

Engineering Fluid Mechanics

工程流体力学

第5章 量纲分析与相似原理

教学团队：严 岩
韩 煜
吴 泽
李 晓
莫景文
孙东科



东南大学机械工程学院

2023/5/28



目录

CONTENTS

1. 量纲分析

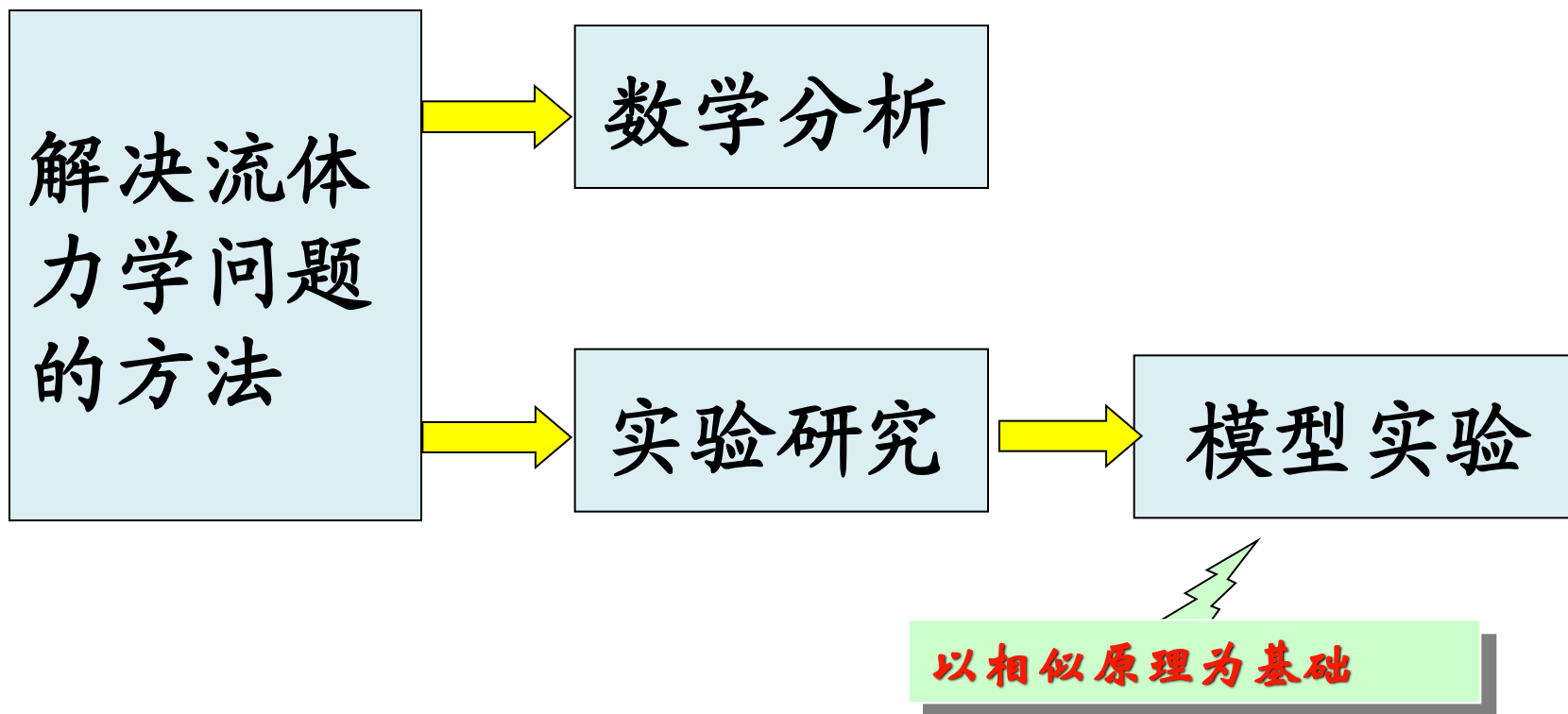
2. 相似原理

3. 模拟实验

引言

1. 飞机模型实验
2. 舰船流阻实验
3. 三峡水利大坝





本章主要介绍流体力学中的**量纲分析法**，**相似原理**以及**模型实验方法**。

5.1 量纲分析——基础知识

当某一流体不能用微分方程确定物理量之间的关系，量纲分析法是有效的方法。

- 量纲定义

量纲是用以度量物理量单位的种类的。例如：小时、分、秒是不同的时间测量单位，但都是表示时间的，属于同一量纲[t]。

- 基本量纲：

在国际单位制中，取长度、质量、时间、热力学温度、电流、发光强度作为基本量，量纲相应地用[L]、[M]、[t]、[T]、[E]、[C]表示，称为基本量纲。

5.1 量纲分析——基础知识

• 量纲公式：

流体力学中任一物理量的量纲：

$$[B] = [L^a M^b t^c]$$

上式称为量纲公式。例如： $[\rho] = [ML^{-3}]$ ； $[V] = [Lt^{-1}]$ ； $[F] = [MLt^{-2}]$ ；

讨论

- 1) 若 a 、 b 、 c 不全为0，则 B 是有量纲的量；当 $a=b=c=0$ 时，则 B 是无量纲的量，或称无量纲数；
- 2) 有些方程中的常数是有量纲的，比如气体常数 R 的量纲为 $[L^2 t^{-2} T^{-1}]$ 。

