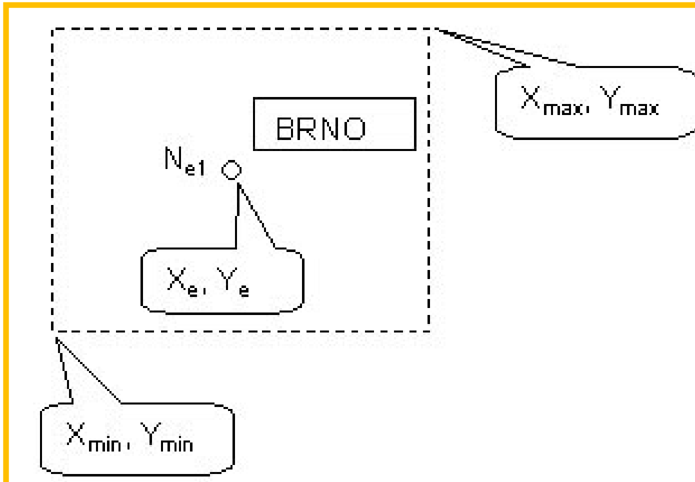
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

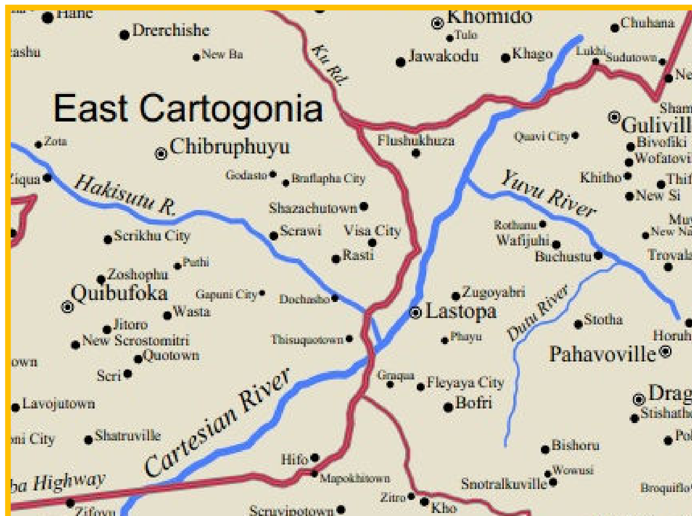
Adair Santa Catarina
Curso de Ciência da Computação
Unioeste – Campus de Cascavel – PR

Jan/2021

Introdução

- Transformações Geométricas são operações algébricas básicas em aplicações gráficas.
- Usadas nos sistemas mais simples até os mais complexos.
- Operações de translação, rotação, escala, etc.
- Por exemplo, ajustar o tamanho, a posição e a orientação de um rótulo num mapa digital.

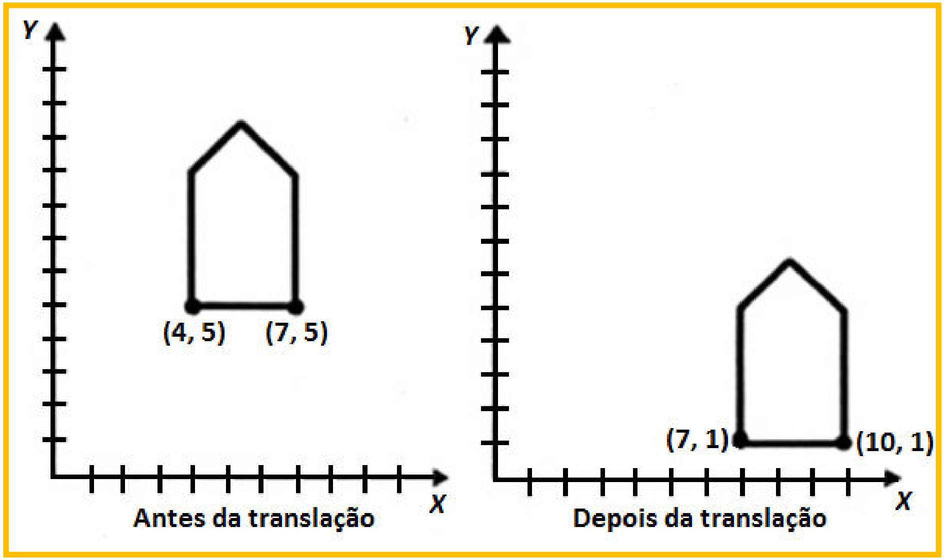




Transformações Geométricas em 2D

Translação:

- Mover um ou mais pontos no espaço 2D.



