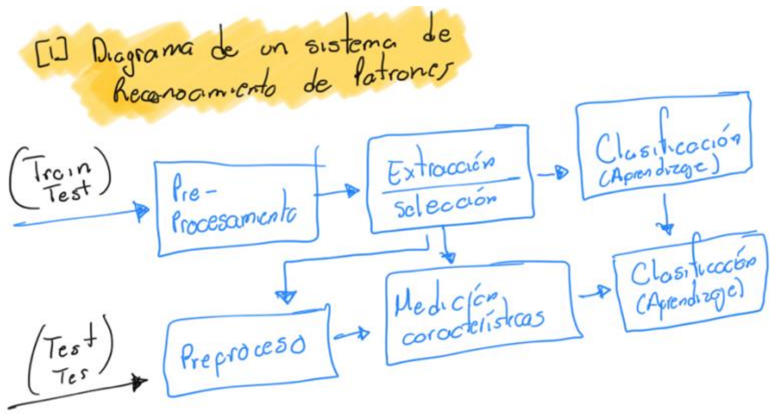
Examen final Reconocimiento de Patrones

Alumno: Alfonso Murrieta V.

Problema 1. Bosqueje el diagrama de un sistema de Reconocimiento de Patrones.

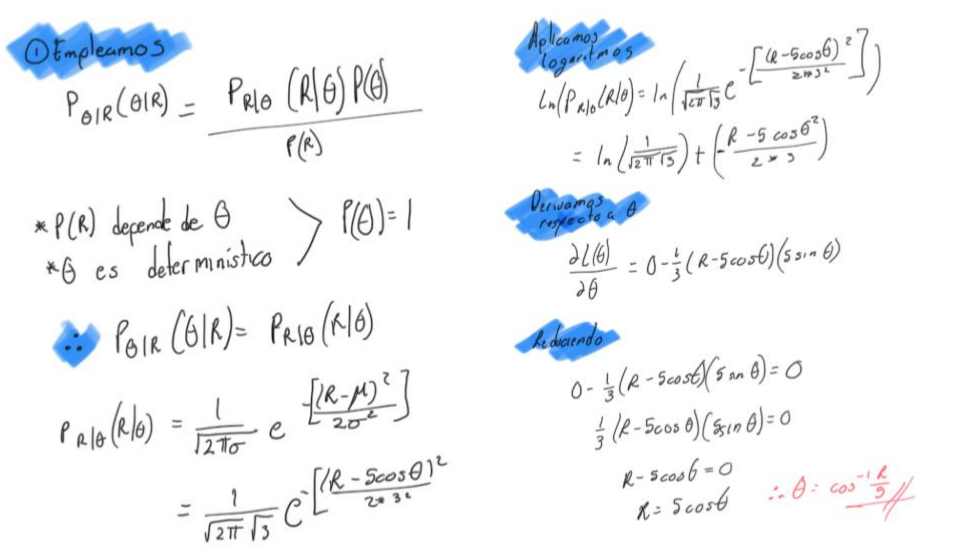


Problema 2. Suponga que se tiene una observación:

$$R1 = 5 \cos \theta + W1$$

Donde θ es un parámetro determinístico que se desea estimar. W1 es una variable aleatoria con distribución gaussiana con media cero y varianza 3.

a) Encuentre la estimación de θ con un criterio de máxima verosimilitud.



b). Suponga que se tiene una segunda observación:

$$R2 = 5 \text{ sen } \theta + W2$$

W_2 es otra variable aleatoria, independiente de W1 , gaussiana, con media cero y varianza 3.

Vuelva a encontrar la estimación de θ con el criterio de máxima verosimilitud tomando en cuenta las dos observaciones.

* Para el inciso B

$$P_{R_1|\theta}(R_1|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}\right) e^{\left(-\frac{(R-5\cos\theta)^2}{(2)(3)}\right)}$$

$$P_{R_2|\theta}(R_2|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{\left[-\frac{(R_2-5\sin\theta)^2}{6}\right]}$$

Aplicando logaritmo

$$l_n(\theta) = \ln\left(\frac{1}{2\pi 3} e^{\left[-\frac{(R_1-5\cos\theta)^2+(R_2-5\sin\theta)^2}{6}\right]}\right)$$

$$l_n \theta = \ln\left(\frac{1}{2\pi 3}\right) - \frac{1}{6}\left((R_1-5\cos\theta)^2 + (R_2-5\sin\theta)^2\right)$$

derivando respecto θ

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0 - \frac{1}{6}\left[[2(R_1-5\cos\theta)(5\sin\theta)] + [2(R_2-5\sin\theta)(-10\cos\theta)]\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{6}\left[10R_1\sin\theta - 10R_2\cos\theta\right] = \frac{5}{3}(R_1\sin\theta - R_2\cos\theta)$$

→ Máximos

$$\cancel{\frac{5}{3}}(R_1\sin\theta - R_2\cos\theta) = 0$$

Nota: Para este paso se aplicó un identidad trigonométrica de tipo:

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

sustituyendo (Cambio variable)

$$\therefore A\sin\theta - B\cos\theta = C$$

$$y\sin\theta\cos\alpha - y\cos\theta\sin\alpha = C$$

$$y(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) = C$$

$$\sin(\theta-\alpha) = \frac{C}{y} \quad > \quad A = y\cos\alpha, \quad B = y\sin\alpha$$

$$A^2+B^2 = y^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha$$

$$A^2+B^2 = y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha^2)$$

$$\therefore A^2+B^2 = y^2; \quad y = \sqrt{A^2+B^2}$$

Es decir:

$$\frac{B}{A} = \frac{y\sin\alpha}{y\cos\alpha} = \tan\alpha; \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

