要約

離散分布

離散一様分布

確率関数：$P(X=x|N)= \frac{1}{N}, x=1,2 \cdots, N$

平均： $\frac{(1+n)}{2}$

分散： $\frac{(n-1)(n+1)}{12}$

二項分布

確率関数：$Bin(n, p) = P_{n,p}(k)={}_n\mathrm{C}_kp^k(1-p)^{n-k}$

説明：n回ベルヌーイ試行、成功する回数

確率母関数：$G_X(t)=(ps+1-p)^n$

積率母関数：$M_X(t)=(pe^t+1-p)^n$

特性関数：$\phi_X(t)=(pe^{it}+1-p)^n$

平均：$E(X) = np$

分散：$Var(X)=p(1-p)$

相関計算

二項定理 を用いて、簡単に計算できます：

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ka^kb^{n-k}$

ベルヌーイ分布：$P(X=x|p)=$

ポアソン分布

確率関数：$P(X=k| \lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots,$

説明：稀な現象の大量観測、によって、稀な現象が起こる回数のをXで表す。λ は稀

な現象の平均値、強度といい。

平均と分散：$E(X)=Var(X)=\lambda$

確率母関数：$G_X(s)=e^{(s-1)\lambda}$

積率母関数：$M_X(s)=exp{(e^t-1)\lambda}$

特性関数：$\phi_X(s)=exp{(e^{it}-1)\lambda}$

相関計算

マクローリン展開から：

$e^{a}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^t}{t!}$

その他：

$n \rightarrow \infty p \rightarrow 0$ のとき、二項分布はポアソン分布に収束する。

証明：特性関数の極限が一緒。

幾何分布

確率分布関数：$P(X=k|p)=p(1-p)^k$

説明：成功確率pのベルヌーイ試行を独立に行っていき、初めて成功するまでに要した失敗の回数をXとするとき、Xの分布が幾何分布となる。

平均：$E[X]=q/p$

分散：$Var[X]=q/p^2$

確率母関数：

積率母関数：

特性関数：

相関計算

等比数列の和

無記憶性。

負の二項分布

確率分布関数：$P(X=k|p, r)= (r+k-1 k)p^rq^k$

説明：成功確率pのベルヌーイ試行を独立に行っていき、r回成功するまでに要した失敗の回数をxで表示する時、Xの分布が負の二項分布となる。

平均：$E[X]=rq/p$

分散：$Var[X]=rq/p^2$

確率母関数：$G_x(s)=p^r/(1-sq)^r$

積率母関数：

特性関数：

相関計算

超幾何分布

連続分布

連続一様分布

$f_X(x|a,b)=\frac{1}{(b-a)}　(a \le X \le bの場合)$

正規分布

確率変数Xが平均 μ 分散 σ^2　の正規分布に従うとは、Xの確率密度関数が：

$f_X(x|\mu, \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}}\exp{\left{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right}}, -\infty<x<\infty$

標準化変換：　$Z=(X-\mu)/\sigma$

標準正規分布：$\phi_(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp{-\frac{z^2}{2}}$

$F_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp{\left{-\frac{(x-\mu)^2}

{2\sigma^2}\right}}\ \mathrm{d}x$

確率母関数：

積率母関数：

特性関数：

相関計算：

$\int_{-\infty}^{\infty}exp{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$

