代数学２，第11回の内容の理解度チェックの解答

2025/7/14　担当：那須

$\boxed{1}$ アイゼンシュタインの既約性判定を用いて以下の多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が $\mathbb{Q}[x]$ において既約元であることを示せ.

(1) $f(x) = x^5 - 5x + 10$

(2) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x + 3$

(**解答**)

(1) 素数 $p = 5$ を考えると, 最高次係数 1 は p で割り切れず, 定数項 10 は p で割り切れ p^2 で割り切れず, すべての中間項の係数 (0 または -5) は p で割り切れるため, アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.

(2) 素数 $p = 3$ を考えると, 最高次係数 1 は p で割り切れず, 定数項 3 は p で割り切れ p^2 で割り切れず, すべての中間項の係数 $6, 9, 3$ は p で割り切れるため, アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.

$\boxed{2}$ 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が $\mathbb{Q}[x]$ において既約元かどうか判定せよ (ヒント:$f(x+2)$ を計算せよ).

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$$

(**解答**)　ヒントに従い $f(x+2)$ を求めると,

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 12(x+2) - 1 \\ &= x^3 + 7 \end{aligned}$$

$f(x+2)$ が既約なことと, $f(x)$ が既約なことは同値であるため, $f(x+2)$ にアイゼンシュタインの判定法を適用する.

素数 $p = 7$ を考えると, 最高次係数 1 は p で割り切れず, 定数項 7 は p で割り切れ p^2 で割り切れず, すべての中間項の係数 0 は p で割り切れるため, アイゼンシュタインの判定法により $f(x+2)$ は, したがって $f(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.

$\boxed{3}$ p を素数とする．$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が $\mathbb{Q}[x]$ において既約元であることを示せ．

(1) $f(x) = x^p - p$

(2) $f(x) = x^p + p^2 x + p$

(**解答**)

(1) 最高次係数は 1 で p で割り切れず, 定数項 $-p$ は p で割り切れ p^2 で割り切れず, すべての中間項の係数 0 は p で割り切れるため, アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である．

(2) 最高次係数は 1 で p で割り切れず, 定数項 p は p で割り切れ p^2 で割り切れず, すべての中間項の係数 (0 または p^2) は p で割り切れるため, アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である．

$\boxed{4}$ 有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の n 変数多項式多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ が一意分解整域であることを示せ．ただし以下のガウスの定理を用いても良い．

ガウスの定理

整域 R に対し, R が一意分解整域であるための必要十分条件は, R 上の 1 変数多項式環 $R[x]$ が一意分解整域となることである．

(**解答**)　$\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域 (PID) である．単項イデアル整域は一意分解整域 (UFD) であるため, Z は UFD である．ガウスの定理より, $\mathbb{Z}[x_1]$ は UFD となる．

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \simeq (\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n-1}])\,[x_n]$$

より, ガウスの定理を帰納的に用いれば,

$$\mathbb{Z}[x_1]\text{: UFD} \Longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2]\text{: UFD} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]\text{: UFD}$$

が従う．

[3]※この講義に関する情報はホームページを参照．https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html