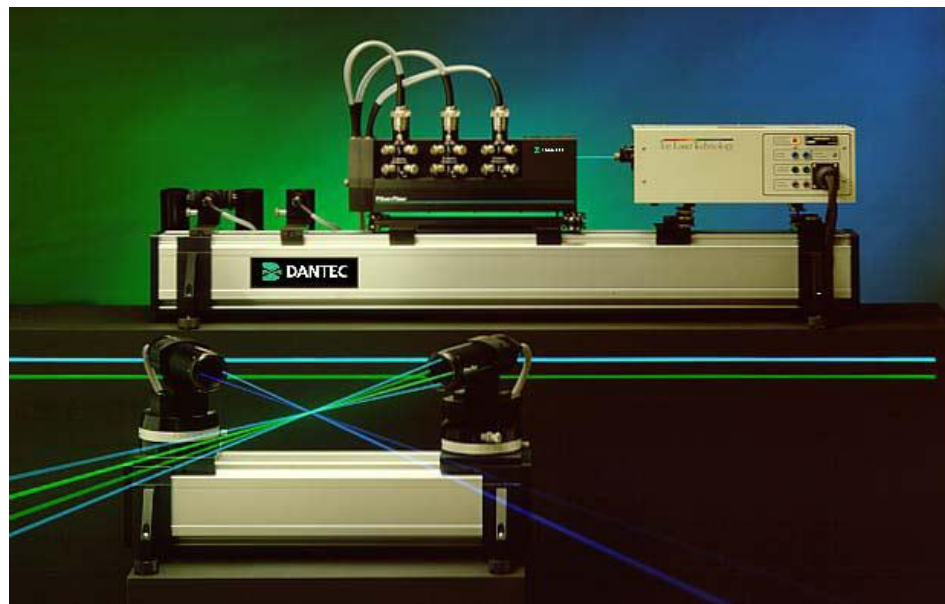
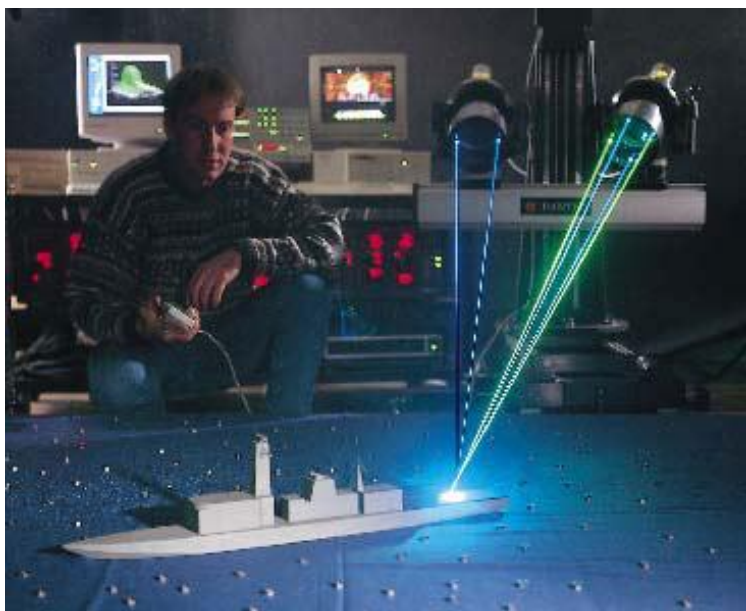
热线热膜风速仪是利用放置在流场中通过加热电流的细金属丝（直径0.5-10微米）来测量速度的仪器。金属丝中通过加热电流，金属丝的温度保持的恒定，因而当风速变化时，金属丝的换热量就随之而改变，从而产生了电信号的变化。通过校准过程，测量电信号的变化量就可以得到实际流场的速度大小。由于热线热膜风速仪的高频响应，它是湍流以及流动研究中使用最早，最广泛的单点测量仪器。



