# Obstructions to deforming degenerate curves on a scroll

那須 弘和

(東海大学 理学部 情報数理学科)

2011年9月30日

日本数学会 2011年度秋季総合分科会 (信州大学)

# Mumfordの非被約成分(pathology)

射影多様体$V$に対し，$V$内の非特異連結曲線のHilbert scheme を $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ で表す.

例 **1.** $S$は非特異3次曲面, $E \subset S$は直線, $h$は$S$の超平面切断.

$$C \in |4h + 2E| \subset S \subset \mathbb{P}^3.$$

曲線$C$のパラメータ空間$W$は56次元. 一方$h^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 57$.

定理 **2. [Mumford'62]** $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$は$W$を下部集合とする*generically non-reduced*な既約成分を持つ.

# Mumfordの例の一般化

Mumfordの$\mathbb{P}^3$に対する例を多くのuniruled 3-fold $V$へ一般化.

**定理 3. [Mukai-N,2010]** 非特異3次元多様体$V$が次の2条件を満たすなら, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$は*generically non-reduced*な既約成分$\tilde{W}$を持つ：

(A) $V$は有理曲線$E \simeq \mathbb{P}^1 \subset V$とその変形で覆われる. *(よって法束$N_{E/V}$は大域切断で生成.)*

(B) $V \supset S \supset E$なる非特異曲面$S$が存在し$(E^2)_S = -1$かつ$H^1(N_{S/V}) = p_g(S) = 0$.

# 例

例 **4.** $E \subset S \subset V$ が次の場合, 定理の条件 *(A),(B)* が成立.

(1) $V$ は *Fano* で $-K_V = H + H'$ $(H, H'$ は共に *ample*$)$. $S \in |H|$ は非特異元, $E$ は $S$ 上の $(-1)$-$\mathbb{P}^1$. *(e.g. cubic* $3$*-fold* $V_3 \subset \mathbb{P}^4$*)*

(2) $V$ は $\mathbb{P}^1$-束で底曲面 $F$ は $p_g = 0$. $S$ は $F$ と非同型な非特異有理切断. $E$ は $S \to F$ のファイバー. *(e.g. cubic scroll* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$*)*

$S$ 上の例外曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ は, 曲線 $C \subset S$ の $V$ における被障害 (obstructed) 一位無限小変形に関係する.

# 研究の動機

$V \subset \mathbb{P}^n$ は射影多様体, $S \subset V$ は超平面切断, $C \subset S$ は曲線, $E \subset S$ は例外因子とする.

**問題 5.** $\dim V \geq 4$ のとき, 上の $C, E \subset S \subset V$ に対し, *Mumford* の例と同様に $C$ の $V$ 上の変形が障害を受けるような例は存在するか?

次の設定のもとで考察した.

$$\begin{array}{ccccc} V & = & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n & \stackrel{\text{Segre}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}^{2n+1} \\ \bigcup & & & & \bigcup \\ S & = & V \cap H & \subset & \mathbb{P}^{2n} = H \\ \bigcup & & & & \\ \hat{C} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{C} & \longrightarrow & C \\ \bigcap & & \bigcap \\ S & \xrightarrow[\text{blow up}]{\pi=\pi_2} & \mathbb{P}^n \\ \bigcup & & \bigcup \\ E & \longrightarrow & L^{n-2} \end{array}$$

# 主結果

**定理 6.** $C \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 2)$は非特異曲線でもって，爆発$\pi : S \to \mathbb{P}^n$の中心$L = \mathbb{P}^{n-2}$と交わらないと仮定する．このとき，逆像$\hat{C}$が

(A) $H^0(\hat{C}, N_{\hat{C}/V}) \to H^0(\hat{C}, N_{S/V}|_{\hat{C}})$が全射的

(B) $H^1(S, N_{S/V}(3E)) \to H^1(\hat{C}, N_{S/V}|_{\hat{C}})$が単射的

を満たすならば，$\hat{C} \subset S$は$V$において2位変形にリフトしない1位無限小変形を持つ．

# 例

**例 7.** $\mathbb{P}^n$内の超曲面$Q_i$ $(1 \le i \le n-1)$の完全交叉

$$C = Q_1 \cap \cdots \cap Q_{n-1} \subset \mathbb{P}^n$$

は, $\deg Q_i \ge 5$ $({}^\forall i)$のとき, 定理の条件(A),(B)を満たす.

**注意 8. [$n = 2$の場合]** 平面5次曲線$C \subset \mathbb{P}^2$の外点$p \in \mathbb{P}^2 \setminus C$からの射影

$$\pi_p : C \to \mathbb{P}^1$$

は正則写像として, 被障害変形を持つ(赤堀・難波). 従って, $C$のグラフ$\Gamma \subset V = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ が被障害変形を持つ.

# カップ積と開多様体の変形(証明)

部分多様体 $X \subset Y$ の変形において，1位無限小変形 $\tilde{X} \subset Y \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ は，大域切断 $\alpha \in H^0(X, N_{X/Y})$ に対応し，2位変形へのリフト障害は，カップ積の2次形式 $\alpha^2 (= \alpha \cup \alpha) \in H^1(X, N_{X/Y})$ に等しい.

定理は次の補題から導かれる.

**補題 9.** 定理の $E \subset S \subset V$ に対し, 開多様体を $S^\circ := S \setminus E$, $V^\circ := V \setminus E$ により定める. このとき, カップ積写像

$$H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ}) \longrightarrow H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$$

の $H^0(N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$ への制限は単射. 特に $S^\circ$ は $V^\circ$ において, 非障害変形を持つ.