ホモロジーの計算例

参考：中原幹夫, 理論物理学のため のトポロジー1

復習：典型的なホモロジー群の計算法

やりたいことn次単体的複体Kのk次の鎖群に$C_k(K)$対するホモロジー群を求める（k単体$\sigma_k \in K$の個数：I_k）

1. $\psi_k: C_k(K) \to V\left(\mathbb{Z}^{I_k}\right)\ s.t. \sum_{i=1}^{I_k} c_i \sigma_k \to (c_1 \quad \cdots \quad c_{I_k})^T \Rightarrow \partial_k$を行列表示： $\psi_{k-1} \circ \partial_k \circ \psi_k^{-1}$

2. スミス標準化(規格化なしの特異値分解)$\partial_k = U_{I_{k-1} \times I_{k-1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} t_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & t_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \left(V_{I_k \times I_k}\right)^{-1}$

   ($r_k = \mathrm{rank}\,\partial_k$, t_r：境界輪体のねじれ係数)

3. Uの$1 \sim r_k$列目： $u_1^{k-1}, \cdots, u_{r_k}^{k-1}$が$B_{k-1}(K)$の基底ベクトル

4. Vの$r_k + 1 \sim I_k$列目： $v_{r_k+1}^k, \cdots, v_{I_k}^k$が$Z_k(K)$の基底ベクトル

5. $v_{r_k+1}^k, \cdots, v_{I_k}^k$ のうち $u_1^k, \cdots, u_{r_{k+1}}^k$ で表せないものを $h_1^k, \cdots, h_{I_k - r_k - r_{k+1}}^k$ (元の鎖群の表示に戻した)とすると、$b_k = I_k - r_k - r_{k+1}$として

$$H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K) = \left\{ \left[c_1 h_1^k + \cdots + c_{b_k} h_{b_k}^k \right] \middle| c_1 \in \mathbb{Z}_{t_1{}'}, \cdots, c_{b_k} \in \mathbb{Z}_{t_{b_k'}} \right\} \simeq \bigoplus_{i=1}^{b_k} \mathbb{Z}_{t_{i'}}$$

補足：ホモロジー群の計算の注意

$v^k_{r_k+1}, \cdots, v^k_{I_k}$には$u^{k-1}_1, \cdots, u^{k-1}_{r_k}$と直交しなくても、$h^k_1, \cdots, h^k_{I_k - r_k - r_{k+1}}$の基底となる場合がある
基本的に$v^k_i \perp u^{k-1}_1, \cdots, u^{k-1}_{r_k}$を探す$\Rightarrow c_i \in \mathbb{Z}$

$v^k_i \parallel u^k_j$でも、v^k_iの要素が$-t_i, 0, t_i$、$\mathrm{u}^\mathrm{k}_\mathrm{j}$の要素が$-t'_j, 0, t'_j$、のとき、
$r = \mathrm{mod}\left(\frac{\mathrm{lcm}\left(t_i, t'_j\right)}{t_i}\right)$として

$$c v^k_i \begin{cases} \in B_k(K), & c \equiv 0 \mod r \\ \notin B_k(K), & c \not\equiv 0 \mod r \end{cases}$$

$\Rightarrow c_i \in \mathbb{Z}_r$
例えば、$v^k_i = (1 \quad 0)^T, u^k_j = (1 \quad 0)^T, t_i = 2, t'_j = 3$のとき、

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\{ c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{Z} \right\}$$

ホモロジー群の計算コード

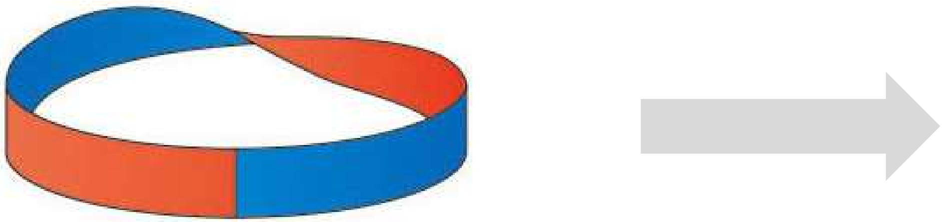
hy_homology.zip にホモロジー群の基底を求めるパッケージを置いたので、良かったら遊んでみてください
(test_homology.ipynbにいくつか例があります)

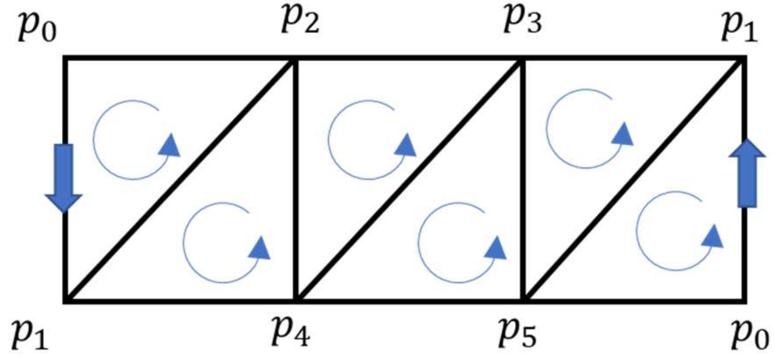
```
from (HomologyGroup.pyの場所)/HomologyGroup import calc_HomologyGroupList
K = [[0],[1],…,[0,1],…] #単体的複体(リスト)、各鎖群の基底ベクトルはここに格納された順番
H = calc_HomologyGroupList(K)
```

