MÉTODO DE BISECCIÓN

Método de Bisección

Métodos numéricos

Universidad San Buenaventura Cali

MÉTODO DE BISECCIÓN

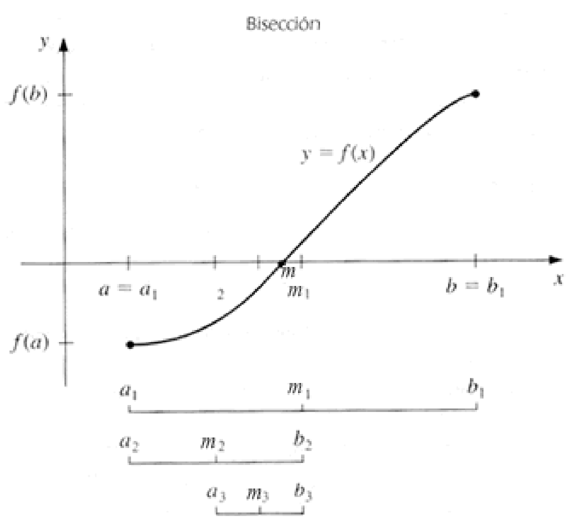
El método de bisección es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el sub intervalo que tiene la raíz. Este método se basa en el teorema del valor intermedio:

Toda función continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$ toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, son la imagen de al menos un valor en el intervalo.

Si $f(a)$ y $f(b)$, tienen signos opuestos $f(a) * f(b) < 0$, cero sería un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, esto afirma que hay un p, en $[a,b]$ que cumple $f(p) = 0$. De esta manera se garantiza la existencia de una solución para la ecuación $f(x) = 0$.

Básicamente el método consiste en dividir a la mitad repetitivamente los sub intervalos de $[a,b]$ y en cada paso localizar la mitad que contiene a la solución, m.

$$\mathbf{m = \frac{a_1 + b_1}{2}}$$



Como en cada iteración el intervalo es la mitad del intervalo anterior, podemos concluir que en la iteración n la solución m se encuentra en un intervalo de longitud

$$E_a = |\mathbf{m} - m_n| \leq \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2^n}$$

Para $n \geq 1$. Esto nos permite tener una idea de que tan cerca estamos de la solución real, incluso podemos usar esto para estimar el número de iteraciones necesarias para alcanzar una precisión dada

EJEMPLO:

Aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$ hasta que $|e_a| < 1\%$.

SOLUCIÓN:

La única raíz de $f(x)$ se localiza en el intervalo $[1,1.5]$. Así que este intervalo es nuestro punto de partida; sin embargo, para poder aplicar el método de bisección debemos revisar que $f(1)$ y $f(1.5)$ tengan signos opuestos.

En efecto, tenemos que

$$f(1) = e^{-1} - \ln 1 = e^{-1} > 0$$

Mientras que:

$$f(1.5) = e^{-1.5} - \ln(1.5) = -0.18233 < 0$$

Cabe mencionar que la función $f(x)$ sí es contínua en el intervalo $[1,1.5]$. Así pues, tenemos todos los requisitos satisfechos para poder aplicar el método de bisección. Comenzamos:

1. Calculamos el punto medio (que es nuestra primera aproximación a la raíz):

$$x_{r1} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

2. Evaluamos:

$$f(1.25) = e^{-1.25} - \ln(1.25) = 0.0636 > 0$$

3. Para identificar mejor en que nuevo intervalo se encuentra la raíz, hacemos la siguiente tabla:

$\boldsymbol{f(1)}$	$\boldsymbol{f(1.25)}$	$\boldsymbol{f(1.5)}$
+	+	-

Por lo tanto, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25,1.5]$.

En este punto, vemos que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, puesto que solamente tenemos la primera aproximación. Así, repetimos el proceso con el nuevo intervalo $[1.25,1.5]$.

Calculamos el punto medio (que es nuestra segunda aproximación a la raíz):

$$x_{r2} = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado, puesto que contamos ya con la aproximación actual y la aproximación previa:

$$e_r = \frac{x_{r2}-x_{r1}}{x_{r2}+x_{r1}} = 0.04$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso.

Evaluamos:

$f(1.375) = e^{-1.375} - \ln(1.375) = -0.06561 < 0$, y hacemos la tabla:

$f(1.25)$	$f(1.375)$	$f(1.5)$
+	-	-

Así, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.375]$.

Calculamos el punto medio:

$$x_{r1} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

Y calculamos el nuevo error aproximado:

$$e_r = \frac{x_{r2} - x_{r1}}{x_{r2} + x_{r1}} = 0.02$$

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1.25	
1.375	0.04
1.3125	0.02
1.28125	-0.03
1.296875	-0.005
1.3046875	0.009

Así, obtendremos como aproximación a la raíz $x_6 = 1.3046875$