Engineering Fluid Mechanics

工程流体力学

主 讲 人：李晓
lx2016@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院
2023-04-24

第6章 不可压缩流体的无黏流动

目录

CONTENTS

根据流体微团在流动中是否旋转，可将流体的流动分为两类：

有旋流动和无旋流动。

有旋流动

流体在流动中，如果流场中有若干处流体微团具有绕通过其自身轴线的旋转运动，则称为有旋流动。

无旋流动

如果在整个流场中各处的流体微团均不绕自身轴线的旋转运动，则称为无旋流动。

数学条件：

当 $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} = 0$ 无旋流动

当 $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \neq 0$ 有旋流动

即当流场速度同时满足：$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$，流动无旋

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} = 0$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

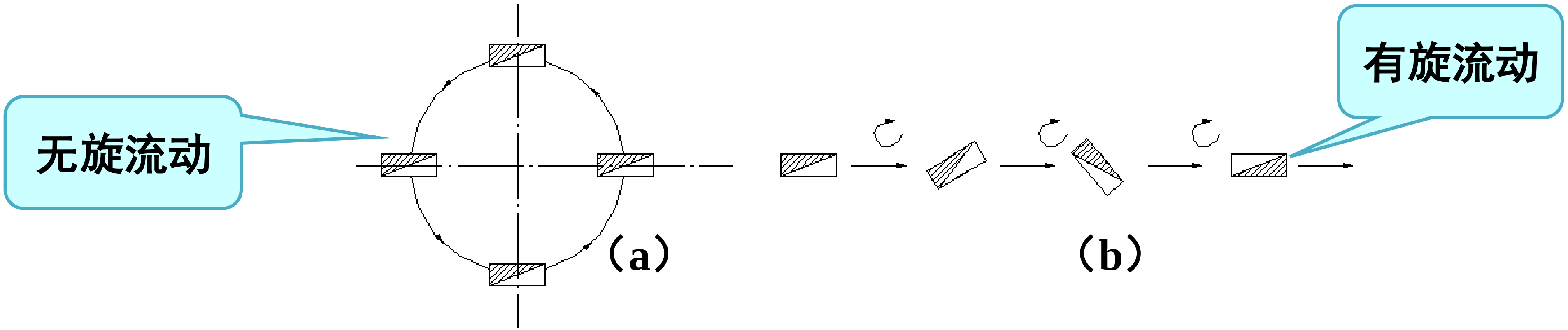
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

6.1 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

即当流场速度同时满足：$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$，流动无旋

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

需要指出的是，有旋流动和无旋流动仅由流体微团本身是否发生旋转来决定，而与流体微团本身的运动轨迹无关。



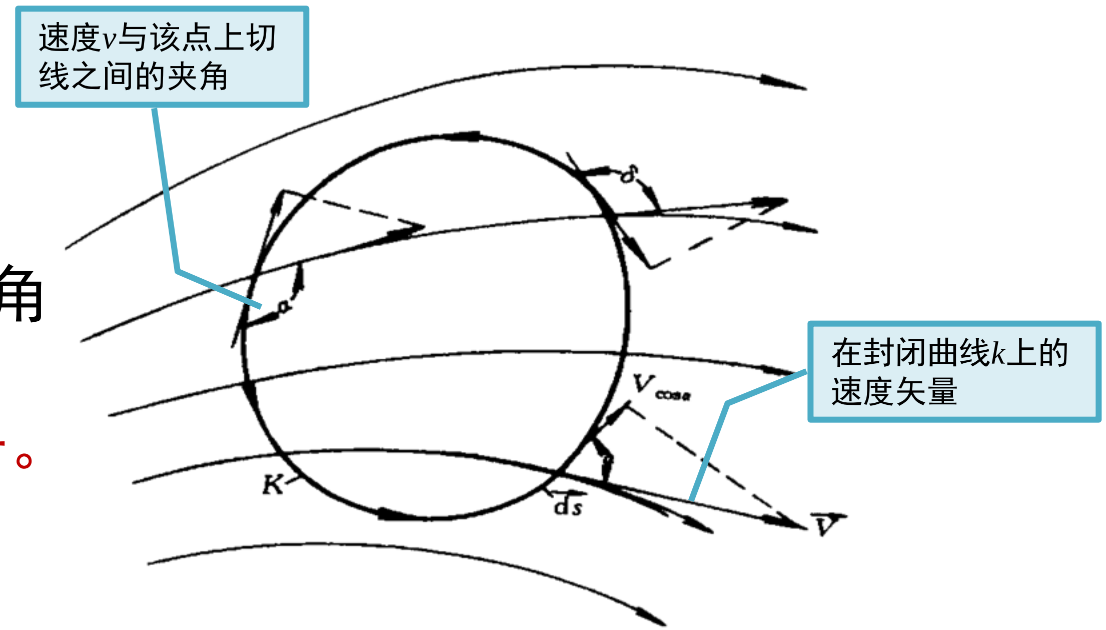
如图（a），流体微团的运动为旋转的圆周运动，微团自身不旋转，流场为无旋流动；图（b）流体微团的运动尽管为直线运动，但流体微团在运动过程中自身在旋转，所以该流动为有旋流动。

6.1 有旋流动的基本概念和定理 - 速度环量和旋涡强度

速度环量

定义：在流场中任取封闭曲线 k。速度 $\vec{v}$ 沿该封闭曲线的线积分称为速度沿封闭曲线 k 的环量，简称速度环量，用 Γ（gamma）表示，即

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_K v \cos\alpha \mathrm{d}s$$



$\vec{v}$——在封闭曲线上的速度矢量

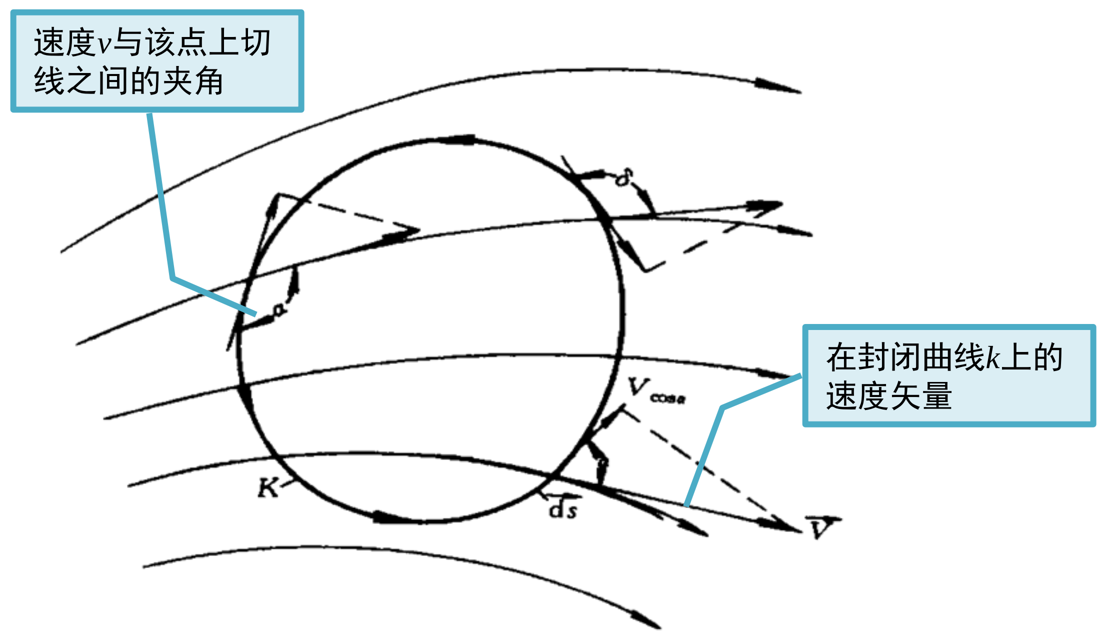
α——速度与该点上切线之间的夹角

速度环量是个标量，但具有正负号。

速度环量

- 速度环量的正负不仅与速度方向有关，而且与积分时所取的绕行方向有关。
- 通常规定逆时针方向为*K*的正方向，即封闭曲线所包围的面积总在前进方向左侧
- 当沿顺时针方向绕行时，公式应加一负号。
- 速度环量所表征的是流体质点沿封闭曲线*K*运动的总的趋势的大小，或者说所反映的是流体的有旋性。

速度环量、漩涡强度（涡通量）有什么关系？



6.1 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

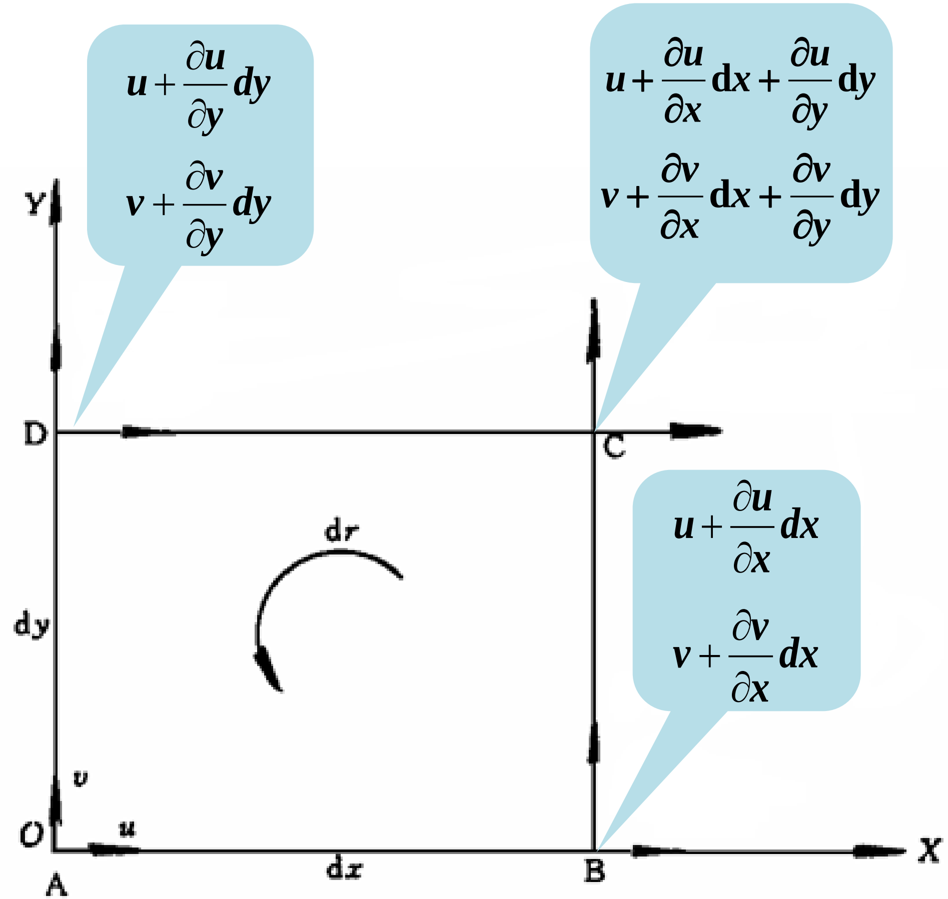
速度环量

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_K v \cos\alpha \mathrm{d}s$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$$

