Note omhandlende opgave [S] 11.2.33

Kenneth Rasmussen

19. september 2011

Da der har været store problemer med denne opgave stillet til afleveringsopgave # 2, har jeg valgt at skrive denne note, som er en udførlig besvarelse, hvor jeg har fundet de referencer i [S], som I har brug for at kunne komme med en fuldstændig besvarelse af opgaven. De to ting, der skal bruges er trekantsuligheden for reelle tal (der gælder præcis samme regel for længden af vektorer i $\mathbb{R}^n$), og den såkaldte klemmesætning omhandlende grænseværdien af funktioner. Begge sætninger er ofte anvendt og meget nyttige.

[S] 11.2.33, Brug polære koordinater til at finde grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \tag{1}$$

Vi bemærker først, at når $r \to 0^+$ går $(x, y) \to (0, 0)$, og ved at se på grænseværdien for $r \to 0^+$ for en vilkårlig værdi af θ dækker vi alle muligheder for $(x, y) \to (0, 0)$ (overvej dette). Vi omskriver grænseværdien og reducerer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}$$
$$= \lim_{r\to0^+} \frac{r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \lim_{r\to0^+} \frac{r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{1} = \lim_{r\to0^+} r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)$$

Vi betragter nu funktionen

$$f(r) = r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \tag{2}$$

der er en funktion af en variabel r for hvert $\theta \in \mathbb{R}$.

For at vurdere på grænseværdien, benytter vi den såkaldte klemmesætning (Squeeze theorem) [S] 2.2.3 side 114. Denne sætning udtaler sig om en funktion af en variabel, og det er derfor, vi betragter funktionen f af en variabel. Sætningen siger, at hvis vi kan klemme f mellem 2 andre funktioner, som hver især har samme grænseværdi, er grænseværdien for f defineret og lig den fælles grænseværdi for disse funktioner. For at vi kan bruge sætningen, skal vi lave nogle vurderinger på f.

Bemærk først at både cos og sin tager værdier i intervallet $[-1,1]$, og vi kan således lave følgende vurderinger

$$\left.\begin{array}{r}-1 \leq \cos\theta \leq 1\\ -1 \leq \sin\theta \leq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-1 \leq \cos^3\theta \leq 1\\ -1 \leq \sin^3\theta \leq 1\end{array}\right\}$$

Vi kan nu fuldføre vurderingen ved hjælp af trekantsuligheden (The Triangle Inequality) [S] Appendix E side A39, som siger

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{for alle } a, b \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Vi har altså

$$|\cos^3\theta + \sin^3\theta| \leq |\cos^3\theta| + |\sin^3\theta| \leq 1 + 1 = 2$$

og således

$$|r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)| = |r|\left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \leq 2|r|$$

Vi kan også skrive dette således

$$-2|r| \leq r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \leq 2|r|$$

og for $r \geq 0$ kan vi droppe numerisk værdi tegnene, dvs

$$-2r \leq r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \leq 2r \quad \text{for alle } r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Vi har desuden

$$\lim_{r\to 0^+} 2r = 0 = \lim_{r\to 0^+} -2r \tag{5}$$

Ligning (4) og (5) er netop det, vi skal have opfyldt for at kunne bruge klemmesætningen, som i dette tilfælde siger at

$$\lim_{r\to 0^+} r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) = 0$$

Vi har således bevist at grænseværdien eksisterer og fundet værdien af denne. □