T(3, -4)

$$x' = x + dx$$

$$y' = y + dy$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

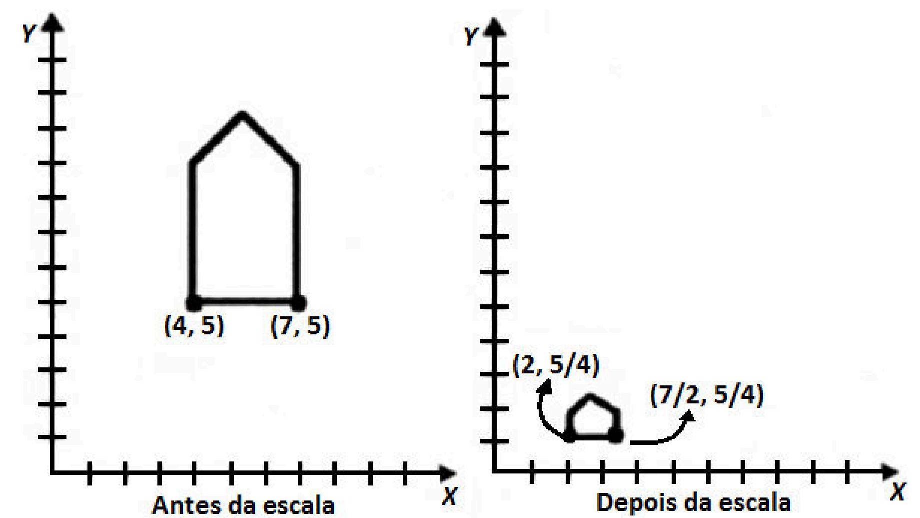
$$P' = P + T$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas em 2D

Escala:

- Alterar o tamanho de um objeto no espaço 2D.



S(1/2, 1/4)

$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

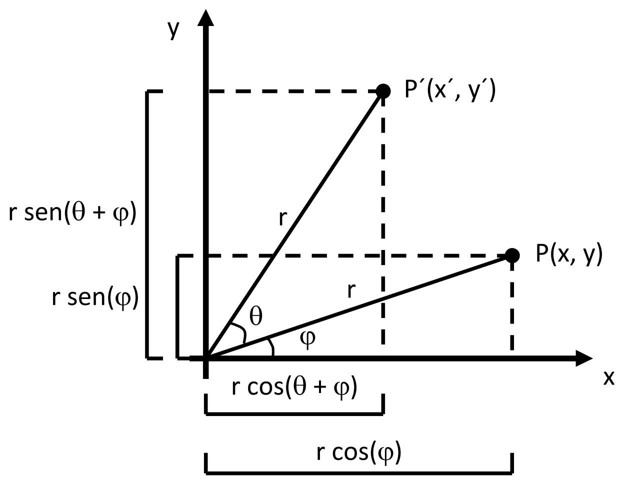
$$P' = S \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas em 2D

Rotação:

- Girar um objeto no espaço 2D.



$$x = r \cdot \cos(\phi) \qquad y = r \cdot sen(\phi)$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi) \qquad y' = r \cdot sen(\theta + \phi)$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi)$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - r \cdot sen(\theta) \cdot sen(\phi)$$

$$y' = r \cdot sen(\theta + \phi)$$

$$y' = r \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\phi) + r \cdot \cos(\theta) \cdot sen(\phi)$$

