アルゴリズムとデータ構造II Ex11

- 提出するもの
  - Q1からQ2を解いたもの
    - 書いたコードも提出すること
  - Q3はOptionalなので、提出は任意
    - 提出する場合は、動くコードを提出すること

Q1

1

10-queens problemの解の総数を求めよ。

- プログラムを書いて求めること。
- コード`nqueens.c`は既に完成しており、解の1つを求めることができるので、必要であればこのプログラムを変更すれば良い。
  - n-queensのnについては`#define N 8`と定義してある。この8を10にすればよい。

2

チェスの盤面には、1つ任意の穴が空いていて、そこにはQueenを置いてはならないというルールを設ける。

- プログラムは、穴の空いた位置を入力させて任意の穴の位置を決めることができるようにする。

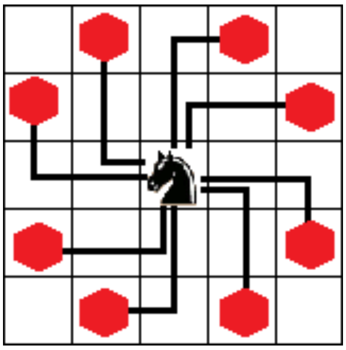
この状況下で、

- 10-queens problemを解き、Queenの置き方の総数を求めよ。
  - ただし、穴を開ける場所は以下のようにする。
    - 行番号:自分の学籍番号の下2桁目
    - 列番号:自分の学籍番号の下1桁目
      - 例えば、学籍番号が5241141なら、行番号=4、列番号=1の位置に穴がある。
  - 解答には、行と列の番号も書くこと。

Q2

次に、Queenではなく、Knightを使った問題を考える。

Knightは以下の図のように動くことができる。(上下2左右1、上下1左右2)



この動き方に従って、盤面上の全てのマスを重複することなく1回ずつ通って移動することを考える。

`map.txt`にあるような正方形から四隅が切り取られた形状をした盤面を考える。

`map.txt`の中身(-9の部分は移動不可能な部分)

```
-9 -9 0 0 -9 -9
-9 -9 0 0 -9 -9
 0  0 0 0  0  0
 0  0 0 0  0  0
-9 -9 0 0 -9 -9
-9 -9 0 0 -9 -9
```

- バックトラッキングの考えを用いて、**ある出発点からKnightがこの盤面を巡回し、再び出発地点へ戻ってくる経路**を求めるプログラムを作れ。
- プログラムを用いて、**可能な全ての巡回経路の数**を求めよ。
  - 全く同じ経路であっても、出発点や巡回の向きが異なるものは別物とする。
- また、巡回可能な経路の**例を3つ**示せ。
  - 実行結果から適当に3つ選べば良い。

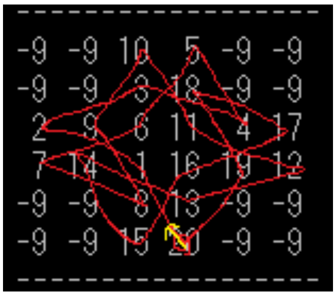
参考

巡回可能な経路として解の1つを以下に示す。

- $(3,5)$を出発地点とした場合の巡回経路。左上を$(0,0)$とし、20が出発地点(=巡回開始時は0)である。

```
-----------------
-9 -9 10  5 -9 -9
-9 -9  3 18 -9 -9
 2  9  6 11  4 17
 7 14  1 16 19 12
-9 -9  8 13 -9 -9
-9 -9 15 20 -9 -9
-----------------
```

- 黄色の矢印の方から出て巡回し、また戻ってくる様子を赤線で示した。



Q3(Optional)

成分が全て整数であるN次正方行列のうち、その行列式が1または-1であるものをユニモジュラ行列という。

ここで、**N次のユニモジュラ行列で、その成分が$1 \sim N^2$の連続整数であるもの見つけることを考える。**

すると、行列は成分が$1 \sim N^2$のN^2個の数字の並べ替えによって構成されるので$N^2!$通りの行列が存在し、全探索をすることは効率が悪い。

また、行列式の計算には通常$O(N!)$の計算コストがかかるため、愚直な方法でこのようなユニモジュラ行列の探索をすると、$O(N^2!N!)$の計算コストになってしまい、現実的な時間で探索を終えることが難しくなってしまう。

ここで、ユニモジュラ行列は行列式によって特徴付けられるため、次の性質が成り立つ。

性質1

Aをユニモジュラ行列とすると、任意の行・列の交換および転置によって得られる行列$\tilde{A}$もまたユニモジュラ行列となる。

この性質1により、あるユニモジュラ行列を見つけると、その行列の任意の行・列の交換によって得られる行列もユニモジュラ行列となる。つまり、この性質を逆手に取ることで探索するべき行列を減らすことができる。

ここで、**3次のユニモジュラ行列で、その成分が$1 \sim 9$の連続整数であるもの**を考える。

すると、成分が$1 \sim 9$の連続整数である行列は$9!$個存在する。

性質1により、

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

で、次の3つの不等式

- $a_{12} < a_{13}$
- $a_{12} < a_{21}$
- $a_{21} < a_{31}$

を満たす行列に変形できる。

問1

$9!$個ある行列のうち、上記の不等式を満たす行列は何個あるか求めよ。

問2

上記で求めた行列のうち、ユニモジュラ行列となる行列の個数を求め、それを用いて**成分が$1 \sim 9$の連続整数である3次ユニモジュラ行列の総数を求めよ。**

問1, 2を解くために使用したプログラムも提出すること。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \tag{2}$$

は、上記の不等式を満たすユニモジュラ行列である。