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_K (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z)$$



沿封闭曲线逆时针方向ABCDA的速度环量

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{u_A + u_B}{2}\mathrm{d}x + \frac{v_B + v_C}{2}\mathrm{d}y - \frac{u_C + u_D}{2}\mathrm{d}x - \frac{v_D + v_A}{2}\mathrm{d}y$$

Example: P256 8-1

速度环量

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_K v\cos\alpha \mathrm{d}s$$

沿封闭曲线逆时针方向ABCDA的速度环量

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{u_A + u_B}{2}\mathrm{d}x + \frac{v_B + v_C}{2}\mathrm{d}y - \frac{u_C + u_D}{2}\mathrm{d}x - \frac{v_D + v_A}{2}\mathrm{d}y$$

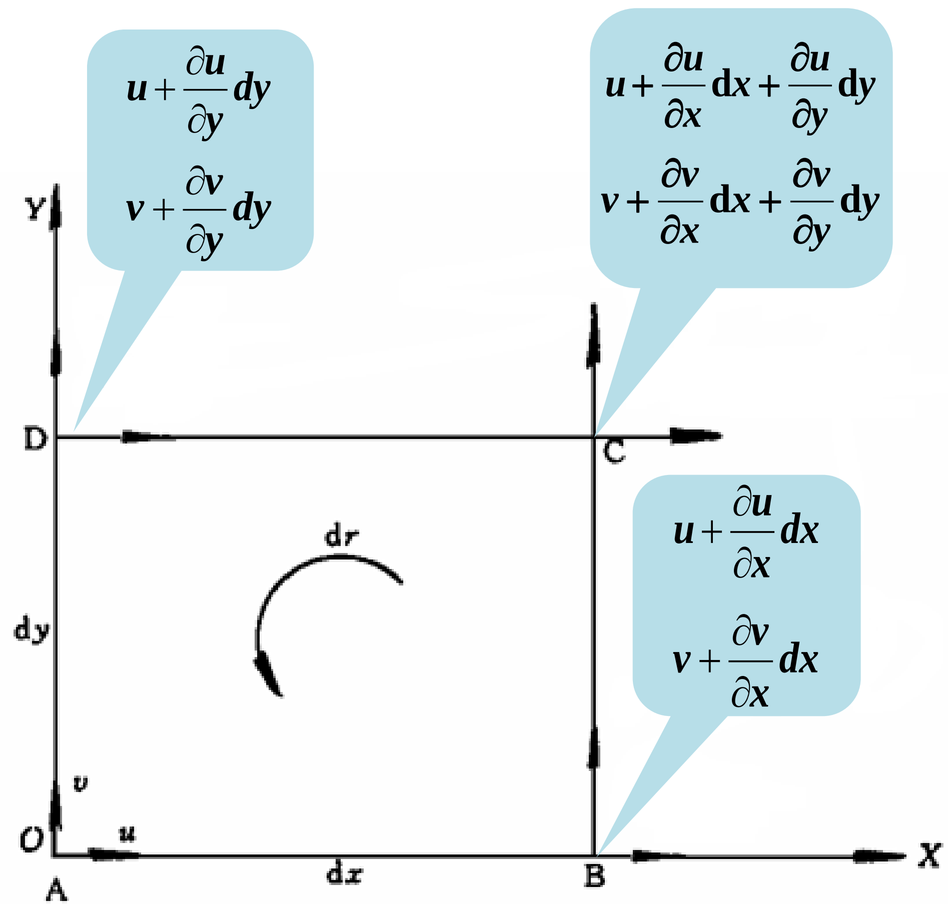
将速度各值代入上式，略去高于一阶的无穷小各项，再将旋转角速度公式代入

$$\mathrm{d}\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\omega_z \mathrm{d}A$$

对面积积分

$$\Gamma = 2\iint \omega_z \mathrm{d}A$$

得到速度环量与漩涡强度的关系



6.1 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

斯托克斯定理：（速度环量与旋转角速度（涡通量）关系）

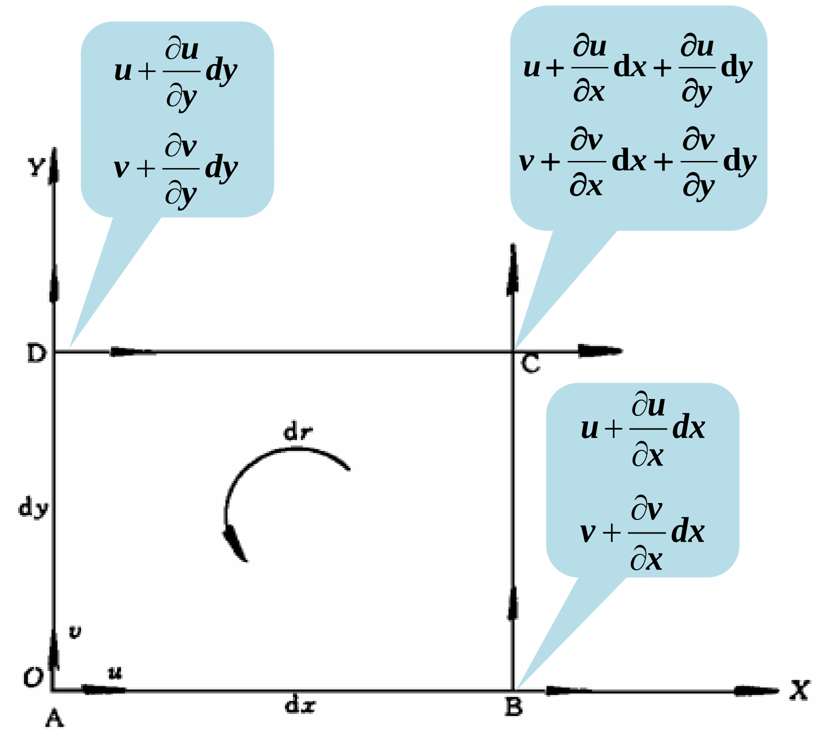
当封闭周线内有涡束时，沿封闭周线的速度环量等于该封闭周线内所有涡束的漩涡强度之和。

$$\Gamma = 2\iint \omega_z \mathrm{d}A$$

漩涡强度 I

$$\mathrm{d}I = 2\omega_n \mathrm{d}A \quad \Rightarrow \quad I = 2\iint \omega_n \mathrm{d}A$$