ガウス積分：

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

正規分布の変数変換

指数分布

確率密度関数：$f_X(x|\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$

分布関数： $F_X(x)=P(X<x)=1-e^{-\lambda x}$

平均：$E[X]=\frac{1}{\lambda}$

分散：$Var[X]=\frac{1}{\lambda^2}$

確率母関数：

積率母関数：

特性関数：

指数分布は生存時間の分布として用いられることがある。P(X>s)は時間sを超えて生存する確率を表しており。 $P(X>s)=e^{-\lambda s}$

$P(X \ge s+t | X \ge s)=e^{-\lambda t}=P(X \ge t)$

ハザード関数：（故障の確率）$\lambda(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}$

指数分布を離れて、x時間まで動作していて次の時間x+\Delta までに故障する条件付き確率は：

$P(x<X \le x+\Delta)=\frac{F(x+\Delta)-F(x)}{1-F(x)}$

これはハザード関数という。

$F(x)=1-exp{-\int_0^x\lambda(t)dt}$

$f(x)=\lambda(x)exp{-\int_0^x\lambda(t)dt}$

指数分布において、常に$lambda(x)=\lambda$　xには無関係になる。

ワイブル分布： 時間をけいかとともに故障しやすくなる場合や、故障しなくなる場合には $\lambda(x)=abx^{b-1}$ なるハザード関数が考えられる。

$f(x|a,b)=abx^{b-1}exp{-ax^b}$

ガンマ分布

$f_X(x|\alpha, \beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta}(\frac{x}{\beta})^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, x > 0$

ガマン関数　$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}y^{\alpha-1}e^{-y}dy$

α は形状係数、β は尺度係数と呼ばれ。

尺度変換 $Y=X/\beta$を行うと、

$f_Y(y|\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-y}, y>0$

$E[Y]=\alpha$

$Var(Y)=\alpha$

$M_Y(t)=E[e^{tY}]=(1-t)^{-\alpha}$

なので、 $E[X]=\alpha\beta$, $Var(X)=\alpha\beta^2$

ガンマ分布は，期間 β ごとに1回くらい起こるランダムな事象が α 回起こるまでの時間の分布を表します。

主に信頼性工学における電子部品の寿命分布や通信工学におけるトラフィックの待ち時間分布に応用される。

指数分布は期間 β ごとに1回くらい起こるランダムな事象が 1 回起こるまでの時間の分

布を表す。

$X_1,X_2,\cdots,X_{\alpha}$ が互いに独立に平均 β の指数分布に従うとき,
$Y=X_1+X_2+\cdots +X_{\alpha}$ はパラメータが β と α のガンマ分布に従う。

その他

$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}, \Gamma(1)=1$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma{\alpha}$

$\Gamma(n)=(n-1)!$　nが自然数の時

階乗の一般化

カイ2乗分布

nを自然数とする、確率変数Xの確率密度関数が：

$f_X(x)=\frac{1}{\Gamma(n/2)}(\frac{1}{2})^{n/2}x^{n/2-1}exp{-x/2}$

で与えられるとき、自由度nのカイ二乗分布といい、χ_n^2 で表す。

$Ga(n/2, 2)$

$E[\chi_n^2]=n$

$Var(\chi_n^2)=2n$

$M_X(t)={(\frac{1}{1- 2t})}^{\frac{k}{2}}$

確率変数Zが $N(0,1)$ に従うとき、Z^2 が χ_1^2 に従う。

確率変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ が互いに独立に標準正規分布 N(0,1) に従うとき,
$X=X_1^2+X_2^2+\cdots +X_n^2$ は自由度 n のカイ二乗分布に従う。

ベータ分布

区間[0,1]上の確率分布であり。

$f_X(x|a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}$

ベータ関数

$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dx$
$B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$

説明：
コイン投げにおける表が出る確率の予測分布。
表が出る確率xが不明であるコインを何回か投げて、表がm回、裏がn回出たとします、この時「表が出る確率の予測値」は、パラメータが $(a,b)=(m+1, n+1)$であるベータ分布に従うと考えることができます.

より正確に言うと，事前分布を一様分布とし，尤度が二項分布（コイン投げ）であるときの事後分析がベータ分布になります。

平均：$E[X]=\dfrac{a}{a+b}$

分散：$V[X]=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

確率母関数：

積率母関数：

特性関数：

参考資料

ガンマ分布の意味と期待値、分散

正規分布の二乗和がカイ二乗分布に従うことの証明