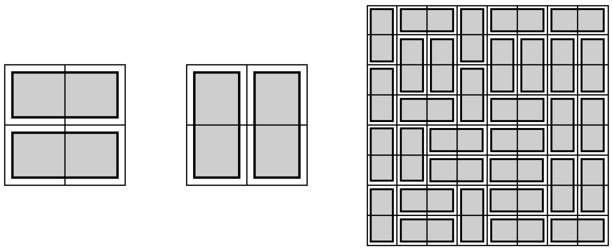
Problema D – Dominó fractal

Autor: Fidel I. Schaposnik - Universidad Nacional de La Plata

Una pregunta que podemos hacernos si tenemos mucho tiempo libre (o si somos matemáticos, que es prácticamente lo mismo) es la siguiente: dado un tablero cuadriculado de $N \times N$, ¿de cuántas formas podemos cubrirlo con piezas de dominó de modo que las piezas no se superpongan entre sí y no queden casilleros sin cubrir? Las piezas de dominó son rectángulos compuestos por dos casilleros adyacentes, que pueden ser horizontales (1×2) o verticales (2×1). Por ejemplo, hay sólo dos formas de cubrir un tablero de 2×2, pero 12.988.816 formas de cubrir un tablero de 8×8.

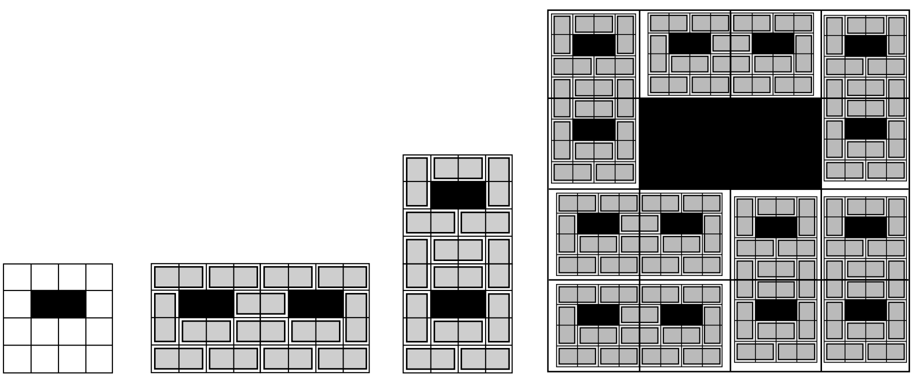


(a) (b)

Figura 1: (a) Las dos formas de cubrir un tablero de 2×2 con piezas de dominó horizontales (izquierda) o verticales (derecha); (b) un posible cubrimiento de un tablero de 8×8.

Para aquellos con aún más tiempo libre existe una variante de esta pregunta que consiste en considerar un tablero en el que algunos casilleros se consideran *ocupados*, de modo que debemos contar la cantidad de cubrimientos en los que las piezas de dominó cubren los casilleros no ocupados, sin superposiciones ni huecos. Por ejemplo, hay dos formas de cubrir un tablero de 3×3 en el que el casillero central está ocupado, y 75.272 formas de hacerlo en un tablero de 7×7.

En este problema vamos a ocuparnos de una variante de esta variante de la pregunta original, pensada específicamente para aquellos de ustedes con exceso de tiempo libre. Nuevamente consideramos un tablero de $N \times N$ en el que algunos casilleros pueden estar ocupados, pero queremos ahora cubrirlo con *piezas de dominó fractales de orden K*.



(a) (b) (c) (d)

Figura 2: (a) Un tablero de 4×4 con dos casilleros ocupados; (b) una de las 89 piezas de dominó horizontales de orden uno para el tablero (a); (c) una de las 52 piezas de dominó verticales de orden uno para el tablero (a); (d) un cubrimiento del tablero (a) con las piezas de dominó fractales de orden uno de (b) y (c).

Dado un tablero de $N \times N$, una pieza de dominó fractal de orden $K = 0$ es una pieza de dominó usual, es decir un rectángulo de 1×2 ó de 2×1 casilleros. Una pieza de dominó fractal de orden $K > 0$ consiste en una pieza de dominó en la que cada casillero es una copia del tablero de $N \times N$ dado, y la pieza en su conjunto está cubierta por piezas de dominó fractales de orden $K - 1$.

Nótese que en general para $K > 1$ puede haber más de una pieza de dominó fractal de orden $K - 1$ de cada tipo (horizontal o vertical). En este caso, suponemos que al momento de utilizar una pieza ésta se elige con probabilidad uniforme entre todas las posibles piezas de dominó fractales del tipo y orden deseado. Del mismo modo, en caso de que exista más de un cubrimiento posible para un dado tablero o pieza de dominó fractal, vamos a suponer que todos ellos son igualmente probables.

Al cubrir un tablero con piezas de dominó fractales de orden K se utiliza una dada cantidad de piezas de orden K, una cantidad mayor de piezas de orden $K - 1$, una cantidad aún mayor de piezas de orden $K - 2$, y así siguiendo. Esto continúa hasta llegar a una cantidad posiblemente enorme de piezas de orden cero, es decir, piezas usuales sin nada adentro. Por ejemplo, se ve en la Figura 2d que el tablero cubierto con piezas de dominó fractales de orden uno contiene siete de esas piezas y 98 piezas de orden cero.

La tarea en este problema es calcular la proporción esperada de piezas de dominó fractales de orden cero (piezas usuales) que son verticales, si suponemos que todos los cubrimientos de un tablero dado con piezas de dominó fractales de un orden K dado son igualmente probables.

Entrada

La primera línea contiene dos enteros N y K, que representan el tamaño del tablero y el orden de las piezas de dominó fractales que queremos usar para cubrirlo, respectivamente ($2 \leq N \leq 8$ y $0 \leq K \leq 10^9$). Las siguientes N líneas contienen N enteros cada una, siendo el j-ésimo número en la i-ésima línea un 1 si el casillero en la fila i y la columna j del tablero está ocupado, y un 0 caso contrario. El tablero dado no está totalmente ocupado, y siempre es posible cubrirlo usando piezas de dominó.

Salida

Imprimir en la salida una línea conteniendo un racional que representa la proporción esperada de piezas de dominó fractales de orden cero que son verticales, cuando consideramos que todos los cubrimientos del tablero dado con piezas de dominó fractales de orden K son igualmente probables. Imprimir el resultado utilizando exactamente 5 dígitos luego del punto decimal, redondeando de ser necesario.

Entrada de ejemplo	**Salida para la entrada de ejemplo**

`4 2`
`0 0 0 0`
`0 1 1 0`
`0 0 0 0`
`0 0 0 0`
	`0.50750`