=>H[i]に$H_i(K)$の基底ベクトル(横ベクトル)とそのねじれ率が行列として格納されている：

$$\begin{pmatrix} \left(h_1^i\right)^T \\ \vdots \\ \left(h_{b_i}^i\right)^T \end{pmatrix}, [t_1 \quad \cdots \quad t_{b_i}]$$

例10：メビウスの輪





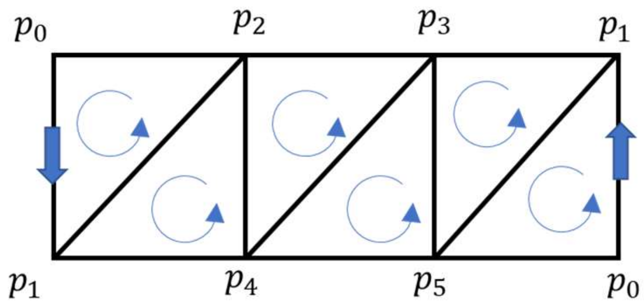
$K = \{p_0, \cdots, p_5, (p_0p_1), \cdots, (p_4p_5), (p_0p_1p_2), \cdots, (p_5p_0p_1)\}$

$C_2(K)$の基底：$(p_0p_1p_2), (p_2p_1p_4), (p_2p_4p_3), (p_3p_4p_5), (p_3p_5p_1), (p_5p_0p_1)$

$C_1(K)$の基底： $(p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_5), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_1p_4), (p_1p_5), (p_2p_3), (p_2p_4), (p_3p_4), (p_3p_5), (p_4p_5)$

$C_0(K)$の基底： $p_0, \cdots, p_5$

例10：メビウスの輪



$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

→フルランク：$\mathrm{rank}\, \partial_2 = 6$

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

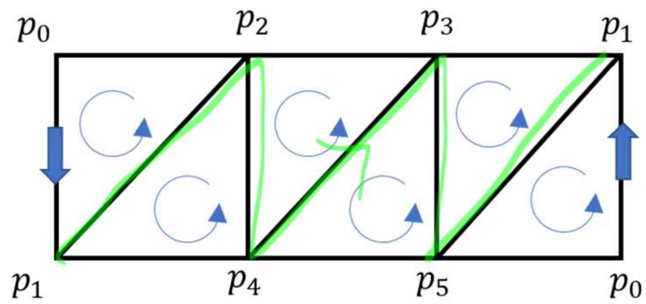
→ $\mathrm{rank}\, \partial_1 = 5$

＊Pythonのnumpy.linalg.matrix_rank()で計算

$b_2 = 6 - 6 - 0 = 0, b_1 = 12 - 5 - 6 = 1, b_0 = 6 - 0 - 5 = 1$

$\Rightarrow H_2(K) = 0, H_1(K) \simeq \mathbb{Z}, H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$

例10：メビウスの輪



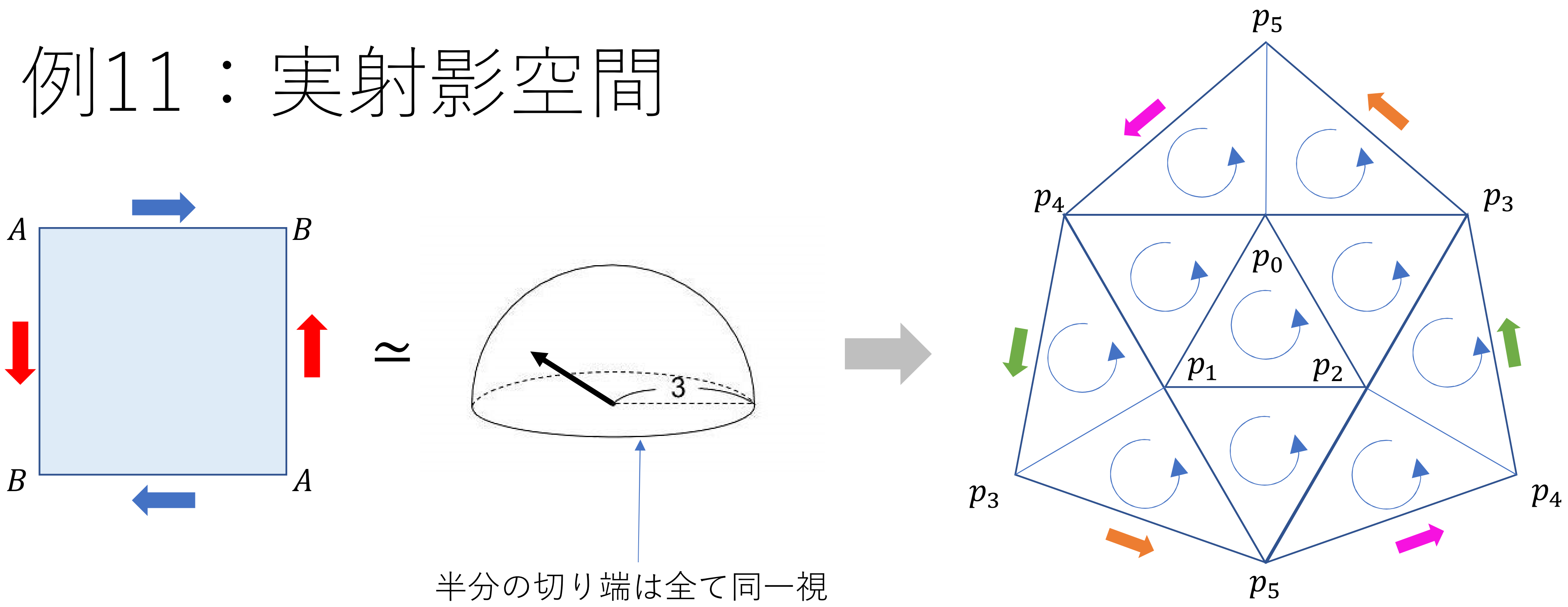
$\partial_2 = \begin{pmatrix} \left(u_1^1\right)^T \\ \vdots \\ \left(u_{12}^1\right)^T \end{pmatrix}$: $p_{i_1} \to p_{i_2} \to \cdots \to p_{i_n} \to p_{i_1}$という順に点を動く線分の集合(円周)