5.1 量纲分析——基础知识

- 量纲齐次原理：

一个正确而完整的物理方程，其各项的量纲都是相同的，这一规律称为量纲齐次原理。可用这一原理来校核物理方程和经验公式的正确性和完整性。

单位体积流体伯努利方程

5.1 量纲分析—— π 定理

二、 π 定理 (Buckingham Pi Theorem, 1914)

若某现象由n个物理量所描述，即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

这n个物理量包含m个基本量纲，则该现象可用n-m个无量纲数来表示，即

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

5.1 量纲分析—— π 定理

- 如何得到 $n-m$ 个无量纲数？

- 在变量 x_1, x_2, \dots, x_n 中选择 m 个量纲不同的变量作为重复变量，并把重复变量与其余变量中的一个组成无量纲数组 π ，共组成 $(n-m)$ 个无量纲数组。例如：取 x_1, x_2, x_3 为重复变量，无量纲数组为

$$\pi_1 = x_1^{a_1} x_2^{b_1} x_3^{c_1} x_4$$

$$\pi_2 = x_1^{a_2} x_2^{b_2} x_3^{c_2} x_5$$

...

$$\pi_{n-m} = x_1^{a_{n-m}} x_2^{b_{n-m}} x_3^{c_{n-m}} x_n$$

- 根据物理方程量纲齐次原理，确定待定指数 a 、 b 、 c 的值，从而也就确定了每个 π 。

5.1 量纲分析——π定理

- 具体内容:

1、列出影响该物理现象的全部 n 个变量:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

2、选择 m 个独立变量，原则是要既相互独立，又包含基本量纲（通常三个）。

一般选：	几何尺度	l	L	x_n
	速度	v	LT^{-1}	x_{n-1}
	密度	ρ	ML^{-3}	x_{n-2}

5.1 量纲分析—— π 定理

- 3、从所列变量中选出用 m 个重复变量（通常三个），重复变量应包括几何变量、运动变量和动力变量；
- 4、用重复变量和其余变量中的一个建立无量纲方程，从而获得 $(n-m)$ 个无量纲数组；
- 5、建立无量纲数组方程， $F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$

5.1 量纲分析—— π 定理

- **例：**不可压缩粘性流体在管内作定常流动时，流体的压降损失 Δp 与管内径 d 、管长 l 、管壁粗糙度 ε 、流体的平均流速 V 、密度 ρ 和粘度 μ 有关。试用无量纲数组表示压降。
- **解：**
 - 1) 列出全部变量，该现象共有 $n=7$ 个变量：
 Δp 、 d 、 l 、 ε 、 V 、 ρ 、 μ
 - 2) 选择基本量纲数目 $m=3$ ， M 、 L 、 t
 - 3) 选用 m 个重复变量： ρ 、 V 、 d
 - 4) 组成 $n-m=7-3=4$ 个无量纲数组

5.1 量纲分析—— π 定理

$$\pi_1 = \rho^{a_1} V^{b_1} d^{c_1} \Delta p$$

$$M^0 L^0 t^0 = (M^{a_1} L^{-3a_1}) (L^{b_1} t^{-b_1}) (L^{c_1}) (ML^{-1} t^{-2})$$

$$\begin{cases} a_1 + 1 = 0 \\ -3a_1 + b_1 + c_1 - 1 = 0 \\ -b_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

- 使用同样的方法，可求出其余3个无量纲数

5.1 量纲分析——关于 π 定理的几点说明

- 无量纲数组的形式
- 作用在流体上的力

惯性力 $F_{iner} = ma \propto \rho l^3 \frac{V^2}{l} = \rho V^2 l^2$

黏性力 $F_{vis} = \tau A \propto \mu \frac{du}{dy} A = \mu \frac{V}{l} l^2 = \mu V l$

压力 $F_{pres} = \Delta p A \propto \Delta p l^2$ 或 $p l^2$

重力 $F_{grav} = mg \propto g \rho l^3$

表面张力 $F_{sur} = \sigma l$

5.1 量纲分析——关于 π 定理的几点说明

- 流体力学中常见的无量纲数组

(1) 雷诺 (Reynolds) 数
$$\text{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{\rho V^2 l^2}{\mu V l} = \frac{F_{\text{iner}}}{F_{\text{vis}}}$$

(2) 欧拉 (Euler) 数
$$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{\Delta p l^2}{\rho V^2 l^2} = \frac{F_{\text{pres}}}{F_{\text{iner}}}$$

(3) 弗劳德 (Froude) 数
$$\text{Fr} = \frac{V^2}{gl} = \frac{\rho V^2 l^2}{\rho g l^3} = \frac{F_{\text{iner}}}{F_{\text{grav}}}$$

