大学生园地

用概率知识推导 Tait 平均自由程

蒋　良，舒幼生
(北京大学 物理系，北京　100871)

摘要：通过一些简单的概率假设，给出 Tait 平均自由程的新的推导，并讨论了对强度分布的影响.

关键词：Tait 平均自由程；Maxwell 平均自由程；概率；强度分布

中图分类号：O 414.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0712(2002)05-0041-03

1　引言

一般的热学教科书中，只给出了 Maxwell 平均自由程的推导，对于 Tait 平均自由程，因其推导复杂只给出了结果；文献[1]通过对立体角和分子速度积分的方法，导出了 Tait 平均自由程.本文通过一些简单的概率假设来讨论相同的问题，得出的结论与文献[1]相同，但推导相对简洁.

2　一些概率假设

在推导 Tait 平均自由程时，文献[1]用到了以下两点假设：

假设 1　粒子的位形空间和速度空间分布的混沌性假设.

假设 2　粒子之间除了彼此间完全弹性碰撞之外，没有别的相互作用的假设——弹性刚球模型.

由假设 1 我们可以得出，当粒子满足混沌性假设且数量足够多时，从中取出有限个粒子，剩下的粒子仍然无限地接近混沌，所以有：

假设 3　从足够多的粒子中取出有限个粒子，剩下的粒子仍满足混沌性假设.①

假设 4　一个边长为 L 的立方体，其中有 N 个运动的小球，半径为 a，S 为立方体内一点(初始时不在任何一个小球内)，则这些小球经过 S 点的概率 $\eta(t)$ 与小球不重复扫过的体积 $V_{cover}(t)$ 成正比，与可被扫过的体积 V_1 成反比，即有

$$\eta(t) = k\frac{V_{cover}(t)}{V_1} = k\frac{V_{cover}(t)}{L^3 - \frac{4}{3}Na^3\pi}$$

根据始末条件：$t=0$ 时 $V_{cover}(0)=0$；$t=+\infty$ 时 $V_{cover}(+\infty)=V_1$；此时必然经过 S，所以 $\eta(+\infty)=1$；可得 $k=1$.于是得到一个概率方面的结论(即假设 4 的数学表述)：

$$\eta(t) = \frac{V_{cover}(t)}{V_1} \tag{1}$$

3　速率为 v 的粒子的平均自由程 $\lambda(v)$

1) 取研究对象.

S 粒子的速率为 v，在相对它静止的参照系中，取出以它为中心的立方体($L \gg r$，r 为粒子半径)，因为在立方体内有足够多的粒子，所以我们可以应用假设 3，立方体内除 S 粒子外的所有粒子的速度和位形分布满足混沌性假设.并且，一旦某个粒子跑出立方体，同时就会有一个与它速度相同的粒子进入立方体.如图 1，①号粒子沿 AB 跑出立方体，同时就有②号粒子沿 CD 路径回来.在研究 S 粒子碰撞情况时，可以认为①号和②号粒子是同一个粒子.

类似于求 Maxwell 平均自由程的办法，把 S 粒子缩成一个点，而把其余粒子膨胀为半径 $a=2r$ 的球，它们的运动留下了一条条柱状的轨迹，扫过了一定的体积

收稿日期：2000-12-06；**修回日期**：2001-09-23

作者简介：蒋良(1980—)，男，江苏苏州人，北京大学物理系 99 级本科生，第三十届国际物理奥林匹克竞赛金牌获得者；舒幼生(1942—)，男，浙江定海人，北京大学物理系教授，本文指导教师.

①与此相对应的假设在文献[1]的第 128 页中也提到："分子混沌性假设要求两个分子同时处在 $d\tau_1 dv_1$ 和 $d\tau_2 dv_2$ 的概率等于各自概率的乘积，就是说，两个分子的分布是相互独立的，没有关联的."

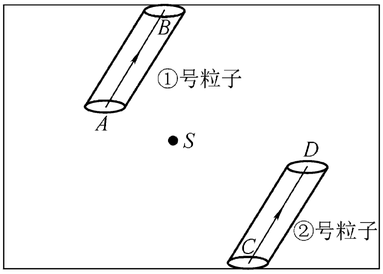

图 1

$V(t)$. t 时刻这些柱状轨迹经过 S 点的概率(即在 t 时刻以前 S 粒子已经和其余粒子碰撞的概率)为

$$\eta(t) = \frac{V_{\text{cover}}(t)}{V_1} \tag{1}$$

2) 应用概率知识.

单位时间内新增不重复扫过的体积正比于单位时间内扫过的体积和此时未被扫过的体积与总体积比值,即:

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{cover}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{V_1 - V_{\text{cover}}}{L^3} \tag{2}$$

其中 $V(t)$ 为 t 时刻允许重复计算的所有剩余粒子扫过的体积.

