Engineering Fluid Mechanics

工程流体力学

第4章 流体动力学分析基础

教学团队：严 岩
韩 煜
吴 泽
李 晓
莫景文
孙东科

东南大学机械工程学院

2023/4/24

主要内容

【7】 Fluid Flows 流体动力学分析

动量矩方程

4.7 动量矩方程

如何求解流体与固体相互作用的力矩问题?

由动量矩定理：系统内流体对某点的动量矩对时间的导数，等于作用于系统的外力对同一点的力矩的矢量和。即：

$$\sum\left(M_0\right)_s=\frac{d}{dt}\int_{m_s}\left(r_0\times\vec{V}\right)dm$$

应用雷诺输运方程 $$\left(\frac{dB}{dt}\right)_s=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\beta\rho dV+\int_{c.s}\beta\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA$$

$$B=\int_{m_s}(\vec{r}_0\times\vec{V})dm \longrightarrow \beta=\frac{dB}{dm}=\vec{r}_0\times\vec{V}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{m_s}\left(r_0\times\vec{V}\right)dm=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\left(r_0\times\vec{V}\right)\rho dV+\int_{cs}\left(r_0\times\vec{V}\right)\rho\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)dA$$

$$\boxed{\therefore\quad\sum\left(M_0\right)_s=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\left(r_0\times\vec{V}\right)\rho dV+\int_{cs}\left(r_0\times\vec{V}\right)\rho\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)dA}$$

4.7 动量矩方程

定常流动的动量矩方程

对定常流动 $$\frac{d}{dt}\int_{c.v}\left(r_0\times\vec{V}\right)\rho dV=0$$

则 $$\boxed{\sum\left(M_0\right)_s=\int_{c.s}\left(r_0\times\vec{V}\right)\rho\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)dA}$$