(4) 韦伯 (Weber) 数
$$\text{We} = \frac{\rho V^2 l}{\sigma} = \frac{\rho V^2 l^2}{\sigma l} = \frac{F_{\text{iner}}}{F_{\text{sur}}}$$

5.1 量纲分析——意义

- 为实验研究工作减少工作量；
- 用于物理量量纲的推导，由量纲齐次原理，校核数学方程各项量纲是否正确；
- 确定模型实验的相似条件，指导实验资料整理。

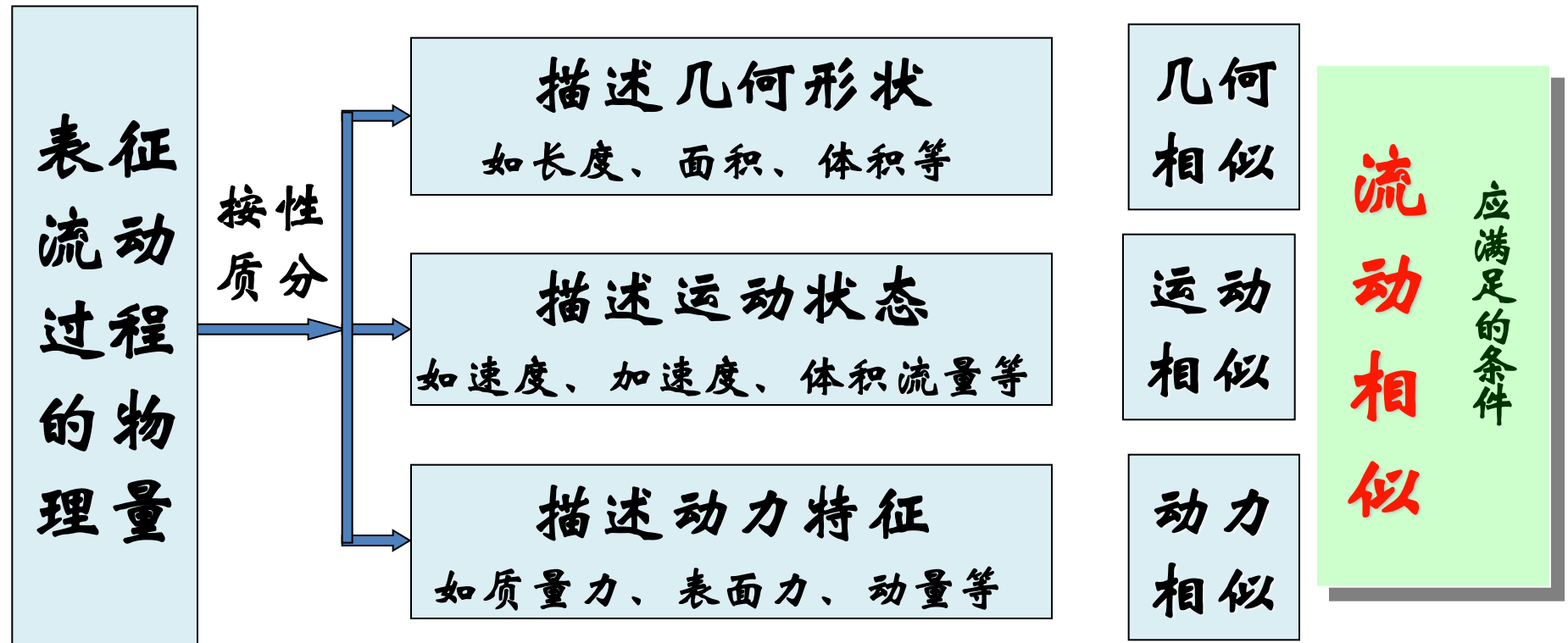
5.2 相似原理

引言

1. 飞机模型实验
2. 舰船流阻实验
3. 三峡水利大坝



5.2 相似原理



5.2 相似原理——几何相似

• 几何相似（空间相似）

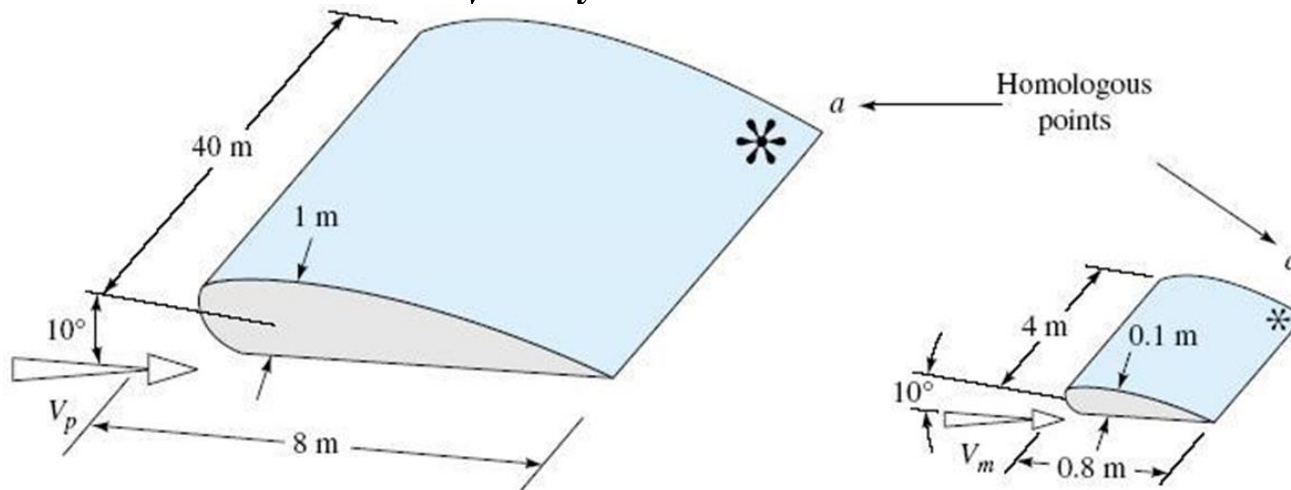
定义：模型和原型的全部对应线形长度的比值为一定常数。

