応用数学 入門1

※スピーカーノートに色々書いたので、PDFにする際には情報がいくつか抜け落ちるかもしれない

自己紹介

- Asya-kawai
- Twitter: https://twitter.com/asya_aoi1049
- アプリケーションエンジニア

  キーワード：
  - OCaml
  - k8s
  - ◯◯サービス
  - ◯◯アーキテクチャ

今日のゴール

- 命題論理
- 述語論理
- 様相論理

命題論理

- 形式化
- 命題と論理式
- シンタクス（構文論）とセマンティクス（意味論）

命題論理

- 形式化
  - 物事には「対象が持つ論理」と「対象を操作するための論理」がある
    - 対象が持つ論理→対象論理
    - 対象を操作する論理→メタな論理
  - 対象が持つ論理を表現するために、形式化が必要

命題論理

- 命題と論理式
  - 命題とは、「真か偽かが確定している文」
    - 1 < 2（真）
    - 素数は無数に存在する（真）
    - 全ての三角形は正三角形である（偽）
  - 論理式とは、「複数命題に論理結合子を用いて表す概念」
    - $p \supset q$ （p,qは命題変数）
    - $p \vee q$

命題論理

- シンタクス（構文論）とセマンティクス（意味論）
  - シンタクス（構文論）は、論理式を記号列と捉え、
    その推論や構造を証明する
  - セマンティクス（意味論）は、論理式が持つ意味や内容に基づいて、
    集合や写像の概念を当てはめる

例）

- プログラミング言語での記述自体は、シンタクスの領域
- プログラミング言語で記述された関数の振る舞いは、セマンティクスの領域

命題論理 - 古典命題論理 -

- LK(エルカー)で見る命題論理
  - LKにおける表現 = 式
    - $A_1 .., A_m \to B_1 .., B_n$
- 以下は全て論理式であることに留意
    - A_i, B_j
    - $A_1 .., A_m \to$
    - $\to B_1 .., B_n$
    - $\_ \to \_$ （m,nが0の場合）

命題論理 - 古典命題論理 -

- LK(エルカー)の証明図
    - 演習

命題論理 - 古典命題論理 -

- LK（エルカー）におけるトートロジーと証明可能性について - 準備 -
  - トートロジーとは論理式における恒真を意味する（論理式に対する性質）
  - 証明可能性とはLKの終式が始式となることを意味する（式に対する性質）

- LK(エルカー）でトートロジーを扱うために、以下のように解釈を拡張する
  - $A \to B \equiv (A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m) \supset (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$
  - $\Gamma \to \Delta$であるならば$\Gamma_* \to \Delta^*$とする

命題論理 - 古典命題論理 -

- LK(エルカー)におけるトートロジーと証明可能性について
    - LKで証明可能な式はトートロジーになる、という性質を「健全性」
    - トートロジーな式は証明可能である、という性質を「完全性」

- 証明可能な式であることと、トートロジーであることの関係とは
    - 必ずしも正しくない式が証明可能となってほしくない、ということ

命題論理 - 古典命題論理 -

- LK(エルカー)における健全性の証明
  - 演習

- LK(エルカー)における完全性の証明
  - 演習

述語論理

- 命題論理の内部構造を表現するために用いる
    - ある複数の命題（対象）のもつ性質を表現できる
    - ある複数の命題の関係性を表現できる

- 対象をどのように表現するか
    - 対象変数･･･x,y,z
    - 性質･･･P(x) ※xは性質Pを持つ
    - 量化記号･･･ ∀, ∃

述語論理

- 述語論理における論理式
  - 項・・・ある1つの対象における記号的表現(x,0,P(x)など)
  - 原子論理式・・・
    性質Pがn変数の述語記号、t_1・・・t_nが項の時、
    P(t_1・・・t_n)が論理式となるもの

- 束縛変数と自由変数
  - 束縛変数・・・ある論理式Aにおいて束縛されるような変数(実質的な変数)
  - 自由変数・・・ある論理式Aにおいて束縛されない変数(見かけの変数)

述語論理

- 束縛変数と自由変数
  - 演習

- 項の代入
  - 演習

述語論理

- 述語論理におけるセマンティクス（意味論）
  - 言語の対象変数が取りうる値の範囲（ドメイン）での解釈
  - ドメインUとした時、このドメインが持つ変数や関数と言語の変数や関数を対応付けること
  - ドメインUに対してある解釈Iが存在する時<U,I>と書く
  - ドメインと解釈の対を「構造」という

述語論理

- 構造
  - 演習

述語論理

- 高階述語論理
  - 一階の述語論理・・・
    対象領域の変数とそれに対する量化記号のみで表現する
  - 二階の述語論理・・・
    対象領域の部分集合に現れる変数や量化記号も含めて表現する
  - 高階の述語論理・・・
    さらに細かな部分集合に現れる変数や量化記号も含めて表現する

述語論理

- 演習
  - 一階及び二階の述語論理

様相論理

- 様相（mode）
  - 文が事実として正しいことではなく、必然的に正しいことを明らかにする
    - 必然性
      ・必然的にAである
    - 可能性
      ・Aは必然的ではない
      →すなわち、Aの可能性がある

様相論理

- セマンティクス(意味論)
  - 時間の流れに対する意味付け
  - 「いつも(常に)」という言葉の解釈
    - 未来
    - 現在と未来
    - 過去、現在と未来
  - 状況に応じて、それを記述するのに適した様相論理が存在する
  - 解釈をより限定した論理として、「時間論理」がある

様相論理

- 演習
  - クリプキ･フレーム
  - p-モルフィズム
  - 時間論理

ありがとうございました

SNS:

- Twitter: @asya_aoi1049
- LinkedIn: Toshiki Kawai