$Z_1(K)$の基底：
$$\begin{matrix}
[\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0] \\
[-1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0] \\
[\ 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0] \\
[\ 1, & -1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0] \\
[\ 0, & 0, & -1, & 1, & 0, & 0, & 0] \\
[\ 0, & 0, & 0, & -1, & 1, & 0, & 0] \\
[\ 0, & 1, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0] \\
[\ 0, & 0, & 1, & -1, & 1, & 1, & 0] \\
[\ 0, & 0, & 0, & 1, & -1, & -1, & 0] \\
[\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1] \\
[\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1] \\
[\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1]
\end{matrix}$$

$B_1(K)$の基底：
$$\begin{matrix}
[\ 1., & 0., & 0., & 0., & 0., & 0.] \\
[-1., & 1., & 0., & 0., & 0., & 0.] \\
[\ 0., & -1., & 0., & 0., & 0., & 0.] \\
[\ 1., & -1., & 1., & 0., & 0., & 0.] \\
[\ 0., & 0., & 0., & 1., & 0., & 0.] \\
[\ 0., & 0., & -1., & 0., & 0., & 0.] \\
[\ 0., & 1., & 0., & -1., & 0., & 0.] \\
[\ 0., & 0., & 0., & 0., & 1., & 0.] \\
[\ 0., & 0., & 1., & 0., & -1., & 0.] \\
[\ 0., & 0., & 0., & 0., & 1., & 1.] \\
[\ 0., & 0., & 0., & -1., & 0., & -1.] \\
[\ 0., & 0., & 0., & 0., & 0., & 1.]
\end{matrix}$$

$$H_1(K) = \{c[(p_1p_4) + (p_4p_2) + (p_2p_3) + (p_3p_5) + (p_5p_1)] | c \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

例11：実射影空間



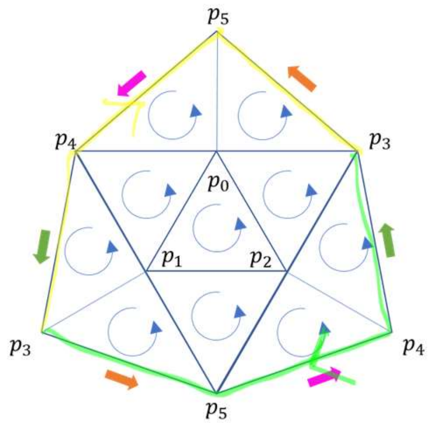
$K = p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5,$
$(p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), (p_0p_4), (p_0p_5), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_1p_4), (p_1p_5), (p_2p_3), (p_2p_4), (p_2p_5), (p_3p_4), (p_3p_5), (p_4p_5),$
$(p_0p_1p_2), (p_0p_2p_3), (p_0p_3p_5), (p_0p_4p_1), (p_0p_5p_4), (p_1p_3p_5), (p_1p_4p_3), (p_1p_5p_2), (p_2p_4p_3), (p_2p_5p_4)$

任意の2点を結ぶ線分が1単体に存在するからKは連結

例11：実射影空間

Pythonで計算：

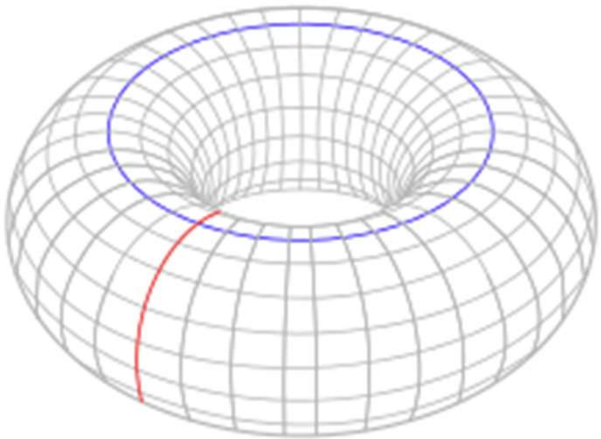
```
H0 = [[0 0 0 0 0 1]]
tor=[1]
H1 = [[ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1 -1  1]]
tor=[2]
H2 = []
tor=[]
```