## 4.5 伯努利方程及其应用

### 激光测速仪

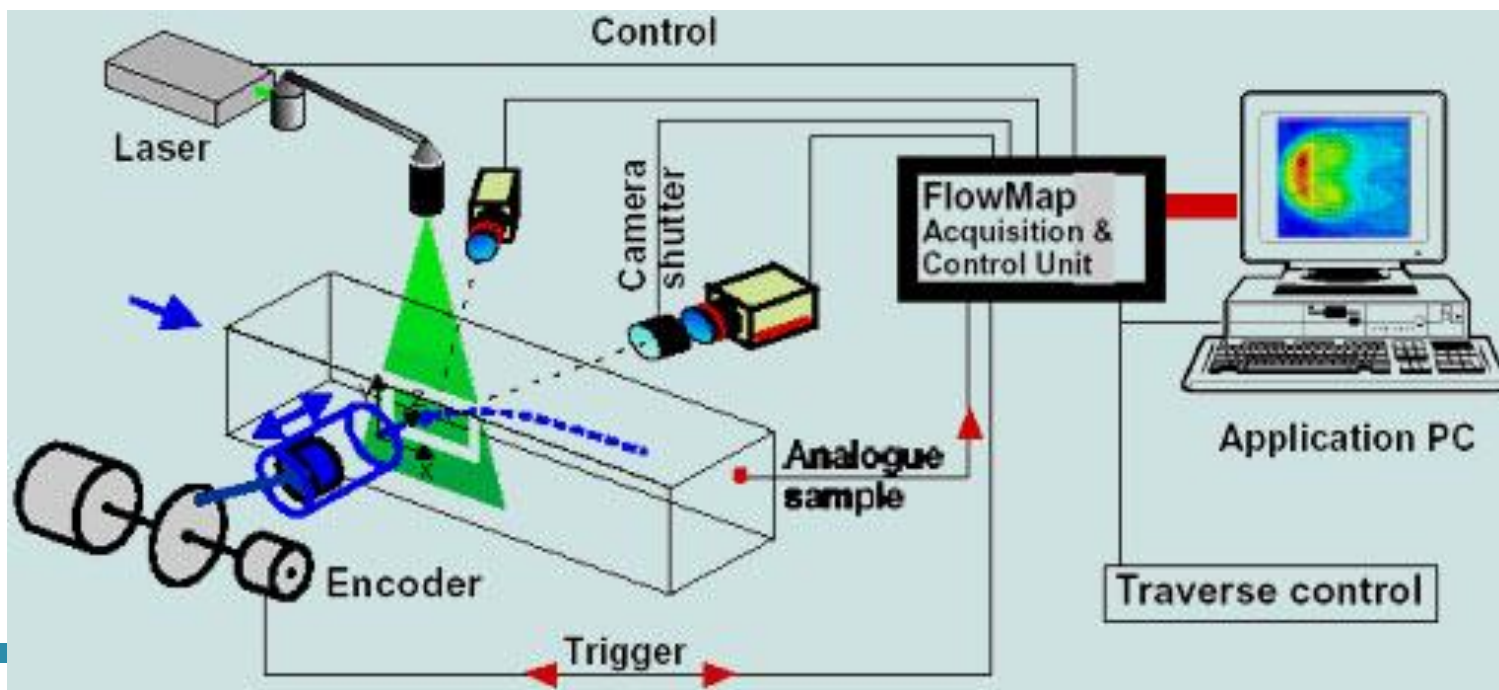
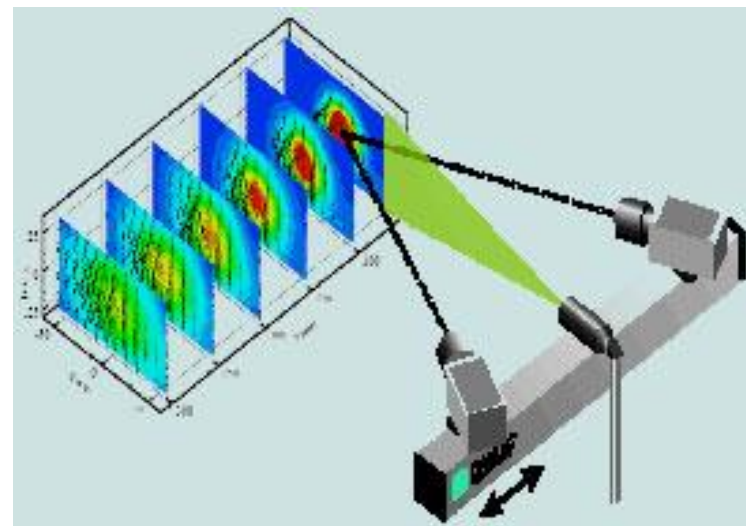
