Torben
Lineære Transformationer
20 september, 2011
Via eksempler
Calculus E2011

I denne note skal vi se på flere forskellige lineære tranformationer. Tak til Mikkel for de fine illustrationer.

Overalt vil bogstaver skrevet med **fed** markere en vektor. Vi lægger ud med at definere, hvad en lineær transformation er:

Definition lineær tranformation *En lineær transformation fra* $\mathbb{R}^n$ *til* $\mathbb{R}^m$ *er en afbildning* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *som opfylder*

$$L(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) = \alpha L(\boldsymbol{v}_1) + \beta L(\boldsymbol{v}_2) \tag{1}$$

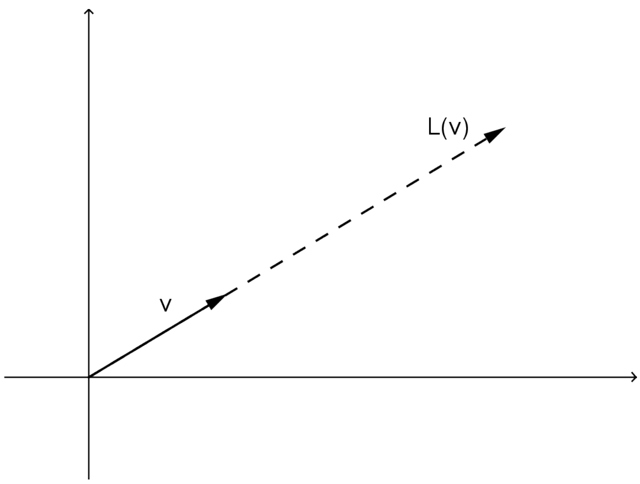
for alle $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ *og for alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

For at vise at en afbildning er lineær, skal man vise overstående betingelse. Denne betingelse kan "deles op", se mere om dette i Mikkels note[1]. I det følgende vil L være en afbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ dvs. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Eks. (i) Lad $L(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$ og lad os vise at så definerer L en lineær transformation. Lad derfor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$. Så har vi

$$\begin{aligned} L(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) &= 3(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) \\ &= 3(\alpha\mathbf{v}_1) + 3(\beta\mathbf{v}_2) \\ &= \alpha(3\mathbf{v}_1) + \beta(3\mathbf{v}_2) \\ &= \alpha L(\mathbf{v}_1) + \beta L(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

Dermed er L en lineær transformation. Man kan tolke L som den afbildning, der "strækker" en vektor $\mathbf{x}$ med en faktor 3. Generelt vil afbildning $F(\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{x}$ for $k \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ være en lineær afbildning, der "strækker" vektoren $\mathbf{x}$ med en faktor k.



Eks. (ii) Lad $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ og lad[2] $L(\mathbf{x}) = (x_1, -x_2)$. L definerer igen en lineær

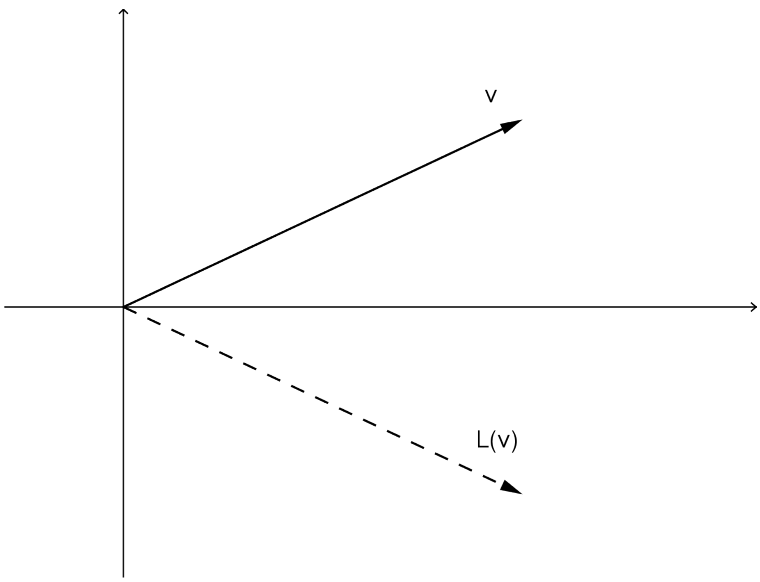
[1] http://home.imf.au.dk/mstouby/noter.html

[2] Hvis vi skriver helt ud har vi: $L(\mathbf{x}) = L((x_1, x_2))$

afbildning, thi lad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ med $\mathbf{y}_1 = (y_1, y_2)$. Så har vi

$$\begin{aligned}
L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= L\begin{pmatrix}\alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\alpha x_1 + \beta y_1 \\ -(\alpha x_2 + \beta y_2)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha(-x_2) + \beta(-y_2)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\alpha x_1 \\ \alpha(-x_2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta y_1 \\ \beta(-y_2)\end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix}x_1 \\ -x_2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}y_1 \\ -y_2\end{pmatrix} \\
&= \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Igen er L en lineær tranformation og igen kan vi tolke L geometrisk, nemlig som den afbildning, der tager en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ og spejler denne i x_1-aksen.



