

# Engineering Fluid Mechanics

## 工程流体力学

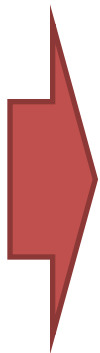
### 第2章 流体静力学

教学团队：严 岩  
韩 煜  
吴 泽  
李 晓  
莫景文  
孙东科



东南大学机械工程学院  
2023/3/9

# 主要内容



2.1 作用在流体上的力

2.2 流体平衡微分方程

2.3 流体静力学的基本方程式

2.4 液柱式测压计

2.5 液体在非惯性系中的相对平衡

2.6 静止流体对壁面的压力

# 研究对象

- 流体静力学研究流体处于**静止或相对静止**时的规律及其应用。
- 静止或相对静止时，流体之间没有相对运动，**黏性作用表现不出来**，因此理想流体和实际流体具有同样的物理规律。

## 2.1 作用在流体表面上的力

两类作用在流体上的力：表面力和质量力

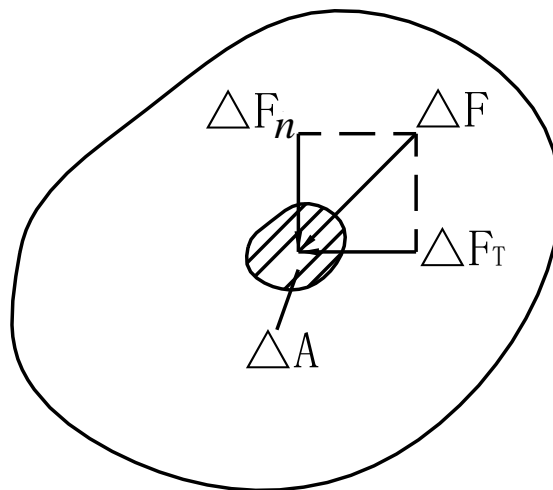
### 一、表面力

作用在所研究的流体微团表面上的力，它是由与流体相接触的其他物体（流体或固体）的作用产生的

#### 1. 应力

单位面积上的表面力

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$



#### 2. 正应力和切应力

$$\vec{p}_{nn} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

$$\vec{p}_{n\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_\tau}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_\tau}{dA}$$

## 2.1 作用在流体表面上的力

正应力：拉应力与压应力  
流体压强—法向压应力

切应力：流体黏性引起的内摩擦力就是切应力

## 二、质量力（体积力）

作用在每个流体微团上的力，其大小与流体质量成正比  
例如：重力、惯性力、磁力

单位质量力  $\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$

## 三、流体静压强

流体处于绝对静止或相对静止时的压强

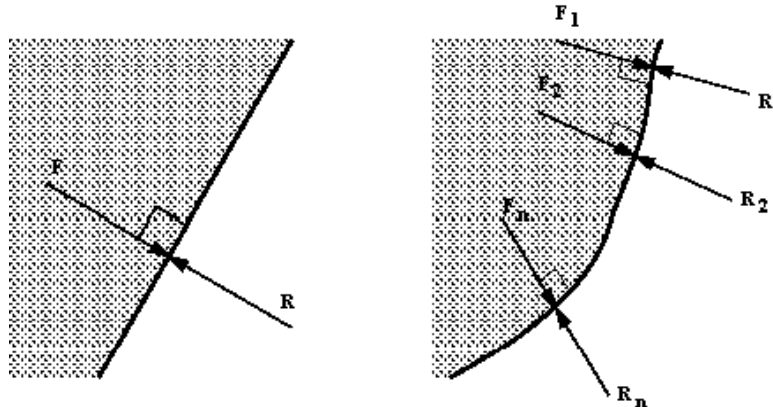
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

## 2.1 作用在流体表面上的力

### 流体静压强的两个特性

#### 1. 方向性

流体静压力的方向总是沿着作用面的内法线方向



原因: (1) 静止流体不能承受剪力, 即  $\tau = 0$ ,

故  $p$  垂直受压面;

(2) 因流体几乎不能承受拉力, 故  $p$  指向受压面

## 2.1 作用在流体表面上的力

## 微元体分析法

### 2. 大小性

流体静压力与作用面在空间的方位无关，

仅是该点坐标的函数

$$p_x \cdot \frac{1}{2} dydz - p_n \cdot dA \cos(n, x) + f_x \cdot \rho \frac{1}{6} dx dy dz = 0$$

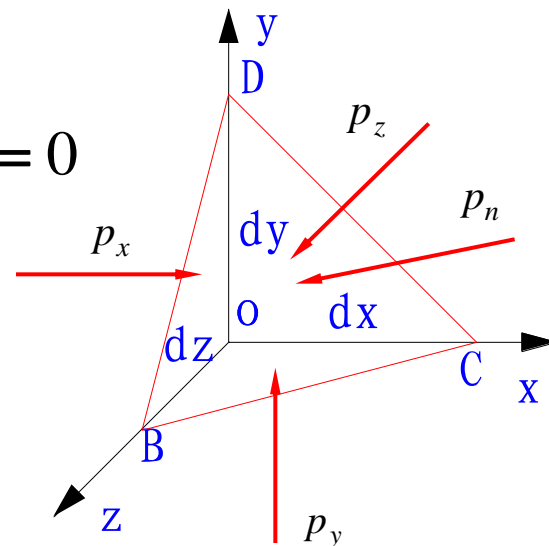
$$\Downarrow$$
$$p_x - p_n + f_x \cdot \rho \frac{1}{3} dx = 0$$

$$\begin{cases} p_x - p_n + f_x \cdot \rho \frac{1}{3} dx = 0 \\ p_y - p_n + f_y \cdot \rho \frac{1}{3} dx = 0 \\ p_z - p_n + f_z \cdot \rho \frac{1}{3} dx = 0 \end{cases}$$

略去无穷小项



$$p_x = p_y = p_z = p_n$$



## 2.2 流体平衡微分方程式

### 一、平衡微分方程式

在静止流体中取如图所示微小六面体。

设其中心点 $a(x,y,z)$ 的密度为 $\rho$ ，压强为 $p$ ，所受质量力为 $f$ 。

以 $x$ 方向为例，列力平衡方程式

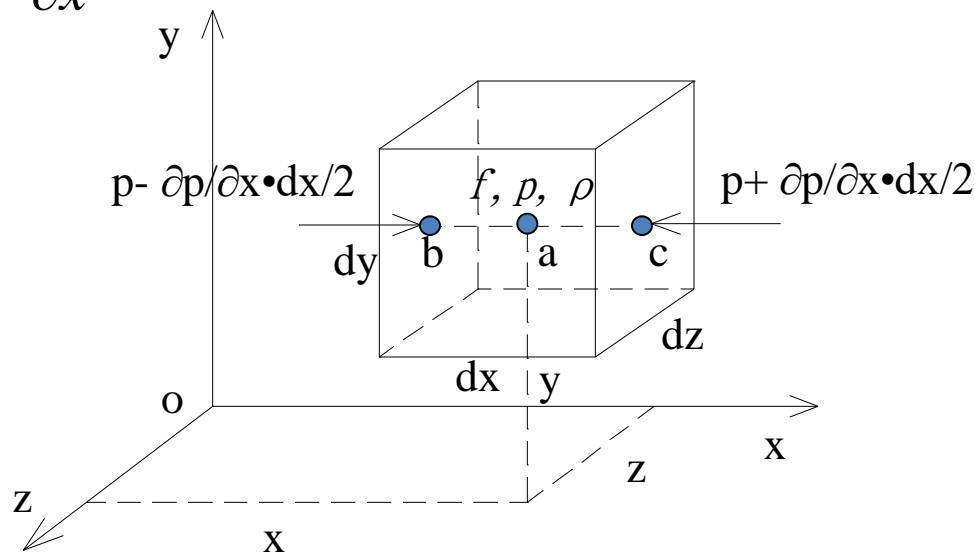
表面力: 
$$p_b dydz - p_c dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

质量力: 
$$f_x \cdot \rho dx dy dz$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\rho f_x dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0$$