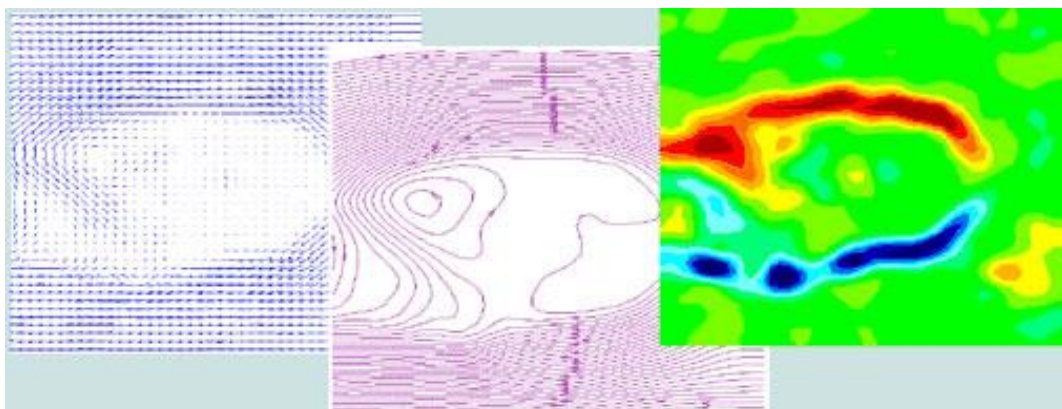
激光测速仪是采用激光测距的原理。激光测距（即电磁波，速度为30万公里/秒），是通过对被测物体发射激光光束，并接收该激光光束的反射波，记录该时间差，来确定被测物体与测试点的距离。





