人體動作與力學分析：作業三

一、 前言

動作捕捉系統所量測的運動學資料，最後皆會以離散的三維座標資料型態輸出，這些離散的資料型態在作業二、三中可直接用來計算旋轉矩陣、位置向量、與尤拉角，然而如果要計算對時間微分後的數值，無法對離散的資料直接做處理，必須先將其還原成可用方程式描述的連續型態，再對方程式微分，之後還原成離散的資料型態。Curve fitting 具有三種目的：1. 將離散的資料連續化；2. 降低量測本身的雜訊誤差；3. 將資料適當的平滑化（smooth）。為達到這三項目的，必須選擇一個最適合描述該資料形態的數學模型，不同的數學模型也會有不同的參數用以調校擬合後的結果。以多項式而言，方程式的階數會影響擬合後的多項式曲線與資料點間有多相似，若為一階代表使用直線擬合。擬合本身就帶有最佳化的目的，最常見的便是使用最小平方法的概念做最佳化的擬合，不論使用什麼數學方法做最佳化擬合，連續化後的方程式曲線與真值間仍有誤差存在，而以微分的特性而言，數值的變動愈劇烈，代表有愈多的峰值（Peaks）發生，微分後在峰值發生處的結果將會愈容易失真，為了避免因峰值造成的微分誤差，建議提升取樣頻率，並使用更好的濾波器來解決。本次作業的習題一，將會練習使用多項式數學模型對一筆離散數值資料做擬合、微分、與取值。

逆向動力學分析最後一步，是代入牛頓第二運動定律，從遠端已知的關節受力與關節力矩計算出近端關節的受力與力矩，平衡方程式的一側會是目前該物體的動量或角動量（Angular momentum）對時間的一次微分。要取得角動量的變化，必須知道該物體的慣性矩（Moment of inertia）與角加速度，角加速度可從角速度微分求得，而角速度可透過相對不動的 global 座標系統的尤拉角換算求得，也可以從尤拉參數（Euler parameters）、或是螺旋軸（Helical axis）定理取得。本作業習題二中將會使用第一種方法，銜接作業三取得的關節尤拉角，搭配習題一的 Curve fitting 進一步換算成相對該肢段局部座標系統的角速度與角加速度。

二、 預期目標

1. 瞭解使用多項式方程式實做 Curve fitting 的流程；
2. 瞭解使用旋轉矩陣與尤拉角計算剛體局部角速度、角加速度的計算方法；
3. 瞭解計算角速度、角加速度可能遭遇的數值問題與解決方法；
4. 比較由公式微分與離散數值微分兩者之差異。

三、 作業附件說明

- Hw3.xlsx：動作捕捉資料檔案。該檔紀錄了一位健康老年人在 10 米長的人行道上平地行走（level walking）時黏貼在骨盆及右腳肢段上的每顆反光標記點三維動態座標值；

- Hw3.py：主程式，將提取 Hw3.xlsx 中的反光標記點動態座標值，並呼叫自訂函式計算習題一與習題二要求的變數。

四、 習題一（30%）

1. 習題目標

請考慮以下函數式（一）及其一階導函數式（二）。本習題中，我們將使用最小平方法在區間 [0,2] 上進行數值擬合，以獲得一組多項式方程式的係數。接著，我們將計算這個多項式方程式在相同區間上的一階導函數值。最後，我們將比較原始函數及所獲得的多項式方程式的數值，藉此來比較不同階數的多項式方程式和抽樣點數對於原函數的擬合效果。

$$f(x) = \frac{1}{8*x^2 - 16*x + 9} \quad \text{（一）}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-(16*x - 16)}{(8*x^2 - 16*x + 9)^2} \quad \text{（二）}$$

請繪圖探討：

- 在相同等距抽樣點數的情況下，比較不同階數的多項式對於原函數及其一階導函數的擬合效果；
- 對於相同階數的多項式，比較不同等距抽樣點數對於原函數及其一階導函數的擬合效果。