$$x' = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$

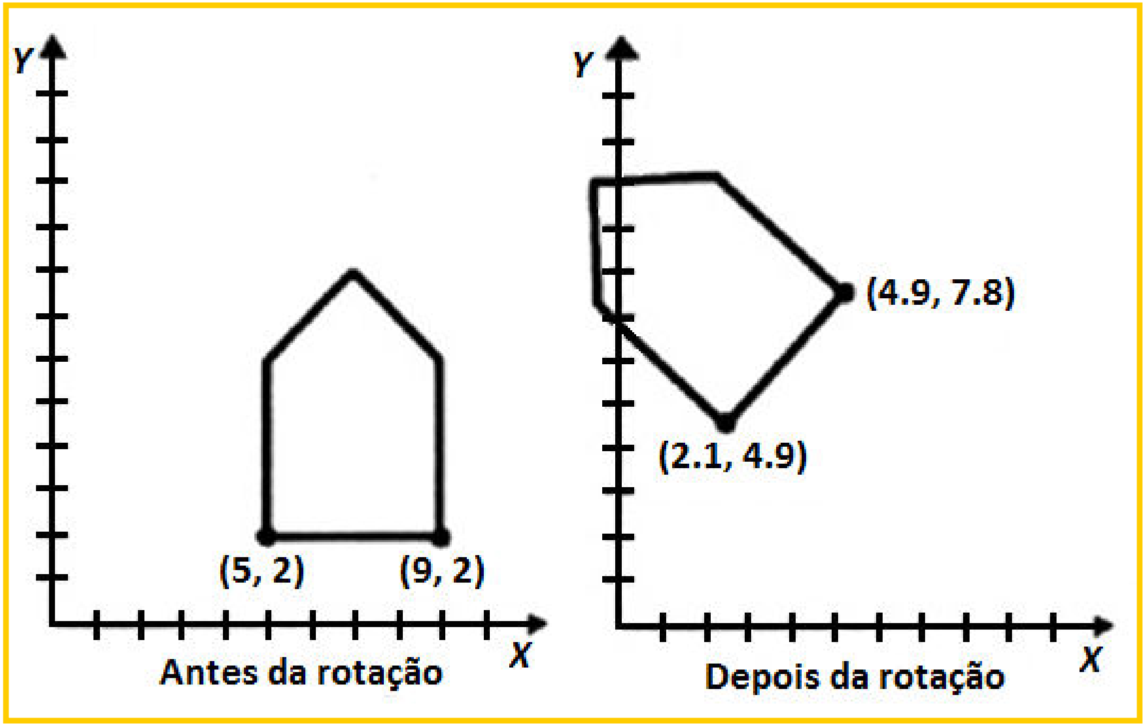
$$y' = x \cdot \mathrm{sen}(\theta) + y \cdot \cos(\theta)$$

$$P' = R \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas em 2D

- $+\theta$ = Sentido anti-horário;
- $-\theta$ = Sentido horário.



R(+45°)

Coordenadas Homogêneas

- As TG podem ser executadas com o uso de matrizes.
- Enquanto escala e rotação são multiplicativas, a translação é aditiva.

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Para otimizar a aplicação das matrizes de TG adotou-se o sistema de coordenadas homogêneas.
- P em 2D → P = (x, y, M), com $M \neq 0$.
- Um sistema homogêneo corresponde a um plano no sistema 3D.

Quando P=(a, b) é igual a P =(x, y, M)?

$a = x/M$ e $b = y/M$

E se M = 1?

($a = x$ e $b = y$) $\therefore$ P=(x, y) é igual a P =(x, y, 1)

Coordenadas Homogêneas

- Como P = (x, y, 1), as matrizes de TG são:

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

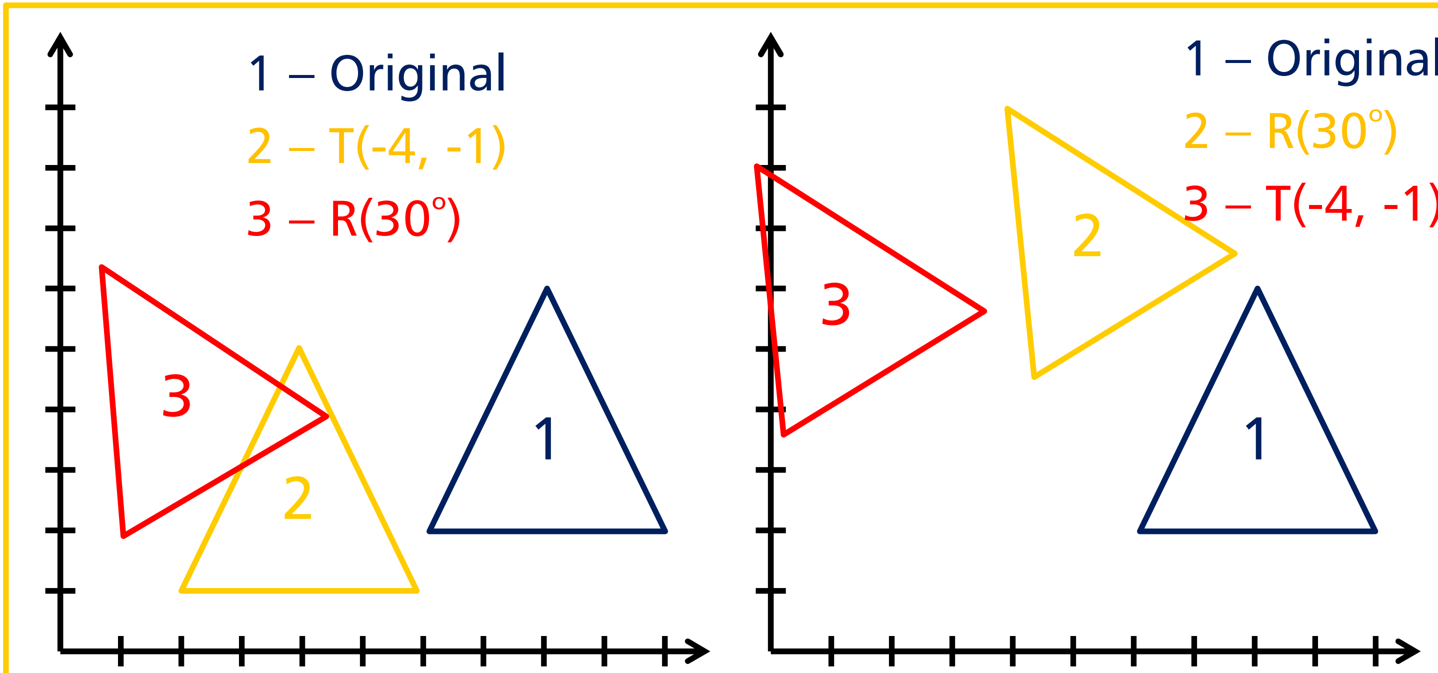
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