Eks. (iii) Lad os tage et lidt mindre trivielt elsempel(selvom det ikke er særlig besværligt at vise, at det er en lineær transformation; der skal bare skrives en del!). Lad

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\end{pmatrix}$$

hvor θ er en vinkel i $\mathbb{R}^2$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$. lad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ så fås

$$\begin{aligned}
L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= L\begin{pmatrix}\alpha x_1 + \beta y_1\\ \alpha x_2 + \beta y_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(\alpha x_1 + \beta y_1)\cos\theta - (\alpha x_2 + \beta y_2)\sin\theta\\ (\alpha x_1 + \beta y_1)\sin\theta + (\alpha x_2 + \beta y_2)\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(\alpha x_1\cos\theta - \alpha x_2\sin\theta) + (\beta y_1\cos\theta - \beta y_2\sin\theta)\\ (\alpha x_1\sin\theta + \alpha x_2\cos\theta) + (\beta y_1\sin\theta + \beta y_2\cos\theta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha x_1\cos\theta - \alpha x_2\sin\theta\\ \alpha x_1\sin\theta + \alpha x_2\cos\theta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta y_1\cos\theta - \beta y_2\sin\theta\\ \beta y_1\sin\theta + \beta y_2\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix}x_1\cos\theta - x_2\sin\theta\\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}y_1\cos\theta - y_2\sin\theta\\ y_1\sin\theta + y_2\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Det ses derfor at L er en lineær transformation. Man kan også tolke L geometrisk, men hvad vi har med at gøre er ikke helt klart. Vi vil derfor bestemme matricen associeret til L (se boks. 4.11 i [L]). Skriv først

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}x_1\cos\theta - x_2\sin\theta\\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \tag{2}$$

Vi anvender nu L på $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ og $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Dette giver

$$L(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \quad L(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Hvilket giver at matricen associeret til L netop ser ud, som den gør, i (2). Bemærk nu ligheden med eksempel 4.15 fra [L] ! Vi kan altså tolke L som den lineære afbildning, der roterer planen vinklen θ imod urets retning omkring origo(0-punktet). Se illustration s. 78 i [L].

Der findes (selvfølgelig) mange afbildninger der **ikke** er lineære transformationer. For at se et simpelt eksempel, kan det anbefales igen at kigge i Mikkels note[3]. Lad mig give et andet eksempel på en afbildning, der ikke er en lineær transformation

Eks. (iv) Nu er L en afbildning $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $L(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Så er L **ikke** en lineær afbildning. For at se dette bemærker vi først (se Mikkels note), at en lineær afbildning skal opfylde $L(\alpha\mathbf{x}) = \alpha L(\mathbf{x})$ for alle relle tal α og vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Men vi finder

$$L(\alpha\mathbf{x}) = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2} = |\alpha|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\alpha| L(\mathbf{x})$$

Specielt for et negativt α er $\alpha L(\mathbf{x}) \neq |\alpha| L(\mathbf{x})$.

[3] http://home.imf.au.dk/mstouby/noter.html

Lad mig til sidst give to eksempler på, to lidt anderledes lineære transformationer. I det følgende betegner $C[a,b]$ alle kontinuerte reelle funktioner på det lukkede interval fra a til b og $C^1[a,b]$ alle kontinuerte differentiable reelle funktioner på det lukkede interval fra a til b ($C[a,b]$ og $C^1[a,b]$ er begge vektorrum, det følger af velkendte regler fra gymnasiet).

Eks. (v) Lad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion (dvs. $f \in C[a,b]$, specielt er f integrabel) og lad $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ være givet ved $L(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Så er L en lineær transformation. Betingelsen (1) er de velkendte regler for integraler kendt fra gymnasiet (man må trække en konstant ud og dele en sum op).

Eks. (vi) Lad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert differentiabel funktion (dvs. $f \in C^1[a,b]$, specielt er f differentiabel) og lad $L : C^1[a,b] \to C[a,b]$ være givet ved $L(f) = \frac{df}{dx} = f'(x)$. Så er L en lineær transformation. Betingelsen (1) er de velkendte regler for differentation kendt fra gymnasiet (man må trække en konstant ud og dele en sum op).

Kan man også tolke de to sidste lineære transformationer geometrisk? ja på en måde. Fra gymnasiet ved vi at integralet af f er arealet under grafen for f (mellem grænser og for en positiv funktion) og f differentieret, dvs. f' beskriver hældningen for f.