$$\frac{L'}{L} = \frac{l'}{l} = \frac{h'}{h} = C_l \quad C_l : \text{长度比例尺（相似比例常数）}$$

面积比例尺： $C_A = \frac{A'}{A} = \frac{l'^2}{l^2} = C_l^2$

体积比例尺： $C_V = \frac{V'}{V} = \frac{l'^3}{l^3} = C_l^3$

上标“'”表示
模型的有关量

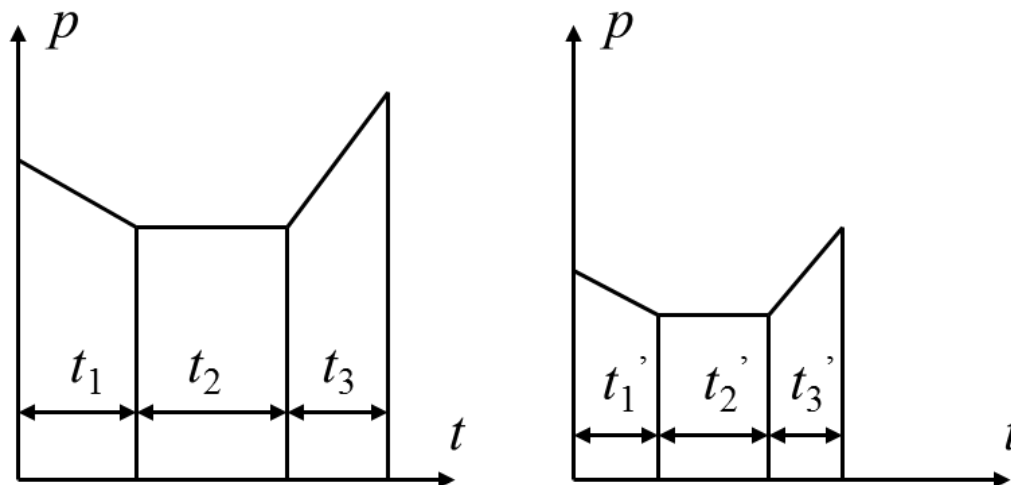


5.2 相似原理——时间相似

- 时间相似

两种流动状态的压力（或其它物理量）变化的时间间隔满足下列关系：

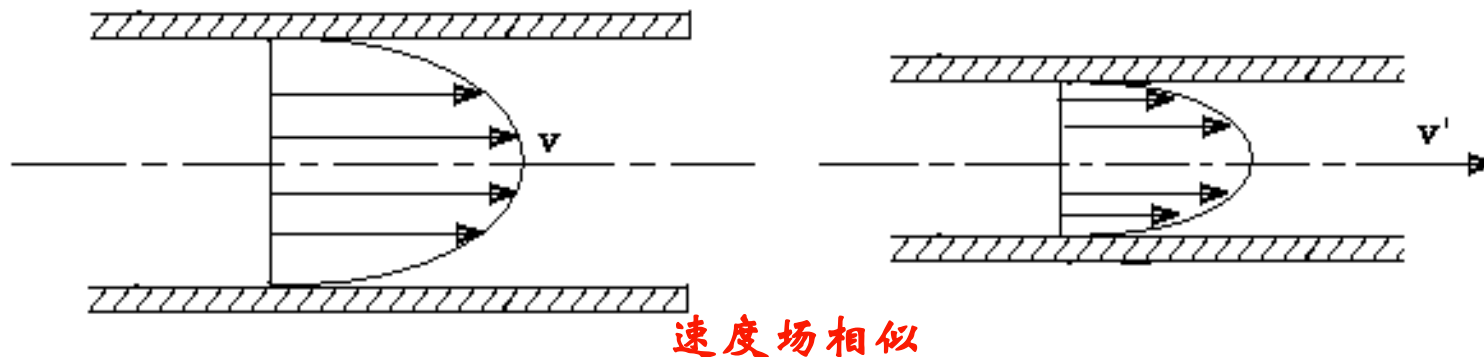
$$\frac{t'_1}{t_1} = \frac{t'_2}{t_2} = \frac{t'_3}{t_3} = C_t$$



