Spectral Clustering e Aplicações

Pedro Hiroshi Ely Ito
João Francisco Zani de Arruda

Instituto de Ciências Matématicas e de Computação
Universidade de São Paulo

12/07/2022

Roteiro I

Introdução

Clustering refere-se a um conjunto de métodos que buscam subconjuntos(clusters) de um dataset que computem alguma forma de similaridade: elementos num mesmo cluster são parecidos, enquanto elementos de clusters diferentes não.

Spectral Clustering

Um método comum nesse tipo de tarefa é o Spectral Clustering. Nele, criamos um grafo a partir do dataset e usamos os autovalores do Laplaciano para encontrar uma representação dos nós do grafo. A partir dessa representação, aplicamos k-means.

Definition

Spectral Clustering:

1. Calcule o Laplaciano L.
2. Calcule os k menores autovalores.
3. Crie uma matriz a partir dos k primeiros autovetores.
4. Aplique k-means usando a matriz de autovetores.

K-means

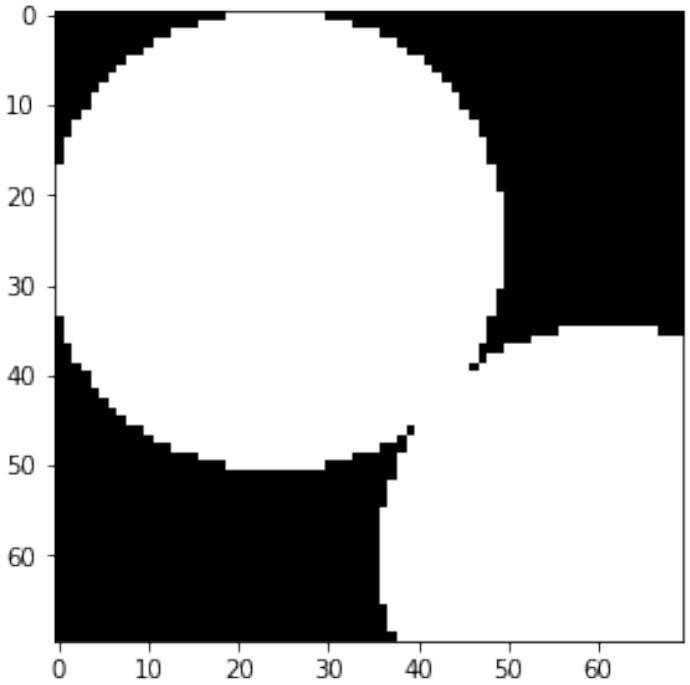
Definition

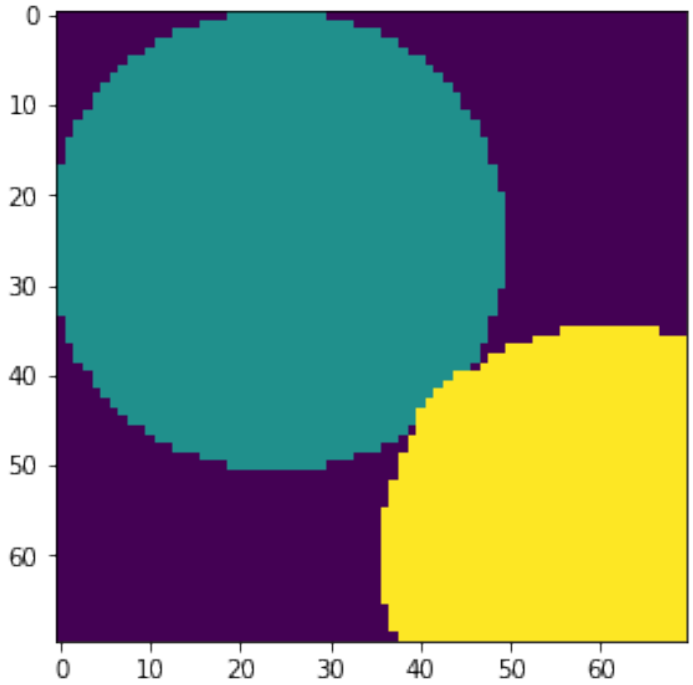
K-means:

1. Selecione k "médias"aletórias.
2. Associe cada ponto do dataset à média mais próxima.
3. Atualize as médias para os centróides de cada cluster.
4. Repita até a convergência.