定常流动时，作用在控制体内部质点上的所有力的力矩矢量和，等于流入、流出控制面的净动量矩流率。

动量矩方程的应用

例4-10

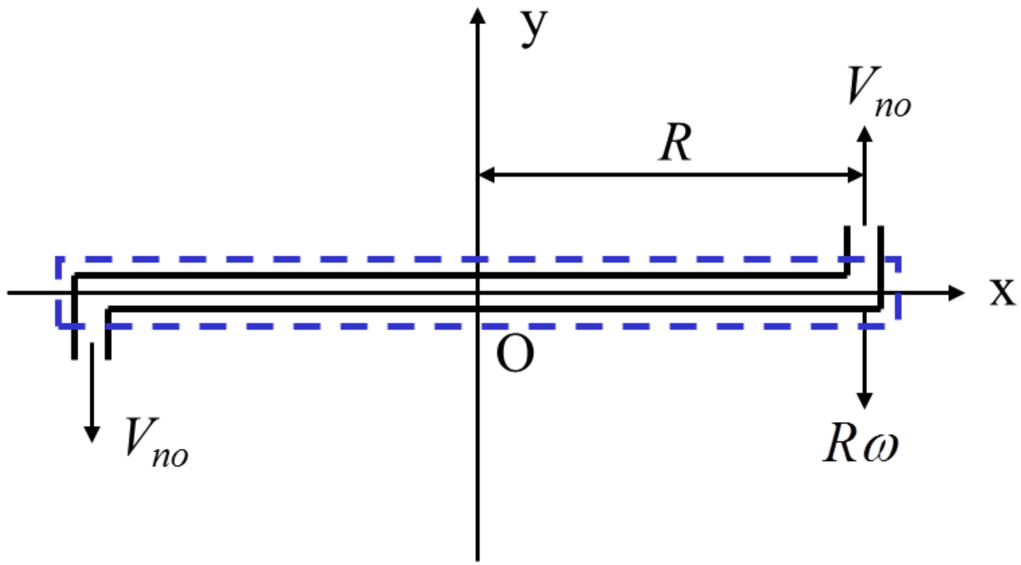
已知：草坪洒水器在水平面（*xy*平面）

作120rpm的等角速度旋转，水流量Q_i=0.006m³/s，

出口面积A_0=0.001m2，R=0.2m。

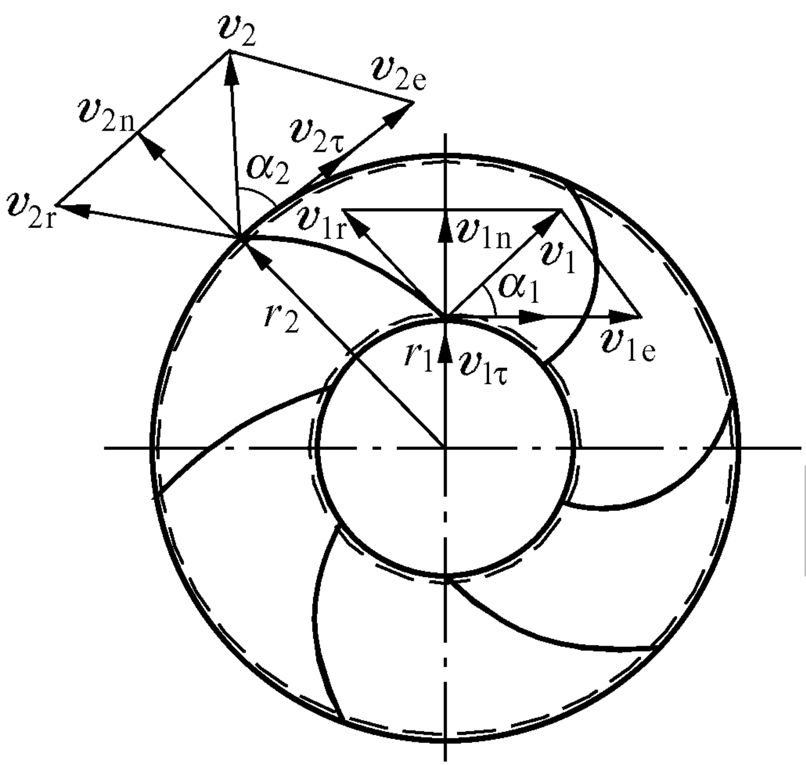
求：1）维持此速度所需的阻力矩；

2）若阻力矩为0，转速增为多少？



4.7 动量矩方程

动量矩方程的应用
叶轮机械



离心泵叶轮内的流动

定常流动动量矩方程可以表示为：

$$\iint_{CS}\rho\ (\vec{r}\times\vec{\upsilon})\upsilon_n dA=\sum(\vec{r_i}\times\vec{F_i})$$

