

# 鎖を振り回したい

中山大樹

2019 年 2 月 23 日

## 第 I 部

### はじめに

鎖を重力下でぐるぐる回すとある安定な形状をとる。回し方によって上端のみが節、2 箇所が節、3 箇所が節、とバリエーションが見られる。

私は中学時代にはこの現象が面白いなーと思って、家にある鎖 (空気抵抗の関係 (?) で線密度が大きい紐＝金属鎖がやりやすい) を回してその形状を観察していた。

大学 2 回生になり、プログラミングを勉強したタイミングで「鎖を振り回すやつを数値シミュレーションしたい」と思うのは極めて自然だった。当時は HSP でシミュレーションを書いた。まだ windows 機で開発していた時期だったし、可視化の簡単さを思うと HSP はなかなかいいチョイスだったと思う。まだ解析力学をやっていない時期なので複雑な剛体の系だと歯が立たず、 $N$  質点をバネで連結した系をシミュレーションした。しかし、バネと鎖は明らかに見た目が違い、おそらくバネ定数を大きくして行けば望む挙動をするのだろうとは思われたが、それはそのまま数値シミュレーションを困難にすることを示している。当時の HSP で書いたコードでは必要な計算性能が得られず、当時はそこで断念した。

大学 4 回生の頃になり、解析力学も履修し Python という武器も手に入れた私はラグランジアンを記号的に自動計算するプログラムを Python で書いた。これは一定の成功は収め、低速ながらも  $N$  が比較的大きい場合でも巨大なラグランジュ運動方程式を顕に書き下し、例えば 5 連振り子の 3 次元的な動きを可視化することができていた。しかし、やはり計算速度は低速だったし、当時の私は「どうやって振り回すを表現するんだろうなー」のあたりで止まっていた。現実の系を思うと振り子の上端の位置を強制的に変更しなければならないという気分であって、そんな形の外力をどう入れるべきかがあまりわかっていなかった。

マスターの 1 回生になり、紐を重力下で回転させたときに安定になったとしたらその形は簡単に計算できるなと気づいた。これは実際簡単に定式化できた。実際の安定解を得る部分は数値計算に頼らなければならなかったがこれはかなり面白い結果が出たと思う。同じ時期の春の物理学会で全く同じことを発表した人がいたが、あの発表ではかなり近似して計算していて、最終的な結論が私と真逆だった。とにかくどういう計算をしたのかは後でまとめる。

こうして、連続紐の場合に安定な状態になった後の形だけなら理解することができた。しかし、結局ダイナミクスがわかっていないので、例えば静止している紐をぐるぐるしたときに節が何個になるかみたいなことはできてない (これはいつまでも無理そう)。ダイナミクスを見ようと思ったときに紐のまま扱ってもいいんだが、当初の試みである  $N$  重振り子で  $N$  が十分に大きい (100 位を思っている) ときならそれは紐だろう鎖だろうという気持ちを大事にすることにした。

なので多重振り子なのである。

## 第 II 部

# 多重振り子の運動方程式と数値的解法

$n$  個の振り子が直列に繋がった系について、運動方程式やハミルトニアンを導出し、 $n$  が大きいときに数値計算でいい感じに振り子を動かすことを目指す。

ハミルトニアンやラグランジュ運動方程式の導出は [1] を大いに参考にした。数値計算の具体的な手法については [2],[3] を参考にした。

## 1 ハミルトニアン、ラグランジアン、運動方程式の導出

### 1.1 $n$ 質点 2 次元

$n$  個の重りが直列に連結された多重振り子がある。これらは重力と逆向きを  $y$  軸とする  $xy$  平面内で回転運動するものとする。重力加速度を  $g$  とする。

各重り  $i$  は質量  $m_i$  を持つ。重り 1 は原点  $O$  に固定された長さ  $l_1$  の糸で吊るされている。その他の重り  $i (i = 2, 3, \dots, n)$  は重り  $i - 1$  に固定された長さ  $l_i$  の糸で吊るされている。

この系のラグランジュ運動方程式を求めていく。

重り  $i (i = 1, 2, \dots, n)$  の  $y$  軸に対する角度を  $\theta_i$  とする。重り  $i$  の位置  $(x_i, y_i)$  は

$$x_i = \sum_{j=1}^i l_j \sin \theta_j \quad (1)$$

$$y_i = - \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j \quad (2)$$

となる。 $n = 3$  のときに具体的に書き下してみると

$$(x_1, y_1) = (l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1)$$

$$(x_2, y_2) = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2)$$

$$(x_3, y_3) = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3, -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 - l_3 \cos \theta_3)$$