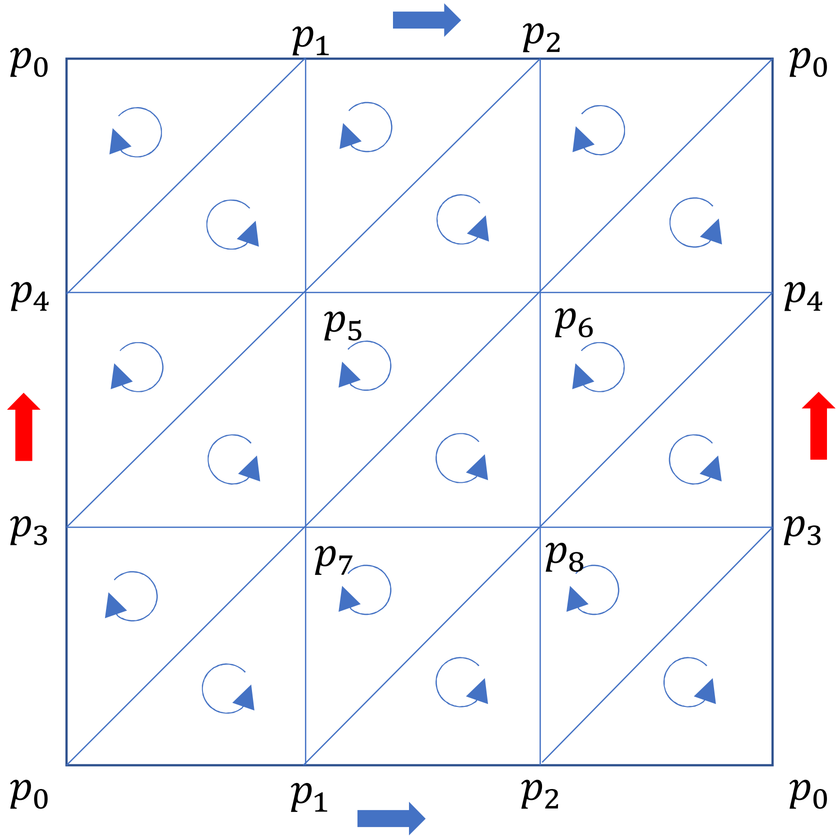


$H_1(K)$は捻じれ群になっている(周期２)

- $H_0(K) = \{c[p_5] | c \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$： Kが連結であるのと整合
- $H_1(K) = \{c[(p_3p_4) + (p_4p_5) + (p_5p_3)] | c \in \{0,1\}\} \simeq \mathbb{Z}_2$
- $H_2(K) = 0$

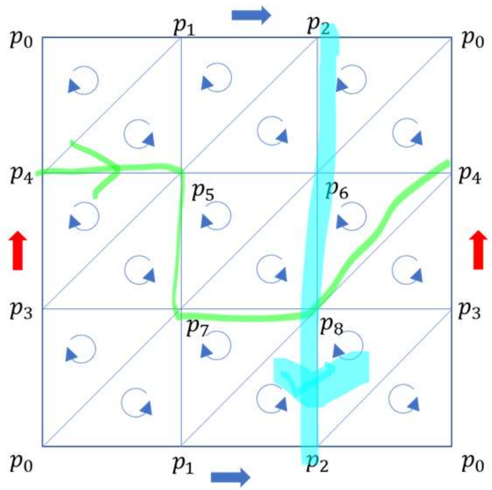
例12：トーラス






```
K9 = [[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],¥
    [0,1],[0,2],[0,3],[0,4],[0,6],[0,7],[1,2],[1,4],[1,5],[1,7],[1,8],¥
    [2,3],[2,5],[2,6],[2,8],[3,4],[3,5],[3,7],[3,8],¥
    [4,5],[4,6],[4,8],[5,6],[5,7],[6,7],[6,8],[7,8],¥
    [0,1,4],[1,4,5],[1,2,5],[2,5,6],[0,6,2],[0,6,4],¥
    [3,4,5],[3,7,5],[5,6,7],[6,7,8],[4,8,6],[3,4,8],¥
    [0,3,7],[0,1,7],[1,7,8],[1,2,8],[2,8,3],[0,3,2]]
```