所有外力矩矢量和

取图中虚线包容的体积为控制体：

$$[\sum(\vec{r_i}\times\vec{F_i})]_z=M_z$$

M_z 为转轴传给叶轮的力矩。

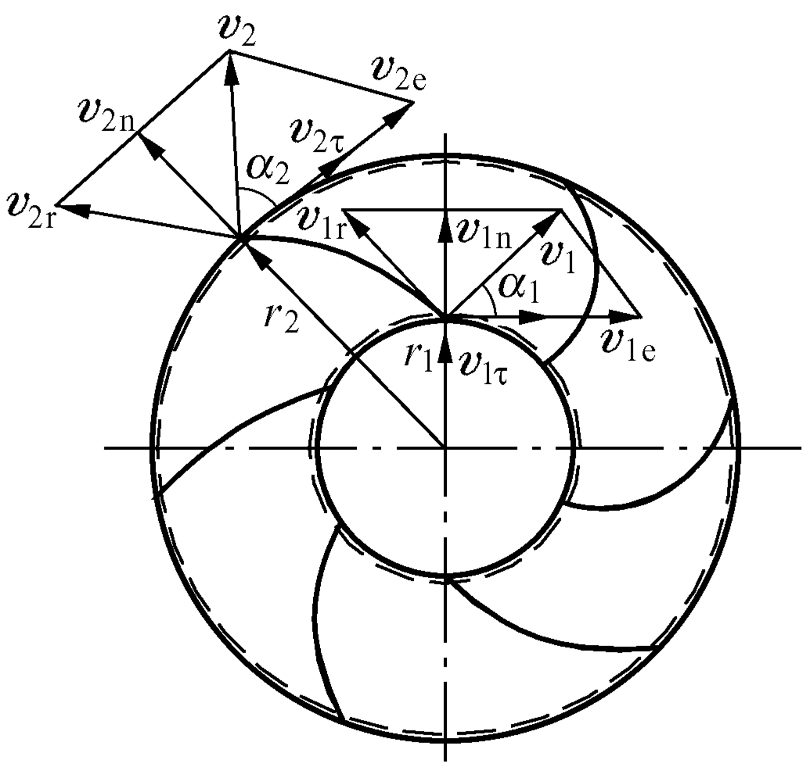
$$[\iint_{CS}\rho(\vec{r}\times\vec{\upsilon})\upsilon_n dA]_z=\iint_{A_2}\rho\upsilon_2 r_2\cos\alpha_2\upsilon_{2n}dA-\iint_{A_1}\rho\upsilon_1 r_1\cos\alpha_1\upsilon_{1n}dA$$

$$=\rho\upsilon_2 r_2\cos\alpha_2\upsilon_{2n}A_2-\rho\upsilon_1 r_1\cos\alpha_1\upsilon_{1n}A_1$$

$$=\rho q_V(r_2\upsilon_{2\tau}-r_1\upsilon_{1\tau})$$

4.7 动量矩方程

动量矩方程的应用
叶轮机械



离心泵叶轮内的流动

力矩:

$$M_z = \rho q_V (r_2 \upsilon_{2\tau} - r_1 \upsilon_{1\tau})$$

功率:

$$P = M_z \omega = \rho q_V (\upsilon_{2e} \upsilon_{2\tau} - \upsilon_{1e} \upsilon_{1\tau})$$

叶轮机械的基本方程:

$$H = \frac{1}{g} (\upsilon_{2e} \upsilon_{2\tau} - \upsilon_{1e} \upsilon_{1\tau})$$

单位重量流体获得的能量

4.7 动量矩方程

动量矩方程的应用

解题注意事项

1）步骤类似于动量定理的应用；
2）流体通过旋转通道，绝对速度为相对速度与牵连速度的矢量和；
3）绝对速度用于计算动量矩；
4）相对速度用于计算流速或流量；
5）相对速度的方向取决于通道的型线。