となる。

運動エネルギーを求めたいので、重り  $i$  の速度  $v_i$  の 2 乗 ( $= v_i^2$ ) を考える。 $v_i^2$  は位置の各成分の時間微分

の2乗の和なので

$$\begin{aligned}
v_i^2 &= \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \\
&= \left( \sum_{j=1}^i l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^i l_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 (\cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k (\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k) \\
&= \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k)
\end{aligned} \tag{3}$$

となる。 $n=3$ のときに具体的に書き下してみると

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
v_2^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
v_3^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \\
&\quad + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos (\theta_2 - \theta_3) + 2l_3 l_1 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \cos (\theta_3 - \theta_1)
\end{aligned}$$

となる。

ここで、重り  $i (i=1, 2, \dots, n)$  の運動エネルギー  $T_i$  および位置エネルギー  $U_i$  は

$$\begin{aligned}
T_i &= \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
&= \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k)
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
U_i &= m_i g y_i \\
&= -m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。全運動エネルギー  $T$  および全位置エネルギー  $U$  は

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^n T_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1}^n U_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left( -m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j \right) \\
&= - \sum_{i=1}^n m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。 $n = 3$  のときに具体的に書き下してみると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left( (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \right) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + m_3 l_3 l_1 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\
&= \frac{1}{2} \left( (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \right) \\
&\quad + (m_2 + m_3) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&\quad + m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$U = -(m_1 + m_2 + m_3) g l_1 \cos \theta_1 - (m_2 + m_3) g l_2 \cos \theta_2 - m_3 g l_3 \cos \theta_3 \tag{9}$$

となる。これを見ると後のことを考えて  $T, U$  を変形しておいた方が良さそうに見える。新たに

$$M_d = \sum_{i=d}^n m_i \tag{10}$$

において  $T, U$  を整理すると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( M_i l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} M_i l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) + \sum_{j=i+1}^n M_j l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$U = - \sum_{i=1}^n M_i g l_i \cos \theta_i \tag{12}$$

となる。ハミルトニアン  $H$  は  $H = T + U$  で求まる。ここではハミルトニアンについてこれ以上書き下さない。

一般にラグランジュ関数  $L$  は  $L = T - U$  であり、 $\theta_d (d = 1, 2, \dots, n)$  に関するラグランジュ運動方程式は以下の関係式から求めることができる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} = 0 \tag{13}$$

今回の多重振り子について具体的に求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= M_d l_d^2 \dot{\theta}_d + \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) \right) \times 2 \\ &= M_d l_d^2 \dot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= M_d l_d^2 \ddot{\theta}_d \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) - \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) - \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \sin(\theta_d - \theta_i) \\ - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} &= \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \sin(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) \\ &+ M_d g l_d \sin \theta_d\end{aligned}\quad (15)$$

となる。ゆえに、 $\theta_d (d = 1, 2, \dots, n)$  に関するラグランジュ運動方程式は

$$\begin{aligned}0 &= M_d l_d^2 \ddot{\theta}_d \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ M_d g l_d \sin \theta_d\end{aligned}\quad (16)$$

となる。

$n = 3$  について具体的に書き下すと

$$\begin{cases} 0 &= M_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + M_1 g l_1 \sin \theta_1 \\ &+ M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + M_3 l_1 l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &+ M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + M_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ 0 &= M_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ &+ M_2 l_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + M_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &+ M_3 l_2 l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + M_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ 0 &= M_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + M_3 g l_3 \sin \theta_3 \\ &+ M_3 l_3 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) + M_3 l_3 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ &+ M_3 l_3 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_3 - \theta_1) + M_3 l_3 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \end{cases}\quad (17)$$

となる。

数値計算がしやすいように上記のラグランジュ運動方程式を  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}^2, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, C, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を使って書き直すと

$$C \ddot{\boldsymbol{\theta}} = S \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 - \mathbf{h}\quad (18)$$