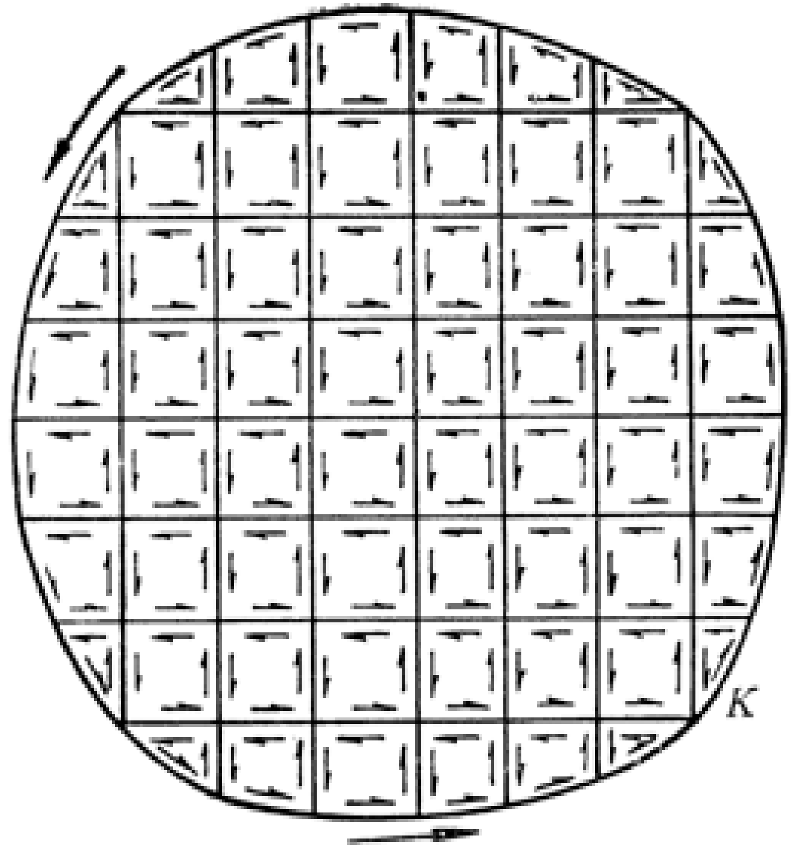
ω_n—$\vec{\omega}$ 在微元面积 dA 的外法线上的分量



有限单连通区域的斯托克斯定理

对任一微元矩形可求得速度环量 $d\Gamma_i = dI_i$，总速度环量：

$$\Gamma = \sum d\Gamma_i = \sum dI_i = 2\int_A \omega_n dA$$



另一方面,总速度环量中沿各微元矩形内周线的相邻切向速度线积分方向相反，刚好抵消，仅剩下沿外封闭周线K的切向速度线积分，即：

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \bullet d\vec{s}$$

∴总速度环量：

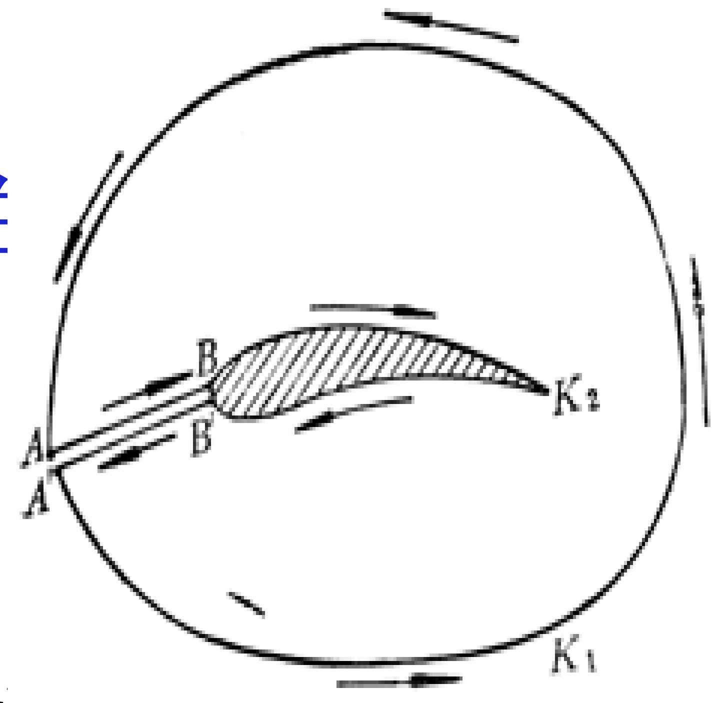
$$\oint_K \vec{V} \bullet d\vec{s} = 2\int_A \omega_n dA$$

沿有限单连通域K封闭周线的速度环量等于通过该区域漩涡强度的总和—有限单连通区域斯托克斯定理。

多连通区域的斯托克定理

对右图中由多连通区域改成

连通区域，速度环量可写成：



$$\Gamma_{ABK_2B'A'K_1A} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BK_2B'} + \Gamma_{B'A'} + \Gamma_{A'K_1}$$

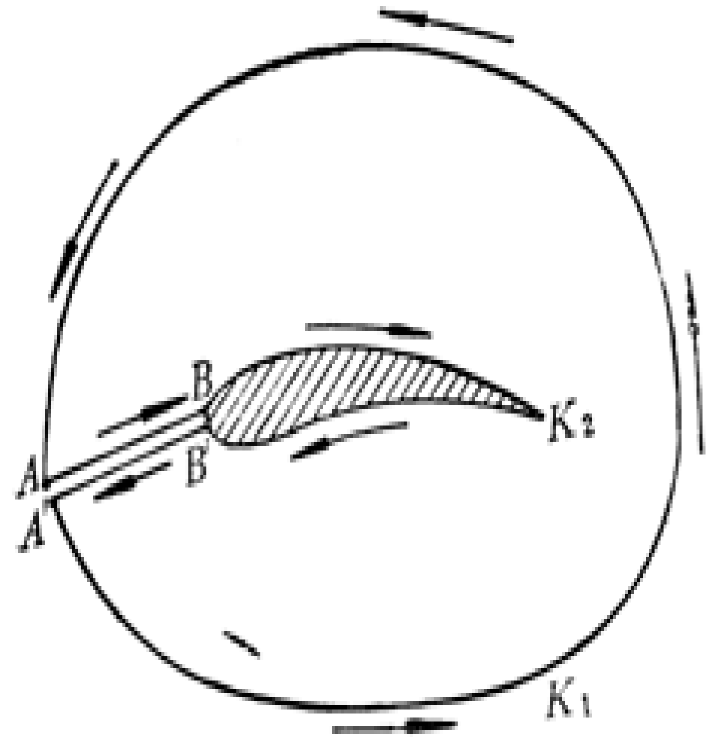
$$\because \quad \Gamma_{AB} = -\Gamma_{B'A'}$$

$$\Gamma_{BK_2B'} = -\Gamma_{K_2} \qquad \Gamma_{A'K_1A} = \Gamma_{K_1}$$

$$\Gamma_{ABK_2B'A'K_1A} = \Gamma_{K_1} - \Gamma_{K_2}$$

由Stokes定理，假如外周线内有多个内周线，则多连通区域的Stokes定理成为：

$$\Gamma_{k1}-\Gamma_{k2}=2\int\omega_n dA$$



Stokes定理说明：

速度环量取决于所包围区域内的漩涡。没有漩涡，就没有环量。反之，环量等于零，总漩涡强度等于零；环量不等于零，必然存在漩涡。

6.1 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

涡量　　以Ω表示。它定义为单位面积上的速度环量，是一个矢量。

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\omega_z\mathrm{d}A}{dA} \Rightarrow \Omega_z=\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}A}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\omega_z$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=2\omega_x\\ \Omega_y&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\omega_y\\ \Omega_z&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\omega_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\Omega}=2\vec{\omega}=\nabla\times\vec{V}$$

- 在有旋流动中，流体运动速度的旋度称为涡量。
- 在流体流动中，如果涡量的三个分量中有一个不等于零，即为有旋流动。
- 如果在一个流动区域内各处的涡量或它的分量都等于零，也就是沿任何封闭曲线的速度环量都等于零，则在这个区域内的流动一定是无旋流动。

6.2 流函数与速度势 - 有势流动 速度势

有势流动

不可压缩流体或可压缩流体作无旋流动时，总有速度势存在，故无旋流动也称有势流动。

$$\vec{\omega}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}$$

函数$\varphi(x,y,z,t)$：速度势函数。

速度势

$$\varphi=udx+vdy+wdz=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

势函数 $\varphi(x,y,z,t)$ 的微分方程（以t为参数）

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

速度势的性质

① 速度沿三个坐标轴的分量等于速度势对于相应坐标的偏导数

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

② 有势流动中沿一曲线的速度环量等于曲线终点与起点的速度势之差（和路径无关）

$$\Gamma_{AB}=\int_A^B v_x dx+v_y dy+v_z dz=\int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=\int_A^B d\varphi=\varphi_B-\varphi_A$$

③ 在有势流动中，速度势函数满足拉普拉斯方程（连续性方程–质量守恒可得）

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi=0$$

6.2 流函数与速度势 - 流函数

流函数存在的条件

不可压缩流体的平面流动

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$$

存在函数$\psi(x,y)$：流函数，使得$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}$， $v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$

流函数

$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy=-vdx+udy$$

流函数$\psi(x,y,z,t)$的微分方程

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y},v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

流函数的性质

① 速度与流函数的关系

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

② 在平面流动中，两条流线间通过的体积流量等于两条流线上的流函数值之差

$$q_V=\int_A^B v_n dl=\int_A^B[v_x\cos(n,x)+v_y\cos(n,y)]dl=\int_A^B[v_x\frac{dy}{dl}+v_y(-\frac{dx}{dl})]dl=\int_A^B(v_x dy-v_y dx)=\psi_B-\psi_A$$

③ 在平面势流流动中，流函数满足二维拉普拉斯方程（无旋流动可得）

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=0$$

6.2 流函数与速度势 - 流函数

例题2：已知不可压缩平面流动速度场$u=-2x^2-4x+2y^2, v=4xy+4y$,试确定流动是否连续？是否有旋？求速度势函数和流函数？

SEU

6.2 流函数与速度势 - 流函数

例题2：已知不可压缩平面流动速度场$u = -2x^2 - 4x + 2y^2, v = 4xy + 4y$,试确定流动是否连续？是否有旋？求速度势函数和流函数？

$$\varphi = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2y^2x + 2y^2 + C_1 \qquad \psi = -2x^2y - 4xy + \frac{2}{3}y^3 + C_2$$