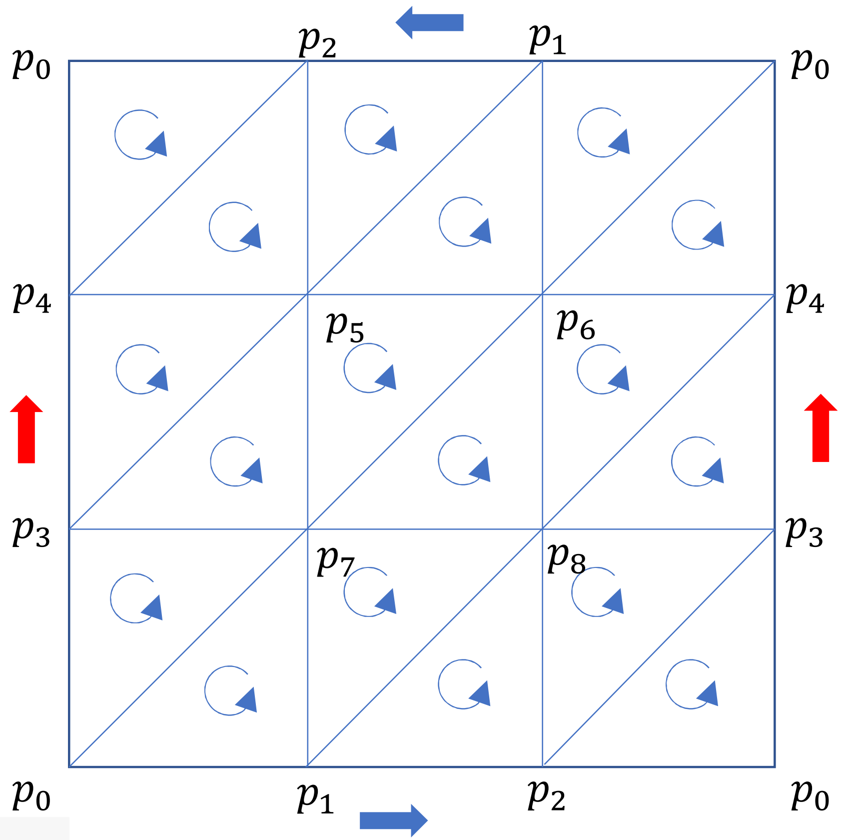
例12：トーラス




```
H0 = [[0 0 0 0 0 0 0 0 1]]
tor=[1]
H1 = [[ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0
   0 -1  0]
 [ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0 -1  0  1
   0  0  1]]
tor=[1, 1]
H2 = [[-1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1]]
tor=[1]
```

- $H_0(K) = \{c[p_8] | c \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$
- $H_1(K) = \{c_1[(p_2p_8) - (p_3p_4) + (p_6p_8)] + c_2[(p_4p_6) - (p_5p_6) + (p_6p_7) + (p_7p_8)] | c_1, c_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
- $H_2(K) = \left\{c\left[\sum_{i=1}^{18}(-1)^i \sigma_i^{(2)}\right] \middle| c \in \mathbb{Z}\right\} \simeq \mathbb{Z}$

例13：クラインの壺

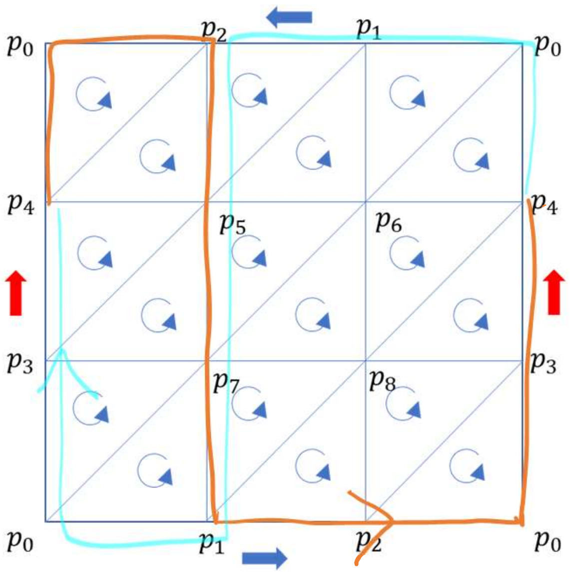


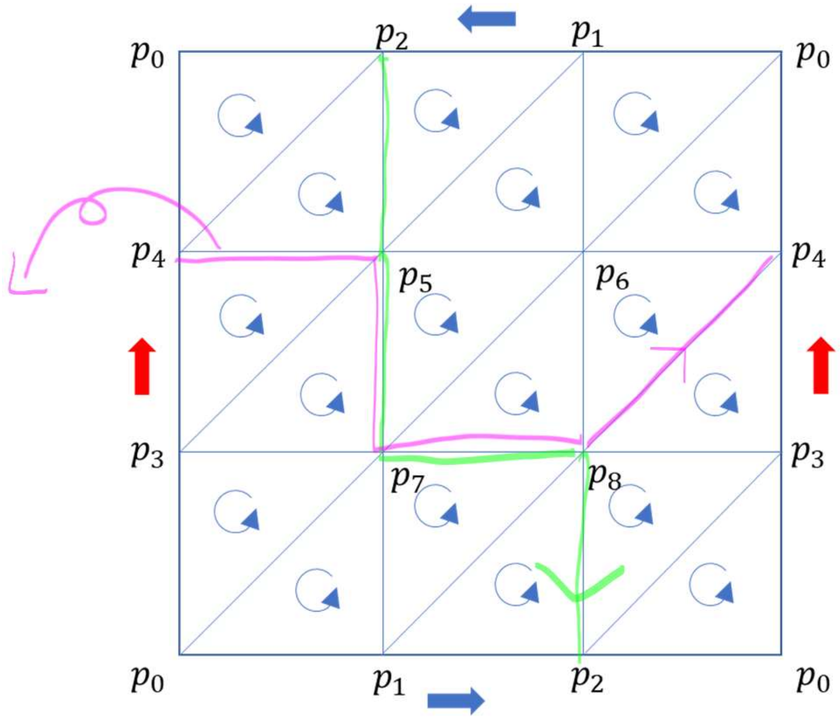

```
# Klein bottle
K10 = [[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],¥
     [0,1],[0,2],[0,3],[0,4],[0,6],[0,7],[1,2],[1,5],[1,6],[1,7],[1,8],¥
     [2,3],[2,4],[2,5],[2,8],[3,4],[3,5],[3,7],[3,8],¥
     [4,5],[4,6],[4,8],[5,6],[5,7],[6,7],[6,8],[7,8],¥
     [0,4,2],[2,4,5],[1,2,5],[1,5,6],[0,1,6],[0,6,4],¥
     [3,5,4],[3,7,5],[5,7,6],[6,7,8],[4,6,8],[3,4,8],¥
     [0,7,3],[0,1,7],[1,8,7],[1,2,8],[2,3,8],[0,3,2]]
```