3) 应用 Maxwell 速度分布公式计算 $V_{\text{cover}}(t)$.

取 S 粒子的运动方向为 z 轴方向,粒子数密度为 n,每个粒子的碰撞截面为 $\sigma = \pi a^2$,积分过程中的相对速率为 u_r,则单位时间内所有剩余粒子扫过的体积为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= nL^3\sigma \iiint u_r F(u_x, u_y, u_z)\,\mathrm{d}u_x\mathrm{d}u_y\mathrm{d}u_z = nL^3\sigma \cdot \\ &\iiint [(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z - v)^2]^{1/2} \left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2} \cdot \\ &\exp\left(-\frac{m[(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2]}{2kT}\right)\mathrm{d}u_x\mathrm{d}u_y\mathrm{d}u_z = \\ &nL^3\sigma K(v)\end{aligned} \tag{3}$$

将式(3) 代入式(2) 得

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{cover}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_1 - V_{\text{cover}}}{L^3} \cdot n\sigma L^3 \cdot K(v) \tag{4}$$

式中 $K(v)$ 为相对于速率为 v 的粒子的其余粒子的平均速率,它可由下式算得:

$$\begin{aligned}K(v) &= 2\pi^{-1/2}\frac{v_m^2}{v}\left[g_2\left(\frac{v}{v_m}\right) + \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 g_0\left(\frac{v}{v_m}\right) + \right. \\ &\left.\left(\frac{v}{v_m}\right)\mathrm{e}^{-(v/v_m)^2}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

其中 v_m 为最概然速率,而

$$g_n(x) = \int_0^x x^n \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{6}$$

解微分方程(4) 得

$$1 - \frac{V_{\text{cover}}(t)}{V_1} = \exp[-n\sigma K(v)t] \tag{7}$$

4) 速率为 v 的粒子的平均自由程 $\lambda(v)$ 的获得.

式(7) 和式(1) 联合可知,速率为 v 的粒子在 t 时刻以前已经和其余粒子发生碰撞的概率

$$\eta(t, v) = \frac{V_{\text{cover}}(t)}{V_1} = 1 - \exp[-n\sigma K(v)t] \tag{8}$$

所以,速率为 v 的粒子恰好在 t 时刻和其余粒子发生碰撞的概率密度(即对于时间 t 的分布函数) 为

$$F(t, v) = \frac{\partial\eta(t, v)}{\partial t} = n\sigma K(v)\exp[-n\sigma K(v)t] \tag{9}$$

可知速率为 v 的粒子的平均自由程为

$$\lambda(v) \equiv \int_0^{+\infty} vtF(t, v)\,\mathrm{d}t = \frac{v}{n\sigma K(v)} \tag{10}$$

化简得

$$\lambda(v) = \frac{\pi^{1/2}\left(\frac{v}{v_m}\right)^2}{2n\sigma\left[g_2\left(\frac{v}{v_m}\right) + \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 g_0\left(\frac{v}{v_m}\right) + \left(\frac{v}{v_m}\right)\mathrm{e}^{-(v/v_m)^2}\right]} \tag{11}$$

速率为 v 的粒子的平均自由程 $\lambda(v)$ [以 $1/(\sigma n)$ 为单位] 与速率 v(以 v_m 为单位) 的关系如图 2 所示.

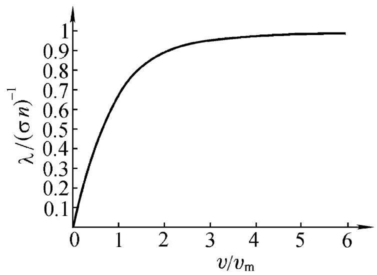

图 2

4 Tait 平均自由程

根据定义:

$$\bar{\lambda} \equiv \int_0^{+\infty}\lambda(v)f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\sigma n}\int_0^{+\infty}\frac{f(v)\,v\mathrm{d}v}{K(v)} = \frac{A}{\sigma n} \tag{12}$$

A 是个常量,它是 Tait 平均自由程的系数(计算见附录 2). 最后算得

$$\bar{\lambda} = \frac{0.677}{\sigma n} \tag{13}$$

这就是 Tait 平均自由程.

5 讨论

1) 通过数值计算求出 $\lambda(v)$ 与 v 的关系,如图 2,我们可以看出:$\lambda(v)$ 单调递增,趋近于 $1/(\sigma n)$,从物理上给出解释:

$v = 0$ 时,粒子静止,没有位移,$\lambda(0) = 0$;

$v = +\infty$ 时,速度极大,碰撞前后其他粒子的位移

量几乎为零,即等同于穿过一群随机均匀分布的粒子群,$\lambda(+\infty) = 1/(\sigma n)$.