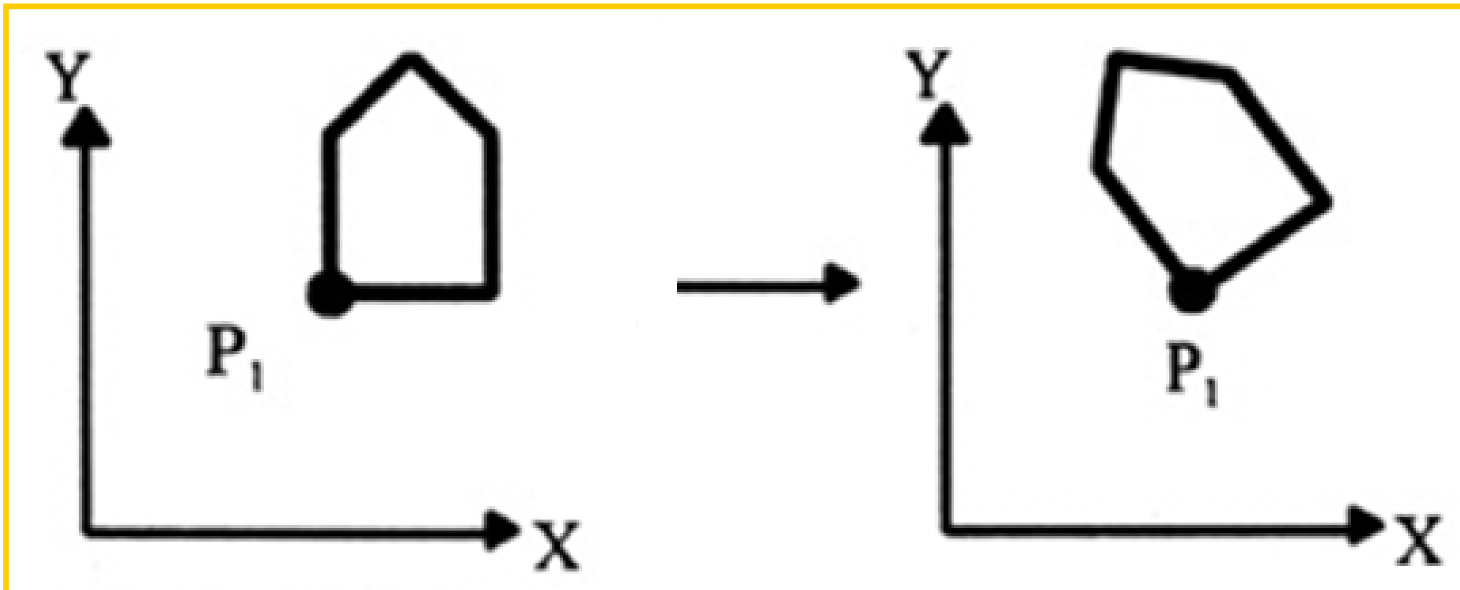
Concatenação de Matrizes

- É a combinação de duas ou mais matrizes de TG;
- A matrizes são multiplicadas antes de aplicá-las aos vértices do(s) objeto(s);
- A ordem das operações afeta o resultado das TG.



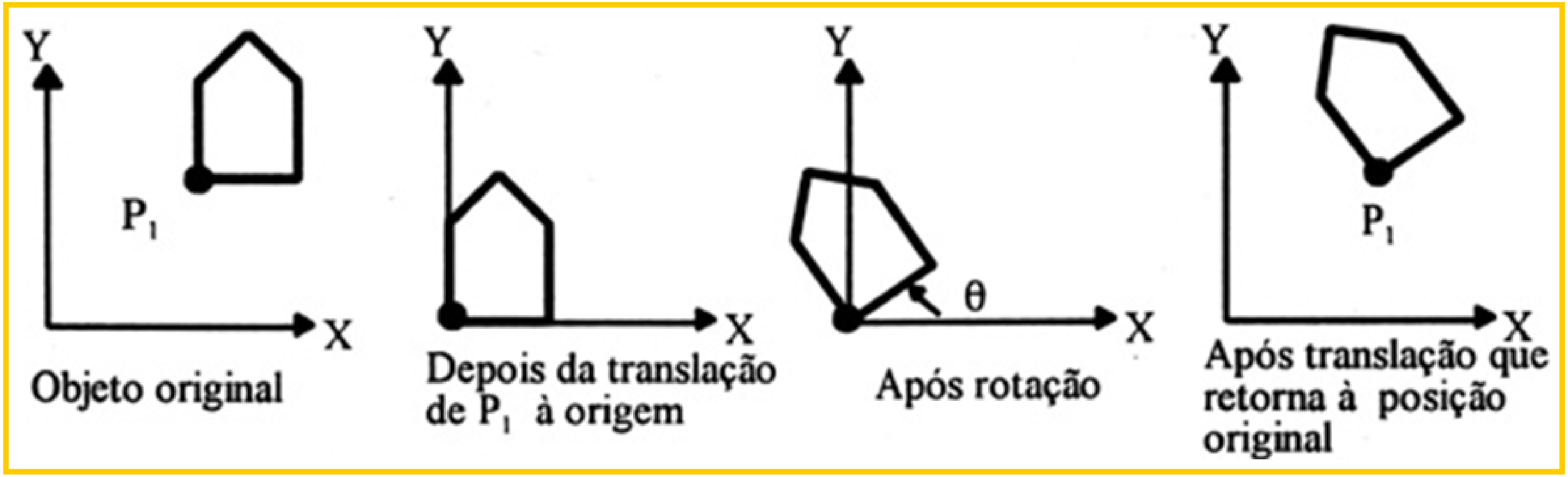
Concatenação de Matrizes

- Percebemos que a rotação gira o objeto em relação à origem do sistema de coordenadas;
- Como rotacionar um objeto em relação a um ponto P1 em específico?