例13：クラインの壺

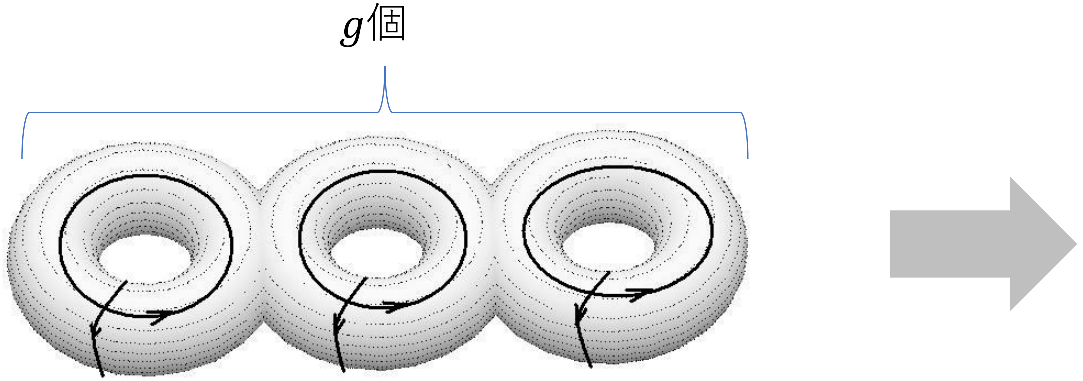
```
H0 = [[0 0 0 0 0 0 0 0 1]]
tor=[1]
H1 = [[ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  1
   0  0  1]
 [ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0 -1  0  1
   0  0  1]]
tor=[1, 2]
H2 = []
tor=[]
```

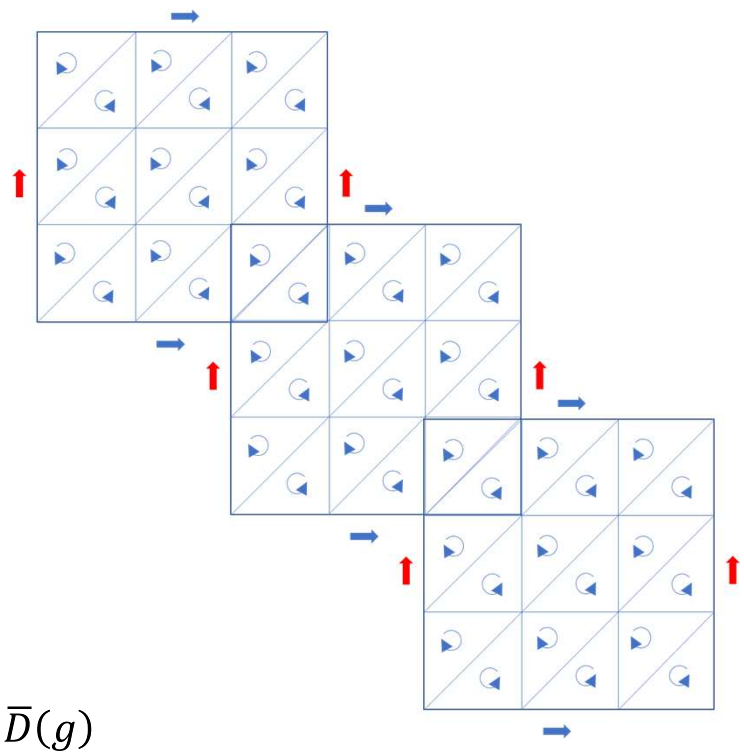
- $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$
- $H_1(K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$
- $H_2(K) = 0$





例12.1：複数穴の開いたトーラス





- 閉曲面全体：境界なし=> $\in Z_2(K) \Rightarrow H_2(K) \simeq \mathbb{Z}$
- 各ドーナツのホモロジー群の基底$\{a_i, b_i\} \Rightarrow H_1(K) = \oplus^{2g}\mathbb{Z}$
- 連結$\Rightarrow H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$

$\{a_i, b_i\}$：曲線の標準形

Cf)種数gの向き付け不可能な閉曲面 $\overline{D}(g)$

$$H_2(K) = 0$$
$$H_1(K) = \oplus^{g-1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$
$$H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$$

例えば$\overline{D}(1)$ = 実射影空間、 $\overline{D}(2)$ =クラインの壺

補足：マイヤー・ヴィートリウス完全系列

Def(鎖準同型)：
鎖群上の加群準同型$f\colon C_r(K)=\bigoplus_i \mathbb{Z}\sigma_i \to C'_s(K)=\bigoplus_i \mathbb{Z}\sigma'_i$ で以下を満たすもの