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

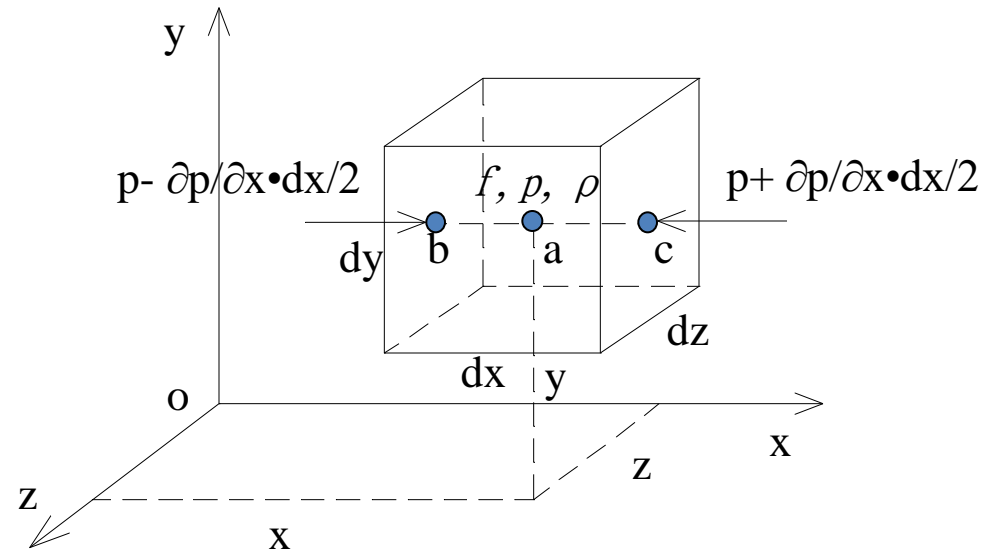




## 2.2 流体平衡微分方程式

同理，考虑y，z方向，可得：

$$\begin{cases} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$



上式即为**流体平衡微分方程**  
(欧拉平衡微分方程)

矢量形式：  $\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p = 0$

**适用范围：**

所有静止流体或相对静止的流体。

## 2.2 流体平衡微分方程式

### 二、势函数

压强差公式

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$\begin{cases} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{cases} \Rightarrow dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

物理意义:

流体静压强的增量决定于质量力

不可压缩流体的压强差公式

$$\frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$\text{令 } f_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}, f_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y}, f_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z}$$

$$d(-\pi) = \frac{dp}{\rho} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$-\pi(x, y, z)$$

-- 势函数

## 2.2 流体平衡微分方程式

### 三、等压面

#### 1. 定义

流场中压强相等的各点组成的面  $dp = 0$

#### 2. 微分方程

$$\left. \begin{array}{l} dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \\ dp = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

或  $\vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$

#### 3. 性质

等压面恒与质量力正交

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{f} \perp d\vec{r}$$

## 2.3 流体静力学基本方程式

### 一、重力场中流体静力学基本方程式

#### 1. 基本方程式

◆ 作用在流体上的质量力只有重力

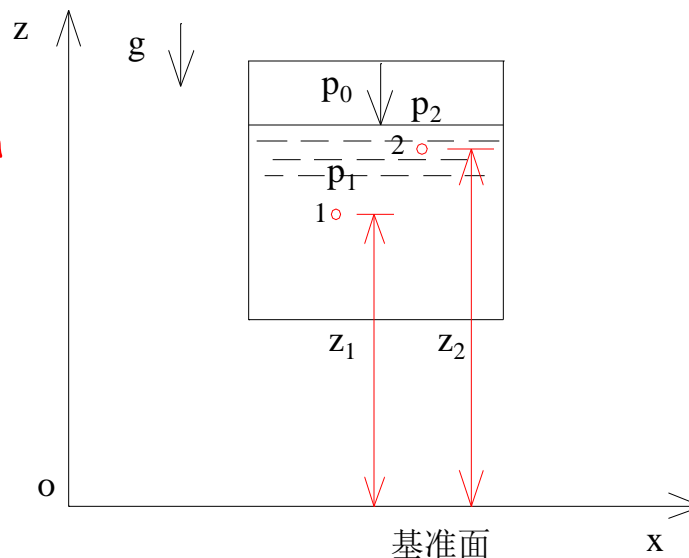
◆ 均匀的不可压缩流体

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = -g \end{cases} \Rightarrow dp = -\rho g dz \Rightarrow dz + \frac{dp}{\rho g} = 0$$

积分得:

$$z + \frac{p}{\rho g} = C$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$



## 2.3 流体静力学基本方程式

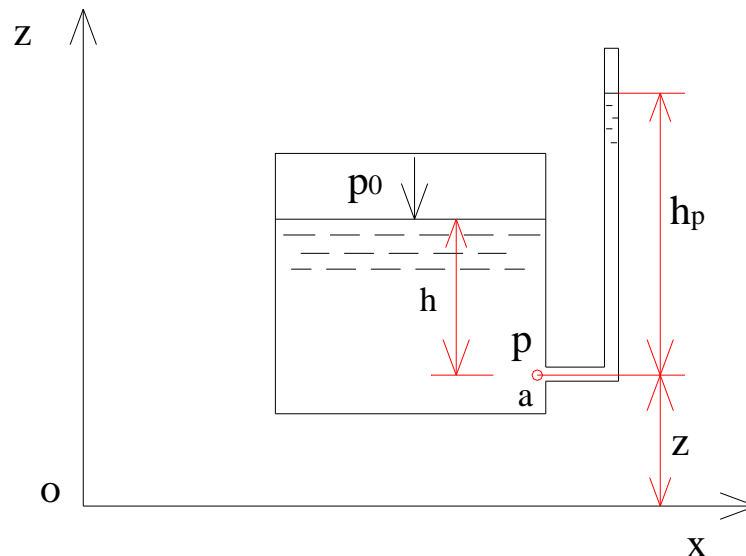
### 2. 物理意义

$$z + \frac{p}{\rho g} = C$$

↓                      ↓                      ↓

位势能                      压强势能                      总势能

$h_p$



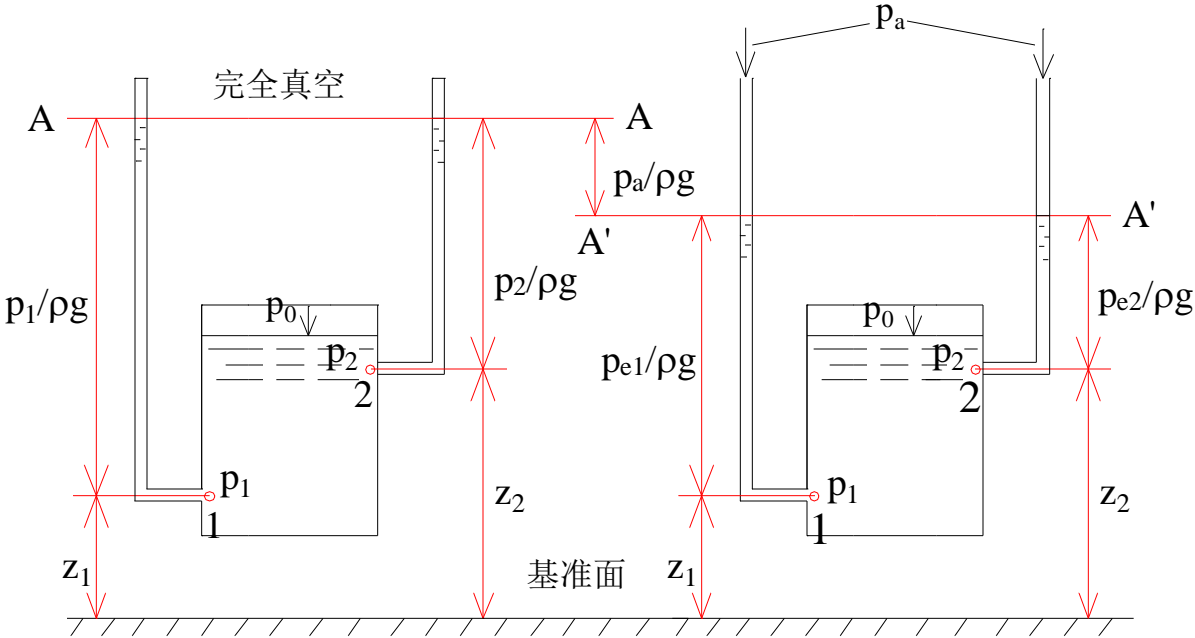
在重力作用下的连续均质不可压缩静止流体中，各点的单位重力流体的**总势能保持不变**。