となる。ただし

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = {}^t(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \dots, \ddot{\theta}_n) \quad (19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = {}^t(\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dots, \dot{\theta}_n^2) \quad (20)$$

$$\mathbf{h} = {}^t(M_1 g l_1 \sin \theta_1, M_2 g l_2 \sin \theta_2, \dots, M_n g l_n \sin \theta_n) \quad (21)$$

$$C_{i,j} = M_{\max(i,j)} l_i l_j \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (22)$$

$$S_{i,j} = \begin{cases} M_i l_i l_j \sin(\theta_i - \theta_j) & i \geq j \\ M_j l_j l_i \sin(\theta_j - \theta_i) & i < j \end{cases} \quad (23)$$

である。ただし  $\cos(\theta_d - \theta_d) = 1$ ,  $\sin(\theta_d - \theta_d) = 0$  に注意。<sup>\*1</sup>

$n = 3$  のときに（対称性を意識しつつ）具体的に書き下して見ると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_1 l_1^2 & M_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & M_3 l_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\ M_2 l_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & M_2 l_2^2 & M_3 l_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ M_3 l_3 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) & M_3 l_3 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) & M_3 l_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & M_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) & M_3 l_1 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) \\ M_2 l_2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & M_3 l_2 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \\ M_3 l_3 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) & M_3 l_3 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 g l_1 \sin \theta_1 \\ M_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ M_3 g l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。

また、各角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、式 (16) より

$$\begin{aligned} & M_d l_d^2 \ddot{\theta}_d \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ M_d g l_d \sin \theta_d \\ &= f_d \end{aligned} \quad (25)$$

となる。 $f_d$  の具体形は特に決まっていらないが、典型的にありがちな力として、角速度に比例する抵抗  $\lambda_d \dot{\theta}_d$  と外力  $\sigma_d$  がある場合は

$$f_d = \sigma_d - \lambda_d \dot{\theta}_d \quad (26)$$

となる。

## 1.2 $n$ 質点 3 次元

$n$  個の重りが直列に連結された多重振り子がある。これらは重力と逆向きを  $z$  軸、とする  $xyz$  空間内で回転運動するものとする。系は右手系にとる。重力加速度を  $g$  とする。

各重り  $i$  は質量  $m_i$  を持つ。重り 1 は原点  $O$  に固定された長さ  $l_1$  の糸で吊るされている。その他の重り  $i (i = 2, 3, \dots, n)$  は重り  $i-1$  に固定された長さ  $l_i$  の糸で吊るされている。

<sup>\*1</sup>  $R_{i,j}$  において  $j \rightarrow j+1$  とすると行列  $R$  の要素を 1 つ右に進むことに対応する。これいつまで経っても覚えられない。

この系のラグランジュ運動方程式を求めていく。

重り  $i (i = 1, 2, \dots, n)$  の  $z$  軸に対する角度を  $\theta_i$ 、 $x$  軸に対する角度を  $\phi_i$  とする。重り  $i$  の位置  $(x_i, y_i, z_i)$  は

$$x_i = \sum_{j=1}^i l_j \sin \theta_j \cos \phi_j \quad (27)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^i l_j \sin \theta_j \sin \phi_j \quad (28)$$

$$z_i = - \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j \quad (29)$$

となる。重り  $i$  の速度  $v_i$  の 2 乗 ( $= v_i^2$ ) は

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \\ &= \left( \sum_{j=1}^i \left( l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \cos \phi_j - l_j \dot{\phi}_j \sin \theta_j \sin \phi_j \right) \right)^2 \\ &\quad + \left( \sum_{j=1}^i \left( l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \sin \phi_j + l_j \dot{\phi}_j \sin \theta_j \cos \phi_j \right) \right)^2 \\ &\quad + \left( \sum_{j=1}^i l_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \right)^2 \end{aligned}$$

となるが、この先を人力で計算するのは無謀なのでプログラムで計算する。Python の記号計算ライブラリとして有名な sympy を用いて計算した。<sup>\*2</sup>

運動方程式は以下の形になる。

$$\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\phi}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix} [\dot{\theta} \dot{\phi}] - \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