2. 函式名稱

- PolyFit：使用最小平方法計算擬合離散資料的方程式；
- PolyDer：計算多項式方程式 n 次微分後的方程式係數；
- PolyVal：從多項式方程式係數反求對應的函數值。

3. 函式語法格式

- p = PolyFit (xi, yi , n)
- dp = PolyDer (p, dorder)
- yi = PolyVal (p, xi)

4. 函式輸入與輸出

- xi：一維離散資料的 x 值，維度 [nframes × 1]
- yi：一維離散資料的 y 值，維度 [nframes × 1]
- n：指定要擬合的多項式最高次的次方值，維度 [1]
- p、dp：多項式方程式的係數，由最高次至最低次，最後一項是常數，維度 [(n+1)]
- dorder：指定微分的階數，維度 [1]

5. 函式說明

撰寫時要自己想演算法，不可直接呼叫套件的 functions，大家做完之後可以使用

套件的 functions 來驗證數值是否正確。

五、 習題二（10%）

1. 習題目標

藉由作業二的函式可用於計算一步態周期小腿局部座標系統相對大腿局部座標系統的尤拉角，旋轉順序 ZXY。請使用最小平方法擬合 Z 軸旋轉角隨時間變化曲線的五階多項式方程式係數，並計算 Z 軸旋轉角對時間微分一次及二次的值。

2. 函式名稱

- Derivative：使用最小平方法與計算一維離散資料 n 次微分後所對應的離散資料值。

3. 函式語法格式

- dyi = Derivative(xi, yi , dorder)

4. 函式輸入與輸出

- xi：一維離散資料的 x 值，維度為 [nframes × 1] or [1 ×nframes]；
- yi：一維離散資料的 y 值，維度為 [nframes × 1] or [1 ×nframes]；
- dorder：指定微分的階數，維度為 [1]；
- dyi：一維離散資料微分後所對應之 y 值，維度為 [nframes × 1] or [1 ×nframes]。

5. 函式說明

Derivative 此函式的功能為對離散的數值資料做微分，輸出微分後的離散數值資料，由於微分時必須先知道每個資料點間的時間差，因此需輸入取樣頻率，輸入之 xi, yi,與輸出之 dyi 必須是相同維度。

六、 習題三（30%）

1. 習題目標

- 試由附件計算骨盆在動態過程相對自身局部座標系統的角速度及角加速度，旋轉順序 ZXY；
- 繪圖比較若由參考公式計算的骨盆角加速度與將角速度經離散資料數值微分一次的結果是否相同；
- 依據第二點所得之結果，撰寫 Rot2LocalAngular 函式。

2. 函式名稱

- Ang2LocalAngular：可依不同的旋轉順序與旋轉角，計算對應該局部座標系統的角速度；
- Rot2LocalAngular：從動態的旋轉矩陣求解對應該局部座標系統的角速度、角加速度。

3. 函式語法格式

- [AngVel, AngAcc] = Ang2LocalAngular (theta, seq, smprate)
- [AngVel, AngAcc] = Rot2LocalAngular (Rg2l, smprate)

4. 函式輸入

- theta：從 global 到 local 依 function 第二項輸入的旋轉順序所計算求得的尤拉角，維度為 [nframes × 3]；
- seq：求解尤拉角時所使用之旋轉順序，字串形態 '1 × 3'；
- smprate：動態捕捉過程所設定之取樣頻率(Hz)，維度為 [1]；
- Rg2l：從不動的 global 座標系統至動態的 local 座標系統，每個瞬間的旋轉矩陣值，維度為 [nframes × 3 × 3]。

5. 函式輸出

- AngVel：該肢段相對其局部座標系統三軸的角速度，維度為 [nframes × 3]；
- AngAcc：該肢段相對其局部座標系統三軸的角加速度，維度為 [nframes × 3]。