## 4.5 伯努利方程及其应用

### 粒子成像速度仪



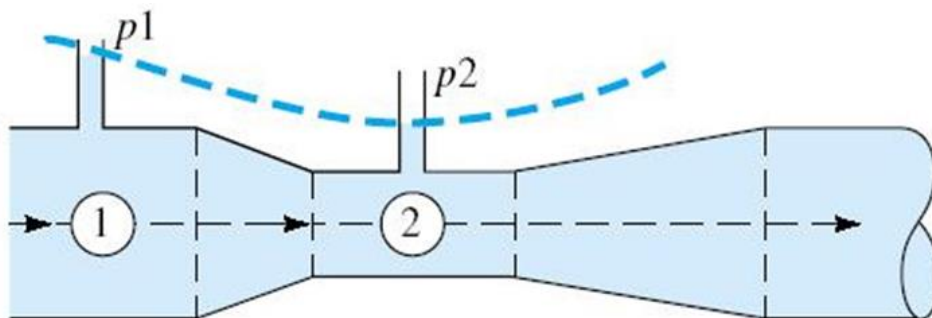
## 4.5 伯努利方程及其应用

### 文丘里管（Venturi Tube）——测流量

文丘里管由收缩段和扩张段组成，在入口前直管段上的截面1和喉部截面2两处测量静压差，根据此静压差和两截面的截面积可计算管道流量。

选取1到2之间的一条流线， $z_1=z_2$ ，应用伯努利方程，有

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$



根据不可压缩流体的连续性方程，有  $V_1 A_1 = V_2 A_2$

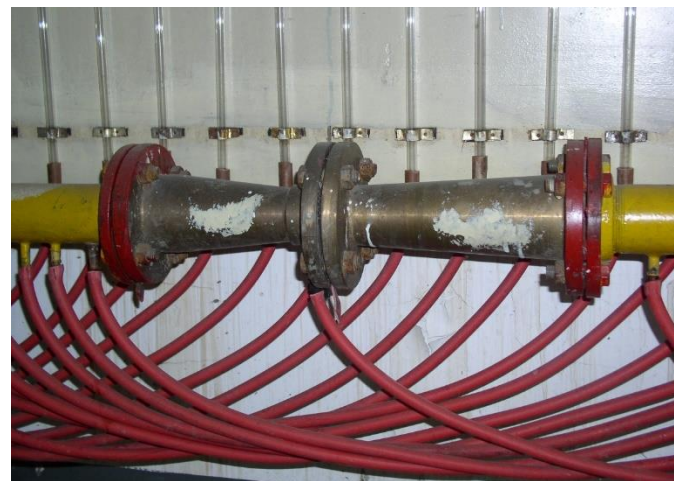
$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - (A_2 / A_1)^2}} \quad Q = V_2 A_2 = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - (A_2 / A_1)^2}}$$

## 4.5 伯努利方程及其应用

### 文丘里管（Venturi Tube）——测流量

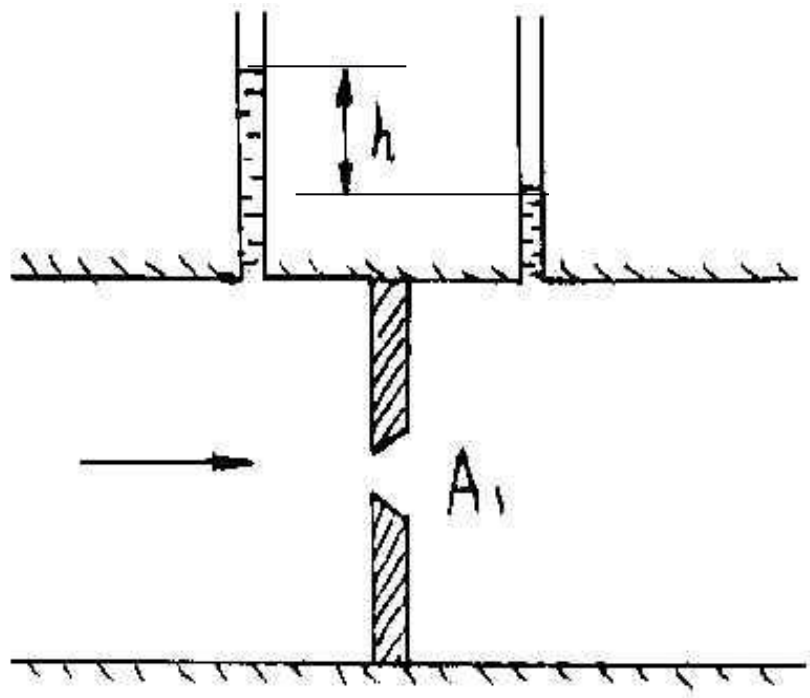
在实际应用中，考虑到粘性引起的截面上速度分布的不均匀以及流动中的能量损失，还应乘上一流量系数进行修正，即

$$Q = \varphi A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - (A_2 / A_1)^2}}$$