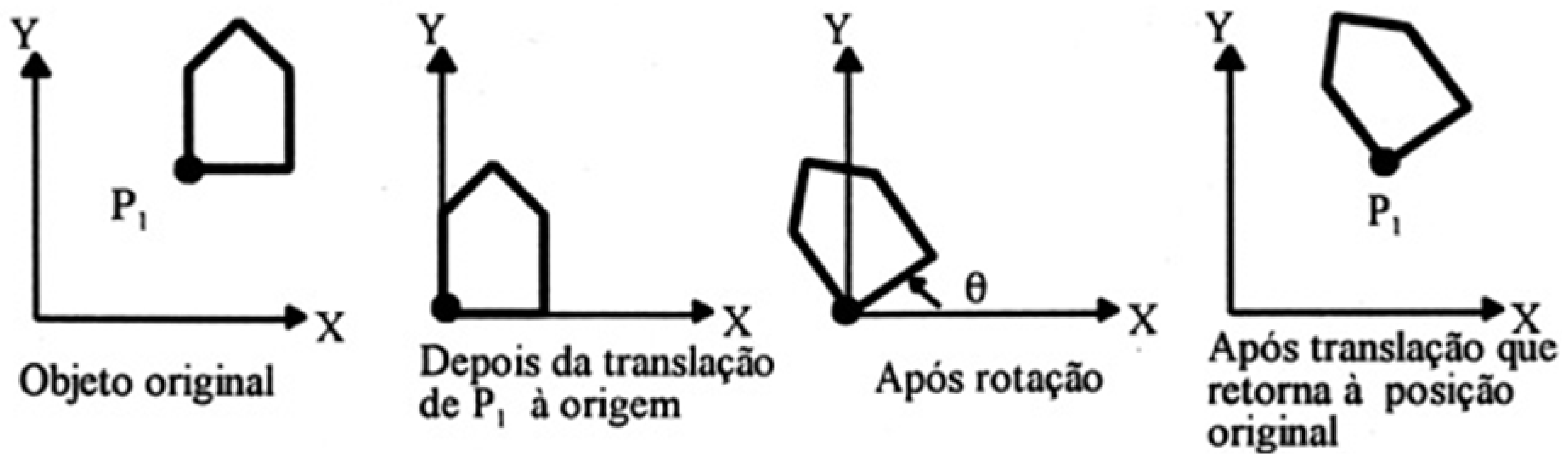


Concatenação de Matrizes

- Transladar P1 para o origem → T(-P1);
- Rotacionar o objeto → R(θ);
- Transladar P1 de volta à posição original → T(P1).



Concatenação de Matrizes



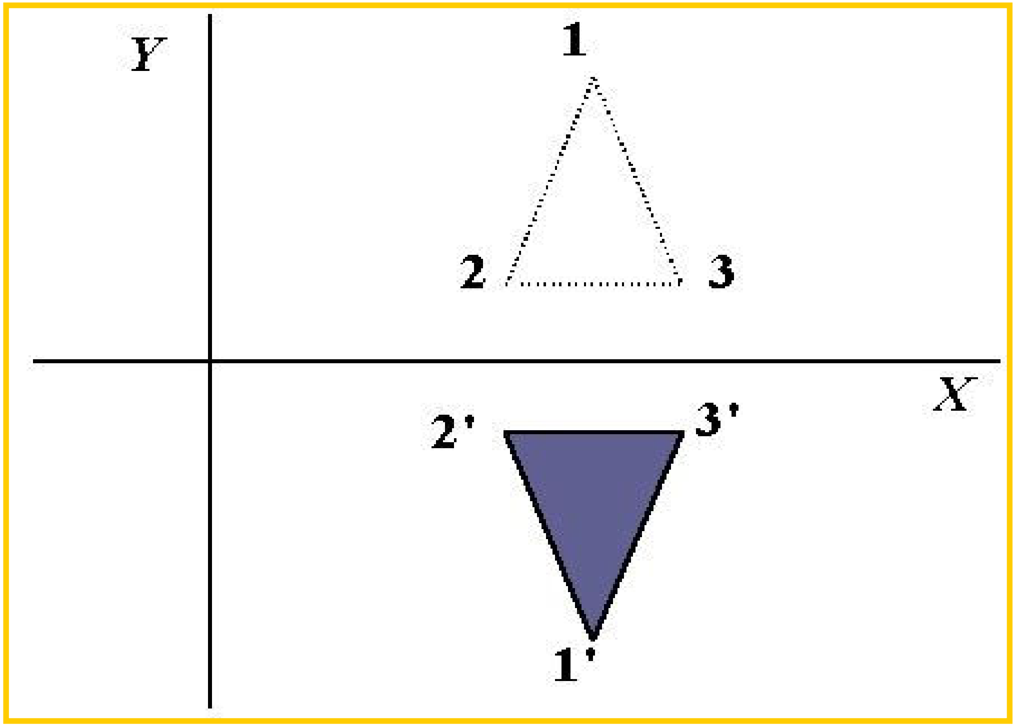
$$M = T(x_1, y_1)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & x_1\cdot(1-\cos(\theta)) + y_1\cdot sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & y_1(1-\cos(\theta)) - x_1\cdot sen(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 2D Adicionais

Espelhamento:

- Faz a reflexão do objeto em relação aos eixos X, Y ou ambos.