2) 看一下实际运用中 $\lambda(v)$ 随 v 不同会产生多大影响.

例:从小孔射出一束定向粒子束,设其速率分布为 Maxwell 速率分布(这完全是假定的),粒子半径为 r,其外部空间有相同的粒子,温度相同,数密度为 n.

Maxwell 平均自由程　$\lambda_m = 0.707/(\sigma n)$;

Tait 平均自由程　$\lambda_t = 0.677/(\sigma n)$;

$\lambda(v)$ 由式(11) 决定,并可参见本文图 2.

这三个自由程对应得到三个强度分布:

Maxwell 强度分布　$I_m(x) = I_0 \exp(-x/\lambda_m)$;

Tait 强度分布　$I_t(x) = I_0 \exp(-x/\lambda_t)$;

精细的强度分布　$I(x) = I_0 \int \exp(-x/\lambda(v)) \cdot f(v)\mathrm{d}v]$;

经过数值计算得到:在 x 处的强度 $I(x)$ (以 I_0 为单位) 与出射路程 x[以 $1/(\sigma n)$ 为单位]的关系如图 3.

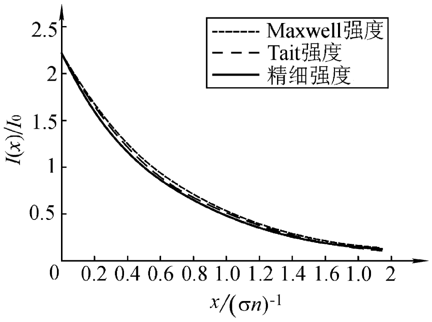

图 3

由图可见,这三者的差别是非常小的,在一般情况下可以不考虑 $\lambda(v)$ 的分布,以一个统一的 λ 来计算.

附录 1

$$K(v) = \iiint [(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z - v)^2]^{1/2} \cdot \left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m[(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2]}{2kT}\right) \cdot \mathrm{d}u_x \mathrm{d}u_y \mathrm{d}u_z$$

使 u, v 以最概然速率 $v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ 为单位,则有

$$K(v) = \left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} [u_x^2 + u_y^2 + (u_z - v)^2]^{1/2} \cdot \exp[-(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)] \mathrm{d}u_x \mathrm{d}u_y \mathrm{d}u_z =$$

$$\left(\frac{2kT}{\pi^3 m}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta 2\pi u^3 \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{e}^{-2uv\cos\theta} \mathrm{e}^{-v^2} =$$

$$\left(\frac{2kT}{\pi^3 m}\right)^{1/2} \frac{\pi}{v} \int_0^{+\infty} [u^2 \mathrm{e}^{-(u-v)^2} - u^2 \mathrm{e}^{-(u+v)^2}] \mathrm{d}u =$$

$$\left(\frac{2kT}{\pi^3 m}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{v} \left[\int_0^v w^2 \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w + \int_0^v v^2 \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w + \int_v^{+\infty} 2vw\mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w\right] = 2\pi^{-1/2} v_m v^{-1} [g_2(v) + v^2 g_0(v) + v\mathrm{e}^{-v^2}]$$

把单位还原,即可得式(5)

附录 2

$$A = \int^{+\infty} \frac{f(v) v\mathrm{d}v}{K(v)} = \int_0^{+\infty} \frac{4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v}{2\pi^{-1/2} \frac{v_m^2}{v}\left[g_2\left(\frac{v}{v_m}\right) + \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 g_0\left(\frac{v}{v_m}\right) + \left(\frac{v}{v_m}\right) \mathrm{e}^{-(v/v_m)^2}\right]}$$

使 u, v 以最概然速率 $v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ 为单位,即有

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{2v^4 \exp(-v^2)\mathrm{d}v}{g_2(v) + v^2 g_0(v) + v\mathrm{e}^{-v^2}} = 0.677\ 462$$

参考文献:

[1] 王竹溪. 统计物理学导论[M]. 第 2 版. 北京:人民教育出版社,1965.

[2] 赵凯华,罗蔚茵. 新概念物理学教程:热学[M]. 北京:高等教育出版社,1998.

[3] 汪志诚. 热力学 统计物理[M]. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1980.

Tait mean free path in probability view

JIANG Liang, SHU You-sheng

(Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871, China)

Abstract: Tait mean free path is deduced by making some probability assumptions and discussing their consequent influences to the intensity distribution.

Key words: Tait mean free path; Maxwell mean free path; probability; intensity distribution