線形代数2, 第8回の内容の理解度チェック (解答)

2024/11/28　担当：那須

$\boxed{1}$ 線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が, $f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ を満たすとき, 次を求めよ. (1点)

$$f\left(-2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)=-2f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)+3f\left(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)=-2\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\-4\end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ V と W をベクトル空間とし, それぞれの基底を $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m\}$ とする. 線形写像 $f:V\to W$ に対し, 基底 $\{\mathbf{x}_i\}$, $\{\mathbf{y}_j\}$ に関する f の表現行列の定義式を書け. (1点)

解答)

$$(f(\mathbf{x}_1),\dots,f(\mathbf{x}_n))=(\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m)A$$

を満たす行列 A のことをいう.

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}[x]_n$ を n 次以下の $\mathbb{R}$ 係数多項式のなすベクトル空間とする. 線形写像 $T:\mathbb{R}[x]_4\to\mathbb{R}[x]_3$ を, 多項式の微分

$$T(f(x))=f'(x),\quad f(x)\in\mathbb{R}[x]_4$$

により定める. (各1点)

(1) $T(x^4)$,$T(x^3)$,$T(x^2)$,$T(x)$,$T(1)$ を求めよ.

解答)

$$\begin{aligned}T(x^4)&=(x^4)'=4x^3\\T(x^3)&=(x^3)'=3x^2\\T(x^2)&=(x^2)'=2x\\T(x)&=(x)'=1\\T(1)&=(1)'=0\end{aligned}$$

(2) $\mathbb{R}[x]_4$ の基底 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ と $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\{1,x,x^2,x^3\}$ に関する T の表現行列を求めよ.

解答)

$$\big(T(1),T(x),T(x^2),T(x^3),T(x^4)\big)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

より, 求める表現行列は $\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ 次の線形写像の与えられた基底に関する表現行列を求めよ. (各１点)

(1) $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

解答) $\mathbb{R}^3$ の基底の変換行列は, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2$ の基底の変換行列は, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ となる. よって求める表現行列は

$$\begin{aligned} Q^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & -3 & 4 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

解答) $\mathbb{R}^2$ の基底の変換行列は, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^3$ の基底の変換行列は, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる. よって求める表現行列は

$$\begin{aligned} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html