5.2 相似原理——运动相似

• 运动相似

定义：满足几何相似的流场中，对应时刻、对应点流速（加速度）的方向一致，大小的比例相等，即它们的速度场（加速度场）相似。



速度比例常数 $\frac{V'_1}{V_1} = \frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_3}{V_3} = C_v$

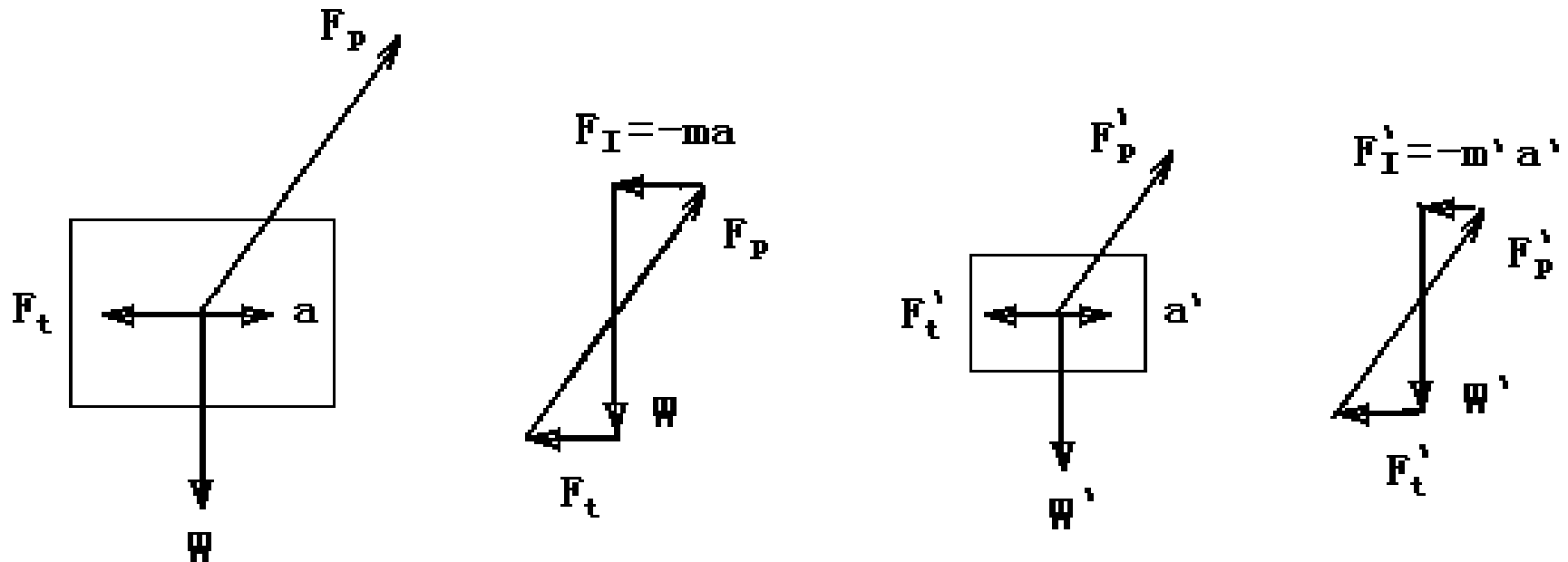
加速度比例常数 $C_a = \frac{C_v}{C_t} = \frac{C_v^2}{C_l}$

流量比例常数 $C_Q = \frac{C_l^3}{C_t} = C_v C_l^2$

5.2 相似原理——力相似

• 力相似

定义：两个运动相似的流场中，对应空间点上、对应瞬时作用在两几何相似微团上的力，方向一致、大小互成比例，即它们的动力场相似。



动力场相似

5.2 相似原理——力相似

力的比例尺:

$$C_F = \frac{F_p'}{F_p} = \frac{F_t'}{F_t} = \frac{W'}{W} = \frac{F_I'}{F_I}$$

又由牛顿定律可知:

$$C_F = \frac{\rho' l'^3 \frac{v'}{t'}}{\rho l^3 \frac{v}{t}} = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

其中: $C_\rho = \frac{\rho'}{\rho}$ 为流体的密度比例尺。

模型与原型的密度比例尺, 长度比例尺和速度比例尺, 可以确定所有动力学量的比例尺。

5.2 相似原理——力相似

力矩（功，能）比例尺：

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

$$C_M = \frac{M'}{M} = \frac{F'l'}{Fl} = C_F C_l = C_l^3 C_v^2 C_\rho$$

压强（应力）比例尺：

$$C_p = \frac{p'}{p} = \frac{\frac{F'_p}{A'}}{\frac{F_p}{A}} = \frac{C_F}{C_A} = C_v^2 C_\rho$$