4.7 动量矩方程

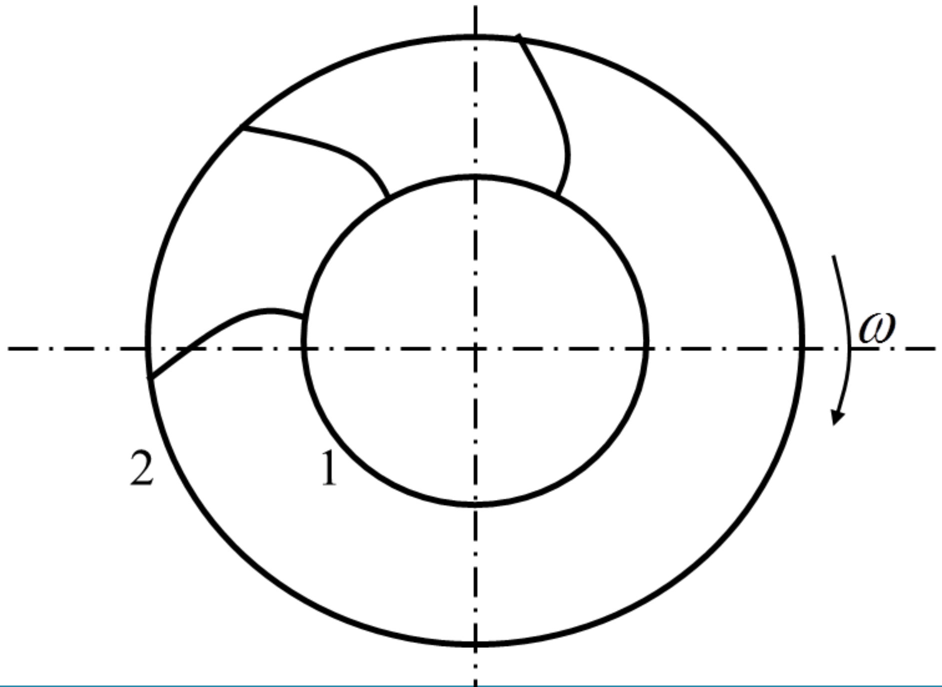
动量矩方程的应用

例2

已知：水通过等速旋转的泵叶，不考虑流动损失，进出口截面上的参数均匀。

求：1）维持泵叶旋转所需要施加的力矩T；

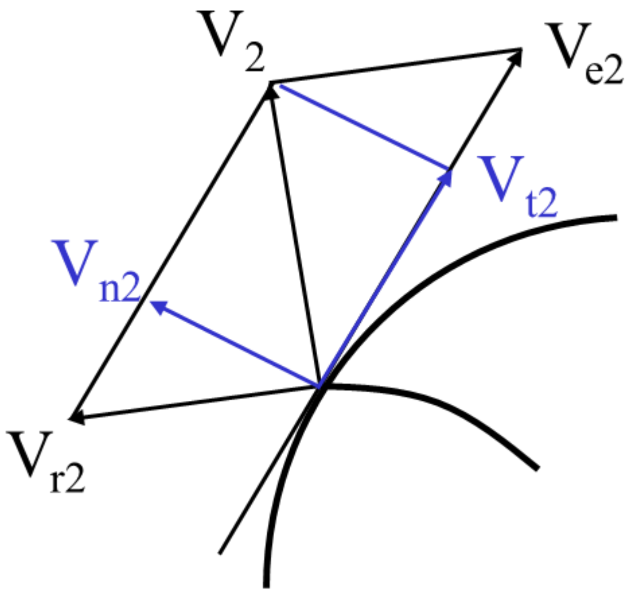
2）泵叶消耗的功率P，增加的压强p。



动量矩方程的应用

例2

解：泵叶出口速度分析



动量矩方程的应用

例2

流体经过离心式泵的泵叶通道：
压强增加，可借用伯努利方程表示如下：

$$gz_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{P}{\rho Q} = gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$\because z_1 \approx z_2 \quad V_1 \approx V_2$$

$$\therefore p_2 - p_1 = \Delta p = \frac{P}{Q}$$

作业

- 4-24
- 4-29
- 4-33
- 4-34
- 4-35

8 Fluid Flows

流体动力学分析

微分形式的守恒方程

4.8 微分形式的守恒方程

- 微分形式的质量守恒方程—连续性方程

式（4-11）给出了积分形式的连续性方程，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\rho dV+\int_{c.s}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA=0$$

由高斯定理，一物理量通过控制面的面积分，等于该物理量的散度在控制面所包围的控制体内的体积分，即

$$\int_{A}\vec{a}\cdot\vec{n}dA=\int_{V}\nabla\cdot\vec{a}dV$$

则
$$\int_{c.s}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA=\int_{c.v}\nabla\cdot(\rho\vec{v})dV$$

代入积分形式的连续性方程，得

$$\int_{c.v}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]dV=0$$

4.8 微分形式的守恒方程

- 微分形式的质量守恒方程—连续性方程

由于流场满足连续介质条件，控制体的选取具有任意性，则有：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \cdot (\rho \vec{V})=0$$

上式即为微分形式的连续性方程，展开后合并，可得到一个包含密度随体导数的连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \bullet \left(\rho \vec{V}\right)$$

$$=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho w\right)$$

$$=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+\rho\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=\frac{D\rho}{Dt}+\rho \nabla \bullet \vec{V}=0$$