请问点1(0, 0)，与点2（1, 2）处速度各是多少？

本章习题

6-2 速度环量

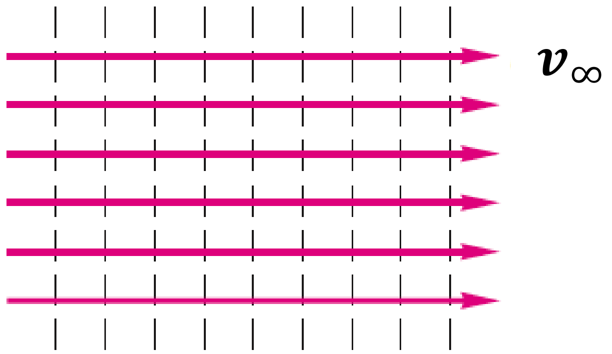
6-6 速度-势函数-流函数

6-7 速度-势函数-流函数

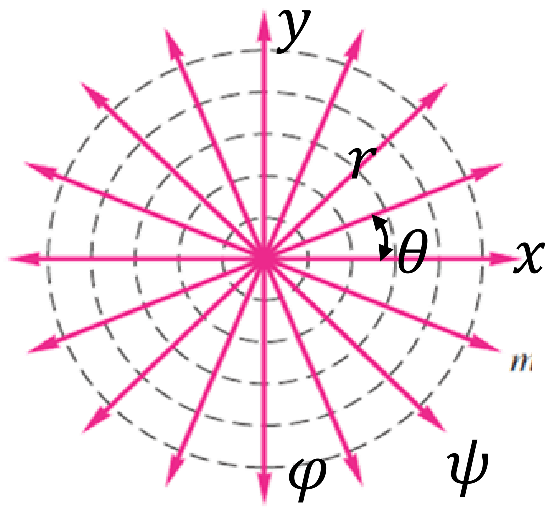
6-8 速度-势函数-流函数-伯努利方程

6.3 基本平面势流

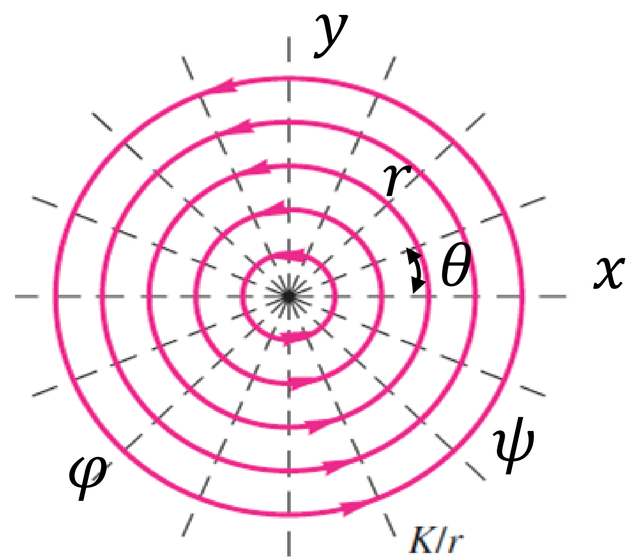
均匀流



点源（点汇）



点涡



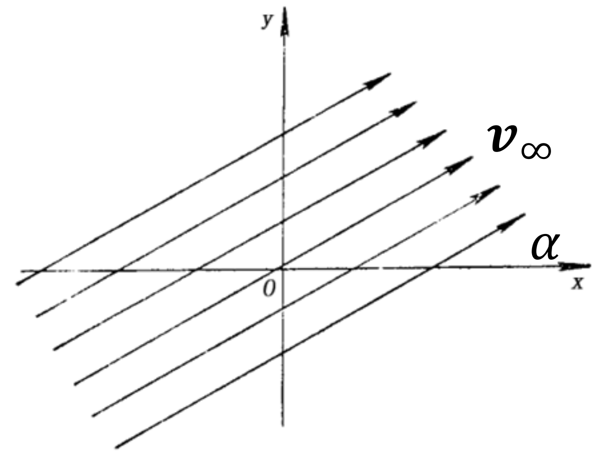
目的：通过基本平面势流的组合，获得复杂平面势流的流动关系

6.3 基本平面势流

均匀流

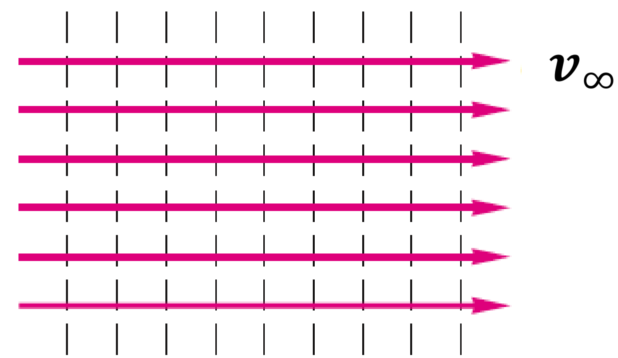
➢ 流体做等速直线运动，流场中各点速度的大小和方向都相同的流动成为均匀流

$$\begin{cases} u = v_\infty cos\alpha \\ v = v_\infty sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = v_\infty(xcos\alpha + ysin\alpha) \\ \psi = v_\infty(ycos\alpha - xsin\alpha) \end{cases}$$



若等速均匀流平行于x轴

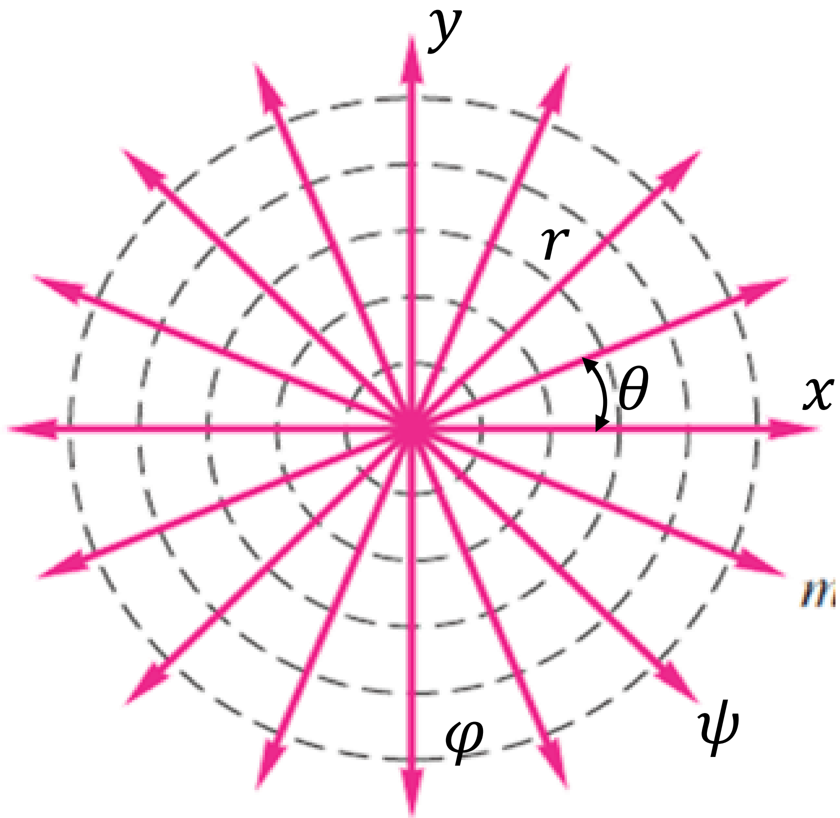
$$\begin{cases} v_x = v_\infty \\ v_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = v_\infty x \\ \psi = v_\infty y \end{cases}$$



6.3 基本平面势流

点源和点汇

- 源可以有正负。
- 正源是从流场上某一点有一定的流量向四面八方流开去的一种流动。
- 负源（又名汇）是一种与正源流向相反的向心流动。



6.3 基本平面势流

点源和点汇

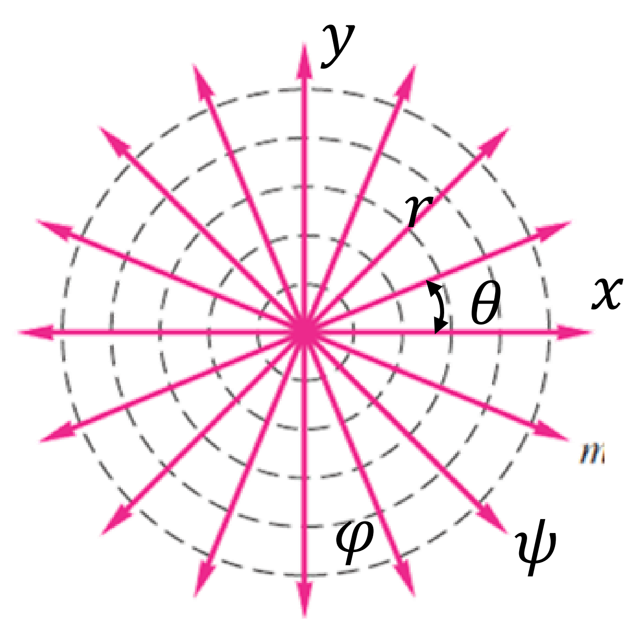
- 源可以有正负。
- 正源是从流场上某一点有一定的流量向四面八方流开去的一种流动。
- 负源（又名汇）是一种与正源流向相反的向心流动。

设源点或汇点位于坐标原点，则仅存在径向速度u_r，无切向速度u_θ，流量为：

$$Q = 2\pi r u_r \quad \Rightarrow \quad u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$$

势函数 $$\varphi = \int u_r dr + u_\theta r d\theta = \int \frac{Q}{2\pi r} dr = \frac{Q}{2\pi} Inr = \frac{Q}{2\pi} In\sqrt{x^2+y^2}$$

流函数 $$\psi = \int u_r r d\theta - u_\theta dr = \int \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2\pi} arctan\frac{y}{x}$$