# 2.3 流体静力学基本方程式

## 3. 几何意义

$$z + \frac{p}{\rho g} = C$$

位置水头  
压强水头  
静水头



在重力作用下的连续均质不可压缩静止流体中，静水头线为水平线

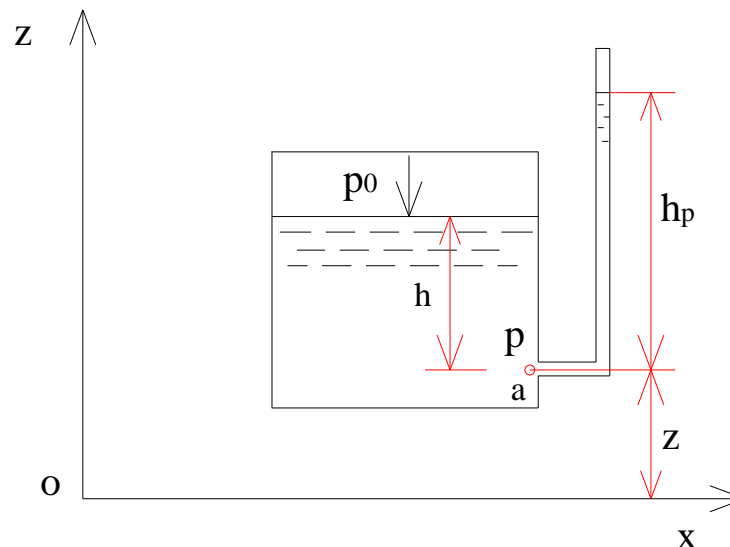
## 2.3 流体静力学基本方程式

### 4. 帕斯卡原理

a点压强:

$$z + \frac{p}{\rho g} = (z + h) + \frac{p_0}{\rho g}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$



在重力作用下不可压缩流体表面上的压强，将以同一数值沿各个方向传递到流体中的所有流体质点

## 2.3 流体静力学基本方程式

大气同温层中变密度气体的压强分布公式

同温层的海拔高度

11000—25000m

只有重力的质量力

$f_x=0, f_y=0, f_z=-g$

气体状态方程:  $p = \rho RT \implies \rho = p/(RT)$

$$f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \implies dp = \rho f_z dz = \frac{p}{RT} (-g) dz$$

$$\hookleftarrow \frac{dp}{p} = \frac{-g}{RT} dz \implies RT \frac{dp}{p} + g dz = 0$$

积分得:  $RT \ln p + gz = C$  ( $C$  为常数)



## 2.3 流体静力学基本方程式

若  $z=z_0$  时  $p=p_0$        $c = gz_0 + RT \ln p_0$

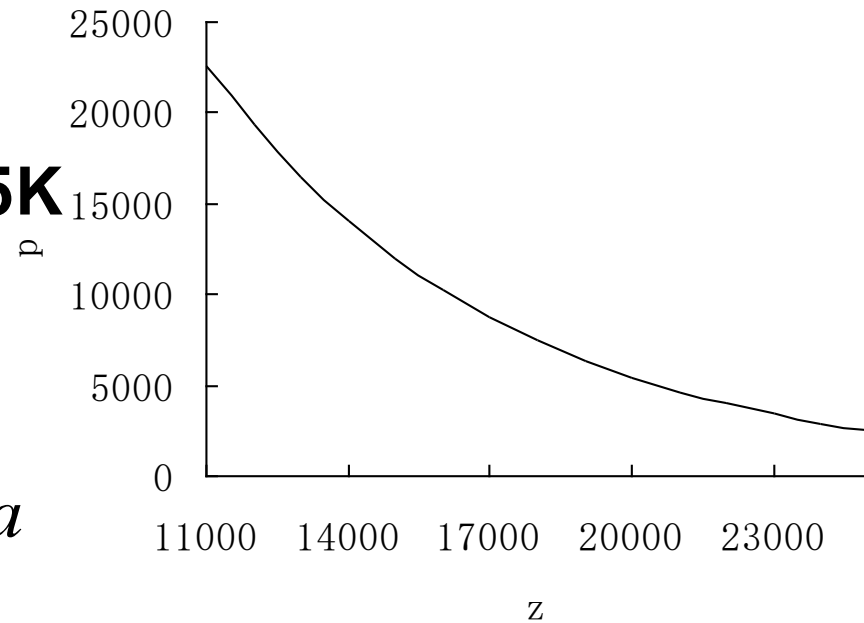
$\Rightarrow z - z_0 = \frac{RT}{g} \ln \frac{p_0}{p}$     或写成     $p = p_0 \exp\left(\frac{g(z_0 - z)}{RT}\right)$

同温层低层参数

$z_0=11000\text{m}, p_0=22604\text{Pa},$

$R=287\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}), T_c=216.5\text{K}$

$$p = 22604 \exp\left(\frac{11000 - z}{6334}\right) \text{Pa}$$



## 2.4 液柱式测压计

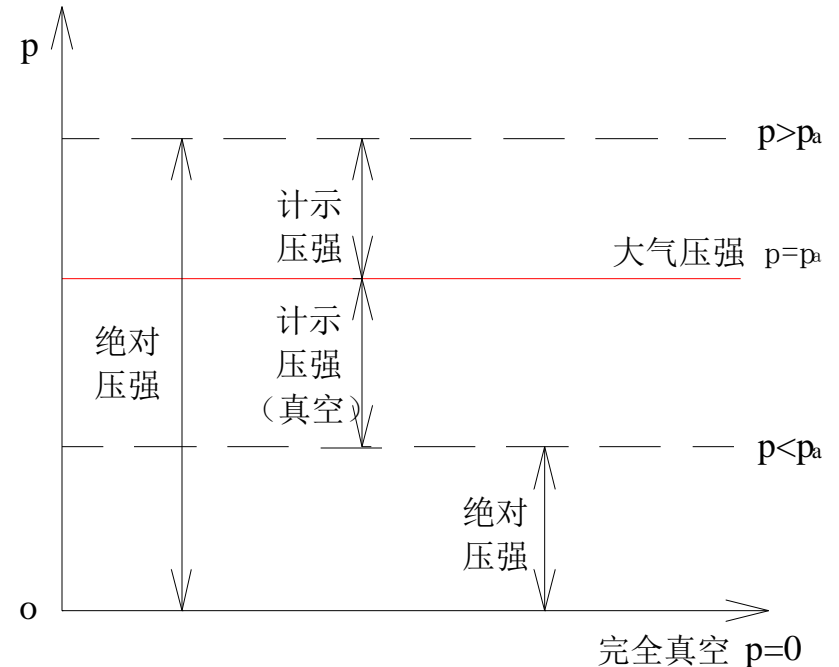
### 一、压强的计量

#### 1. 绝对压强

以完全真空为基准计量的压强

#### 2. 计示压强

以当地大气压强为基准计量的压强



相对压强:  $p > p_a$   $p_e = p - p_a$

真空(度):  $p < p_a$   $p_v = p_a - p$

## 2.4 液柱式测压计

### 二、液柱式测压计

#### 1. 测压管

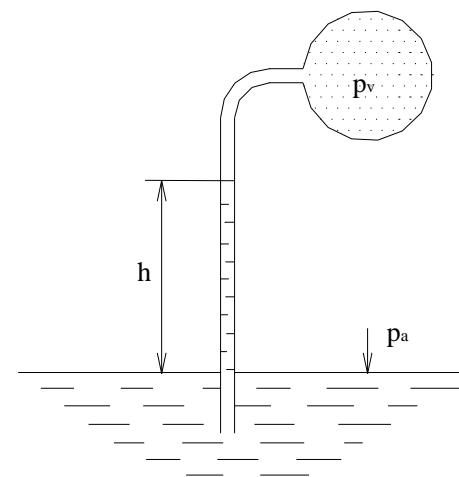
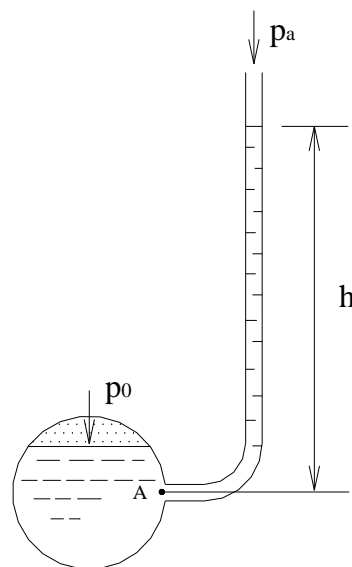
测压管是一根直径均匀的玻璃管，直接连在需要测量压强的容器上，以流体静力学基本方程式为理论依据