6. 函式說明

Ang2LocalAngular 此函式的功能是將從 global 座標系統轉至肢段局部座標系統的尤拉角轉換成相對該肢段局部座標系統的角速度、與角加速度。角加速度的計算可從公式，亦可將角速度再次微分，不過理論上是從公式取得會較為準確，因為角速度微分需再次 curve fitting，就會再失真一次。

Rot2LocalAngular 此函式的功能是將旋轉矩陣直接轉成角速度。撰寫此程式需注意，某些旋轉順序第二個旋轉角會跨越 gimbal lock 發生的角度，可能造成數值的不精確，因此必須避免採用這些可能造成數值問題的旋轉順序。

7. 參考公式

若旋轉順序為 zxy（Cardan Angle），旋轉角依序為θ_1、θ_2、θ_3：

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\theta_3 & 0 & -cos\theta_2 sin\theta_3\\ 0 & 1 & sin\theta_2\\ sin\theta_3 & 0 & cos\theta_2 cos\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}_2\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_3\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1\end{bmatrix} \quad (一)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\alpha_x\\ \alpha_y\\ \alpha_z\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}-\dot{\theta}_3 sin\theta_3 & 0 & \dot{\theta}_2 sin\theta_2 sin\theta_3-\dot{\theta}_3 cos\theta_2 cos\theta_3\\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 cos\theta_2\\ \dot{\theta}_3 cos\theta_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 sin\theta_2 cos\theta_3-\dot{\theta}_3 cos\theta_2 sin\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}cos\theta_3 & 0 & -cos\theta_2 sin\theta_3\\ 0 & 1 & sin\theta_2\\ sin\theta_3 & 0 & cos\theta_2 cos\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\\ \ddot{\theta}_1\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (二)$$

若旋轉順序為 yxy（Euler Angle），旋轉角依序為θ_1、θ_2、θ_3：

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0\\ cos\theta_2 & 0 & 1\\ -cos\theta_3 sin\theta_2 & sin\theta_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_3\end{bmatrix} \quad (三)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\alpha_x\\ \alpha_y\\ \alpha_z\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}\dot{\theta}_2 cos\theta_2 sin\theta_3+\dot{\theta}_3 sin\theta_2 cos\theta_3 & -\dot{\theta}_3 sin\theta_3 & 0\\ -\dot{\theta}_2 sin\theta_2 & 0 & 0\\ \dot{\theta}_3 sin\theta_3 sin\theta_2-\dot{\theta}_2 cos\theta_3 cos\theta_2 & \dot{\theta}_3 cos\theta_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_3\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0\\ cos\theta_2 & 0 & 1\\ -cos\theta_3 sin\theta_2 & sin\theta_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1\\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2\\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_3\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (四)$$

七、 問答題（30%）

1. （問答題，20%）在習題一中，我們透過繪圖比較不同階數的多項式方程式和抽樣點數對於原函數的擬合效果。
   A. 試著觀察你繪製出的結果，你認為在相同等距抽樣點數的情況下，提高多項式的階數必定能更準確地重建原函數及其一階導函數嗎？無論認同與否，皆請對觀察到的現象提出解釋，並以現有文獻佐證你的觀點。
   B. 如果仔細觀察繪製出的結果，應該會發現原函數及其一階導函數在區間兩側的重建表現通常比中間段還來的差。請討論可能造成此現象的原因，再以列點的方式提出至少四種可能的解決辦法，並以現有文獻佐證你的觀點。

2. （選擇題，5%）在習題一中，我們使用最小平方法擬合離散的曲線資料，請問擬合的目標為何？
   (1). 讓每個資料點與多項式曲線在 x 分量的差值平方和最小；
   (2). 讓每個資料點與多項式曲線在 y 分量的差值平方和最小；
   (3). 讓每個資料點與多項式曲線的距離平方和最小。

3. （問答題，5%）計算肢段局部座標系統相對全局座標系統的尤拉角時，若發生數值不連續的情況，其原因為何？你認為該如何修正？