6.3 基本平面势流

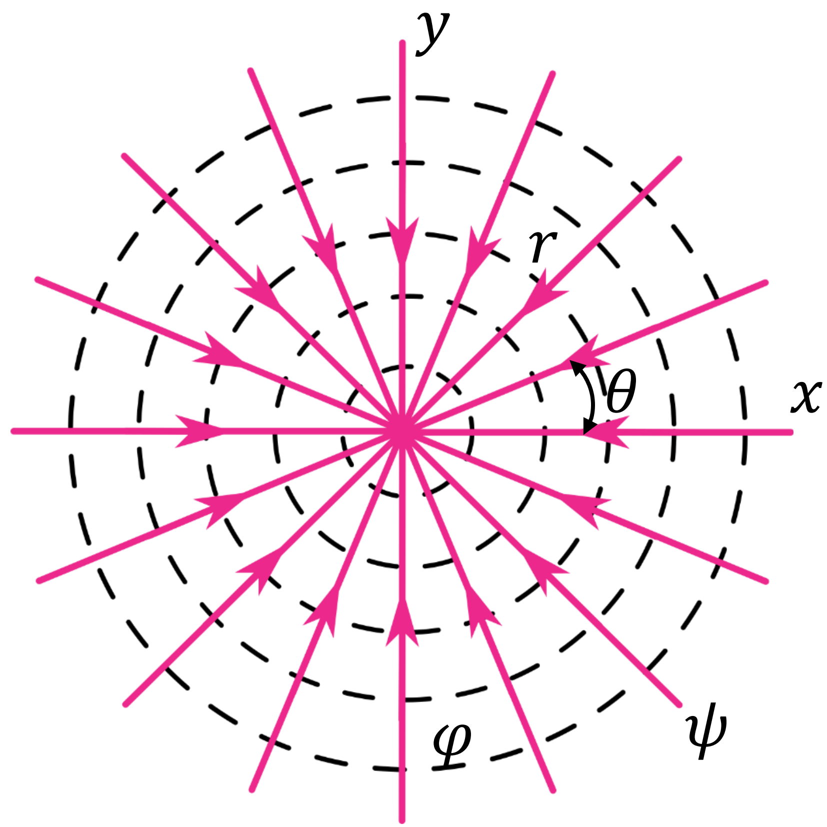
点源和点汇

➢ 流体从四周沿径向均匀流入一点（汇点）成为点汇，流入汇点的流量：

$$-Q = 2\pi r u_r \quad \Rightarrow \quad u_r = \frac{-Q}{2\pi r} \qquad u_\theta = 0$$

势函数 $\varphi = -\frac{Q}{2\pi} In r = -\frac{Q}{2\pi} In\sqrt{x^2+y^2}$

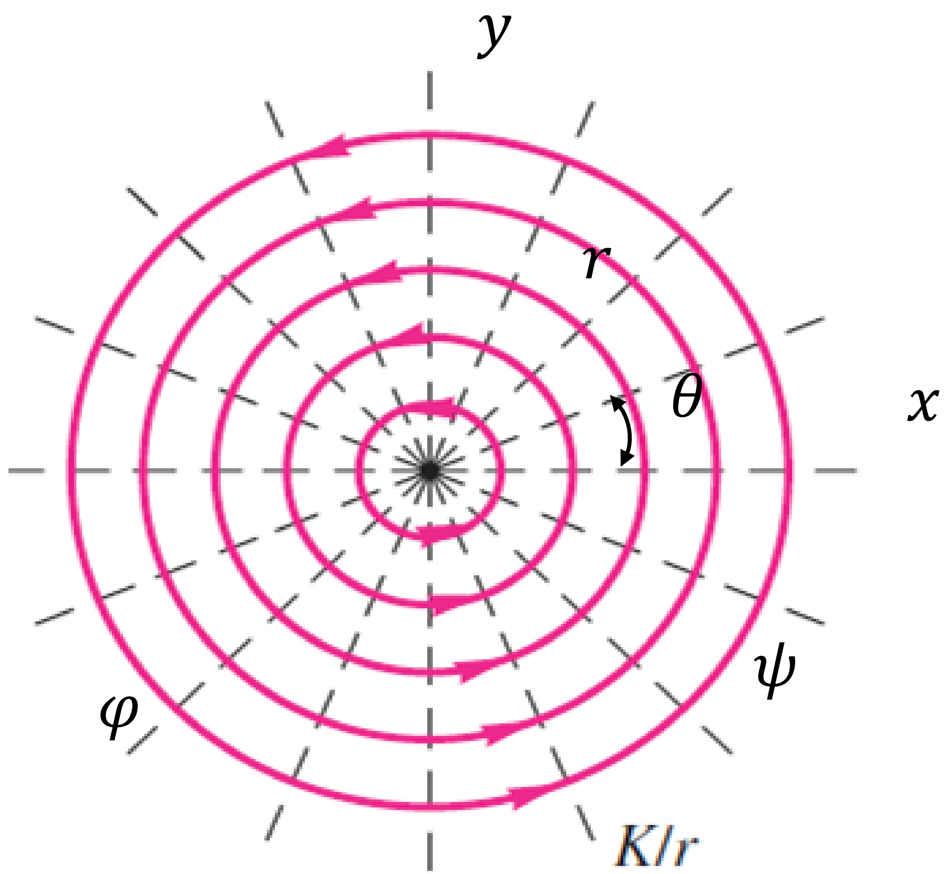
流函数 $\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta = -\frac{Q}{2\pi} arctan\frac{y}{x}$



6.3 基本平面势流

点涡

- 流体质点沿着同心圆的轨迹运动，且其速度大小与向径r成反比的流动成为点涡。
- 设点涡处位于坐标原点，设点涡的强度为Γ，则任一半径r处流体的速度可由斯托克斯定理求得：

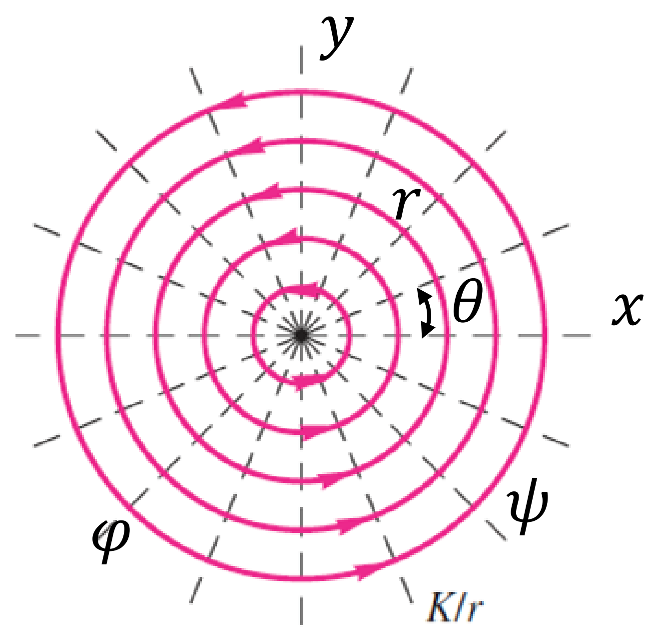


点涡

- 流体质点沿着同心圆的轨迹运动，且其速度大小与向径r成反比的流动成为点涡。
- 设点涡处位于坐标原点，设点涡的强度为Γ，则任一半径r处流体的速度可由斯托克斯定理求得：

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad u_r = 0$$

势函数 $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$ 　　流函数 $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} Inr$