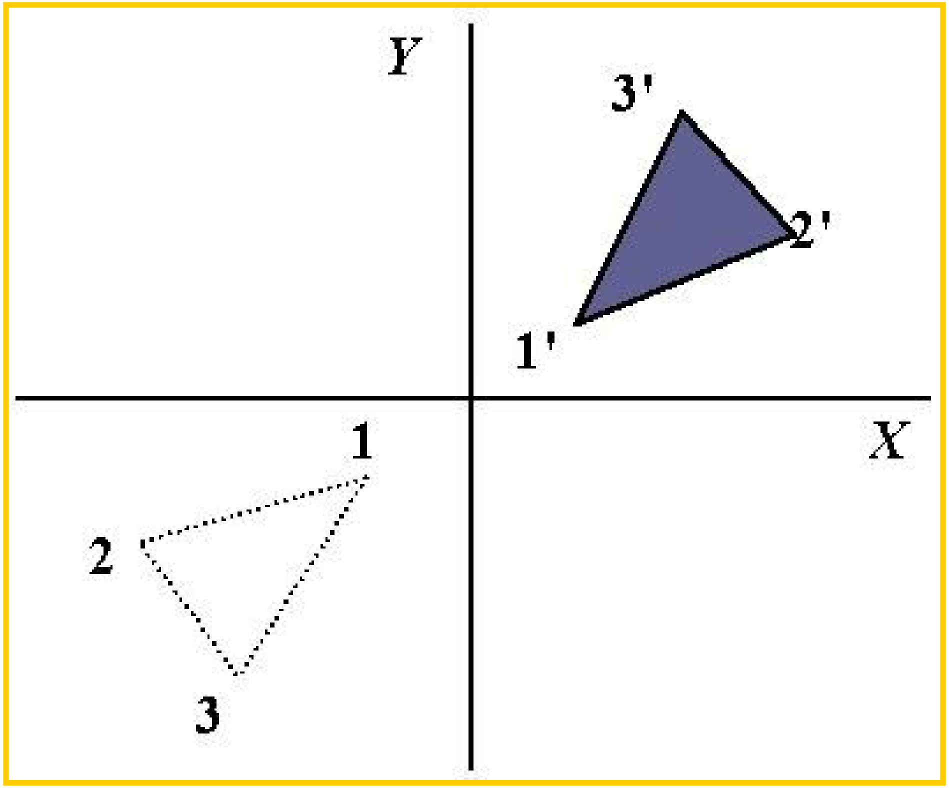
$$E_{Ox} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{Oy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 2D Adicionais

Espelhamento:

- O espelhamento em XY equivale a R(180°).

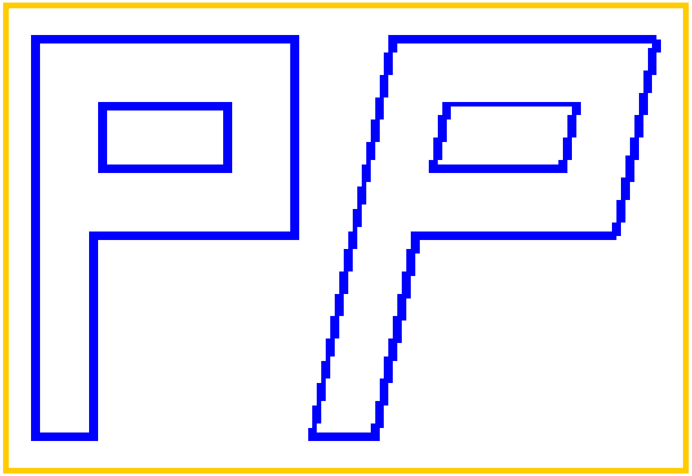


$$E_{Oxy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 2D Adicionais

Cisalhamento:

- Distorce o objeto aplicando um deslocamento aos valores das coordenadas *X* ou *Y* do objeto.