表压  $p_e = \rho gh$

真空  $p_v = \rho gh$

优点：结构简单

缺点：只能测量较小的压强



## 2.4 液柱式测压计

### 2. U形管测压计

$$p_1 = p + \rho gh_1$$

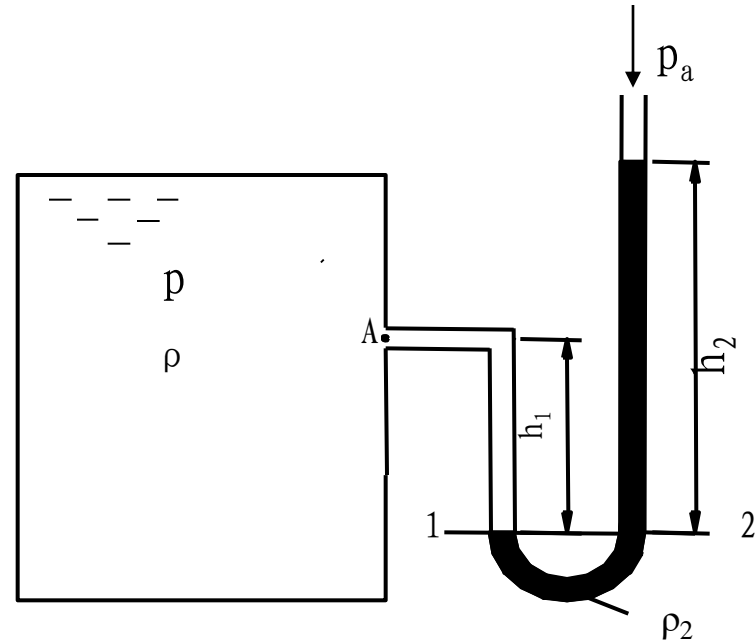
$$p_2 = p_a + \rho_2 gh_2$$

$$\Downarrow \quad p_1 = p_2$$

$$p = p_a + \rho_2 gh_2 - \rho gh_1$$

$$p_e = \rho_2 gh_2 - \rho gh_1$$

优点：可以测量较大的压强



## 2.4 液柱式测压计

### 3. U形管差压计

测量同一容器两个不同位置的压差或不同容器的压强差

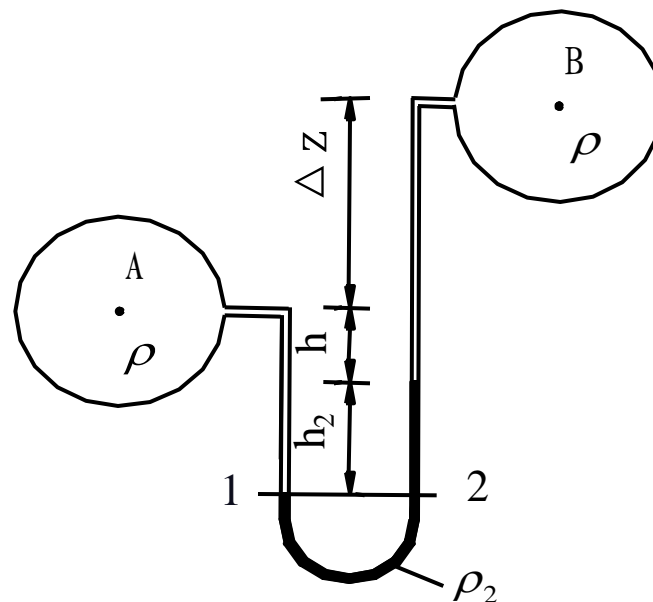
$$p_1 = p_A + \rho g(h + h_2)$$

$$p_2 = p_B + \rho g(h + \Delta z) + \rho_2 g h_2$$

$$\Downarrow p_1 = p_2$$

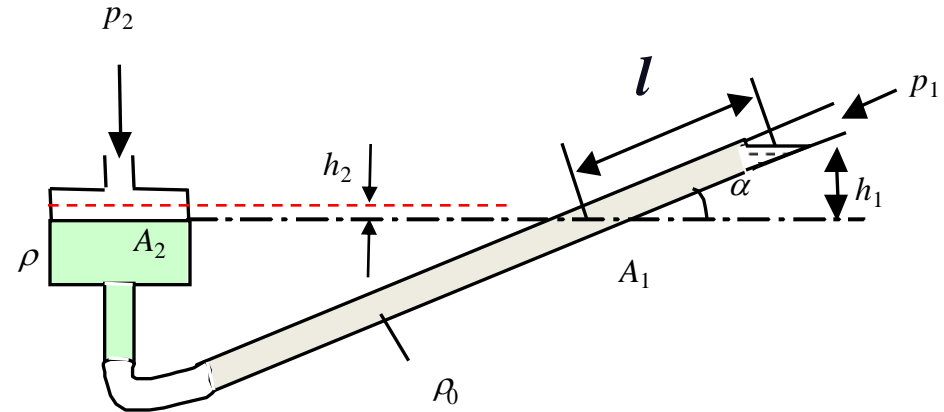
$$p_A + \rho g(h + h_2) = p_B + \rho g(h + \Delta z) + \rho_2 g h_2$$

$$p_A - p_B = \rho g(\Delta z - h_2) + \rho_2 g h_2 = \rho g \Delta z + \rho_2 g(h_2 - h)$$



## 2.4 液柱式测压计

### 4. 倾斜微压计



$$h_1 = l \sin \alpha$$

$$h_2 = l \frac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow \quad h = h_1 + h_2 = l \left( \sin \alpha + \frac{A_1}{A_2} \right)$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h = \rho g \left( \sin \alpha + \frac{A_1}{A_2} \right) l$$