Segmentação de objetos

Vamos aplicar Spectral Clustering na segmentação de objetos em imagens: dada uma imagem com n objetos, queremos delimitar as regiões correspondentes a cada objeto.





De imagem para grafo

Vamos trabalhar com imagens em nível de cinza, representada por uma matriz com entradas no intervalo $(0, 255)$, onde 0 é preto e 255 branco.
Exemplo:

```
array([[255, 255, 255, 255, 255,   0,   0,   0,   0,   0, 255, 255, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255, 255,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255, 255,   0,   0, 170, 170,   0, 170, 170, 255, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255,   0, 170,   0,   0, 170, 170, 170, 170, 170, 170, 255, 255, 255],
       [255, 255,   0,   0, 170, 170, 170, 170, 170,   0, 170, 170, 170, 255, 255, 255],
       [255, 255,   0,   0, 170, 170, 170, 170,   0,   0,   0,   0, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255, 255,   0, 170, 170, 170, 170, 170, 170, 255, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255, 255,   0,  85,   0,   0,   0,  85, 255, 255, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255,   0,   0,  85,   0,   0,   0,  85,   0, 255, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255,   0,   0,   0,  85,   0,   0,   0,  85,   0,   0, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255,   0,   0,   0, 255,  85,  85,  85, 255,   0,   0,   0, 255, 255, 255],
       [255, 255, 170, 170, 170,  85,  85,  85,  85,  85, 170, 170, 170, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255, 170, 170,  85,  85,  85,  85,  85, 170, 170, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255,  85,  85,  85,  85, 255,  85,  85,  85,  85, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255, 255,   0,   0,   0, 255, 255, 255,   0,   0,   0, 255, 255, 255, 255],
       [255, 255,   0,   0,   0,   0, 255, 255, 255,   0,   0,   0,   0, 255, 255, 255]],
```

Criando o grafo

A partir dessa imagem, criamos um grafo onde cada nó representa um pixel. Cada pixel é ligado aos pixeis vizinhos(cima, baixo, esquerda e direita). O peso das arestas é dado por:

$$W_{pq} = e^{-\frac{|I_p - I_q|^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

Onde I_p é a intensidade do pixel p e σ é um "fator de escala", quanto menor for σ, menores são os clusters formados.

Calculando vizinhança

```
def neighbors(img):

    right = np.vstack([img[:,:-1].ravel(), img[:,1:].
        ravel()])
    below = np.vstack([img[:-1,:].ravel(), img[1:,:].
        ravel()])
    neighbors = np.unique(np.hstack([right, below]), axis
        =1)

    return neighbors
```

```python
def create_nxGraph(img):
    m,n = img.shape
    sigma = np.std(img)
    img_num = (np.arange(m*n).reshape(m,n))
    adj = neighbors(img_num)

    G = nx.Graph()
    G.add_nodes_from(np.arange(m*n))

    I = img.flatten()[adj[1]] - img.flatten()[adj[0]]
    weights = np.exp(-(np.abs(I))**2)
    weights = weights/(2*sigma**2)

    edges = zip(adj[0,:], adj[1,:], weights)
    G.add_weighted_edges_from(edges)
    nx.set_node_attributes(G, img.flatten(), "intensity")

    bool_img = img.astype(bool)
    mask = img_num[bool_img]

    return G.subgraph(mask)
```