各成分は以下のようになる。

$$A11_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} (\cos(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j) \quad (31)$$

$$A12_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} \sin(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \sin \theta_j \quad (32)$$

$$A21_{ij} = -l_i l_j M_{\max(i,j)} \sin(\phi_i - \phi_j) \sin \theta_i \cos \theta_j \quad (33)$$

$$A22_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} \cos(\phi_i - \phi_j) \sin \theta_i \sin \theta_j \quad (34)$$

$$B11_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} (\cos(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \sin \theta_j - \sin \theta_i \cos \theta_j) \quad (35)$$

$$B12_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} \cos(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \sin \theta_j \quad (36)$$

$$B21_{ij} = B22_{ij} = -l_i l_j M_{\max(i,j)} \sin(\phi_i - \phi_j) \sin \theta_i \sin \theta_j \quad (37)$$

$$C1_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} \sin(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \cos \theta_j \quad (38)$$

$$C2_{ij} = l_i l_j M_{\max(i,j)} \cos(\phi_i - \phi_j) \sin \theta_i \cos \theta_j \quad (39)$$

---

<sup>\*2</sup> この後に出てくる運動エネルギーの計算と同じ、具体的な  $N$  の場合に運動方程式を計算させ、その結果を眺めて一般系を類推している。

$$\mathbf{g}_i = l_i g M_i \sin \theta_i \quad (40)$$

ただし

$$\boldsymbol{\theta} \dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\phi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \dot{\phi}_N \end{bmatrix} \quad (41)$$

には注意。

$N = 1$  の場合に具体的に書き下してみると

$$\begin{bmatrix} l_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & l_1^2 M_1 \sin^2 \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_1^2 M_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\phi}_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1^2 M_1 \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 g M_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \dot{\phi}_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 \\ \ddot{\phi}_1 = \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_1 \cot \theta_1 \end{cases} \quad (43)$$

となる。ただし  $\cot x = 1/\tan x$ 。  $\dot{\phi}_1 = 0$  では普通に 2 次元系の振り子になり、 $\theta_1 = 0$  だと  $\phi_1$  は不定になる様子も表されている。

運動エネルギーも重要なので求めたいが、sympy で一般項を求めるのは大変なので  $v_i^2$  の最初の 3 項を書き下し、ここから一般の表現を類推する。 $i = 1, 2, 3$  の場合の  $v_i^2$  は

$$v_1^2 = l_0^2 \left( \dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0 + \dot{\theta}_0^2 \right) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= l_0^2 \left( \dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0 + \dot{\theta}_0^2 \right) + l_1^2 \left( \dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \right) \\ &\quad + 2l_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (\cos(\phi_0 - \phi_1) \cos \theta_0 \cos \theta_1 + \sin \theta_0 \sin \theta_1) \\ &\quad + 2l_0 l_1 \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_0 - \phi_1) \sin \theta_0 \sin \theta_1 \\ &\quad - 2l_0 l_1 \dot{\phi}_0 \dot{\theta}_1 \sin(\phi_0 - \phi_1) \sin \theta_0 \cos \theta_1 \\ &\quad + 2l_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_0 - \phi_1) \cos \theta_0 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (45)$$



$$\begin{aligned}
v_3^2 = & l_0^2 \left( \dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0 + \dot{\theta}_0^2 \right) + l_1^2 \left( \dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \right) + l_2^2 \left( \dot{\phi}_2^2 \sin^2 \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\
& + 2l_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (\cos(\phi_0 - \phi_1) \cos \theta_0 \cos \theta_1 + \sin \theta_0 \sin \theta_1) \\
& + 2l_0 l_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 (\cos(\phi_0 - \phi_2) \cos \theta_0 \cos \theta_2 + \sin \theta_0 \sin \theta_2) \\
& + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos(\phi_1 - \phi_2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\
& + 2l_0 l_1 \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_0 - \phi_1) \sin \theta_0 \sin \theta_1 \\
& + 2l_0 l_2 \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_0 - \phi_2) \sin \theta_0 \sin \theta_2 \\
& + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
& - 2l_0 l_1 \dot{\phi}_0 \dot{\theta}_1 \sin(\phi_0 - \phi_1) \sin \theta_0 \cos \theta_1 \\
& + 2l_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_0 - \phi_1) \sin \theta_1 \cos \theta_0 \\
& - 2l_0 l_2 \dot{\phi}_0 \dot{\theta}_2 \sin(\phi_0 - \phi_2) \sin \theta_0 \cos \theta_2 \\
& + 2l_0 l_2 \dot{\theta}_0 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_0 - \phi_2) \sin \theta_2 \cos \theta_0 \\
& - 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
& + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin \theta_2 \cos \theta_1
\end{aligned} \tag{46}$$