优点：可以测量较小的压强

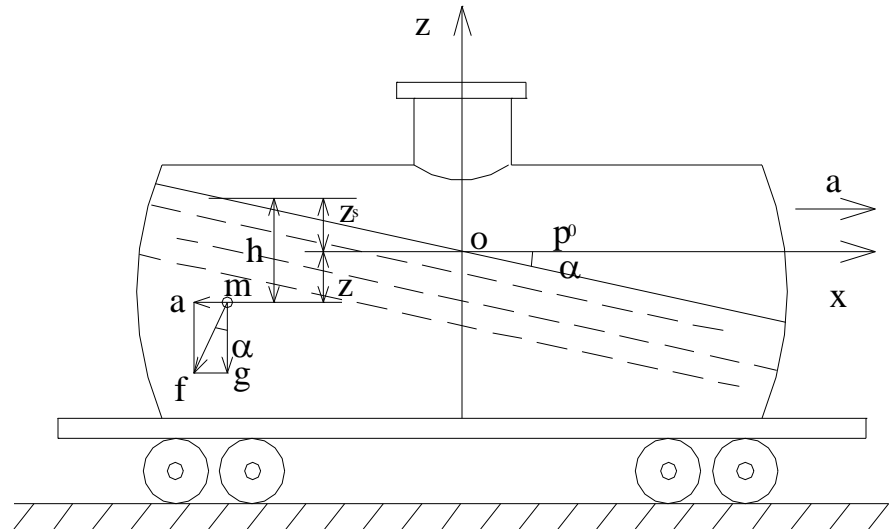
## 2.5 液体的相对平衡

流体相对于地球有相对运动，而流体微团及流体与容器壁之间没有相对运动。

### 一、等加速水平运动容器中液体的相对平衡

容器以等加速度 $a$ 向右作水平直线运动

$$\text{质量力} \quad \begin{cases} f_x = -a \\ f_y = 0 \\ f_z = -g \end{cases}$$



## 2.5 液体的相对平衡

质量力  $f_x = -a$     $f_y = 0$     $f_z = -g$

### 1. 等压面方程

$$dp = \rho(f_x dx + f_z dz) = \rho(-a dx - g dz) = 0$$

⇓ 积分

$$ax + gz = C$$

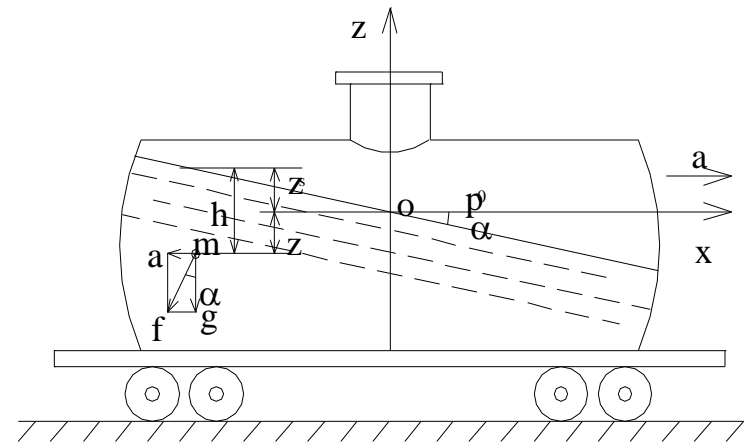
等压面是一簇平行的斜面

$$\alpha = -\arctg \frac{a}{g}$$

自由液面:  $x = 0$     $z = 0$     $C = 0$

⇓

$$ax + gz_s = 0$$





## 2.5 液体的相对平衡

### 2. 静压强分布规律

$$dp = \rho(f_x dx + f_z dz) = \rho(-ax - g dz) = 0$$

⇓ 积分

$$p = -\rho(ax + gz) + C$$

利用边界条件:

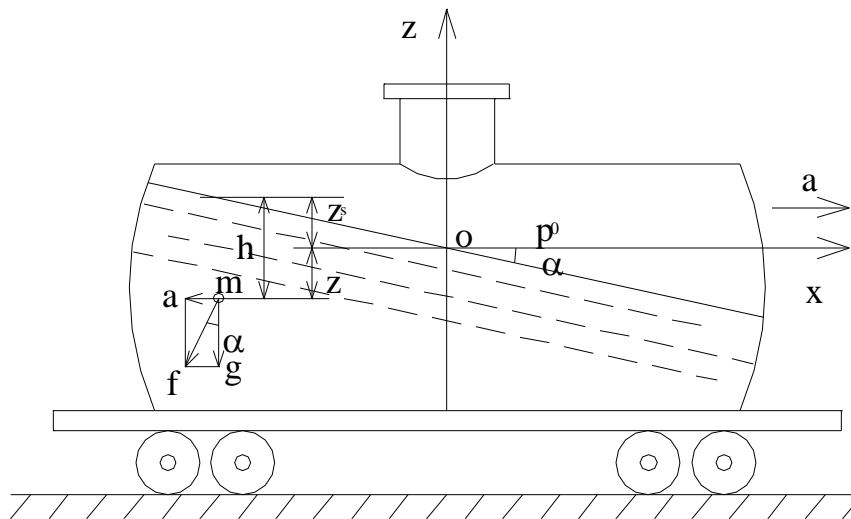
$$x=0 \quad z=0 \quad p=p_0$$

得:  $C = p_0$

$$p = p_0 - \rho(ax + gz)$$

⇓  $ax + gz_s = 0$

$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh$$



## 2.5 液体的相对平衡

### 3. 与绝对静止情况比较

#### (1) 等压面

绝对静止:  $z = C$       水平面

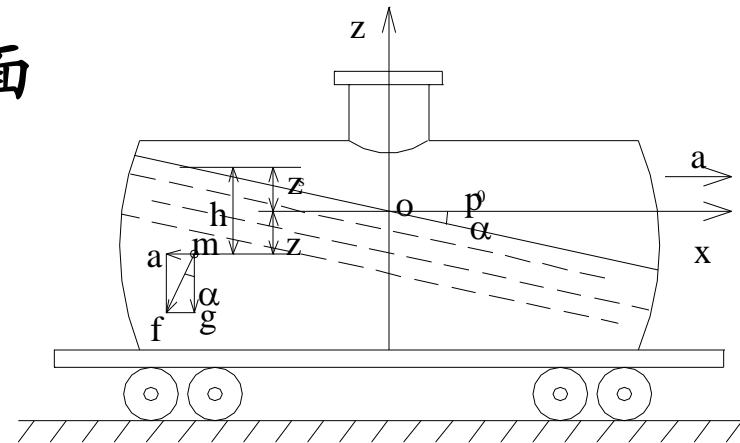
相对静止:  $z = -\frac{a}{g}x + c$       斜面

#### (2) 压强分布

绝对静止:  $p = p_0 + \rho gh$

相对静止:  $p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh$

$h$  - 任一点距离自由液面的淹深



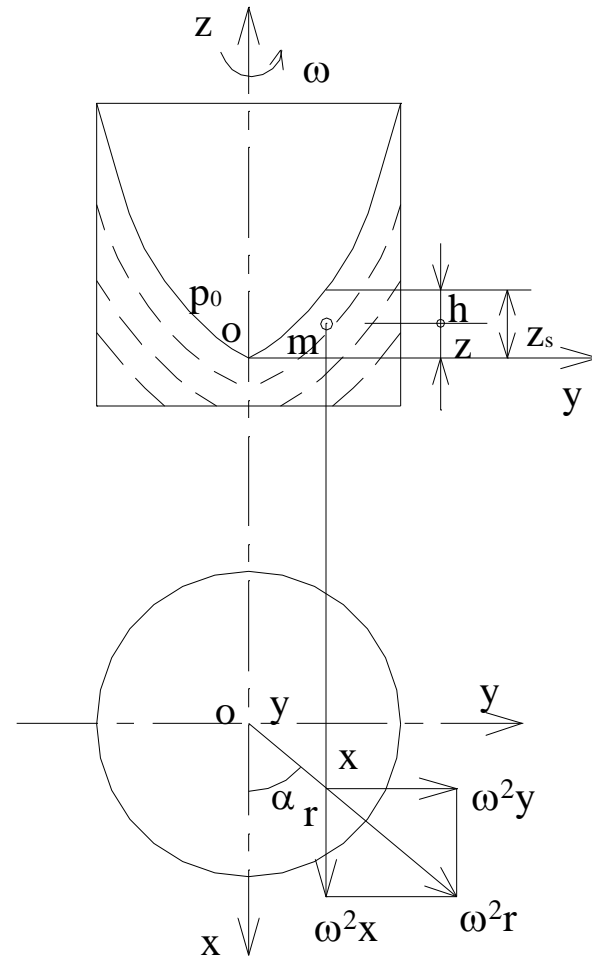
## 2.5 液体的相对平衡

### 二、等角速旋转容器中液体的相对平衡

容器以等角速度  $\omega$  旋转

质量力

$$\begin{cases} f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x \\ f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y \\ f_z = -g \end{cases}$$



## 2.5 液体的相对平衡

质量力  $f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x$      $f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y$      $f_z = -g$