Aplicando Spectral Clustering

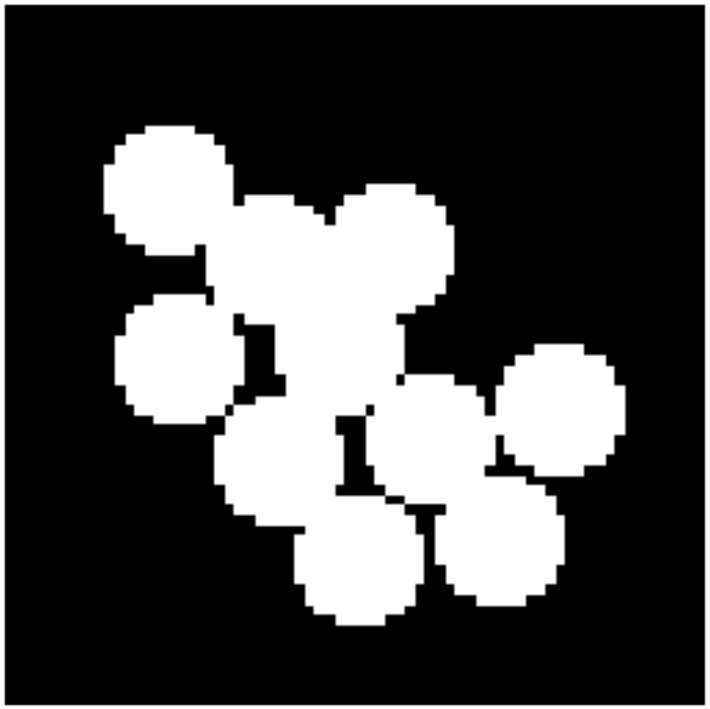
```
from sklearn.cluster import spectral_clustering
import matplotlib.pyplot as plt

img = Image.open('imagem.png')
img = img.convert('L')#converte para grayscale
img = np.asarray(img)#converte para array

G = create_nxGraph(img)#cria o grafo
A = nx.to_numpy_array(G)#retorna a matriz de ajacencia
A = np.nan_to_num(A)#substitui infinitos

mask = img.astype(bool)#consideramos apenas os objetos
labels = spectral_clustering(A, n_clusters=3,
    eigen_solver="arpack")
label_im = np.full(mask.shape, -1.0)#array do resultado
label_im[mask] = labels#preenche os resultados
```

Resultados



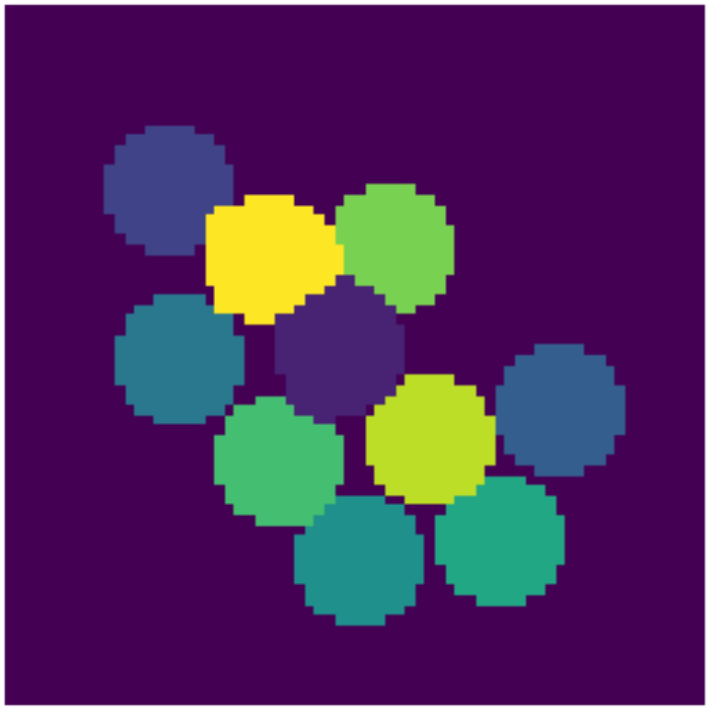


Figura: $n_{clusters} = 10$

Resultados

Figura: $n_{clusters} = 3$

Resultados

Figura: $n_{clusters} = 2$

Resultados

Figura: $n_{clusters} = 2$

Resultados

Figura: $n_{clusters=3}$

Muito Obrigado!