4.8 微分形式的守恒方程

1、定常流动时的连续性方程：

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

2、不可压缩流体的连续性方程：

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

笛卡儿坐标系：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

例:

假设有一不可压缩流体三维流动，其速度分布规律为：$u=3(x+y^3)$，$v=4y+z^2$，$w=x+y+2z$。试分析该流动是否连续

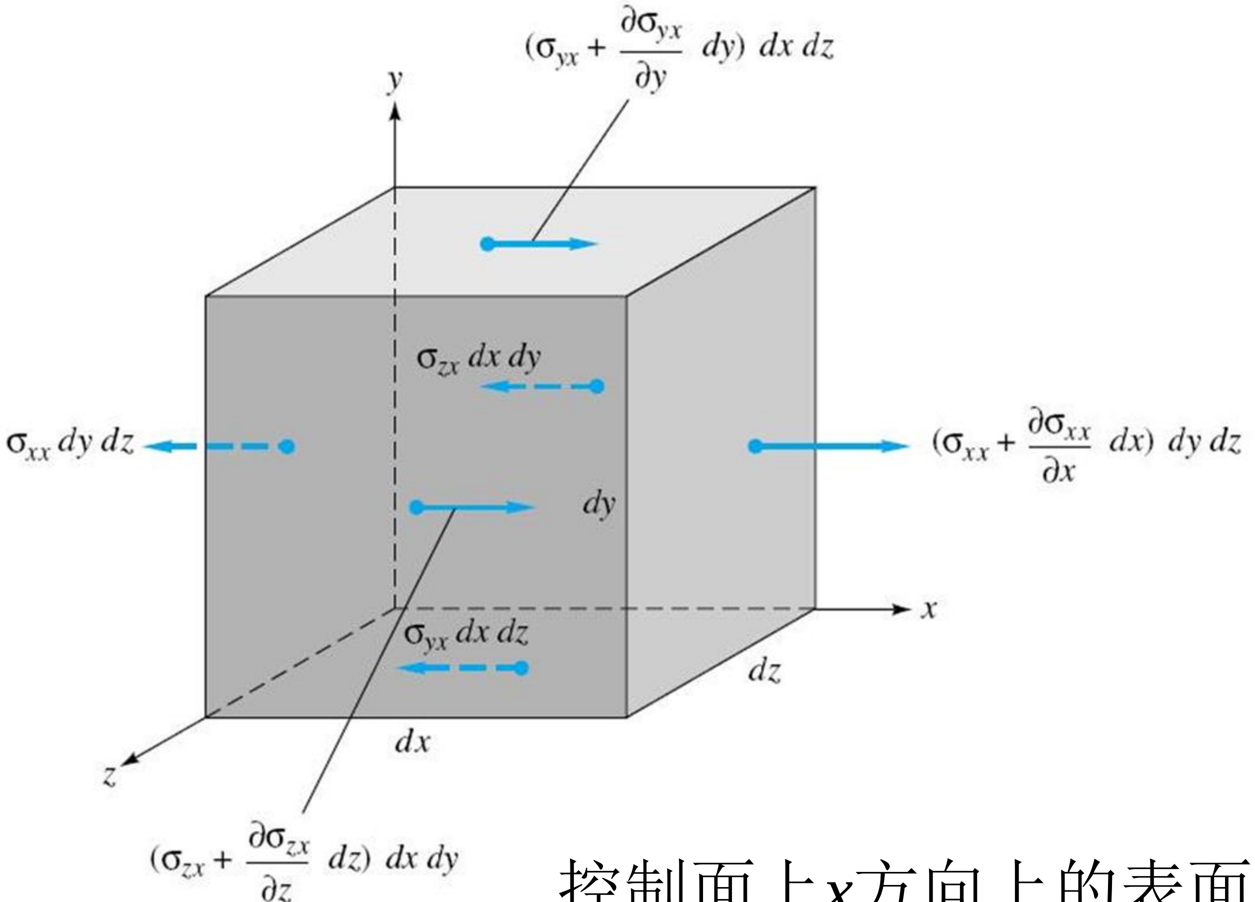
4.8 微分形式的守恒方程

例：有一不可压缩流体平面流动，其速度分布规律为 $u=x^2\sin y$，$v=2x\cos y$，试分析该流动是否连续。

4.8 微分形式的守恒方程

- 微分形式的动量守恒方程—纳维-斯托克斯方程

选取一个正六面体的微元控制体，



控制面上x方向上的表面力

4.8 微分形式的守恒方程

应用牛顿第二定律得

$$\sum \vec{F} = \rho dxdydz \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

考虑**x**方向的动量平衡，有

$$\sum F_x = (dF_m)_x + (dF_s)_x = \rho dxdydz \frac{Du}{Dt}$$

式中 $(dF_m)_x = \rho f_x dxdydz$ ，为作用在微元六面体上质量力的**x**分量，$(dF_s)_x$ 为作用在微元六面体上表面力的**x**分量

4.8 微分形式的守恒方程

***x*方向净表面力为：**

$$(dF_s)_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz$$

考虑静压强*p*的影响，有

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx} \quad \sigma_{yx} = \tau_{yx} \quad \sigma_{zx} = \tau_{zx}$$

则

$$(dF_s)_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz$$

将质量力和表面力的表达式代入得

$$\rho \frac{Du}{Dt} dxdydz = \left(\rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz$$

4.8 微分形式的守恒方程

即 $$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

于是写出三个坐标方向的运动微分方程：

$$\begin{cases}\rho\dfrac{Du}{Dt}=\rho f_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\\[2ex]\rho\dfrac{Dv}{Dt}=\rho f_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\\[2ex]\rho\dfrac{Dw}{Dt}=\rho f_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\end{cases}$$

4.8 微分形式的守恒方程

写成矢量形式，为 $\rho\dfrac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p+\nabla\bullet\tau_{ij}$

式中， τ_{ij} 为作用在微元六面体上的粘性应力张量

$$\tau_{ij}=\begin{bmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\end{bmatrix}$$

粘性流体的运动微分方程表明：

流体作加速运动，必定是质量力、压强力和黏性应力共同作用的结果。