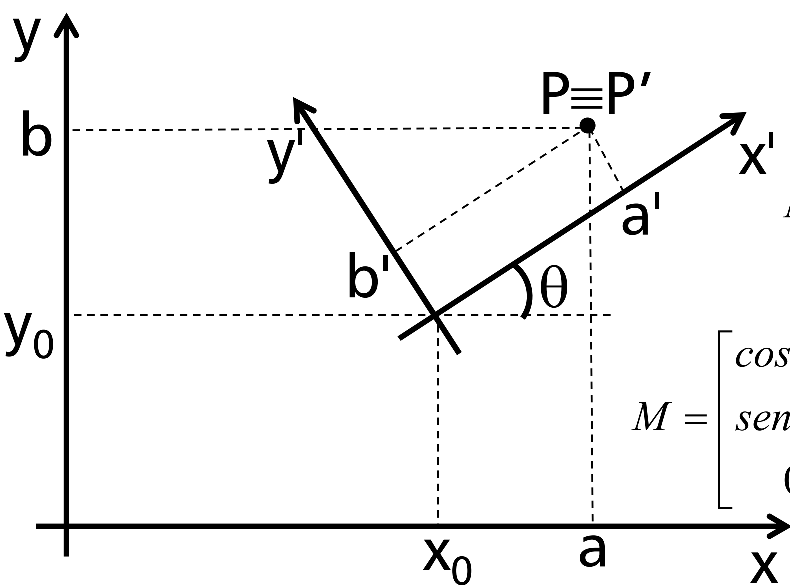
Cisalhamento em X

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & SH_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ SH_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas

- Consiste na sequência de TG que alinha os eixos de dois sistemas de coordenadas;
- Para transformar P(a, b) em P’(a’, b’), primeiro aplicamos $T(-x_0, -y_0)$ e depois $R(-\theta)$



$$M = R(-\theta)\cdot T(-x_0, -y_0)$$

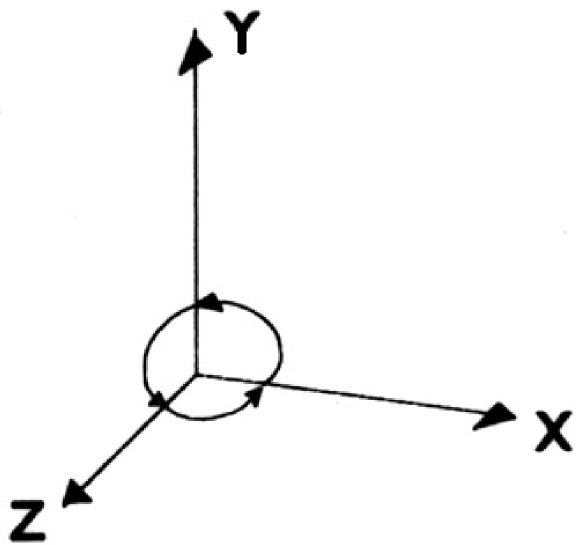
$$M = \begin{bmatrix} cos-\theta & -sen-\theta & 0 \\ sen-\theta & cos-\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} cos-\theta & -sen-\theta & -x_0 \cdot cos-\theta + y_0 \cdot sen-\theta \\ sen-\theta & cos-\theta & -x_0 \cdot sen-\theta + y_0 \cdot cos-\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = M \cdot P$$

Transformações Geométricas em 3D

- Um ponto P = (x, y, z) tem seu correspondente homogêneo P = (x, y, z, 1);
- Sistema de coordenadas 3D → Regra da Mão Direita.



(fora da página)

Rotação (+)

Leva um eixo positivo para outro positivo.

Eixo de Rotação	Direção da Rotação Positiva
x	y para z
y	z para x
z	x para y

Transformações Geométricas em 3D

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em Z

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em X

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em Y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações 3D

- Como girar um cubo ao redor de seu centro?

1 – $T(-c_x, -c_y, -c_z)$

2 – $R_z(\theta)$ 3 – $R_y(\phi)$ 4 – $R_x(\gamma)$

5 – $T(c_x, c_y, c_z)$

$$M = T(c_x, c_y, c_z) \cdot R_x(\gamma) \cdot R_y(\phi) \cdot R_z(\theta) . T(-c_x, -c_y, -c_z)$$

$$P' = M \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas em 3D

EXERCÍCIOS

+

EXERCÍCIOS

+

EXERCÍCIOS