Om komplekse tal

De komplekse tal er kendte fra Calculus, og denne note skal udelukkende minde jer om de ting, som I allerede ved.

Komplekse tal kan ved første øjekast virke mærkelige og unyttige, men de er meget anvendte af matematikere og alle andre der arbejder med matematik. Denne notes primære budskab er, at selvom komplekse tal er svære at forholde sig til, så er de ikke vanskelige at regne med. De opfører sig nemlig på mange måder præcis som de (reelle) tal, vi kender.

Regning med komplekse tal

Et komplekst tal skrives ofte på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal, og i er det lidt mærkelige tal, der opfylder, at $i^2 = -1$. Vi kalder a for realdelen og b for imaginærdelen.

Disse tal lægges sammen og ganges sammen på præcis den måde, vi måtte forvente. Der gælder nemlig for to komplekse tal $a + ib$ og $c + id$, at

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= a + ib + c + id \\ &= (a + c) + i(b + d),\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot (c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= ac - bd + iad + ibc \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

(Husk på, hvordan man normalt regner med parenteser.)

Komplekse tal kan også divideres. Her er det dog ikke længere helt oplagt, hvordan man får et nyt tal ud på den form, som vi gerne vil have. Her er det relevant først at indføre kompleks konjugering. Lad z være det komplekse tal $a + ib$. Så er det komplekst konjugerede $\bar{z}$ givet ved $a - ib$.

Vi kan nu dividere komplekse tal på følgende måde. Lad u og v være komplekse tal med $u = a + ib$ og $v = c + id$. Hvis c og d ikke begge er 0 (man må stadig ikke dividere med 0), så har vi, at

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{u\bar{v}}{v\bar{v}} \\ &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

De regneregler, som vi kender fra de reelle tal gælder for en stor dels vedkommende også for de komplekse tal. Vi kan blandt andet gange ind i parenteser og bytte rundt på faktorers rækkefølge. Alle de teknikker vi kender til løsning af lineære ligningssystemer kan overføres direkte til de komplekse tal.

Opsummering

Addition

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

Multiplikation

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

Kompleks konjugering

$$\overline{a+ib}=a-ib$$

Division

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$