4.8 微分形式的守恒方程

1、理想流体的欧拉运动方程：

对理想流体，黏性应力张量为0，可得理想流体的欧拉运动方程：

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p$$

分量形式

$$\begin{cases}\rho\dfrac{Du}{Dt}=\rho f_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}\\[2ex]\rho\dfrac{Dv}{Dt}=\rho f_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}\\[2ex]\rho\dfrac{Dw}{Dt}=\rho f_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=f_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=f_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=f_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}\end{cases}$$

4.8 微分形式的守恒方程

2、黏性流体的纳维—斯托克斯方程：

广义内摩擦定律：

切向应力：

$$
\begin{cases}
\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \tau_{yx} \\
\tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \tau_{zy} \\
\tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \tau_{xz}
\end{cases}
$$

2、黏性流体的纳维一斯托克斯方程：

广义内摩擦定律：

法向应力：

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} = 2\mu \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} = 2\mu \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

2、黏性流体的纳维—斯托克斯方程：

三个方向的法向应力之和为

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=-3p+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

对不可压缩流体

$$p=-\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)$$

上式表明：

在不可压缩黏性流体中，某点的静压强正好等于三个法向应力的算术平均值的负值。

4.8 微分形式的守恒方程

N-S方程（1823~1845）的导出

将广义牛顿内摩擦定律代入黏性流体运动方程，在x方向：

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \tau_{yx} \qquad \tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

代入

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

4.8 微分形式的守恒方程

N-S方程（1823~1845）的导出

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

对于不可压缩流体

$$\because \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\therefore \rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