## 4.5 伯努利方程及其应用

除文丘里流量计外，工程上常用的还有孔板流量计和喷嘴流量计，它们都属于节流式流量计



孔板流量计





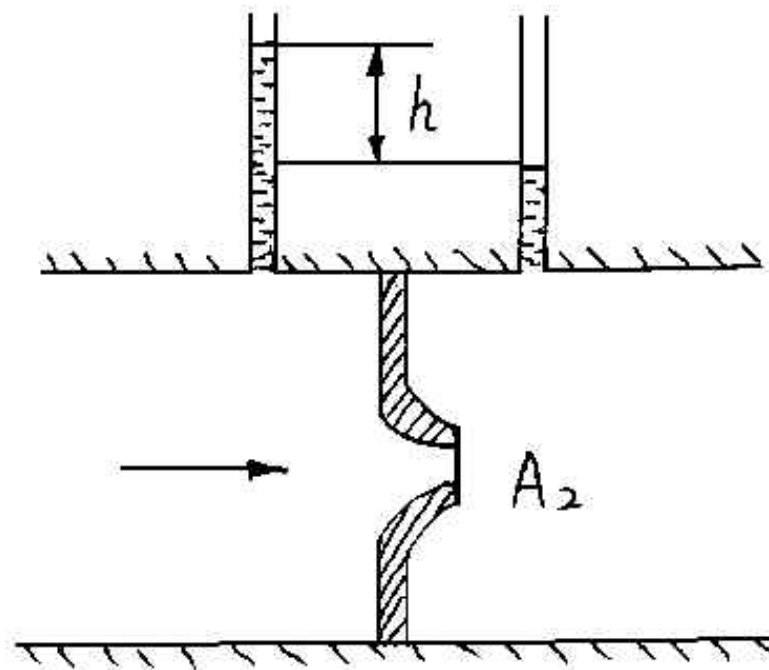
## 4.5 伯努利方程及其应用

### 涡轮流量计

- 采用涡轮进行测量的流量计。它先将流速转换为涡轮的转速，再将转速转换成与流量成正比的电信号。这种流量计用于检测瞬时流量和总的计算流量，其输出信号为频率，易于数字化。
- 感应线圈和永久磁铁一起固定在壳体上。当铁磁性涡轮叶片经过磁铁时，磁路的磁阻发生变化，从而产生感应信号。



## 4.5 伯努利方程及其应用

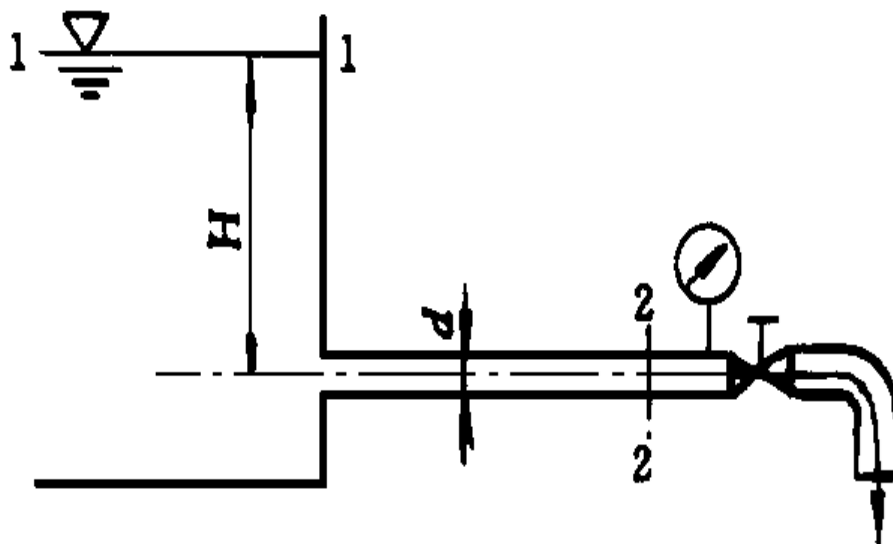


喷嘴流量计

工程上常用的流量计还有转子流量计、超声流量计等。

## 4.5 伯努利方程及其应用

**例：**有一贮水装置，贮水池足够大，当阀门关闭时，压强计读数为2.8个大气压强。而当将阀门全开，水从管中流出时，压强计读数是0.6个大气压强，试求当水管直径 $d=12\text{cm}$ 时，通过出口的体积流量(不计流动损失)。



## 4.5 伯努利方程及其应用

【解】 当阀门全开时列1-1、2-2截面的伯努利方程

$$H + \frac{p_a}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_a + 0.6p_a}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

当阀门关闭时，根据压强计的读数，应用流体静力学基本方程求出H值

$$p_a + \rho g H = p_a + 2.8 p_a$$

$$H = \frac{2.8 p_a}{\rho g} = \frac{2.8 \times 98060}{9806} = 28(\text{mH}_2\text{O})$$

