Introduction au Machine Learning

Arbre et Ensemble

Théo Lopès-Quintas

BPCE Payment Services,
Université Paris Dauphine

2022-2025

Arbre

Modélisation dans le cas d'une classification

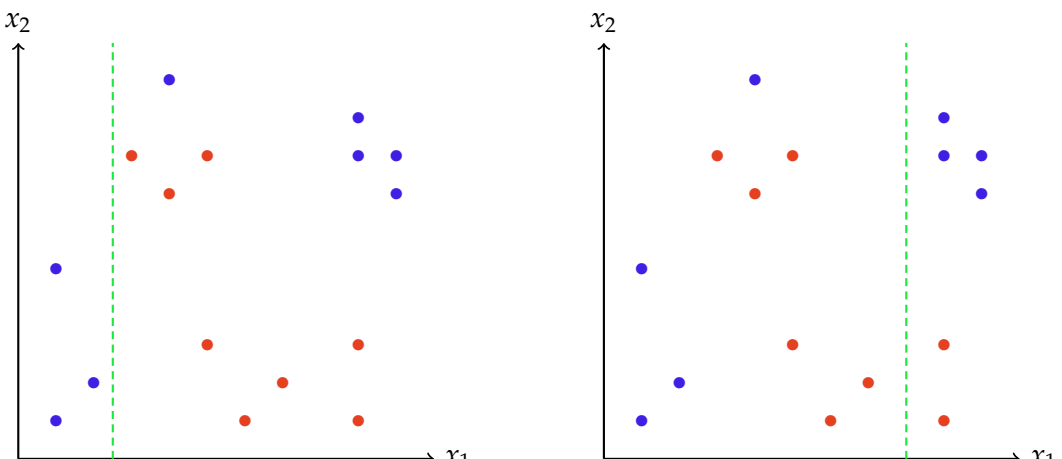
Proportion de la classe d'intérêt dans la partition P

$$f_\theta(x) = \sum_{P \in \theta} \mu_P \mathbb{1}_{\{x \in P\}}$$

Partition de l'espace

Arbre

Comment trouver la meilleure séparation ?



(a) Séparation 1

(b) Séparation 2

Figure – Sélection de la meilleure séparation de l'espace pour une information donnée

Exercice 1 (Difficulté à extrapoler)

Exhiber un exemple de problème de régression (à construire) où une régression linéaire réussit à extrapoler, mais pas un arbre de décision.

Exercice 1 (Difficulté à extrapoler)

Exhiber un exemple de problème de régression (à construire) où une régression linéaire réussit à extrapoler, mais pas un arbre de décision.

Exercice 2 (Faire communiquer deux algorithmes)

On souhaite prédire des prix de certaines crypto-monnaies qui sont connues pour être particulièrement volatiles. L'enjeu d'estimer au mieux le prix est donc fort : une bonne prédiction peut donner lieu à un grand gain, et une mauvaise prédiction une grande perte. On sollicite notre équipe de data-scientists, et ils nous présentent deux algorithmes :

- ***Régression Linéaire*** *: marche plutôt bien, et reste raisonnablement correcte pour les grandes variations de prix*
- ***Arbre de régression*** *: marche beaucoup mieux quand les prix sont dans les moyennes, mais est très mauvais dès qu'on sort des prix moyens*

Expliquer succinctement pourquoi les comportements relatifs étaient prévisibles, et proposer des solutions pour utiliser les deux algorithmes ensembles et faire mieux que les deux séparément.

$$\mathrm{MSE}(y,\hat{f}(x)) = \left(\mathrm{Bias}\left[\hat{f}(x)\right]\right)^2 + \mathbb{V}\left[\hat{f}(x)\right] + \sigma^2 \qquad \text{(Trade off biais-variance)}$$

Exercice 3 (Intérêt du bagging)

Supposons que l'on traite un problème de régression, que l'on dispose de m régresseurs $(f_k)_{k\leqslant m}$ chacun entraîné sur m échantillons issus de la distribution engendrée par le dataset. On construit un régresseur fort à partir de ces modèles :

$$F(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$

1. $\mathbb{E}[F(x)] = \mathbb{E}[f_k(x)]$ *pour n'importe quel* $k \leqslant m$.
2. $\mathbb{V}[F(x)] = \frac{1}{m}\mathbb{V}[f_k(x)]$ *pour n'importe quel* $k \leqslant m$.
3. *Conclure sur l'intérêt de la méthode proposée.*

Supposons que l'on traite un problème de régression, que l'on dispose de m régresseurs $(f_k)_{k\leqslant m}$ chacun entraîné sur m échantillons issus de la distribution engendrée par le dataset. On construit un régresseur fort à partir de ces modèles :

$$F(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$

Alors si l'on suppose que les variables $(f_k(x))_{k\leqslant m}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, on a :

$$\mathbb{V}\left[F(x)\right] = \frac{1}{m}\mathbb{V}\left[f_k(x)\right]$$

En réalité, les datasets ne sont pas parfaitement indépendants et identiquement distribués. Si l'on considère qu'ils sont corrélé d'une valeur ρ, alors :

$$\mathbb{V}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right] = \frac{1}{m}(1-\rho)\sigma^2 + \rho\sigma^2$$

Exercice 4 (Cohérence)

Vérifier que la formule est cohérente avec le cas où les datasets sont indépendants. Que se passe-t-il quand les datasets sont parfaitement corrélés ?