环流是圆周运动，但却不是有旋运动

6.4 基本平面势流的简单叠加

点汇和点涡——螺旋流

波轮洗衣机

屋顶通风器

旋流除尘器

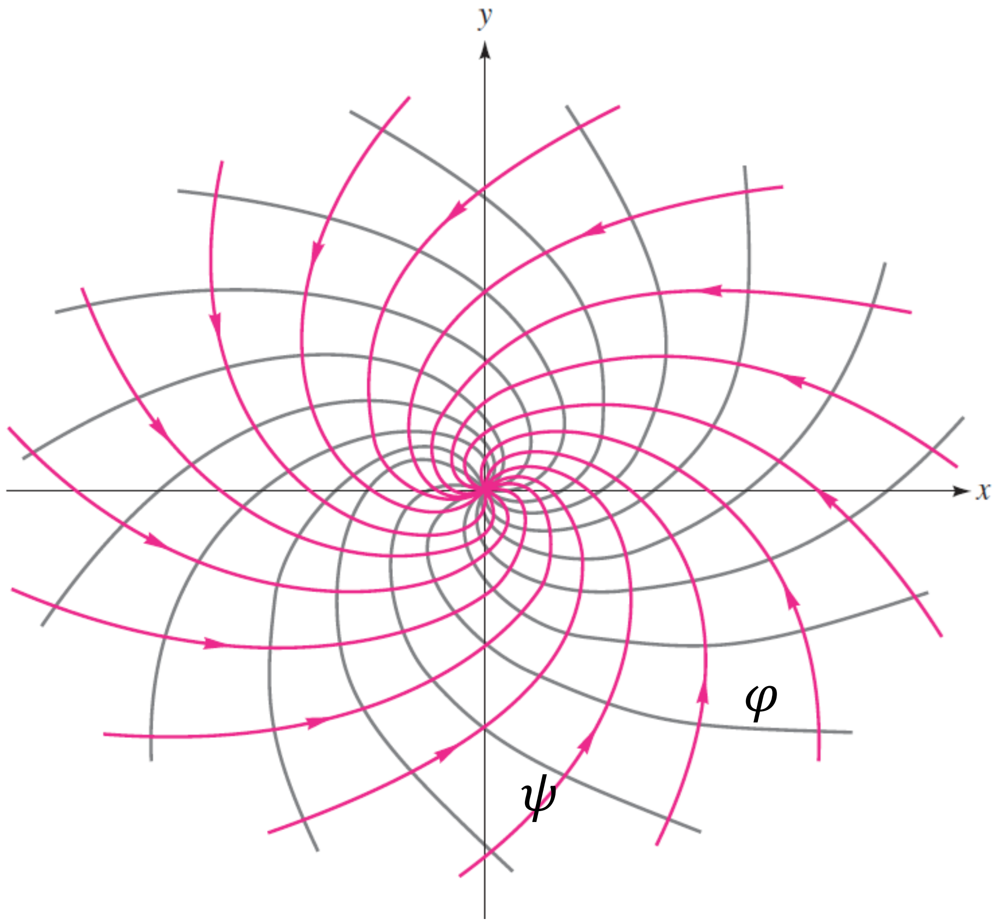
螺旋桨尾迹

水体中旋涡

6.4 基本平面势流的简单叠加

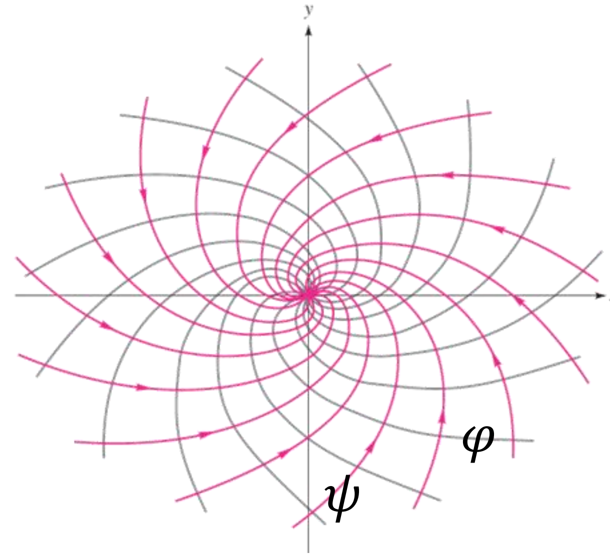
点汇和点涡——螺旋流

➢ 流体自外沿圆周切向进入，又从中央不断流出，这样的流动可以近似地看成是点汇和点涡的叠加。例如在旋风燃烧室、离心式喷油嘴和离心式除尘器等设备中。



8.4 基本平面势流的简单叠加

点汇和点涡——螺旋流



点汇 $u_r = \dfrac{-Q}{2\pi r}$ $u_\theta = 0$

点涡 $u_r = 0$ $u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

速度分量 $u_r = \dfrac{-Q}{2\pi r}$ $u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

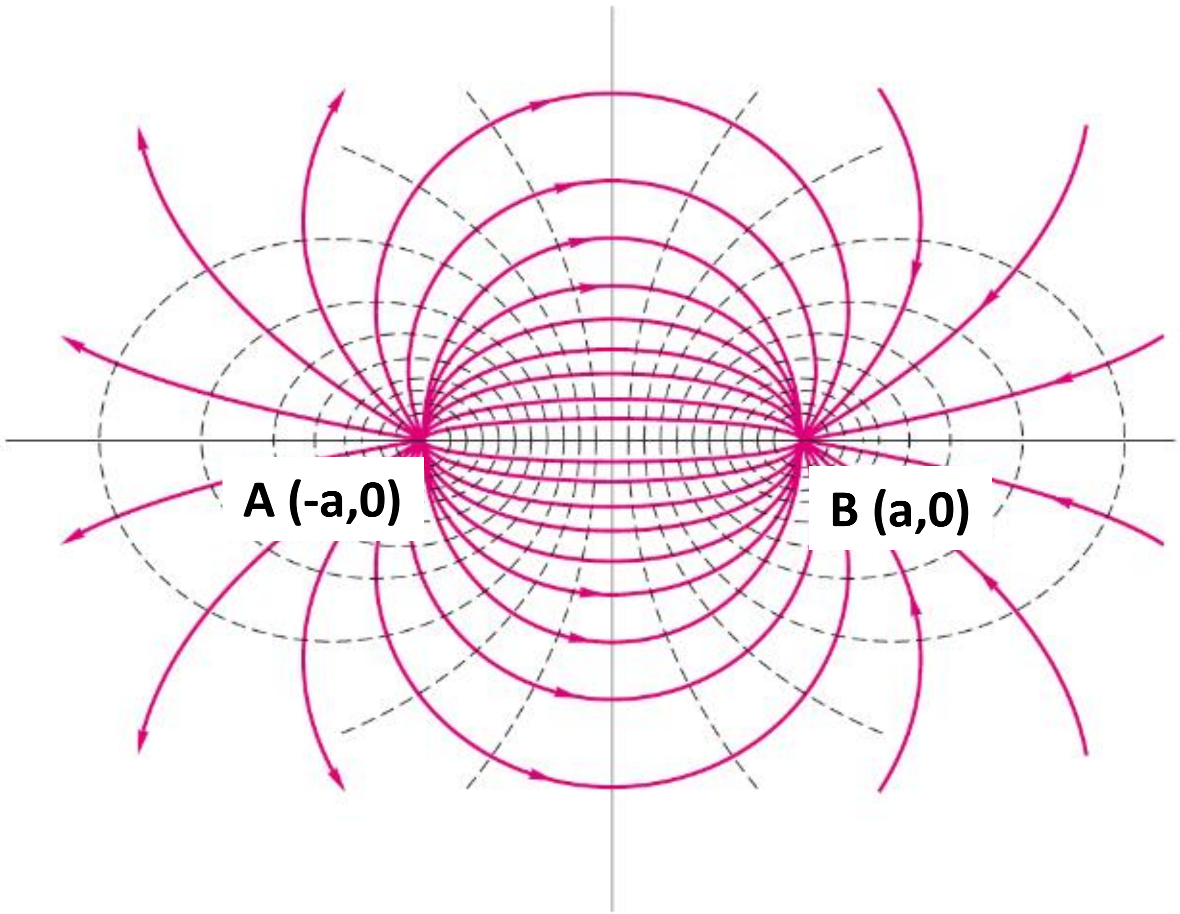
势函数 $$\varphi = \int u_r dr + u_\theta r d\theta = \frac{1}{2\pi}(\Gamma\theta - Q In r)$$

流函数 $$\psi = \int u_r r d\theta - u_\theta dr = \frac{1}{2\pi}(Q\theta + \Gamma In r)$$

6.4 基本平面势流的简单叠加

源和汇——偶极子流

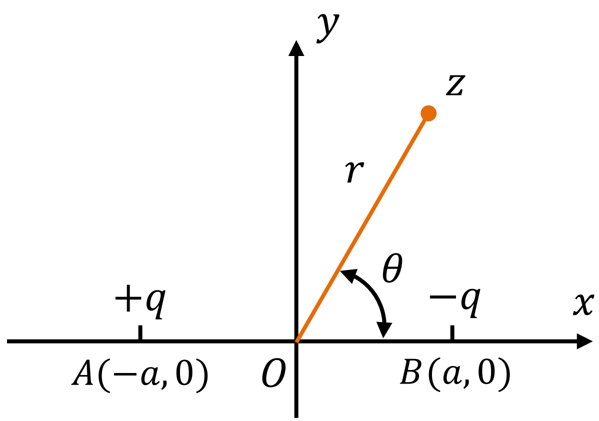
- 设源位于A点（-a,0），汇位于B点（a,0)



6.4 基本平面势流的简单叠加

源和汇——偶极子流

➢ 设源位于A点（-a,0），汇位于B点（a,0)



点源

势函数 $\varphi_A = \frac{Q}{2\pi} In\sqrt{x^2 + y^2}$

流函数 $\psi_A = \frac{Q}{2\pi} arctan\frac{y}{x}$

点汇

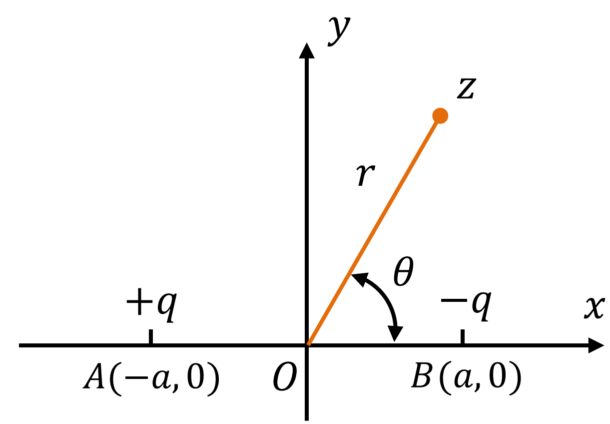
势函数 $\varphi_B = -\frac{Q}{2\pi} In\sqrt{x^2 + y^2}$

流函数 $\psi_B = -\frac{Q}{2\pi} arctan\frac{y}{x}$

6.4 基本平面势流的简单叠加

源和汇——偶极子流

➢ 设源位于A点（-a,0），汇位于B点（a,0)



点源和点汇势函数分别为

$$\varphi_A = \frac{q_A}{2\pi} In\sqrt{(x+a)^2+y^2} \qquad \varphi_B = -\frac{q_B}{2\pi} In\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

叠加后势函数为

$$\varphi = \varphi_A + \varphi_B = \frac{q_A}{2\pi} In\sqrt{(x+a)^2+y^2} - \frac{q_B}{2\pi} In\sqrt{(x-a)^2+y^2} = \frac{q}{4\pi} In\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

偶极矩为常数 $M = \lim\limits_{\substack{2a\to 0\\ q\to\infty}} 2aq$ 汇将源中流出的流体全部吸掉而不发生任何流动

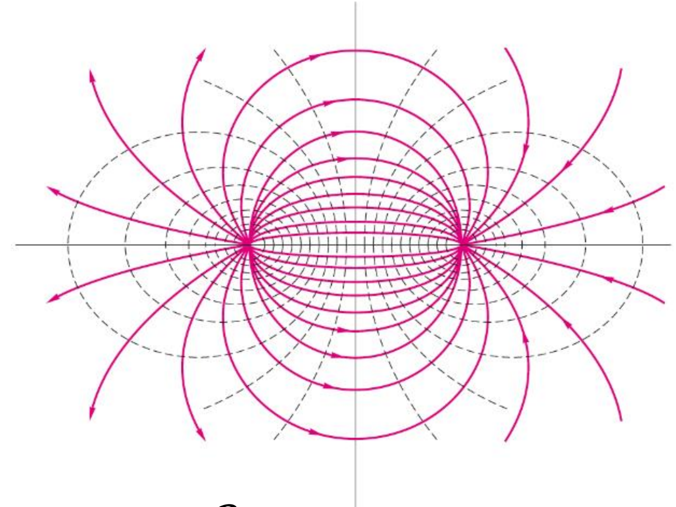
当源汇强度一样且无限靠近

$$\varphi = \lim_{\substack{2a\to 0\\ q\to\infty}} \frac{q}{4\pi} In\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = \lim_{\substack{2a\to 0\\ q\to\infty}} \frac{q}{4\pi} In\left(1+\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}\right) = \frac{q}{4\pi}\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}$$

$$\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

6.4 基本平面势流的简单叠加

源和汇——偶极子流



- 设源位于A点（-a,0），汇位于B点（a,0)