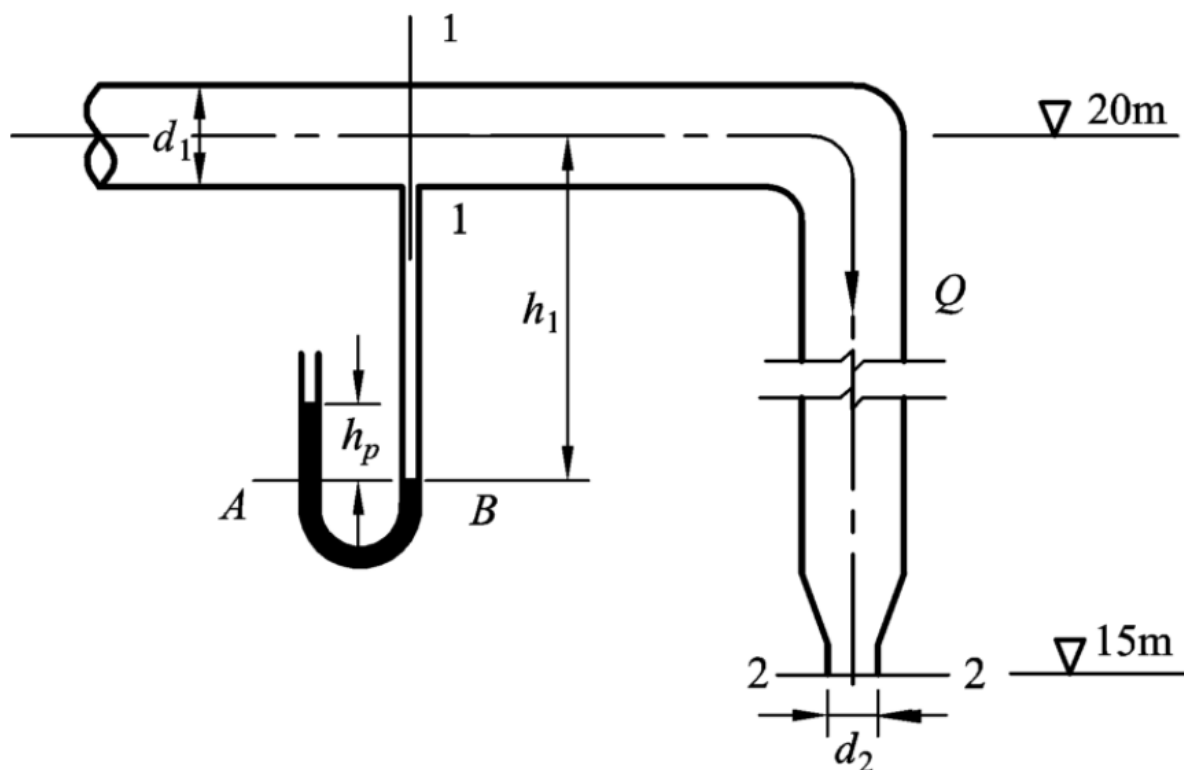
$$V_2 = \sqrt{2g \left( H - \frac{0.6 p_a}{\rho g} \right)} = \sqrt{2 \times 9.806 \times \left( 2.8 - \frac{0.6 \times 98060}{9806} \right)} = 20.78(\text{m/s})$$

$$q_V = \frac{\pi}{4} d^2 V_2 = 0.785 \times 0.12^2 \times 20.78 = 0.235(\text{m}^3/\text{s})$$

