Code Math

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

ESTÁNDAR IEEE 754

Derivada Numérica

Métodos numéricos

Universidad San Buenaventura Cali

DERIVADA NUMÉRICA

Es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma.

Por definición la derivada de una función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las aproximaciones numéricas que podamos hacer para $h > 0$ serán:

Diferencias hacia adelante:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diferencias hacia atrás:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - \ f(x_0+h)}{h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 4\, f(x_0 - h) + 3\, f(x_0)}{2h}$$

Tres puntos:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4\, f(x_0+h) - \ f(x_0+2h)}{2h}$$

La aproximación de la derivada por este método entrega resultados aceptables con un determinado error. Para minimizar los errores se estima que el promedio de ambas, entrega la mejor aproximación numérica al problema dado:

Diferencias centrales:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 8\,f(x_0 - h) + 8\,f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h}$$

$$f''^{(x_0)} = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

EJEMPLO:

Vamos a aproximar la derivada para la función $f(x) = e^{2x}$ con $x_0 = 1.1$ y $h = 0.1$. usaremos el hecho de que $f'(1.1) = 18.050$ para determinar el error absoluto y relativo producido por cada formula.

SOLUCIÓN:

se requieren los valores de $f(x_0), f(x_0 + h)\ y\ f(x_0 + 2h)$

tomando los valores dados, al reemplazar $f(x) = e^{2x}$ tenemos entonces que:

$f(x_0) = f(1.1) = e^{2(1.1)} = 9.025$

$f(x_0 + h) = f(1.2) = e^{2(1.1+0.1)} = 11.023$

$f(x_0 + 2h) = f(1.3) = e^{2(1.1+2(0.1))} = 13.464$

Ahora derivaremos con la formula $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$f'^{(1.1)} = \frac{11.023 - 9.025}{0.1} = 19.980$$

$$E_A = |18.050 - 19.980| = 1.930$$

$$E_R = \frac{1.930}{18.050} * 100\% = 10.7\%$$

Ahora utilizamos la formula $f'(x_0) = \frac{-3f(x_0)+4\,f(x_0+h)-\,f(x_0+2h)}{2h}$

$$f'^{(1.1)} = \frac{-3(9.025) + 4(11.023) - 13.464}{2(0.1)} = 17.765$$

$$E_A = |18.050 - 17.765| = 0.285$$

$$E_R = \frac{0.285}{18.050} * 100\% = 1.58\%$$

Usando las fórmulas se requiere:

$$f(x_0 - 2h) = f(0.9) = e^{2\left(1.1-2(0.1)\right)} = 6.050$$

$$f(x_0 - h) = f(1.0) = e^{2(1.1-\,0.1)} = 7.389$$

$$f(x_0 + h) = f(1.2) = e^{2(1.1+0.1)} = 11.023$$

$$f(x_0 + 2h) = f(1.3) = e^{2\left(1.1+2(0.1)\right)} = 13.464$$

Para aplicar la formula $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-\,f(x_0-h)}{2h}$

$$f'^{(x_0)} = \frac{11.023 - 7.389}{2(0.1)} = 18.170$$

$$E_A = |18.050 - 18.170| = 0.120$$

$$E_R = \frac{0.120}{18.050} * 100\% = 0.665\%$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 8\,f(x_0 - h) + 8\,f(x_0 + h) - \ f(x_0 + 2h)}{12h}$$

$$f'^{(x_0)} = \frac{6.050 - 8(7.389) + 8(11.023) - 13.464}{12(0.1)} = 18.048$$

$$E_A = |18.050 - 18.048| = 0.002$$

$$E_R = \frac{0.002}{18.050} * 100\% = 0.009\%$$

Finalmente vamos a requerir los valores:

$$f(x_0 - 2h) = \ f(0.9) = e^{2\left(1.1 - 2(0.1)\right)} = \ 6.050$$

$$f(x_0 - h) = \ f(1.0) = e^{2(1.1 - \ 0.1)} = \ 7.389$$

$$f(x_0) = \ f(1.1) = e^{2(1.1)} = \ \ 9.025$$

Usando la fórmula: $f'(x_0) = \frac{f(x_0) - \ f(x_0 - h)}{h}$

$$f'^{(x_0)} = \frac{9.025 - 7.389}{0.1} = 16.360$$

$$E_A = |18.050 - 16.360| = 1.69$$

$$E_R = \frac{1.69}{18.050} * 100\% = 9.363\%$$

Ahora utilizamos la formula $f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h)-4\,f(x_0-h)+3\,f(x_0)}{2h}$

$$f'^{(x_0)} = \frac{6.050 - 4(7.389) + 3(9.025)}{2(0.1)} = 17.845$$

$$E_A = |18.050 - 17.845| = 0.205$$

$$E_R = \frac{0.002}{18.050} * 100\% = 1.136\%$$