

# 多重振り子の運動方程式と数値的解法

中山大樹

2018 年 12 月 18 日

## 1 はじめに

$n$  個の振り子が直列に繋がった系について、運動方程式やハミルトニアンを導出し、 $n$  が大きいときに数値計算でいい感じに振り子を動かすことを目指す。

ハミルトニアンやラグランジュ運動方程式の導出は [1] を大いに参考にした。数値計算の具体的な手法については [2],[3] を参考にした。

### 1.1 ハミルトニアン、ラグランジアン、運動方程式の導出

## 2 $n$ 質点 2 次元

$n$  個の重りが直列に連結された多重振り子がある。これらは重力と逆向きを  $y$  軸とする  $xy$  平面内で回転運動するものとする。重力加速度を  $g$  とする。

各重り  $i$  は質量  $m_i$  を持つ。重り 1 は原点  $O$  に固定された長さ  $l_1$  の糸で吊るされている。その他の重り  $i(i = 2, 3, \dots, n)$  は重り  $i - 1$  に固定された長さ  $l_i$  の糸で吊るされている。

この系のラグランジュ運動方程式を求めていく。

重り  $i(i = 1, 2, \dots, n)$  の  $y$  軸に対する角度を  $\theta_i$  とする。重り  $i$  の位置  $(x_i, y_i)$  は

$$x_i = \sum_{j=1}^i l_j \sin \theta_j \quad (1)$$

$$y_i = - \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j \quad (2)$$

となる。 $n = 3$  のときに具体的に書き下してみると

$$(x_1, y_1) = (l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1)$$

$$(x_2, y_2) = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2)$$

$$(x_3, y_3) = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3, -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 - l_3 \cos \theta_3)$$

となる。

運動エネルギーを求めたいので、重り  $i$  の速度  $v_i$  の 2 乗 ( $= v_i^2$ ) を考える。 $v_i^2$  は位置の各成分の時間微分

の 2 乗の和なので

$$\begin{aligned}
v_i^2 &= \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \\
&= \left( \sum_{j=1}^i l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^i l_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 (\cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k (\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k) \\
&= \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k)
\end{aligned} \tag{3}$$

となる。 $n = 3$  のときに具体的に書き下してみると

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
v_2^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
v_3^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \\
&\quad + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos (\theta_2 - \theta_3) + 2l_3 l_1 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \cos (\theta_3 - \theta_1)
\end{aligned}$$

となる。

ここで、重り  $i (i = 1, 2, \dots, n)$  の運動エネルギー  $T_i$  および位置エネルギー  $U_i$  は

$$\begin{aligned}
T_i &= \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
&= \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k)
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
U_i &= m_i g y_i \\
&= -m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。全運動エネルギー  $T$  および全位置エネルギー  $U$  は

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^n T_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos (\theta_j - \theta_k) \\
U &= \sum_{i=1}^n U_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left( -m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j \right) \\
&= - \sum_{i=1}^n m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \theta_j
\end{aligned} \tag{6}$$

となる。 $n = 3$  のときに具体的に書き下してみると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left( (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \right) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + m_3 l_3 l_1 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\
&= \frac{1}{2} \left( (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \right) \\
&\quad + (m_2 + m_3) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&\quad + m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\
U &= -(m_1 + m_2 + m_3) g l_1 \cos \theta_1 - (m_2 + m_3) g l_2 \cos \theta_2 - m_3 g l_3 \cos \theta_3
\end{aligned}$$

となる。これを見ると後のことを考えて  $T, U$  を変形しておいた方が良さそうに見える。新たに

$$M_d = \sum_{i=d}^n m_i \quad (7)$$

とにおいて  $T, U$  を整理すると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^i l_j^2 \dot{\theta}_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^i l_j l_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( M_i l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} M_i l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) + \sum_{j=i+1}^n M_j l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \quad (8)
\end{aligned}$$

$$U = - \sum_{i=1}^n M_i g l_i \cos \theta_i \quad (9)$$

となる。ハミルトニアン  $H$  は  $H = T + U$  で求まる。ここではハミルトニアンについてこれ以上書き下さない。

一般にラグランジュ関数  $L$  は  $L = T - U$  であり、 $\theta_d (d = 1, 2, \dots, n)$  に関するラグランジュ運動方程式は以下の関係式から求めることができる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} = 0 \quad (10)$$

今回の多重振り子について具体的に求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= M_d l_d^2 \dot{\theta}_d + \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) \right) \times 2 \\ &= M_d l_d^2 \dot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i)\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= M_d l_d^2 \ddot{\theta}_d \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) - \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) - \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \sin(\theta_d - \theta_i) \\ - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} &= \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \sin(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) \\ &+ M_d g l_d \sin \theta_d\end{aligned}\quad (12)$$

となる。ゆえに、 $\theta_d (d = 1, 2, \dots, n)$  に関するラグランジュ運動方程式は

$$\begin{aligned}0 &= M_d l_d^2 \ddot{\theta}_d \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ &+ M_d g l_d \sin \theta_d\end{aligned}\quad (13)$$

となる。

$n = 3$  について具体的に書き下すと

$$\begin{cases} 0 &= M_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + M_1 g l_1 \sin \theta_1 \\ &+ M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + M_3 l_1 l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &+ M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + M_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ 0 &= M_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ &+ M_2 l_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + M_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &+ M_3 l_2 l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + M_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ 0 &= M_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + M_3 g l_3 \sin \theta_3 \\ &+ M_3 l_3 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) + M_3 l_3 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ &+ M_3 l_3 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_3 - \theta_1) + M_3 l_3 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \end{cases}\quad (14)$$