流函数

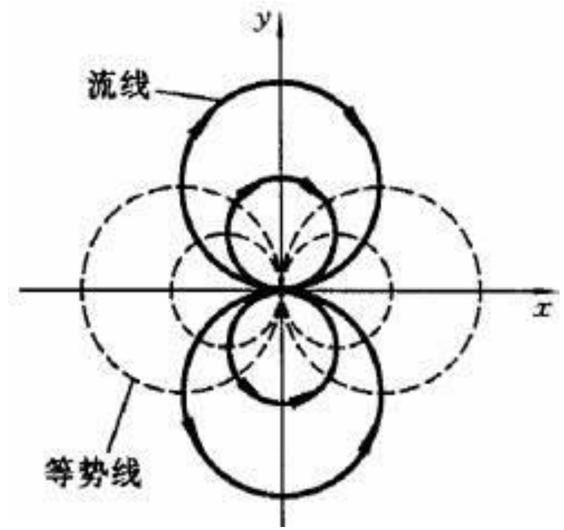
$$\psi = \frac{Q}{2\pi} arctan \frac{y}{x+a} - \frac{Q}{2\pi} arctan \frac{y}{x-a} = -\frac{Q}{2\pi} arctan \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

$$\psi = \lim_{\substack{2a\to 0\\ q\to\infty}} -\frac{Q}{2\pi} arctan \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} = \lim_{\substack{2a\to 0\\ q\to\infty}} -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

等势线

$$(x-\frac{M}{4\pi C_1})^2+y^2 = (\frac{M}{4\pi C_1})^2$$

一簇圆心在x轴上与y轴在原点相切的圆



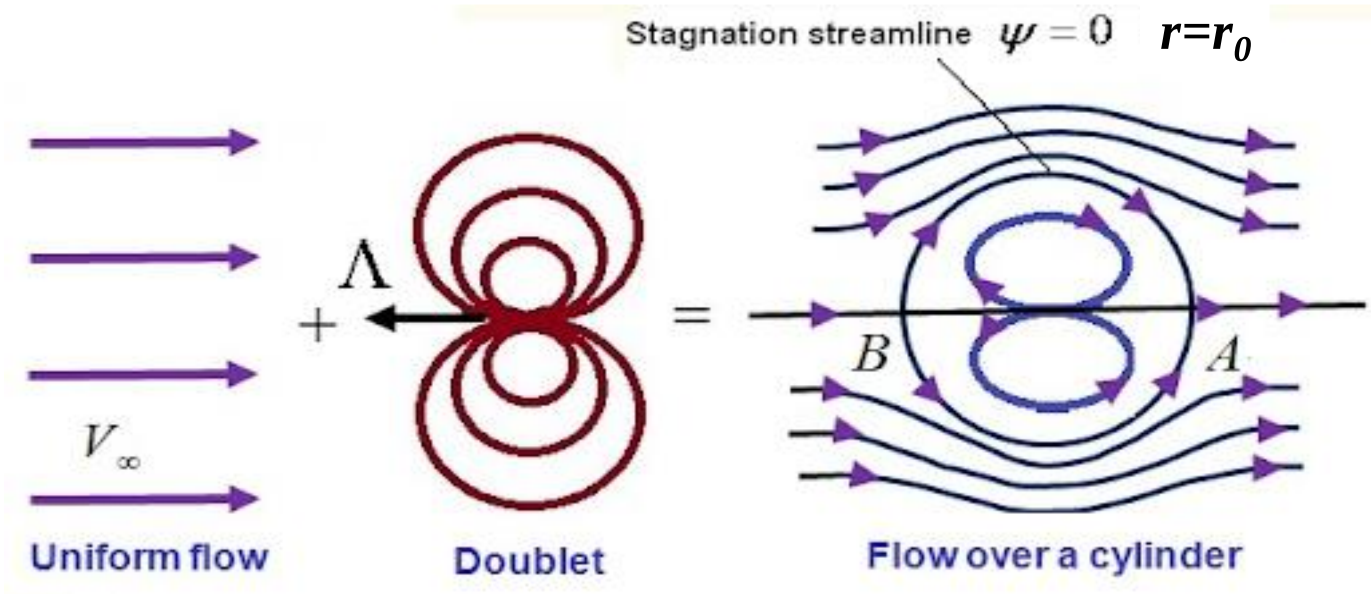
流线

$$x^2+\left(y+\frac{M}{4\pi C_2}\right)^2 = (\frac{M}{4\pi C_2})^2$$

一簇圆心在y轴上与x轴在原点相切的圆

6.5 平行绕流圆柱体的流动

圆柱体无环量绕流



均匀流和偶极子势函数叠加为

均匀流：

势函数 $\varphi_A = V_\infty x$

流函数 $\psi_A = V_\infty y$

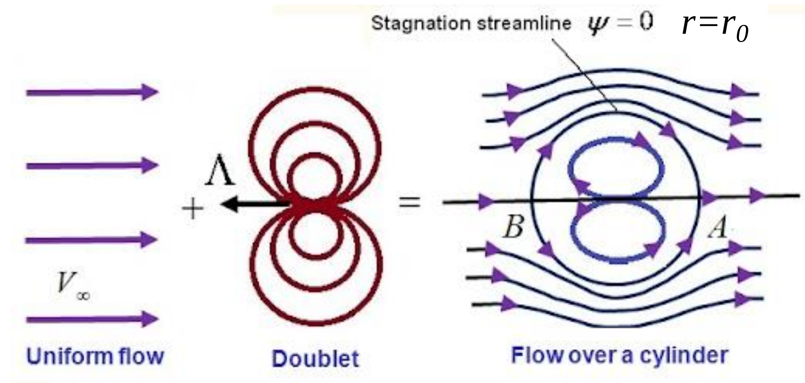
偶极子：

势函数 $\varphi_B = \dfrac{M}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2}$

流函数 $\psi_B = -\dfrac{M}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

6.5 平行绕流圆柱体的流动

圆柱体无环量绕流



均匀流和偶极子势函数叠加为 $$\varphi=\varphi_A+\varphi_B=V_\infty x+\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

流函数 $$\psi=\psi_A+\psi_B=V_\infty y-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

零流线 $$\psi=V_\infty y-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=0$$

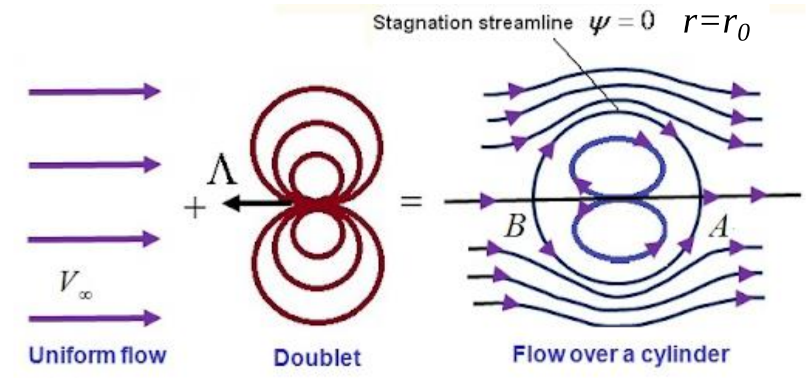
$$\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2=\dfrac{M}{2\pi V_\infty}=r_0^2 \end{cases}$$

$$\boxed{M=2\pi V_\infty r_0^2}$$

势函数改写为 $$\varphi=v_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\theta$$

流函数改写为 $$\psi=v_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta$$

6.5 平行绕流圆柱体的流动



圆柱体无环量绕流

速度分布

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty\left(1 - \dfrac{r_0^2}{r^2}\right)cos\theta \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty\left(1 + \dfrac{r_0^2}{r^2}\right)sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{当}r \to \infty\text{时} \quad v_r = v_\infty cos\theta, v_\theta = -v_\infty sin\theta \\ \text{当}r = r_0\text{时} \quad v_r = 0, v_\theta = -2v_\infty sin\theta \end{cases}$$

无穷远处为均匀流

圆柱面只有切速度

圆柱表面压强分布　由伯努利方程计算

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{v_\infty^2}{2} \Rightarrow p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2(1 - 4sin^2\theta)$$