となる。ここから  $v_i^2$  を類推すると

$$\begin{aligned}
v_i^2 = & \sum_{j=1}^i l_j^2 \left( \dot{\phi}_j^2 \sin^2 \theta_j + \dot{\theta}_j^2 \right) \\
& + \sum_{j=1}^i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k (\cos(\phi_j - \phi_k) \cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k) \\
& + \sum_{j=1}^i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i l_j l_k \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k \cos(\phi_j - \phi_k) \sin \theta_j \sin \theta_k \\
& + 2 \sum_{j=1}^i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\phi}_k \sin(\phi_j - \phi_k) \cos \theta_j \sin \theta_k
\end{aligned} \tag{47}$$

となる。この形だと運動エネルギー  $T$  を求めるのは簡単で、例によって  $M_i = \sum_{j=i}^N m_j$  を用いると

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \\
= & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N l_i^2 M_i \left( \dot{\phi}_i^2 \sin^2 \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \right) \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N l_i l_j M_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j (\cos(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j) \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N l_i l_j M_j \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j \cos(\phi_i - \phi_j) \sin \theta_i \sin \theta_j \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N l_i l_j M_{\max(i,j)} \dot{\theta}_i \dot{\phi}_j \sin(\phi_i - \phi_j) \cos \theta_i \sin \theta_j
\end{aligned} \tag{48}$$

となる。<sup>\*3</sup>当たり前だが位置エネルギー  $U$  は 2 次元系の位置エネルギー式 (12) と変わらない。

## 2 数値計算

### 2.1 無次元化

基本的には  $g$  に押し付ける。

### 2.2 陽解法

やる

### 2.3 陰解法

### 2.4 質点 2 重振り子

$l = l_2/l_1$ 、 $m = m_2/(m_1 + m_2)$ 、 $g \rightarrow g/l_1/(m_1 + m_2)$  として無次元化する。 $(g[s^{-2}]$  の無次元化が不十分だが、時間の次元は適当に取ってくればいいたいだろう)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & ml \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ ml \cos(\theta_1 - \theta_2) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & ml \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ ml \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g \sin \theta_1 \\ mgl \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 \\ ml\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - mgl \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{ml^2 - m^2 l^2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \begin{bmatrix} ml^2 & -ml \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -ml \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 \\ ml\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - mgl \sin \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 &= \frac{ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 - m \cos(\theta_2 - \theta_1)(\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2)}{1 - m \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)(ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1)}{l - ml \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \end{cases} \quad (50)$$

これを  $\vec{x} = {}^t(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  に対する微分方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}) \quad (51)$$

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \frac{ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 - m \cos(\theta_2 - \theta_1)(\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2)}{1 - m \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)(ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1)}{l - ml \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \end{bmatrix} \quad (52)$$

と解釈する。これに対して Gauss-Legendre 求積法に基づく Runge-Kutta 法を適用して数値解を求める。

---

<sup>\*3</sup> 1 つ目の  $\sum$  は 2 つ目と 3 つ目に吸収させることもできるが、まあこのままの方が見やすいでしょう。

時間を  $t$  から  $t+h$  まで進める。2 段 4 次の場合は

$$\vec{k}_1 = f\left(\vec{x}(t) + ha_{11}\vec{k}_1 + ha_{12}\vec{k}_2\right) \quad (53)$$

$$\vec{k}_2 = f\left(\vec{x}(t) + ha_{21}\vec{k}_1 + ha_{22}\vec{k}_2\right) \quad (54)$$

$$\vec{x}(t+h) = \vec{x}(t) + h\frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \quad (55)$$

$$a_{11} = 1/4 \quad (56)$$

$$a_{12} = 1/4 - \sqrt{3}/6 \quad (57)$$

$$a_{21} = 1/4 + \sqrt{3}/6 \quad (58)$$

$$a_{22} = 1/4 \quad (59)$$

を用いる。 $k_1, k_2$  はニュートン法で求める。

## 参考文献

- [1] 山田泰司. カオス人形のしくみ. <https://www.aihara.co.jp/~taiji/pendula-equations/present.html>, 1996.
- [2] 牧野淳一郎. システム数理 IV. [http://jun.artcompsci.org/kougi/system\\_suuri4\\_1999/all/all.html](http://jun.artcompsci.org/kougi/system_suuri4_1999/all/all.html), 1998.
- [3] シキノ. 陰的 RUNGE-KUTTA 法. <http://slpr.sakura.ne.jp/qp/implicit-runge-kutta/>, 2018.