## 4.5 伯努利方程及其应用

**已知：**水流通过如图所示管路系统流入大气，已知U形管中水银柱高差 $h_p=0.25m$ ，水柱高 $h_1=0.92m$ ，管径 $d_1=0.1m$ ，管道出口直径 $d_2=0.05m$ ，不计损失。

**求：**管中通过的流量。



## 4.5 伯努利方程及其应用

解：（1）选基准面

以管道出口断面为基准面，即以2-2面为基准面

（2）选过流断面

选安装U形管的管道断面为1-1断面；以及管道出口断面为2-2断面

（3）选计算点

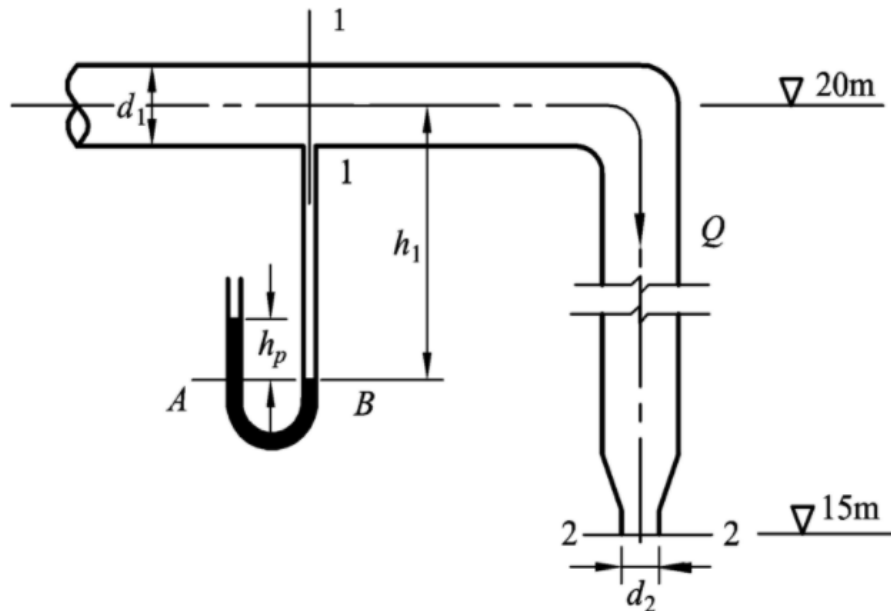
计算点均取在管轴中心上

（4）列1-1，2-2断面的能量方程

$$(20 - 15) + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

$$\text{令： } \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$5 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$



## 4.5 伯努利方程及其应用

$$5 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_A = p_B = \rho'gh_p$$

$$p_1 = p_B - \rho gh_1 = \rho'gh_p - \rho gh_1$$

$$p_2 = 0$$

$$5 + \frac{\rho'gh_p - \rho gh_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$$

相对压强(以大气压作为计算起点的压强)

### (5) 连续性方程

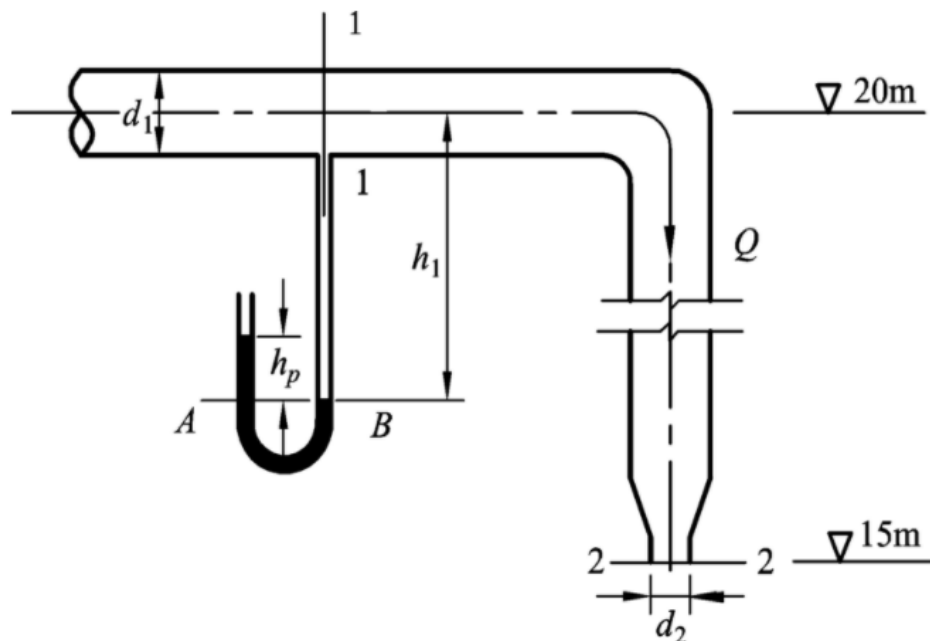
$$v_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4} = v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 = 4v_1$$

$$5 + \frac{\rho'gh_p - \rho gh_1}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

$$v_1 = 4.78 \text{ m/s}$$

$$Q = v_1 A_1 = v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = 37.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$



# 作业

- 4-3
- 4-5
- 4-8
- 4-11
- 4-14
- 4-15