### 1. 等压面方程

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) = 0$$

⇓ 积分

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = C$$

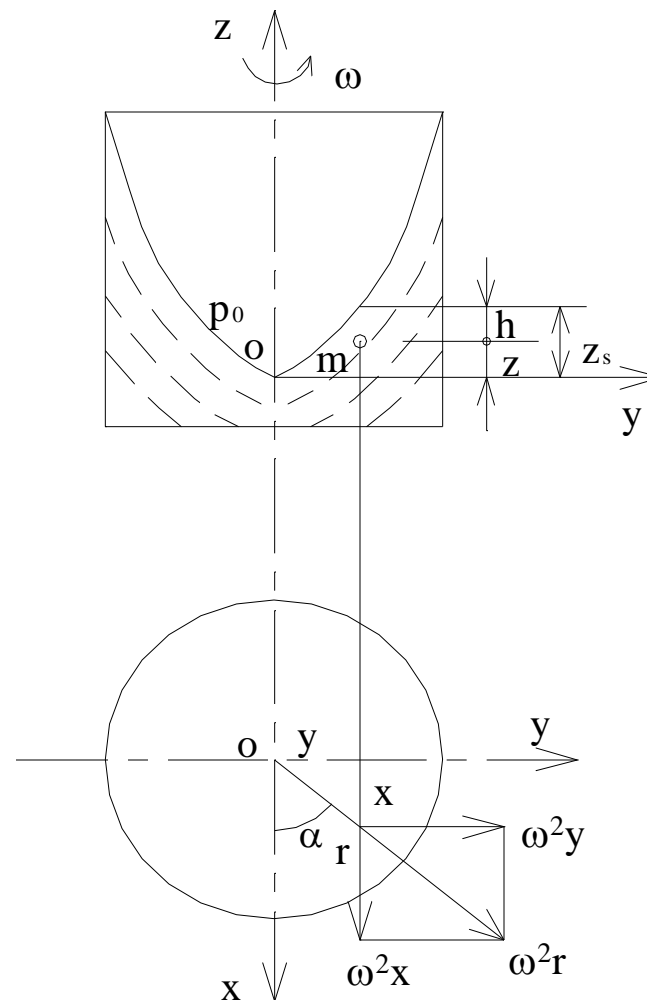
$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$$

等压面是一簇绕z轴的旋转抛物面

自由液面:  $r = 0$     $z = 0$     $C = 0$

⇓

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_s = 0$$



## 2.5 液体的相对平衡

### 2. 静压强分布规律

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

↓ 积分

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C$$

$$p = \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) + C$$

利用边界条件:

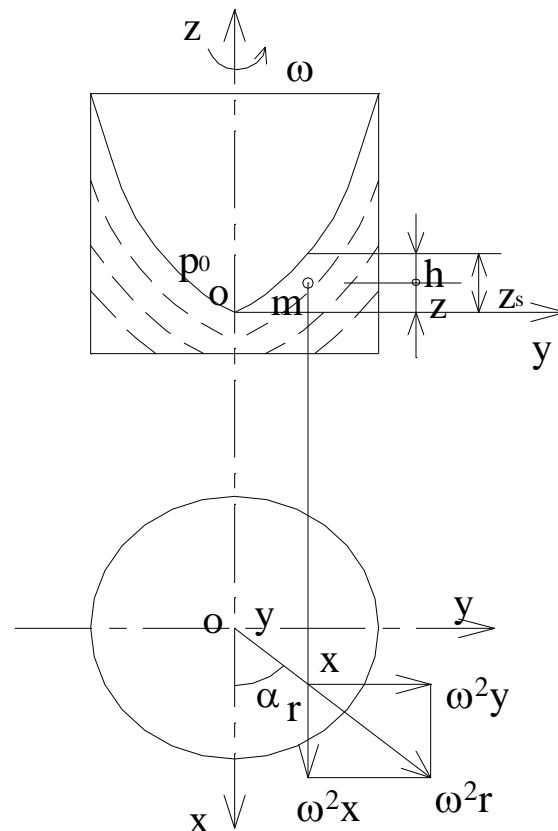
$$r = 0 \quad z = 0 \quad p = p_0$$

得:  $C = p_0$

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

$$\Downarrow \quad \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_s = C$$

$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh$$



## 2.5 液体的相对平衡

### 3. 与绝对静止情况比较

#### (1) 等压面

绝对静止:  $z = c$  水平面

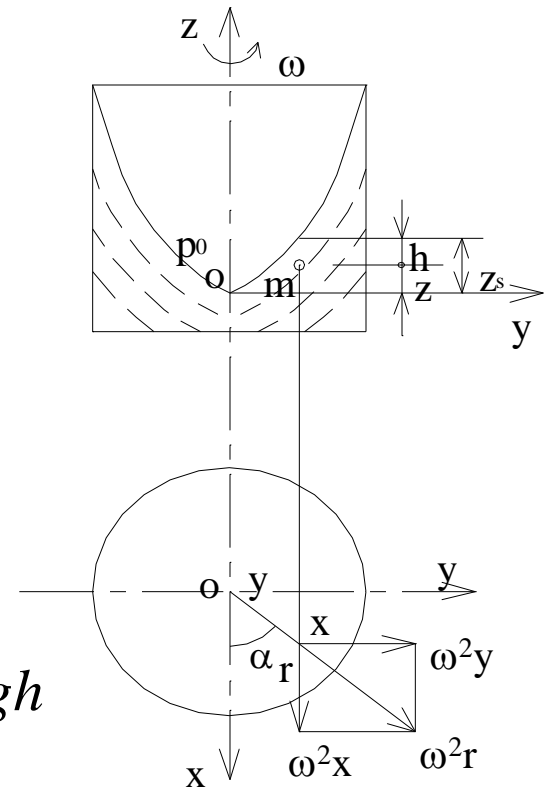
相对静止:  $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$  旋转抛物面

#### (2) 压强分布

绝对静止:  $p = p_0 + \rho gh$

相对静止:  $p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh$

$h$  - 任一点距离自由液面的淹深



## 2.5 液体的相对平衡

作业题:

- 2-3
- 2-4
- 2-6
- 2-8
- 2-17

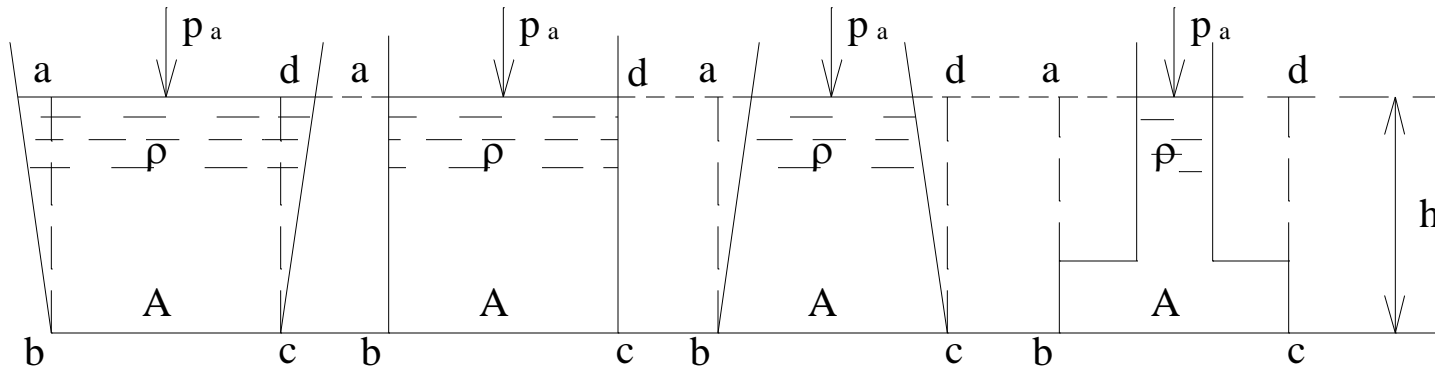
## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 一、水平平面上的液体总压力

各点压强大小：处处相等

各点压强方向：方向一致

$$F = p_e A = \rho g h A$$







## § 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

作用在平面ab上的总压力:

$$F_p = \int_A dF_p = \rho g \sin \alpha \int_A y dA$$

由工程力学知:

