線形代数 2, 第 10 回の内容の理解度チェック (解答)

2024/12/12 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (3 点)

解答) A の固有多項式は,

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ 0 & t-3 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-3).$$

従って, A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である.

(2) A のそれぞれの固有値 λ に対し, 固有空間 $W(\lambda; A)$ を求めよ. (3 点)

解答)

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\lambda = 2$ に対する固有空間は

$$W(2; A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - 2E)\mathbf{x} = 0 \right\} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $\lambda = 3$ のとき,

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\lambda = 3$ に対する固有空間は

$$W(3; A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - 3E)\mathbf{x} = 0 \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{2}$ 2次以下の実係数多項式のなすベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換 T を $T(f(x)) = f(1-2x)$ により定める.

(1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求め, T の固有値 λ を全て求めよ. (表現行列 A: 1点, 固有値 λ: 3点)

解答) $T(1) = 1$, $T(x) = 1-2x$, $T(x^2) = (1-2x)^2 = 1-4x+4x^2$ より,

$$\begin{pmatrix} T(1) & T(x) & T(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

よって, 求める T の表現行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ である. A の固有多項式は,

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t+2 & 4 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t+2)(t-4).$$

従って T の固有値は $\lambda = 1, -2, 4$ である.

(2) T の各固有値 λ に対する固有ベクトルを求めよ. (3点)

解答)

- $\lambda = 1$ のとき,

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t_1 \in \mathbb{R})$. 従って, 固有ベクトルは $f_1(x) = t_1$ $(t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = -2$ のとき,

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A+2E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t_2 \in \mathbb{R})$. 従って, 固有ベクトルは $f_2(x) = t_2(1-3x)$ $(t_2 \neq 0)$.

- $\lambda = 4$ のとき,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-4E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, $\mathbf{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $(t_3 \in \mathbb{R})$. 従って, 固有ベクトルは $f_3(x) = t_3(1-6x+9x^2) = t_3(1-3x)^2$ $(t_3 \neq 0)$.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html