功率比例尺：

$$C_P = \frac{P'}{P} = \frac{F'v'}{Fv} = C_F C_v = C_l^2 C_v^3 C_\rho$$

动力粘度比例尺： $C_\mu = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho'v'}{\rho v} = C_\rho C_v = C_l C_v C_\rho$

5.2 相似原理——力相似

定义：在**几何相似**的条件下，两种物理现象保证相似的条件或准则。

$$\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} = 1$$

或：

$$\frac{F'}{\rho' l'^2 v'^2} = \frac{F}{\rho l^2 v^2}$$

令：

$$\frac{F}{\rho l^2 v^2} = Ne$$

Ne 称为牛顿数，
它是作用力与惯性力的比值。

当模型与原型动力相似，则其牛顿数必定相等，
即 $Ne' = Ne$ ；反之亦然。这就是**牛顿相似准则**。

5.2 相似原理——力相似

流场中有各种性质的力，但不论是哪种力，只要两个流场动力相似，它们都要服从**牛顿相似准则**。

一、重力相似准则（弗劳德准则）

二、粘性力相似准则（雷诺准则）

三、压力相似准则（欧拉准则）

四、表面张力相似准则（韦伯准则）

5.2 相似原理——力相似

一、重力相似准则

重力比 $C_F = \frac{W'}{W} = \frac{\rho' V' g'}{\rho V g} = C_\rho C_l^3 C_g$

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

或：
$$\frac{C_v}{(C_l C_g)^{1/2}} = 1$$
$$\frac{v'}{(g' l')^{1/2}} = \frac{v}{(g l)^{1/2}}$$

令：
$$\frac{v}{(g l)^{1/2}} = Fr$$

Fr 称为**弗劳德数**，它是惯性力与重力的比值。

当模型与原型重力相似，则其弗劳德数必定相等，反之亦然。这就是**重力相似准则**（**弗劳德准则**）。

重力场中

$$g' = g, \quad C_g = 1$$

则：

$$C_v = C_l^{1/2}$$

5.2 相似原理——力相似

二、粘性力相似准则

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

粘性力比 $C_F = C_\mu C_l C_v$

$$C_\rho C_v C_l / C_\mu = 1 \quad C_v C_l / C_v = 1$$

或: $\frac{\rho' v' l'}{\mu'} = \frac{\rho v l}{\mu} \quad \frac{v' l'}{v'} = \frac{v l}{v}$

令: $\frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = \text{Re}$

Re 称为 **雷诺数**，
它是惯性力与粘性力的比值。

当模型与原型的粘性力相似，则其雷诺数必定相等，反之亦然。
这就是 **粘性力相似准则**（**雷诺准则**）。

模型与原型用同一种流体时 $C_\rho = C_\mu = 1$

则: $C_v = 1 / C_l$

5.2 相似原理——力相似

三、压力相似准则

压力比 $C_F = \frac{F'}{F} = \frac{p' A'}{p A} = C_p C_l^2$

$$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = 1$$

或: $\frac{p'}{\rho' v'^2} = \frac{p}{\rho v^2}$

令: $\frac{p}{\rho v^2} = Eu$

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

Eu 称为欧拉数，它是总压力与惯性力的比值。

当模型与原型的压力相似，则其欧拉数必定相等，反之亦然。这就是压力相似准则（欧拉准则）。

当压强用压差代替：

欧拉数: $Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$

欧拉相似准则: $\frac{\Delta p'}{\rho' v'^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$

5.2 相似原理——力相似

四、表面张力相似准则

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

表面张力比 $C_F = \frac{F'_\sigma}{F_\sigma} = \frac{\sigma' l'}{\sigma l} = C_\sigma C_l$

$$C_\rho C_l C_v^2 / C_\sigma = 1$$

或: $\frac{\rho' v'^2 l'}{\sigma'} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$

令: $\frac{\rho v^2 l}{\sigma} = We$

We 称为**韦伯数**，它是惯性力与表面张力的比值。

当模型与原型表面张力相似，则其韦伯数必定相等，即 $We' = We$ ；反之亦然。这就是**表面张力相似准则**（**韦伯准则**）

5.2 相似原理——力相似

以上给出的**牛顿数**、**弗劳德数**、**雷诺数**、**欧拉数**、**韦伯数**均称为相似准则数。

5.2 相似原理

流动相似：在对应点上、对应瞬时，所有物理量都成比例。

相似流动必然满足以下条件：

- 1. 任何相似的流动都是属于同一类的流动，相似流场对应点上的各种物理量，都应为相同的微分方程所描述；
- 2. 相似流场对应点上的各种物理量都有唯一确定的解，即流动满足单值条件；
- 3. 由单值条件中的物理量所确定的相似准则数相等是流动相似也必须满足的条件。

5.2 相似原理

相似原理

- 相似现象应遵循同一规律，可用同一微分方程描述；
- 由微分方程的求解知，相似现象的单值条件应相似；
- 因相似现象的物理量成比例关系，而物理量必须满足同一方程，所以物理量的比值要受到约束。