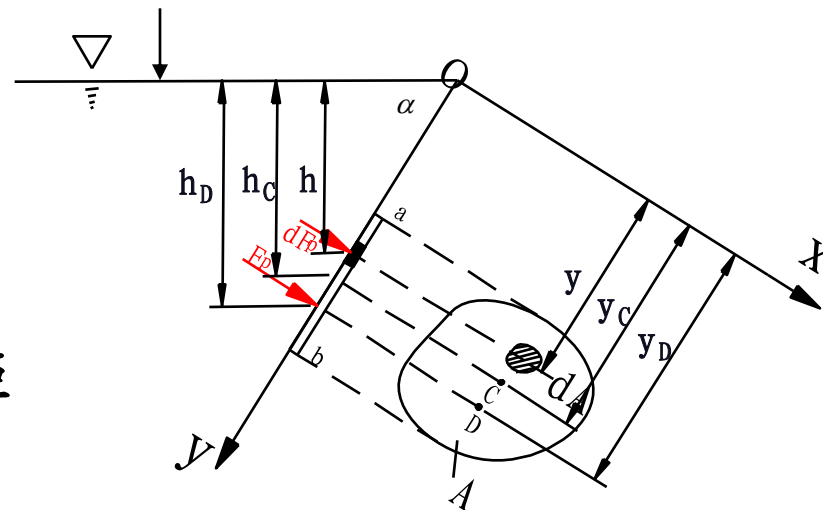
$$\int_A y dA = y_c A$$

受压面面积A对OX轴的静矩

故

$$F_p = \rho g (y_c \sin \alpha) A = \rho g h_c A$$

$$h_c = y_c \sin \alpha \quad \uparrow \quad = (p_c - p_0) A$$



即静止液体作用在平面上的总压力等于受压面面积与其形心处的相对压强的乘积。

## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 3. 总压力的作用点

**合力矩定理：合力对某轴的矩等于各分力对同一轴的矩的代数和。**

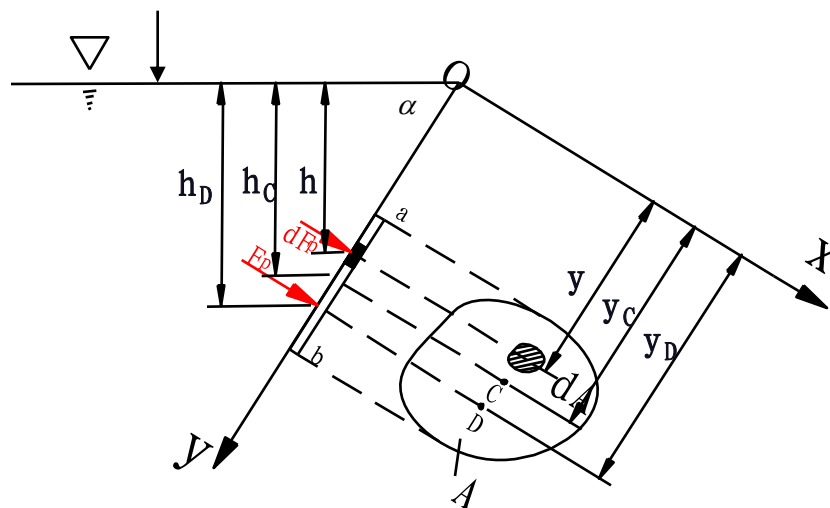
$$F_p y_D = \iint dF_p y$$



$$\rho g \sin \alpha y_c A y_D = \rho g \sin \alpha \iint_A y^2 dA$$



$$y_D = \frac{\iint y^2 dA}{y_c A} = \frac{I_x}{y_c A} = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c A}$$



压力中心D必位于受压面形心c之下。

$$\int_A y^2 dA = I_x \text{ 受压面A对Ox轴的惯性矩。}$$

$I_{Cx}$  受压面A对过形心点C且平行于ox轴的轴线的惯性矩。

## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 三、静止液体作用在曲面上的总压力

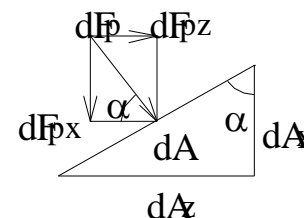
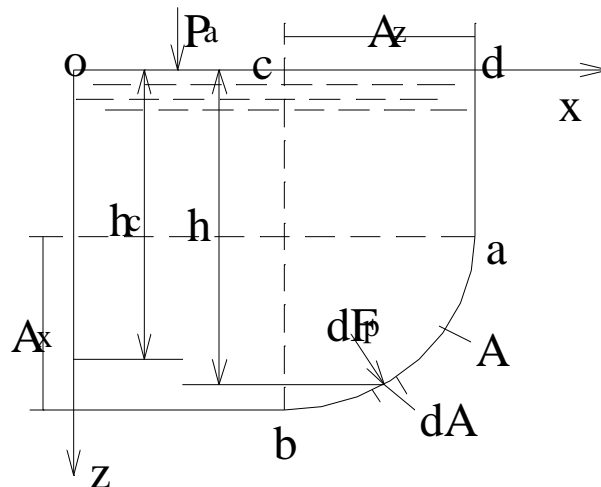
各点压强大小：大小不等

各点压强方向：方向不同

作用在微分面积 $dA$ 上

的压力：

$$dF_p = p dA = \rho g h dA$$



因作用在曲面上的总压力为空间力系问题，为便于分析，拟采用理论力学中的分解概念将其分解为水平分力和垂直分力求解。

## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 1、水平分力

$$dF_{px} = dF_p \cdot \cos \alpha = \rho g h dA \cos \alpha$$

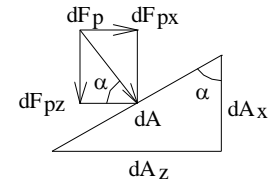
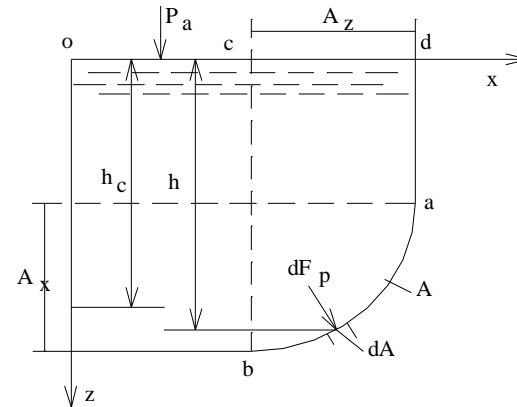
$$== \rho g h dA_x$$



$$dA \cos \alpha = dA_x$$

$$F_{px} = \rho g \iint_{A_x} h dA_x = \rho g h_c A_x = (p_c - p_0) A_x$$

作用在曲面上的水平分力等于受压面形心处的相对压强  $p_c - p_0$  与其在垂直坐标面  $oyz$  的投影面积  $A_x$  的乘积。





## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 3、总压力

大小:  $F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2}$

方向: 总压力与垂线间的夹角

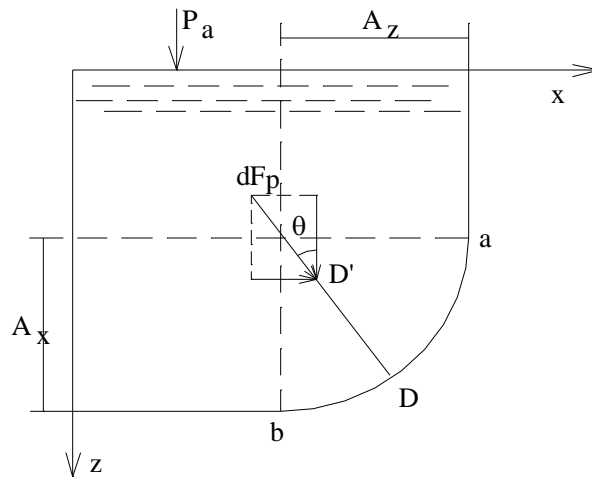
$$\tan \theta = \frac{F_{px}}{F_{pz}}$$

总压力的作用点

确定方法:

- (1) 水平分力  $F_{px}$  的作用线通过  $A_x$  的压力中心;
- (2) 铅垂分力  $F_{pz}$  的作用线通过  $V_p$  的重心;
- (3) 总压力  $F_p$  的作用线由  $F_{px}$ 、 $F_{pz}$  的交点和  $\theta = \tan^{-1} \frac{F_{px}}{F_{pz}}$  确定;