1. $f(\mathbb{Z}\sigma_i)=\mathbb{Z}\sigma'_i$
2. $f\partial_r=\partial'_s f$

＝＞鎖準同型fを用いて、ホモロジー群の準同型

$$
\begin{array}{ccc}
f_*\colon H_p(K) & \to & H_q(K') \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
[\sigma] & \to & [f(\sigma)]
\end{array}
$$

を構成できる

補足：マイヤー・ヴィートルス完全系列

Def(完全系列)：

加群G_n、加群準同型$f_n: G_n \to G_{n-1}$の系列$\cdots \to G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \to \cdots$が$\mathrm{Im}\, f_{n+1} = \mathrm{Ker}\, f_n$を満たす

例えば鎖群は完全系列

鎖群$C' \subset C$に対して$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C/C' \to 0$（$i : c \in C' \to c \in C$、$j: c \to [c]$）は完全系列

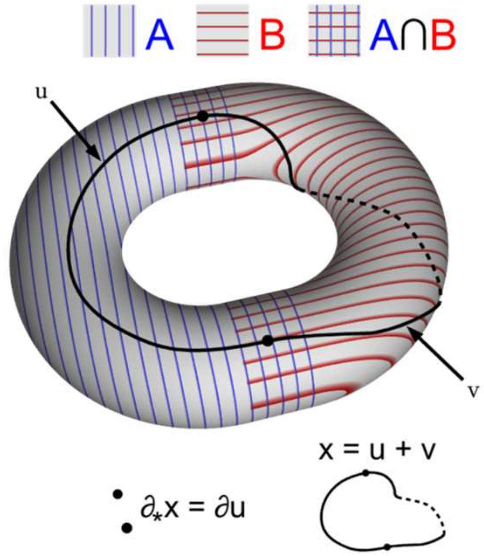
定理(マイヤー・ヴィートルス完全系列)：
複体K_1, K_2、$K_1 \cap K_2$は$K_1 \cup K_2$の部分複体
⇒完全系列

$$\cdots \to H_{q+1}(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_1 \oplus i_2} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{i_1'(*) - i_2'(*)} H_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \to \cdots$$

が存在する。

系： $K_1 \cap K_2$が連結⇒ $H_q(K_1 \cup K_2) \simeq \left(H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)\right) / \mathrm{Im}(i_1 \oplus i_2)$

例：トーラス



A, B：円筒に同相

$$H_r(A) \simeq H_r(B) \simeq H_r(\text{円柱}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 0,1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$

$$H_r(A \cap B) \simeq H_r(2\text{つの別の円柱}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & r = 0,1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$

＝＞A, Bの境界： $A \cap B$に含まれる

マイヤー・ヴィートルス完全系列：

$$0 \xrightarrow{i_2} H_2(A \cup B) \xrightarrow{\partial_*} H_1(A \cap B) \xrightarrow{i_A \oplus i_B \big|_1} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{i'_A(*) - i'_B(*) \big|_1} H_1(A \cup B)$$
$$\xrightarrow{\partial_*} H_0(A \cap B) \xrightarrow{i_A \oplus i_B \big|_0} H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{i'_A(*) i'_B(*) \big|_0} H_0(A \cup B) \xrightarrow{\partial_*^0} 0$$

例：トーラス

準同型定理とMV系列の性質から

$$H_2(A \cup B)/\mathrm{Ker}\,\partial_* \simeq \mathrm{Im}\,\partial_* \simeq \mathrm{Ker}\, i_A \oplus i_B \Big|_1$$

$$H_2(A \cup B)/\mathrm{Ker}\,\partial_* = H_2(A \cup B)/\mathrm{Im}\, i_2 = H_2(A \cup B)/0 \simeq H_2(A \cup B)$$

$H_1(A), H_1(B) \simeq \mathbb{Z}$よりこれらは1次元だから

$([\sigma_A], 0), (0, [\sigma_B]) \in H_1(A) \oplus H_1(B)$について

$$i_A \oplus i_B \Big|_1 \big(([\sigma_A], 0)\big) = ([\sigma_A], [\sigma_A])$$

$$i_A \oplus i_B \Big|_1 \big(([\sigma_B], 0)\big) = ([\sigma_B], [\sigma_B])$$

$$\Rightarrow i_A \oplus i_B \Big|_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, i_A \oplus i_B \Big|_1 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H_2\left(T^2\right) = H_2(A \cup B) \simeq \mathbb{Z}$$

例：トーラス

準同型定理とMV系列の性質から

$$H_1(A) \oplus H_1(B) / \mathrm{Ker}\left(i'_A(*) - i'_B(*) \Big|_1 \right) \simeq \mathrm{Im}\left(i'_A(*) - i'_B(*) \Big|_1 \right)$$

$\mathrm{Ker}(i'_A(*) - i'_B(*)|_1) = \mathrm{Im}\, \partial^1_* = 0$(2つの円周のホモロジー群は1次元で独立だから、それぞれの0元をとるしかない)

よって$i'_A(*) - i'_B(*)|_1$は全射で$\mathrm{Im}(i'_A(*) - i'_B(*)|_1) = H_1(A \cup B) = H_1(T^2)$

$$H_1(T^2) \simeq H_1(A) \oplus H_1(B) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