Regresando a terminos de R

$$y = \sqrt{R_1^2+R_2^2}; \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{R_2}{R_1} \quad C=0$$

$$\therefore \sin\left(\theta - \tan^{-1}\frac{R_2}{R_1}\right) = 0; \quad \theta - \tan^{-1}\frac{R_2}{R_1} = 0$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_2}{R_1}$$

Problema 3. Suponga que bajo la hipótesis H1 la variable aleatoria X tiene una función de Probabilidad. Bajo la hipótesis H0 la variable aleatoria X es uniformemente distribuida en [−1,1].

a) Encuentre el radio de verosimilitud

b) Encuentre regla de decisión siguiendo el criterio de Bayes, suponiendo probabilidade a priori iguales, costos de decisiones correctas igual a cero y costos de error iguales.
c) Encuentre la regla de decisión que maximiza la probabilidad de detección con la restricción de que la probabilidad de falsa alama sea menor o igual a 0.1.
d) Grafique la curva ROC

Problema 4. Considere los datos de la siguiente

Muestra	E Escurrimiento nasal	T Tos	D Dolor de cabeza	F Fiebre	clasificación
1	Si	Si	Si	No	COVID-19
2	Si	Si	No	No	COVID-19
3	No	No	Si	Si	COVID-19
4	Si	No	No	No	Negativo
5	No	No	No	No	Negativo
6	No	Si	Si	No	Negativo

a) Encuentre las probabilidades necesarias para aplicar un criterio de Naive Bayes para predecir si una persona está enferma de COVID-19.

1. Frecuencias

TIPO	Positivo a COVID	Negativo a COVID
E	2	1
T	2	1
D	2	1
F	1	0
E-	1	2
T-	1	2
D-	1	2
F-	2	3

2. Probabilidades

TIPO	Positivo a COVID	Negativo a COVID
E	0.17	0.08
T	0.17	0.08
D	0.17	0.08
F	0.08	0.00
E-	0.08	0.17
T-	0.08	0.17
D-	0.08	0.17
F-	0.17	0.25

3. **Si aplicamos smoothing**

TIPO	Positivo a COVID	Negativo a COVID
E	3	2
T	3	2
D	3	2
F	2	1
E-	2	3
T-	2	3
D-	2	3
F-	3	4

4. Generales

COVID = 0.5
Negativo a COVID = 0.5

b) Clasifique tres pacientes en dos clases COVID-19 o negativo. Los síntomas de cada persona son:

NOTA: A continuación, un ejemplo aplicando el smoothing

Ejemplo para
"Paciente 1"

$$P(Positivo \mid \bar{E},T,\bar{D},F) = P(\bar{E},T,\bar{D},F \mid Positivo)\,P(Positivo)$$

$$= P(\bar{E} \mid Positivo)\,P(T \mid Positivo)\,P(\bar{D} \mid Positivo)\,P(F \mid Positivo)\,P(Positivo)$$

$$= \left(\frac{2}{20}\right)\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{2}{20}\right)\left(\frac{2}{20}\right)(.5) \cong 0.000075$$

$$P(\bar{E} \mid Neg)\,P(T \mid Neg)\,P(\bar{D} \mid Neg)\,P(F \mid Neg)\,P(Neg) =$$

$$= \left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{2}{20}\right)\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{1}{20}\right)(.5) = 0.000005625$$

$\therefore$ Positivo a Covid

Paciente 1) tos y fiebre ($\bar{E}$,T,$\bar{D}$,F)

$$P(Positivo \mid E,T,D,F) = 0.00004822531$$

$$P(Negativo|E,T,D,F) = 0$$

Pronóstico clínico: Positivo a COVID

Si aplicamos smoothing

$$P(Positivo|E,T,D,F) = 0.000075$$

$$P(Negativo|E,T,D,F) = 0.00005625$$

Pronóstico clínico: Positivo a COVID

Paciente 2) escurrimiento nasal y fiebre (E,T̅,D̅,F)

$$P(Positivo|E,T,D,F) = 0.00004822531$$

$$P(Negativo|E,T,D,F) = 0$$

Pronóstico clínico: Positivo a COVID

Si aplicamos smoothing

$$P(Positivo|E,T,D,F) = 0.000075$$

$$P(Negativo|E,T,D,F) = 0.00005625$$

Pronóstico clínico: Positivo a COVID

Paciente 3) escurrimiento nasal y dolor de cabeza (E,T̅,D,F̅)

$$P(Positivo|E,T,D,F) = 0.000193$$

$$P(Negativo|E,T,D,F) = 0.000144$$

Pronóstico clínico: Positivo a COVID

Si aplicamos smoothing

$$P(Positivo|E,T,D,F) = 0.000168$$

$$P(Negativo|E,T,D,F) = 0.00015$$

Pronóstico clínico: Positivo a COVID

NOTA 1: Para el ejercicio 1 y 2 se empleó directamente el realizar los apuntes a mano, en el caso del ejercicio 4 también se realizó a mano un caso, sin embargo, los demás casos se realizaron mediante tablas de Excel.

NOTA 2: El video para la sustitución trigonométrica es el siguiente: https://youtu.be/qvZFQ36Mj3k