代入圆柱表面速度

压强系数

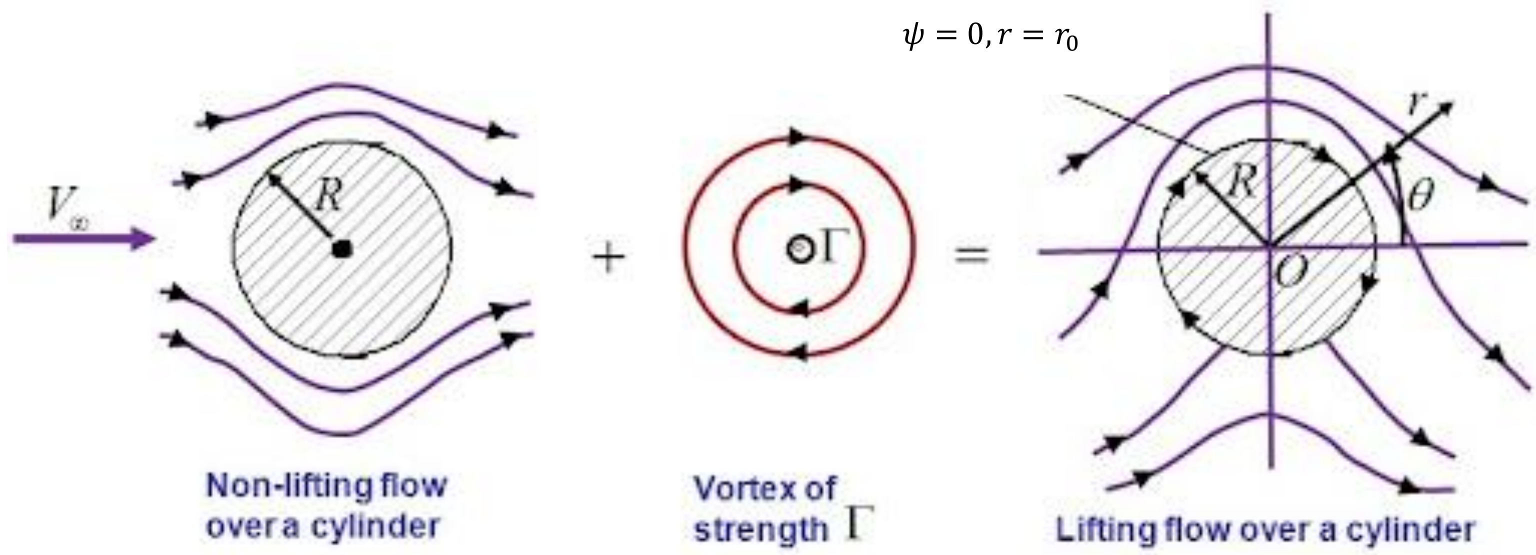
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = 1 - 4sin^2\theta$$

圆柱面量纲一的压强系数与半径、无穷远处速度和压强均无关

6.5 平行绕流圆柱体的流动

圆柱体有环量绕流

➤ 让圆柱体以等角速度 ω 绕起轴心顺时针旋转，成为均匀流、偶极子流和点涡叠加。



圆柱无环量扰流：

势函数 $$\varphi = v_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)rcos\theta$$

流函数 $$\psi = v_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)rsin\theta$$

点涡：

势函数 $$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

流函数 $$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}Inr$$

6.5 平行绕流圆柱体的流动

圆柱体有环量绕流

➢ 让圆柱体以等角速度 ω 绕起轴心顺时针旋转，成为均匀流、偶极子流和点涡叠加。

势函数 $$\varphi = v_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)rcos\theta+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

流函数 $$\psi = v_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)rcos\theta-\frac{\Gamma}{2\pi}Inr$$

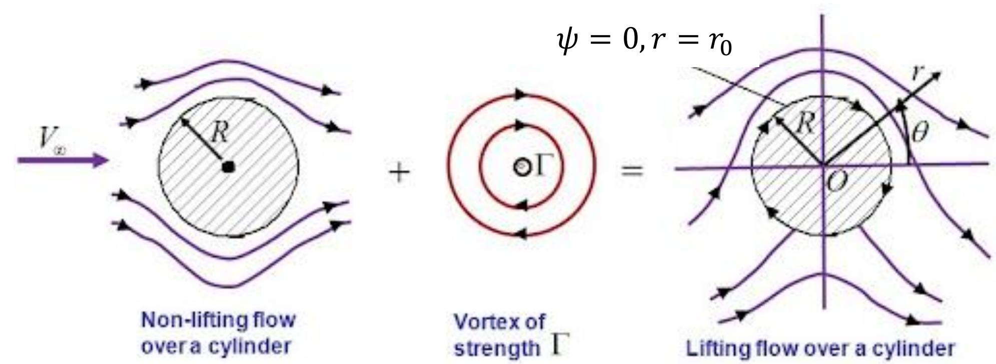
势函数 $$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

流函数 $$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}Inr$$

速度分布 $V(r,\theta)$

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)cos\theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -v_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r}$$



当r=r_0时 $$v_r = 0$$

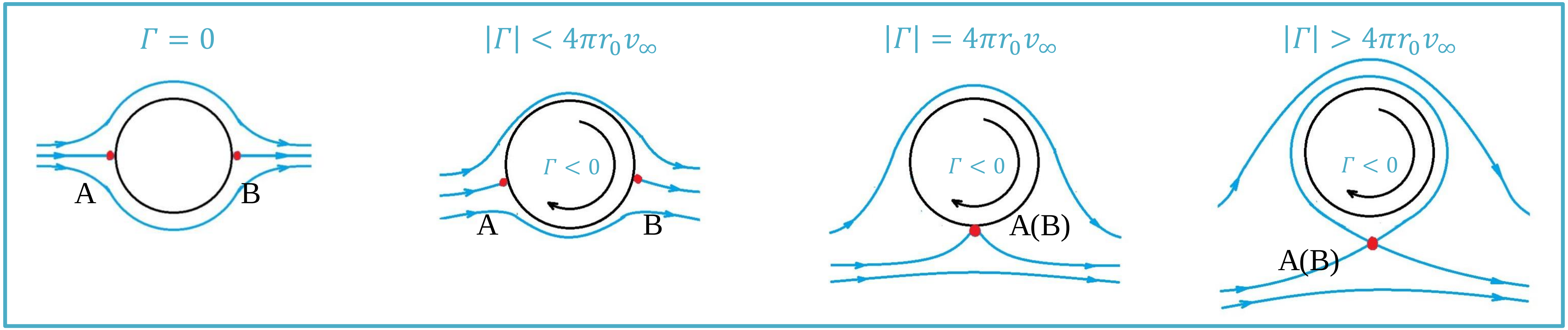
$$v_\theta = -2v_\infty sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

6.5 平行绕流圆柱体的流动

圆柱体有环量绕流

当$r=r_0$时 $\quad v_r = 0 \quad v_\theta = -2v_\infty sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$

驻点的位置 $\quad$ 令 $v_\theta = 0 \quad sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty}$



圆柱体表面压强分布 $\quad p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[v_\infty^2 - (2v_\infty sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0})^2\right]$

代入圆柱表面速度

本章习题

6-9 势流叠加

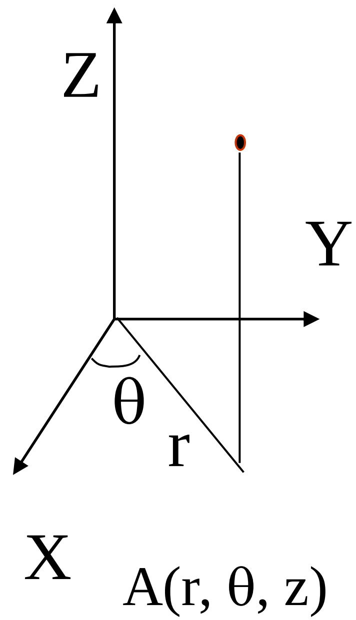
附录

1. 柱坐标与直角坐标
2. 球坐标与直角坐标

附1：柱坐标与直角坐标

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_r=\cos\theta\,u+\sin\theta\,v \\ u_\theta=-\sin\theta\,u+\cos\theta\,v \\ u_z=w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$\phi=\phi(r,\theta,z)=\phi(x,y,z)$$

$$r=r(x,y),\ \ \theta=\theta(x,y),\ \ z=z$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}=u_r\vec{e}_r+u_\theta\vec{e}_\theta+u_z\vec{e}_z$$

$$u_r=u\vec{i}\cdot\vec{e}_r+v\vec{j}\cdot\vec{e}_r+w\vec{k}\cdot\vec{e}_r=\cos\theta\,u+\sin\theta\,v$$

$$u_\theta=u\vec{i}\cdot\vec{e}_\theta+v\vec{j}\cdot\vec{e}_\theta+w\vec{k}\cdot\vec{e}_\theta=-\sin\theta\,u+\cos\theta\,v$$

$$u_z=u\vec{i}\cdot\vec{e}_z+v\vec{j}\cdot\vec{e}_z+w\vec{k}\cdot\vec{e}_z=w$$

附1：柱坐标与直角坐标

$$\vec{u}\cdot\nabla = u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=u\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+v\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=(\cos\theta\ u+\sin\theta\ v)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}(-\sin\theta\ u+\cos\theta\ v)\frac{\partial}{\partial\theta}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=u_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_r=\cos\theta\, u+\sin\theta\, v\\ u_\theta=-\sin\theta\, u+\cos\theta\, v\\ u_z=w\end{cases}$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial}{\partial z}$$

附1：柱坐标与直角坐标

$$
\begin{aligned}
\left[(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right]_r &= \cos\theta\ (\vec{u}\cdot\nabla)u+\sin\theta\ (\vec{u}\cdot\nabla)v \\
&= \cos\theta\left(u_r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\sin\theta\ \left(u_r\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
&= u_r\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{u_\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) \\
&\quad +u_z\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
&= u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\ u+\sin\theta\ v\right)+\frac{u_\theta}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\ u+\sin\theta\ v)-(-\sin\theta\ u+\cos\theta\ v)\right] \\
&\quad +u_z\frac{\partial}{\partial z}(\cos\theta\ u+\sin\theta\ v) \\
&= u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right)+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} \\
&= u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\
\dfrac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\
\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
u_r=\cos\theta\, u+\sin\theta\, v \\
u_\theta=-\sin\theta\, u+\cos\theta\, v \\
u_z=w
\end{cases}
$$

附2：球坐标与直角坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \mathrm{arc\ \ tg}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{z}} \\ \phi = \mathrm{arc\ \ tg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_r = \sin\theta\cos\phi\, u + \sin\theta\sin\phi\, v + \cos\theta\, w \\ u_\theta = \cos\theta\cos\phi\, u + \cos\theta\sin\phi\, v + (-\sin\theta)\, w \\ u_\phi = -\sin\phi\, u + \cos\phi\, v \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{-\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Thanks!