(4) 将  $F_p$  的作用线延长至受压面, 其交点  $D$  即为总压力在曲面上的作用点。

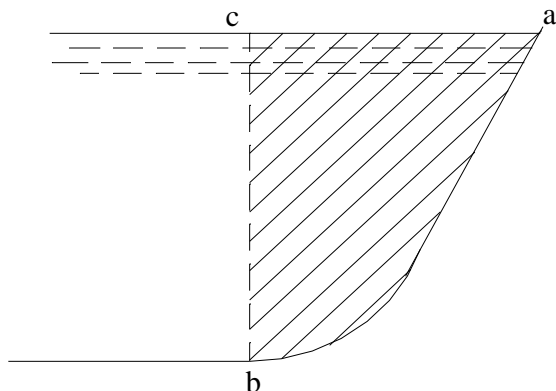


## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

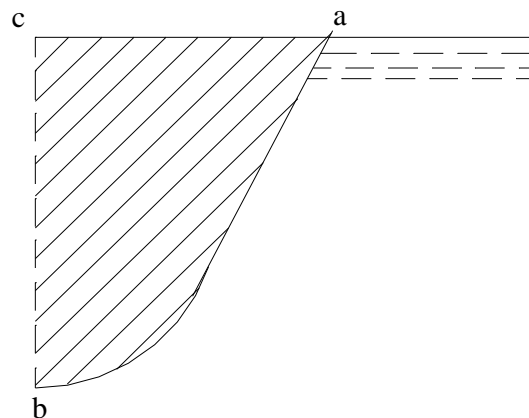
### 压力体的两点说明

#### 1. 压力体的虚实性

压力体仅表示 $\int_{A_z} h dA_z$ 的积分结果(体积)，与该体积内是否有液体存在无关。



实压力体：压力体abc包含液体体积，垂直分力方向垂直向下。



虚压力体：压力体abc不包含液体体积，垂直分力方向垂直向上。

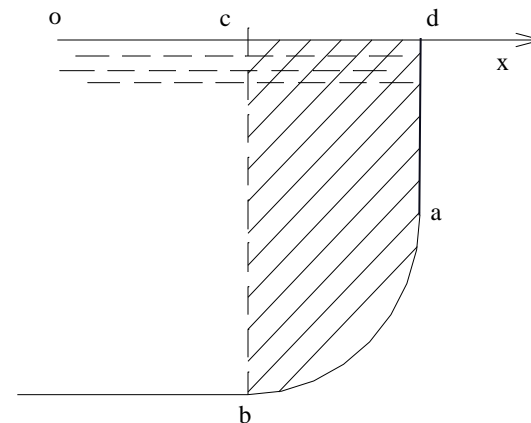


## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 2. 压力体的组成

压力体一般是由三种面所围成的体积

- ◆ 受压曲面（压力体的底面）
- ◆ 自由液面或自由液面的延长面（压力体的顶面）
- ◆ 由受压曲面边界向自由液面或自由液面的延长面所作的铅垂柱面（压力体的侧面）



## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### 四、静止液体作用在潜体和浮体上的浮力

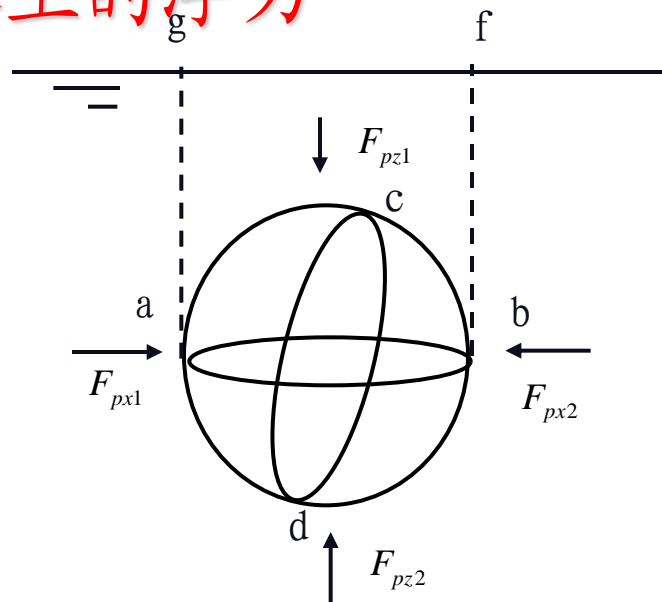
物体沉没在静止液体中

X方向:  $F_{px} = F_{px1} - F_{px2} = 0$

Y方向:  $F_{pz1} = \rho g V_{acbf g}$

$$F_{pz2} = \rho g V_{adbf g}$$

$$F_{pz} = F_{pz2} - F_{pz1} = \rho g V_{adbc}$$



阿基米德原理:

液体作用在沉没物体上的总压力的方向垂直向上, 大小等于沉没物体所排开液体的重力, 该力又称为浮力。

浮体:  $W < \rho g V$ , 物体上升, 浮出液体表面。

潜体:  $W = \rho g V$ , 物体在液体中到处处于平衡状态。

沉体:  $W > \rho g V$ , 物体下沉, 直至液体底部。

## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

### EXAMPLE: • 2-5

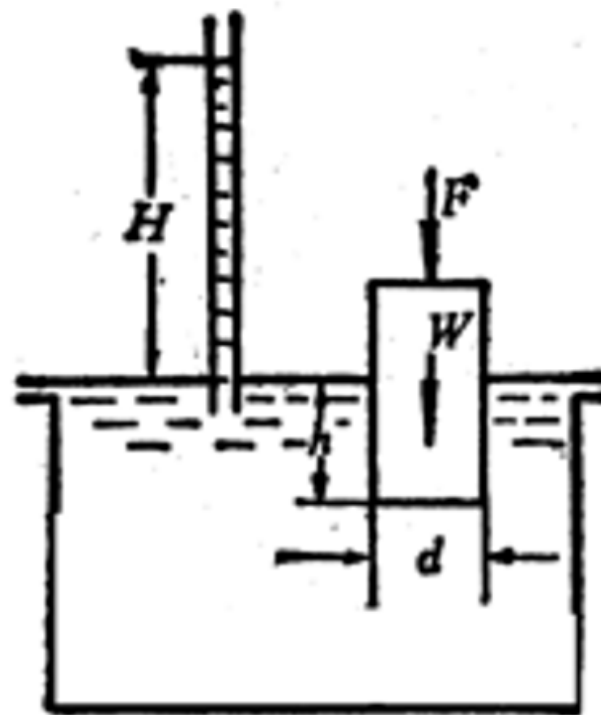
【例5】如图，有一直径 $d=12\text{cm}$ 的圆柱体，其重量 $w=520\text{N}$ ，在力 $F=588\text{N}$ 的作用下，当淹深 $h=0.5\text{m}$ 处于静止状态，求测压管中水柱的高度 $H$ 。

【解】

$$p = \frac{F + W}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{588 + 520}{0.785 \times 0.12^2}$$
$$= 9.806 \times 10^4 p_a = 10mH_2O$$

$$p = \rho g (H + h)$$

$$H = p / \rho g - h = 10 - 0.5 = 9.5\text{m}$$



## 2.6 静止液体作用在壁面上的总压力

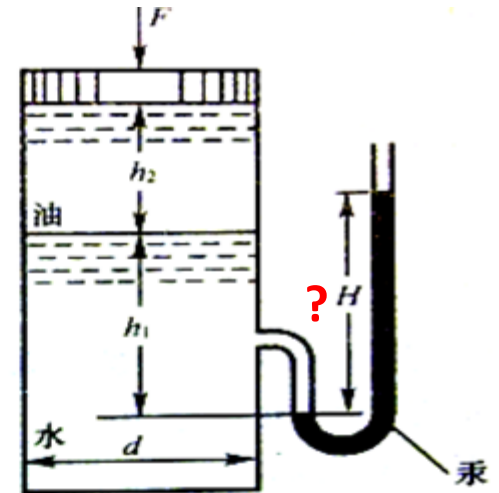
### EXAMPLE: • 2-7

解：盖上压强  $p_1 = \frac{F}{S} = \frac{5788}{0.2^2 \times \pi} = 46082.8 Pa$

$$\rho_{Hg} g H = p_1 + \rho_{H_2O} g h_1 + \rho_1 g h_2 \Rightarrow$$

$$H = \frac{p_1 + \rho_{H_2O} g h_1 + \rho_1 g h_2}{\rho_{Hg} g}$$
$$= \frac{46082.8 + 1000 \times 9.807 \times 0.5 + 800 \times 9.807 \times 0.3}{13600 \times 9.807}$$

$$\approx 0.4m$$



# 作业

- 2-19
- 2-24
- 2-29
- 2-30

# Thanks!

感谢关注 敬请指导