問題 1

X を全体集合、$\mathcal{A}$ を X の部分集合族、A をある集合とし、$A, X \in \mathcal{A}$ とする。また、ある集合 B, C に対して $A = B \oplus C$ であるとし、任意の $\mathcal{A}$ の元 D に対して,$A \cap D = A$ または $A \cap D = \varnothing$ であるとする。(A は分割できない的な状況にするための条件) このとき、$B \notin \sigma(\mathcal{A})$ かつ $C \notin \sigma(\mathcal{A})$ であることを示せ。($\sigma(\mathcal{A})$:$\mathcal{A}$ を含む最小の σ 代数)

解答

$\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含むすべての σ 代数の共通部分をとったものと一致することを用いると、B, C を含まないような $\mathcal{A}$ を含む σ 代数の存在を示せば十分であることがわかる。$\mathcal{B} = \{\cup_{n=1}^{\infty} A_n | A_n \in \mathcal{A}$ または ${A_n}^c \in \mathcal{A}\}$ とすると、これは $\mathcal{A}$ を含む σ 代数であることがわかるが、これは明らかに B, C を含まない。