相似原理的表述

两种流动现象相似的充要条件：

- 同一类现象，能用同一微分方程描述；
- 单值条件相似；
- 由单值条件中物理量组成的相似准则相等。

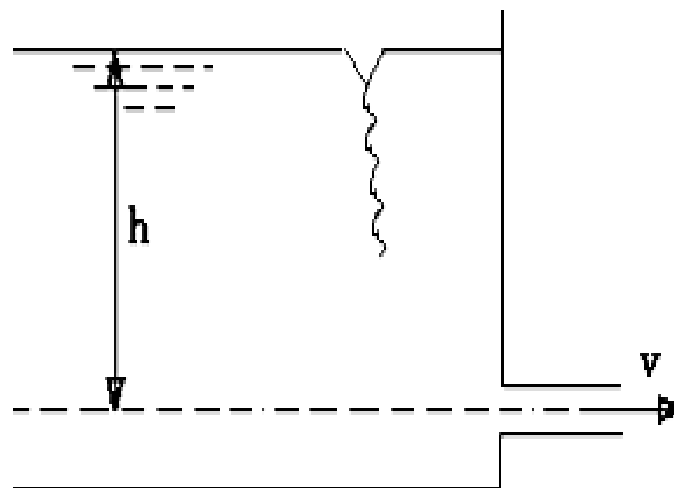
5.2 相似原理

模型实验需要解决的问题：

1. 根据物理量所组成的相似准则数相等的原则去设计模型，选择流动介质；
2. 在实验过程中应测定各相似准则数中包含的一切物理量；
3. 用数学方法找出相似准则数之间的函数关系，即准则方程式。该方程式便可推广应用到原型及其他相似流动中去。

例 1: 如图所示, 为防止当通过油池底部的管道向外输油时, 因池内油深太小, 形成油面的旋涡将空气吸入输油管。需要通过模型实验确定油面开始出现旋涡的最小油深 h_{\min} 。已知输油管内径 $d=250\text{mm}$, 油的流量 $q_v=0.14\text{m}^3/\text{s}$, 运动粘度 $\nu=7.5\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 。

倘若选取的长度比例尺 $C_l=1/5$, 为了保证流动相似, 模型输出管的内径、模型内液体的流量和运动粘度应等于多少? 在模型上测得 $h'_{\min}=50\text{mm}$, 油池的最小油深 h_{\min} 应等于多少?



油池模型

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = Fr$$

$$\frac{\rho vl}{\mu} = \frac{vl}{\nu} = Re$$

【解】按长度比例尺得模型输出管内径

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = Fr$$

$$d' = C_l d = \frac{250}{5} = 50(mm)$$

$$\frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = Re$$

在重力场中 $g' = g$

由弗劳德数相等可得模型内液体的流速和流量为

$$v' = \left(\frac{h'}{h}\right)^{1/2} v = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} v$$

$$q'_v = \frac{\pi}{4} d'^2 v' = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} v = \left(\frac{1}{5}\right)^{5/2} q_v = \frac{0.14}{55.9} = 0.0025(m^3/s)$$

由雷诺数相等可得模型内液体的运动粘度为

$$\nu' = \frac{v' d'}{\nu d} \nu = \left(\frac{1}{5}\right)^{3/2} \nu = \frac{7.5 \times 10^{-5}}{11.18} = 6.708 \times 10^{-6}(m^2/s)$$

油池的最小油深为：
$$h_{\min} = \frac{h'_{\min}}{C_l} = 5 \times 50 = 250(mm)$$

例 2: 密度和动力粘度相等的两种液体从几何相似的喷嘴中喷出。一种液体的表面张力为 0.04409N/m, 出口流束直径为 7.5cm, 流速为 12.5m/s, 在离喷嘴 10m 处破裂成雾滴; 另一液体的表面张力为 0.07348N/m。如果二流动相似, 另一液体的出口流束直径、流速、破裂成雾滴的距离应多大?

$$\frac{\rho v l}{\mu} = Re$$

$$\frac{\rho v^2 l}{\sigma} = We$$

【解】 要保证二流动相似，雷诺数和韦伯数必须相等，即

$$\frac{\rho' v' l'}{\mu'} = \frac{\rho v l}{\mu} \quad \frac{\rho' v'^2 l'}{\sigma'} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$$

或 $C_v C_l = 1 \quad C_v^2 C_l = C_\sigma$

故有 $C_v = C_\sigma = \frac{0.07348}{0.04409} = 1.667$

$$C_l = 1/C_v = 1/1.667 = 0.6$$

另一流束的出口直径，流速和破裂成雾滴的距离分别为

$$d' = C_l d = 0.6 \times 7.5 = 4.5(\text{cm})$$

$$v' = C_v v = 1.667 \times 12.5 = 20.83(\text{m/s})$$

$$l' = C_l l = 0.6 \times 10 = 6.0(\text{m})$$

5.2 相似原理

相似原理的应用

利用相似原理进行实验研究的步骤：

- 选取决定性的相似准则；
- 根据决定性相似准则相等的原则设计实验；
- 确定需测的物理量，整理成相似准则；
- 将实验结果换算到实物中去。

	量纲分析	相似原理
不同点	不涉及物理意义	无量纲数有物理意义
	不同物理过程的相似	相同物理过程的相似
	量纲运算	重视物理现象
共同点	得到一组无量纲数	

5.3 模型试验

5.3 模型试验

一、全面力学相似模型试验

注意：很难办到

例：粘性不可压缩流体定常流动

$$Fr = Fr' \quad \frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'} \Rightarrow C_{v2}^2 = C_l C_g \Rightarrow C_{v2} = \sqrt{C_l C_g}$$

$$Re = Re' \quad \frac{vl}{\nu} = \frac{v'l'}{\nu'} \Rightarrow C_{v1} = \frac{C_v}{C_l} \quad \Downarrow \quad g = g'$$
$$C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