連結だから$H_0(T^2) \simeq \mathbb{Z}$

例：n穴トーラス

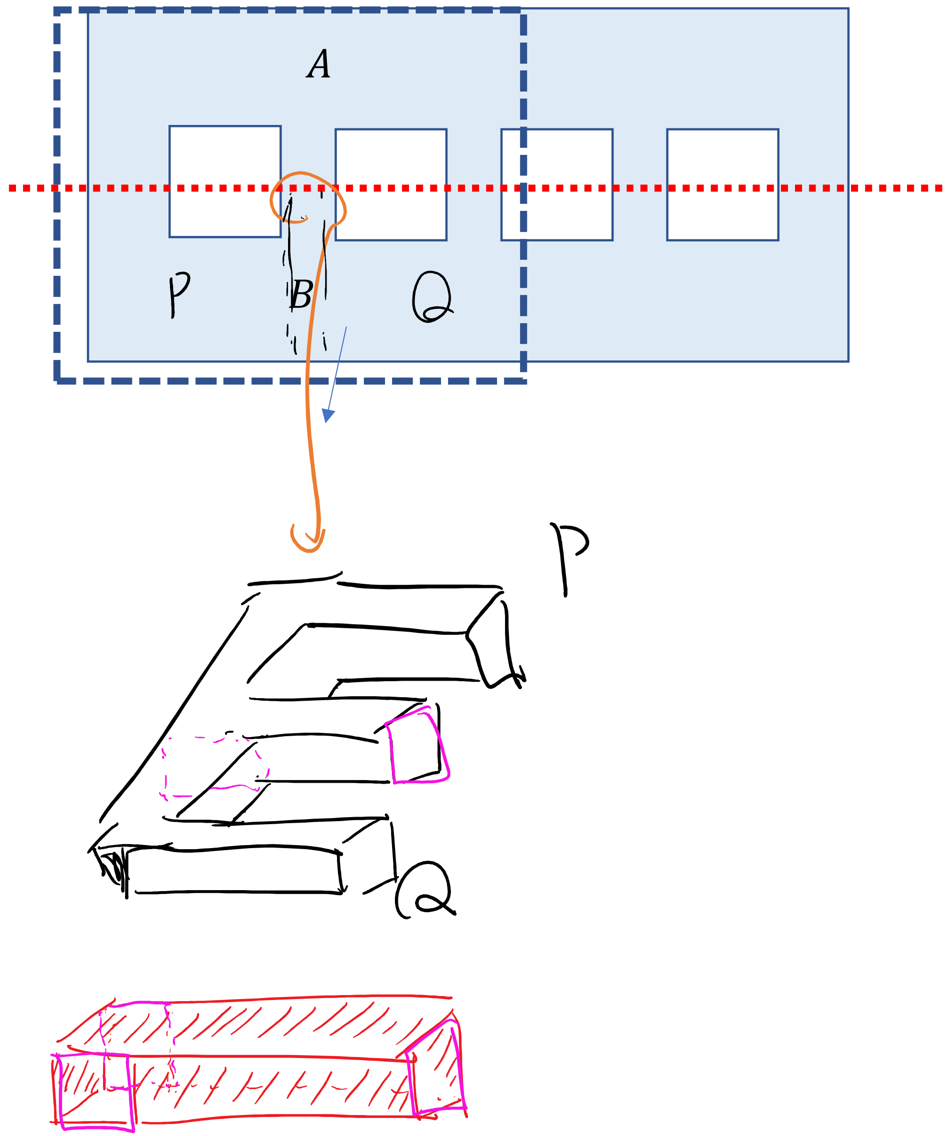
$P\cap Q$：周期的境界が全くない四角形⇒ $H_*(P\cap Q)=0$
$P\cap Q$は連結

$$\Rightarrow H_r(P\cup Q)\simeq H_r(P)\oplus H_r(Q)\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & r=0,1\\ 0, & r\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow H_r(A)\simeq H_r(B)\simeq\begin{cases}\oplus^n\mathbb{Z}, & r=0,1\\ 0, & r\geq 2\end{cases}$$

$$H_r(A\cap B)\simeq H_r\left(n+1\text{個の別の円柱}\right)\simeq\begin{cases}\oplus^{n+1}\mathbb{Z}, & r=0,1\\ 0, & r\geq 2\end{cases}$$

$$H_1\left(T^{2n}\right)\simeq H_1(A)\oplus H_1(B)\simeq\oplus^{2n}\mathbb{Z}$$



例：n穴トーラス

トーラスのときと同様にして

$$H_2(A \cup B) \simeq \mathrm{Ker}\, i_A \oplus i_B \Big|_1$$

$\left([\sigma_A^i], 0\right), \left(0, \left[\sigma_B^j\right]\right) \in H_1(A) \oplus H_1(B)$について

$$i_A \oplus i_B \Big|_1 \left(\left([\sigma_A^i], 0\right)\right) = \left([\sigma_A^i], [\sigma_A^i]\right)$$

$$i_A \oplus i_B \Big|_1 \left(\left(0, \left[\sigma_B^j\right]\right)\right) = \left(\left[\sigma_B^j\right], \left[\sigma_B^j\right]\right)$$

$$i_A \oplus i_B \Big|_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, i_A \oplus i_B \Big|_1 = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<=間違っているかも?

よって$H_2\left(T^{2n}\right) \simeq \mathbb{Z}$

連結なので$H_0\left(T^{2n}\right) \simeq \mathbb{Z}$