人體動作與力學分析：作業二

一、 前言

在作業一中我們已經練習了如何透過動作捕捉系統所量測的反光標記點全局座標值，取得每個肢段局部座標系統相對全局座標系統的轉換關係。在本次的作業中將更進一步瞭解如何描述空間中兩座標系統間的相對旋轉關係。根據尤拉旋轉定理（Euler's Rotation Theorem），空間中任意方向的旋轉最少可用三個參數來描述，目前若要描述兩個座標系統之間相對的旋轉關係，常用的方法有旋轉矩陣、尤拉角、尤拉參數、以及螺旋軸定理（Helical axis），這幾種數值方法彼此間可以相互轉換，在本次的作業中將練習運用程式建立旋轉矩陣與尤拉角之間的轉換關係。臨床上常用尤拉角代表關節對應三個解剖平面的角度，原因在於定義之局部座標系統方向與三個解剖平面一致，並且採用合理的旋轉順序計算對應之尤拉角。

本次作業共有四個習題，習題一將練習推導出各種旋轉順序下所對應之矩轉矩陣代數式。利用習題一的結果，將可獲得從旋轉矩陣轉尤拉角，與從尤拉角轉換回旋轉矩陣的公式，撰寫成函式。

二、 預期目標

1. 瞭解由旋轉矩陣換算尤拉角的公式推導過程；
2. 建立旋轉矩陣與尤拉角互換的子程式。

三、 作業附件說明

- Hw2.xlsx：動作捕捉資料檔案。該檔紀錄了一位健康老年人在 10 米長的人行道上平地行走（level walking）時黏貼在骨盆及右腳肢段上的每顆反光標記點三維動態座標值；

- Hw2.py：主程式，將提取 Hw2.xlsx 中的反光標記點動態座標值，並呼叫自訂函式計算習題一與習題二要求的變數。

四、 習題一（30%）

1. 習題目標

試由 Python 推導計算尤拉角時 12 種旋轉順序的旋轉矩陣公式，將 12 種公式顯示在 Command Window。

2. 函式名稱

- RotFormula：依照 12 種可能的旋轉順序，產生對應的旋轉矩陣公式。

3. 函式語法格式

- R = RotFormula (sequence)

4. 函式輸入

- sequence：字串形態，如 'zxy'，維度 '1 × 3'

5. 函式輸出

- R：為一內含三個尤拉角的 Symbolic variable 所構成之矩陣，維度為 [3 × 3]。三個尤拉角符號變數命名方式，統一依旋轉順序所對應之旋轉角為 t1、t2、t3。

6. 函式說明

RotFormula 此函式會依照輸入之尤拉角旋轉順序推導出對應的旋轉矩陣代數式，由於計算的法則不變，因此嚴格來說此函式並不需限定容許的旋轉順序只限 12 種，而應該是 xyz 所組合而成的任意長度字串皆可。

五、 習題二（50%）

1. 習題目標

試遵照作業一所使用之下肢局部座標系統定義方式，計算右側下肢三個關節的旋轉矩陣：rRp2t、rRt2s、rRs2f，與其各別的三個尤拉角，旋轉順序為 ZXY。

2. 函式名稱

- Rot2Ang：計算旋轉矩陣所對應之尤拉角；
- Ang2Rot：計算尤拉角所對應之旋轉矩陣；
- RotAngConvert：依輸入之格式計算所對應之旋轉矩陣或尤拉角。

3. 函式語法格式

- theta = Rot2Ang(Rot, sequence)
- Rot = Ang2Rot(theta, sequence)
- Output = RotAngConvert(Input, sequence)

4. 函式輸入與輸出

- Rot：旋轉矩陣，維度為 [nframes × 3 × 3]；
- theta：尤拉角，三個 column 的排列順序依照旋轉順序，維度為 [nframes × 3]；
- sequence：字串形態，如 'zxy'，維度為 ' 1 × 3 '；
- Input：旋轉矩陣或尤拉角，維度為 [nframes × 3 × 3] 或 [nframes × 3]；
- Onput：旋轉矩陣或尤拉角，維度為 [nframes × 3 × 3] 或 [nframes × 3]。

5. 函式說明

RotAngConvert 此函式整合了 Rot2Ang 與 Ang2Rot 兩項功能，讓使用者可以只用一個函式就達到將旋轉矩陣與尤拉角兩者之間做轉換的目的。因此程式必須可以自動判別第一個輸入的變數形態是何者，撰寫判別式時需考慮若尤拉角幀的數量剛好等於 3，程式應該如何正確識別，而不是誤判輸入的格式為一個幀的旋轉矩陣資料（維度皆為[3 × 3]）。