4.8 微分形式的守恒方程

N-S方程（1823~1845）的导出

于是有

$$\begin{cases}\rho\dfrac{Du}{Dt}=\rho f_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\[2ex]\rho\dfrac{Dv}{Dt}=\rho f_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\[2ex]\rho\dfrac{Dw}{Dt}=\rho f_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\end{cases}$$

矢量形式：

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p+\mu\Delta\vec{v}$$

N-S方程（1823~1845）的导出

矢量形式：

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p+\mu\Delta\vec{v}$$

式中 $\Delta=\nabla\bullet\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，称为拉普拉斯（**Laplace**）算符

4.8 微分形式的守恒方程

N-S方程的求解

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

u, v, w, p 四个未知数

精确解：**1**、圆管内的层流，**7.2**
2、平行平板的层流，**7.3**
3、同心圆管之间的层流

近似解：**1**、边界层的流动，**8.1**
2、绕小圆球的蠕流流动，**8.4**

基本微分方程的定解条件

初始条件（ Initial Conditions）：

$$t = t_0: \quad \left.\begin{aligned} \vec{V}(x,y,z,t_0) &= \vec{V}_0(x,y,z) \\ p(x,y,z,t_0) &= p_0(x,y,z) \end{aligned}\right\}$$

注：定常流动不需要初始条件

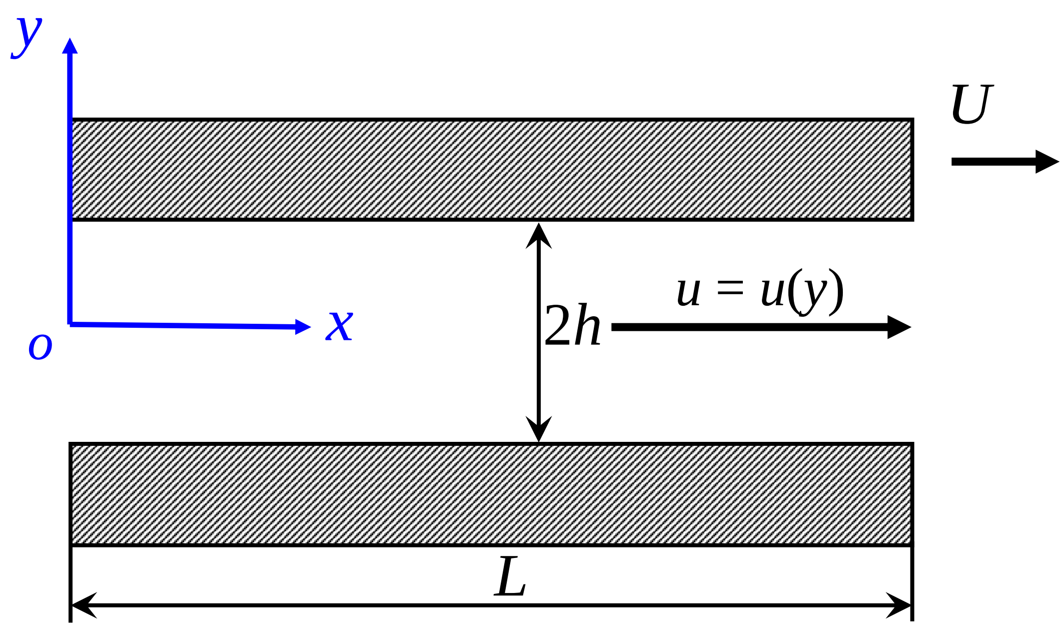
边界条件（Boundary Conditions）：

1、固体壁面

Velocity $\vec{V}_{fluid} = \vec{V}_{wall}$ (**No slip**)

