

学生証番号

--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

--	--	--	--	--	--	--	--

点数

--

- 1  $R, S$  を環とし,  $f: R \rightarrow S$  を環の準同型写像とする.  $0_S$  を  $S$  の零元とし,  $f$  の核  $\ker f$  と像  $\operatorname{im} f$  は

$$\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$$

$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in R\}$$

により定義される.

(1)  $\ker f$  が  $R$  のイデアルになることを示せ.

(2)  $\operatorname{im} f$  は  $S$  の部分環になることを示せ.

- 2  $k$  を体とし,  $a \in k$  とする.  $k$  上の1変数多項式環  $k[x]$  から  $k$  への写像  $\varphi$  を

$$\varphi: k[x] \longrightarrow k, \quad f(x) \longmapsto f(a)$$

により定める.

(1)  $\varphi$  が環の準同型写像であることを証明せよ.

(2)  $\ker \varphi$  を求めよ.

(3) 準同型定理を用いて,

$$k[x]/(x-a) \simeq k$$

を証明せよ.

3 環の準同型定理を証明せよ.

準同型定理

環の準同型写像  $f : R \rightarrow S$  に対し,

$$\bar{f} : R / \ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \quad a + \ker f \mapsto f(a)$$

は同型写像である.