6. 參考公式

設 R_x、R_y、R_z 為三旋轉矩陣，如式（一）、（二）、（三）所示：

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad (一)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \quad (二)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad （三）$$

若 sequence 為 zxy（Cardan Angle），旋轉角依序為θ_1、θ_2、θ_3，則R_{zxy}如下所示：

$$R_{zxy} = R_z R_x R_y \qquad （四）$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_3 & 0 & cos\theta_3 \end{bmatrix} \qquad （五）$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 cos\theta_3 - sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 & -cos\theta_2 sin\theta_1 & cos\theta_1 sin\theta_3 + cos\theta_3 sin\theta_1 sin\theta_2 \\ cos\theta_3 sin\theta_1 + cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_1 cos\theta_2 & sin\theta_1 sin\theta_3 - cos\theta_1 cos\theta_3 sin\theta_2 \\ -cos\theta_2 sin\theta_3 & sin\theta_2 & cos\theta_2 cos\theta_3 \end{bmatrix} \qquad （六）$$

若θ_2落在一、四象限（$cos\theta_2 > 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$$\theta_2 = sin^{-1}[R_{zxy}(3,2)] \qquad （七）$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{zxy}(1,2)}{R_{zxy}(2,2)}\right] \qquad （八）$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{zxy}(3,1)}{R_{zxy}(3,3)}\right] \qquad （九）$$

若θ_2落在二、三象限（$cos\theta_2 < 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$$\begin{cases} \theta_2 = \pi - sin^{-1}[R_{zxy}(3,2)],\ (sin^{-1}(sin\theta_2) > 0) \\ \theta_2 = -\pi - sin^{-1}[R_{zxy}(3,2)],\ (sin^{-1}(sin\theta_2) < 0) \end{cases} \qquad （十）$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{zxy}(1,2)}{-R_{zxy}(2,2)}\right] \qquad （十一）$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{zxy}(3,1)}{-R_{zxy}(3,3)}\right] \qquad （十二）$$

若 sequence 為 yxy（Euler Angle），旋轉角依序為θ_1、θ_2、θ_3，則R_{yxy}如下所示：

$$R_{yxy} = R_y R_x R_y \qquad （十三）$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_3 & 0 & cos\theta_3 \end{bmatrix} \qquad （十四）$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 cos\theta_3 - cos\theta_2 sin\theta_1 sin\theta_3 & sin\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 sin\theta_3 + cos\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_1 \\ sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_2 & -cos\theta_3 sin\theta_2 \\ -cos\theta_3 sin\theta_1 - cos\theta_1 cos\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 - sin\theta_1 sin\theta_3 \end{bmatrix} \qquad （十五）$$

若θ_2落在一、二象限（$sin\theta_2 > 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$\theta_2 = cos^{-1}[R_{yxy}(2,2)]$ （十六）

$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{yxy}(1,2)}{R_{yxy}(3,2)}\right]$ （十七）

$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{yxy}(2,1)}{-R_{yxy}(2,3)}\right]$ （十八）

若θ_2落在三、四象限（$sin\theta_2 < 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$\theta_2 = -cos^{-1}[R_{yxy}(2,2)]$ （十九）

$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{yxy}(1,2)}{-R_{yxy}(3,2)}\right]$ （二十）

$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{yxy}(2,1)}{R_{yxy}(2,3)}\right]$ （二十一）

六、 問答題（20%）

1. （問答題，10%）請問什麼是萬向鎖問題（gimbal lock）？請簡要描述萬向鎖問題的成因，並推導出 12 種旋轉順序下會出現萬向鎖問題的情況。

2. （問答題，10%）事實上，除了尤拉角與旋轉矩陣之外，還存在其他常見的方式可以描述三維空間中物體的姿態。
   - A. 除了尤拉角與旋轉矩陣之外，請舉出兩種現行文獻中會用來描述三維空間中物體的姿態的數學方法，需解釋該方法的原理並以現有文獻佐證你的觀點。
   - B. 在眾多描述三維空間中物體的姿態的方法中，你認為為什麼臨床步態分析領域會傾向選用尤拉角作為描述關節角度的數學工具？請簡要描述你的論點並附上相關現有文獻。