If the wall is stationary $\vec{V}_{fluid} = \vec{V}_{wall} = 0$

例：平板间的层流（**Laminar Flow between Plates**）



边界条件：$y=h,\ u=U$

$y=-h,\ u=0$

4.8 微分形式的守恒方程

边界条件（Boundary Conditions）：

2、进口与出口

速度与压强分布需要知道，进口通常取上游无穷远处

3、液体与气体交界面

（1）运动学条件

$$V_{n,liqiud} = V_{n,gas}$$

（2）压强平衡条件

$$p_{liqiud} = p_{gas} + p_{表面张力}$$

[9] Fluid Flows

流体动力学分析

运动微分方程的积分求解

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 兰姆（Lamb）运动微分方程

由理想流体的欧拉运动方程导出兰姆运动方程。

由理想流体的欧拉运动方程 $\dfrac{Du}{Dt}=f_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}$

将随体导数展开得 $\dfrac{Du}{Dt}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\boxed{v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)-2v\omega_z+2w\omega_y$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)+2\left(w\omega_y-v\omega_z\right)$$

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 兰姆（Lamb）运动微分方程

将三个方向的加速度作同样处理，代入欧拉运动方程，得兰姆运动方程：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\left(w\omega_y-v\omega_z\right)=f_x-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{V^2}{2}\right)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+2\left(u\omega_z-w\omega_x\right)=f_y-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{V^2}{2}\right)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+2\left(v\omega_x-u\omega_y\right)=f_z-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{V^2}{2}\right)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}
\end{cases}
$$

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 欧拉运动微分方程可积的条件

尽管欧拉方程或兰姆方程比**N-S**方程简单，但要进行积分求解还要满足以下条件：

1、定常流动

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t}=0$$

2、质量力有势

$$f_x=-\frac{\partial \pi}{\partial x} \quad f_y=-\frac{\partial \pi}{\partial y} \quad f_z=-\frac{\partial \pi}{\partial z} \quad \text{或} \quad \vec{f}=-\nabla \pi$$

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 欧拉运动微分方程可积的条件

3、正压性流体

即流体的密度只与压强有关

定义压强函数 $$P_F = \int \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{\partial P_F}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial P_F}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial P_F}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

关于压强函数

1）不可压缩流体

$$\rho = C$$

2）完全气体等温流动

$$\rho = \frac{p}{RT} \qquad P_F = \int \frac{dp}{\rho} = RT \ln p$$

3）完全气体绝热流动

$$\rho = Cp^{\frac{1}{k}} \qquad P_F = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$$

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 欧拉运动微分方程的积分求解

1、无旋流动的欧拉积分

无旋流动时角速度为零，兰姆方程变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)=0 \end{cases}$$

上式分别乘**dx**、**dy**、**dz**再相加，得全微分式

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)dz$$

$$=d\left(\frac{V^2}{2}+\pi+P_F\right)=0$$

积分后，得

$$\frac{V^2}{2}+\pi+P_F=const$$ ——无旋流动欧拉积分

正压性的理想流体，在有势的质量力作用下，作定常无旋流动，在流场中任意位置，单位质量流体的机械能守恒。

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

2、有旋流动的伯努利积分

取一段微元流线，在坐标上的投影为**dx**、**dy**、**dz**，因定常流动流线、迹线重合，有

$$dx = udt \quad dy = vdt \quad dz = wdt$$

将兰姆方程分别乘**dx**、**dy**、**dz**，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{V^2}{2} + \pi + P_F\right)dx = -2\left(w\omega_y - v\omega_z\right)udt \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{V^2}{2} + \pi + P_F\right)dy = -2\left(u\omega_z - w\omega_x\right)vdt \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{V^2}{2} + \pi + P_F\right)dz = -2\left(v\omega_x - u\omega_y\right)wdt \end{cases}$$

4.9 定常欧拉运动微分方程的积分求解

2、有旋流动的伯努利积分

相加，右边项和为零，同样可得到下式：

$$\frac{V^2}{2} + \pi + P_F = const$$

对不可压缩理想流体在重力场作用下的定常流动

$$\because \pi = gz \quad P_F = \frac{p}{\rho}$$

$$\therefore \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = const$$ 伯努利方程

Thanks!

感谢关注 敬请指导