となる。

数値計算がしやすいように上記のラグランジュ運動方程式を  $\ddot{\theta}, \dot{\theta}^2, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, C, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を使って書き直すと

$$C \ddot{\theta} = S \dot{\theta}^2 - \mathbf{h}\quad (15)$$

となる。ただし

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = {}^t(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \dots, \ddot{\theta}_n) \quad (16)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = {}^t(\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dots, \dot{\theta}_n^2) \quad (17)$$

$$\mathbf{h} = {}^t(M_1 g l_1 \sin \theta_1, M_2 g l_2 \sin \theta_2, \dots, M_n g l_n \sin \theta_n) \quad (18)$$

$$C_{i,j} = M_{\max(i,j)} l_i l_j \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (19)$$

$$S_{i,j} = \begin{cases} M_i l_i l_j \sin(\theta_i - \theta_j) & i \geq j \\ M_j l_j l_i \sin(\theta_j - \theta_i) & i < j \end{cases} \quad (20)$$

である。ただし  $\cos(\theta_d - \theta_d) = 1$ ,  $\sin(\theta_d - \theta_d) = 0$  に注意。また  $R_{i,j}$  において  $j \rightarrow j+1$  とすると行列  $R$  の要素を 1 つ右に進むことに対応する（これいつまで経っても覚えられない）。

$n = 3$  のときに（対称性を意識しつつ）具体的に書き下して見ると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_1 l_1^2 & M_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & M_3 l_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\ M_2 l_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & M_2 l_2^2 & M_3 l_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ M_3 l_3 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) & M_3 l_3 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) & M_3 l_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & M_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) & M_3 l_1 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) \\ M_2 l_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 & M_3 l_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ M_3 l_3 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) & M_3 l_3 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 g l_1 \sin \theta_1 \\ M_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ M_3 g l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

また、各角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、式 (13) より

$$\begin{aligned} & M_d l_d^2 \ddot{\theta}_d \\ & + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=1}^{d-1} M_d l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ & + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_d - \theta_i) + \sum_{i=d+1}^n M_i l_d l_i \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_d - \theta_i) \\ & + M_d g l_d \sin \theta_d \\ & = f_d \end{aligned} \quad (22)$$

となる。 $f_d$  の具体形は特に決まてはいないが、典型的にありがちな力として、角速度に比例する抵抗  $\lambda_d \dot{\theta}_d$  と外力  $\sigma_d$  がある場合は

$$f_d = \sigma_d - \lambda_d \dot{\theta}_d \quad (23)$$

となる。

### 3 数値計算

#### 3.1 無次元化

基本的には  $g$  に押し付ける。

#### 3.2 陽解法

やる

### 3.3 陰解法

#### 3.3.1 質点2重振り子

$l = l_2/l_1$ 、 $m = m_2/(m_1 + m_2)$ 、 $g \rightarrow g/l_1/(m_1 + m_2)$  として無次元化する。 $(g[s^{-2}]$  の無次元化が不十分だが、時間の次元は適当に取ってくればいいたいだろう)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & ml \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ ml \cos(\theta_1 - \theta_2) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & ml \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ ml \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g \sin \theta_1 \\ mgl \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 \\ ml\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - mgl \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{ml^2 - m^2 l^2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \begin{bmatrix} ml^2 & -ml \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -ml \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 \\ ml\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - mgl \sin \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 - m \cos(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2)}{1 - m \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) (ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1)}{l - ml \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \end{cases} \quad (25)$$

これを  $\vec{x} = {}^t(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  に対する微分方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}) \quad (26)$$

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \frac{ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1 - m \cos(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2)}{1 - m \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) (ml\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1)}{l - ml \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

と解釈する。これに対して Gauss-Legendre 求積法に基づく Runge-Kutta 法を適用して数値解を求める。

時間を  $t$  から  $t+h$  まで進める。2 段 4 次の場合は

$$\vec{k}_1 = f(\vec{x}(t) + ha_{11}\vec{k}_1 + ha_{12}\vec{k}_2) \quad (28)$$

$$\vec{k}_2 = f(\vec{x}(t) + ha_{21}\vec{k}_1 + ha_{22}\vec{k}_2) \quad (29)$$

$$\vec{x}(t+h) = \vec{x}(t) + h \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \quad (30)$$

$$a_{11} = 1/4 \quad (31)$$

$$a_{12} = 1/4 - \sqrt{3}/6 \quad (32)$$

$$a_{21} = 1/4 + \sqrt{3}/6 \quad (33)$$

$$a_{22} = 1/4 \quad (34)$$

## 参考文献

- [1] 山田泰司. カオス人形のしくみ. <https://www.aihara.co.jp/~taiji/pendula-equations/present.html>, 1996.
- [2] 牧野淳一郎. システム数理 IV. [http://jun.artcompsci.org/kougi/system\\_suuri4\\_1999/all/all.html](http://jun.artcompsci.org/kougi/system_suuri4_1999/all/all.html), 1998.
- [3] シキノ. 陰的 RUNGE-KUTTA 法. <http://slpr.sakura.ne.jp/qp/implicit-runge-kutta/>, 2018.