代数学2,第11回の内容の理解度チェックの解答

2025/7/14 担当:那須

- [1] アイゼンシュタインの既約性判定を用いて以下の多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が $\mathbb{Q}[x]$ において既約元であることを示せ.
 - (1) $f(x) = x^5 5x + 10$
 - (2) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x + 3$

(解答)

- (1) 素数 p=5 を考えると、最高次係数 1 は p で割り切れず、定数項 10 は p で割り切れ p^2 で割り切れず、すべての中間項の係数 (0 または -5) は p で割り切れるため、アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.
- (2) 素数 p=3 を考えると、最高次係数 1 は p で割り切れず、定数項 3 は p で割り切れ p^2 で割り切れず、すべての中間項の係数 6,9,3 は p で割り切れるため、アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.

2 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が $\mathbb{Q}[x]$ において既約元かどうか判定せよ (ヒント: f(x+2) を計算せよ).

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$$

(**解答**) ヒントに従い f(x+2) を求めると,

$$f(x+2) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 12(x+2) - 1$$
$$= x^3 + 7$$

f(x+2) が既約なことと, f(x) が既約なことは同値であるため, f(x+2) にアイゼンシュタインの判定法を適用する.

素数 p=7 を考えると、最高次係数 1 は p で割り切れず、定数項 7 は p で割り切れ p^2 で割り切れず、すべての中間項の係数 0 は p で割り切れるため、アイゼンシュタインの判定法により f(x+2) は、したがって f(x) は $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.

 $\boxed{3}$ p を素数とする. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が $\mathbb{Q}[x]$ において既約元であることを示せ.

- (1) $f(x) = x^p p$
- (2) $f(x) = x^p + p^2x + p$

(解答)

- (1) 最高次係数は1でpで割り切れず, 定数項-pはpで割り切れ p^2 で割り切れず, すべての中間項の係数0はpで割り切れるため, アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.
- (2) 最高次係数は1でpで割り切れず、定数項pはpで割り切れ p^2 で割り切れず、すべての中間項の係数(0または $p^2)$ はpで割り切れるため、アイゼンシュタインの判定法により $\mathbb{Q}[x]$ で既約である.

[4] 有理整数環 \mathbb{Z} 上のn変数多項式多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ が一意分解整域であることを示せ、ただし以下のガウスの定理を用いても良い.

—— ガウスの定理 —

整域 R に対し, R が一意分解整域であるための必要十分条件は, R 上の 1 変数多項式環 R[x] が一意分解整域となることである.

(**解答**) \mathbb{Z} は単項イデアル整域 (PID) である. 単項イデアル整域は一意分解整域 (UFD) であるため, Z は UFD である. ガウスの定理より, $\mathbb{Z}[x_1]$ は UFD となる.

$$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n] \simeq (\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_{n-1}])[x_n]$$

より, ガウスの定理を帰納的に用いれば,

$$\mathbb{Z}[x_1]$$
: UFD $\Longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2]$: UFD $\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$: UFD

が従う.

^{3※}この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html