(1) 若选用相同流动介质 $\nu' = \nu$

$$C_{v1} = C_l^{-1} \quad C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

假设取 $C_l = \frac{l'}{l} = \frac{1}{10}$ **则** $C_{v1} = \frac{\nu'}{\nu} = 10$ $C_{v2} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{3.16}$

不能选用同种介质

5.3 模型试验

(2) 选用不同粘度的流体 $\nu' \neq \nu$

$$C_{v1} = C_{v2} \Rightarrow C_v = C_l^{\frac{3}{2}}$$

假设 $C_l = \frac{1}{10}$ 则 $C_v = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{31.6}$

$$C_{v1} = \frac{C_v}{C_l}$$

$$C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

分析:



不可能实现

- 1、定性的相似准则使得模型中物理量互相牵制
- 2、完全满足相似准则的模型无法实现
- 3、工程中采用近似模化法

5.3 模型试验

二、近似模化法

1、弗劳德模化法

使用范围：重力起主导作用的明渠流动

$$Fr = Fr' \quad \frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'} \quad \xrightarrow{g = g'} \quad C_v = \sqrt{C_l}$$

2、雷诺模化法

使用范围：有黏性力的管内流动

$$Re = Re' \quad \frac{vl}{\nu} = \frac{v'l'}{\nu'} \quad \Rightarrow C_v = \frac{C_\nu}{C_l}$$

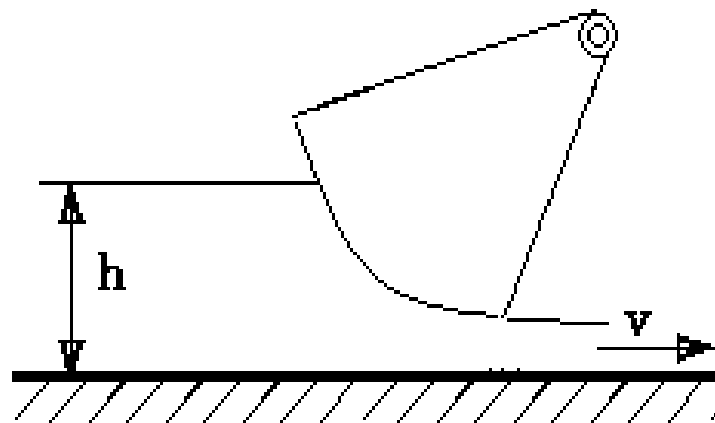
3、欧拉模化法

使用范围：流体的自模化区

$$Eu = Eu' \quad \frac{p}{\rho v^2} = \frac{p'}{\rho' v'^2} \quad \Rightarrow C_p = C_v^2 C_\rho$$

例 3： 图为弧形闸门放水时的情形。已知水深 $h=6\text{m}$ 。模型闸门是按长度比例尺 $C_l=1/20$ 制作的，实验时的开度与模型的相同。试求流动相似时模型闸门前水深。在模型实验中测得收缩截面的平均流速 $v'=2.0\text{m/s}$ ，流量 $q'_V=3\times 10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$ ，水作用在闸门上的力 $F'=102\text{N}$ ，绕闸门轴的力矩 $M'=120\text{N}\cdot\text{m}$ 。试求在原型上收缩截面的平均流速、流量以及作用在闸门上的力和力矩。

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = Fr$$



弧形闸门

【解】 按长度比例尺，模型闸门前的水深

$$h' = C_l h = 6/20 = 0.3(m)$$

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = Fr$$

在重力作用下水从闸门下出流，要使流动相似，弗劳德数必须相等

$$C_v = C_l^{1/2}$$

原型上的待求量可按有关比例尺计算如下：

收缩截面的平均流速 $v = v'/C_v = v'/C_l^{1/2} = 2.0 \times 20^{1/2} = 8.944 m/s$

流量 $q_v = q'_v / C_{q_v} = q'_v / C_l^{5/2} = 0.03 \times 20^{5/2} = 53.67 m^3/s$

作用在闸门上的力 $F = F'/C_F = F'/C_l^3 = 102 \times 20^3 = 8.160 \times 10^5 N$

力矩 $M = M'/C_m = M'/C_l^4 = 120 \times 20^4 = 1.920 \times 10^7 N \cdot m$

Thanks!

感谢关注 敬请指导