那須ゼミ説明会　問題の解説

山田明　青木温

東海大学理学部情報数理学科 那須ゼミ

問 1．曲線の特異点を求めよう

問 1.

$\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ の特異点をすべて求めよ.

※ ただし, $f(x,y) = 0$ が C^1 級に対し, $\frac{\partial}{\partial x} f(a,b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a,b) = 0$ であるような曲線上の点 (a,b) を特異点という.

問 1. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ の特異点

$f(x, y)$ の x と y における偏微分を計算すると,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(3(x^2+y^2)^2-4y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(3(x^2+y^2)^2-4x^2)$$

特異点を求めるために, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とすると,

$$x = 0 \text{ または } 3(x^2+y^2)^2-4y^2 = 0$$

$$y = 0 \text{ または } 3(x^2+y^2)^2-4x^2 = 0$$

問 1. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ の特異点

$$x=0 \text{ または } 3(x^2+y^2)^2-4y^2=0$$

$$y=0 \text{ または } 3(x^2+y^2)^2-4x^2=0$$

まず, $(x,y)=(0,0)$ のとき,
$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ であり, $f(0,0)=0$ なので,
$(0,0)$ は特異点となる.

問 1. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ の特異点

次に, $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき,

$$3(x^2+y^2)^2-4y^2=0 \cdots ①$$

$$3(x^2+y^2)^2-4x^2=0 \cdots ②$$

① − ② より,

$$4x^2=4y^2 \iff x=\pm y$$

① + ② より,

$$6(x^2+y^2)^2=4(x^2+y^2)$$

$$\iff (x^2+y^2)^2=\frac{2}{3}(x^2+y^2)$$

問 1. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ の特異点

ここで, $(x,y)\neq(0,0)$ より, $x^2+y^2\neq 0$.
よって, $(x^2+y^2)^2=\frac{2}{3}(x^2+y^2)$ の両辺を
x^2+y^2 で割ると, $x^2+y^2=\frac{2}{3}$ である.
この式に, $x=\pm y$ を代入すると,

$$2x^2=\frac{2}{3}\iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となるので,

$$(x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

問 1. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ の特異点

しかし，$f(x,y)=(x^2+y^2)^3-4x^2y^2$ に

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

を代入すると，$f(x,y)=-\frac{4}{27}\neq 0$ となり，これらの点は曲線 $f(x,y)=0$ 上にないことがわかる．

したがって，f の特異点は $\mathbf{(0,0)}$ のみである．

問 1. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ の特異点

特異点である $(0,0)$ では，4 重点をもっている．先ほど特異点にならなかった 4 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ は，曲線上にないことが確認できる．

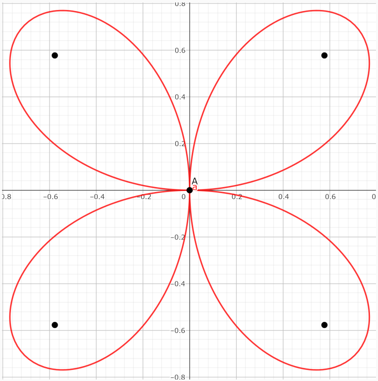


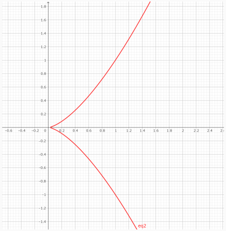
Figure 1: $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$

余談: いろいろな特異点

先ほどの曲線以外にもさまざまな特異点をもつ曲線が存在する.

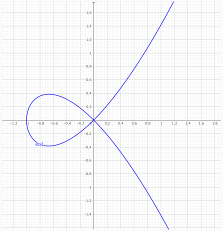
尖点

$$x^3 - y^2 = 0$$



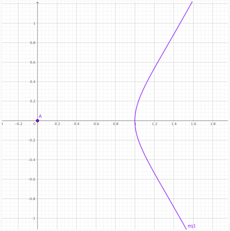
結節点

$$x^3 + x^2 - y^2 = 0$$



孤立点

$$x^3 - x^2 - y^2 = 0$$



詳しくは, 硲文夫「代数幾何学」などを参照.

問 2. $x^3 + y^3 = z^3 + 1$ を満たす自然数の組

問 2.
フェルマーの最終定理とは，「3 以上の自然数 n に対して，$x^n + y^n = z^n$ となる自然数の組 (x, y, z) は存在しない」という定理である．

では，$n = 3$ のときの関係式に近い次の方程式

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1$$

を満たす z が最小となる 2 以上の自然数の組 (x, y, z) を求めよ．ただし，$x \leq y$ とする．

問 2. $x^3 + y^3 = z^3 + 1$ を満たす自然数の組

解答
$x^3 + y^3 = z^3 + 1$ を満たす z が最小となる 2 以上の自然数の組は，$(x, y, z) = (9, 10, 12)$ である．

ちなみに，$9^3 + 10^3 = 12^3 + 1 = 1729$ は，タクシー数と呼ばれ，2 つの自然数の立方数の和として複数通りで表すことのできる最小の数である．タクシー数を発見したのはラマヌジャンというインドの数学者で，色々な逸話がある．このタクシー数を発見した背景に楕円曲線や K3 曲面に関連する話があるのではないかといわれている．

問 2. $x^3 + y^3 = z^3 + 1$ を満たす自然数の組

$(x, y, z) = (9, 10, 12)$ が, $x^3 + y^3 = z^3 + 1$ を満たす z が最小となる 2 以上の自然数の組であることを示すには, $2 \leq z \leq 12$ となるような全ての 2 以上の自然数 (x, y, z) の組を計算していくことによって確かめられる. ($x^3 + y^3 \leq 1729$ のときだけ計算すればよいので, 有限個の組み合わせで計算は終了する.)

問 2. $x^3 + y^3 = z^3 + 1$ を満たす自然数の組

手計算で求めるのは大変だが，プログラムを実装すればすぐに求めることができる．

```java
for (int x = 2; x <= 12; x++) {
    for (int y = x; (y <= 12) && (x * x * x + y * y * y <= 1729); y++) {
        for (int z = 2; z <= 12; z++) {
            System.out.print("(" + x + ", " + y + ", " + z + ")のとき, ");
            System.out.print("x^3+y^3=" + (x * x * x + y * y * y) + ",");
            System.out.print("z^3+1=" + (z * z * z + 1) + "\t");
            if (x * x * x + y * y * y == z * z * z + 1) {
                System.out.print(s:"一致しました");
            }
            System.out.println();
        }
    }
}
```

問 3．2 次曲線と直線の交点の個数

問 3.
次の 2 つの方程式で定義されるグラフの交点の個数を複素数の範囲でそれぞれ求めよ.

(a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

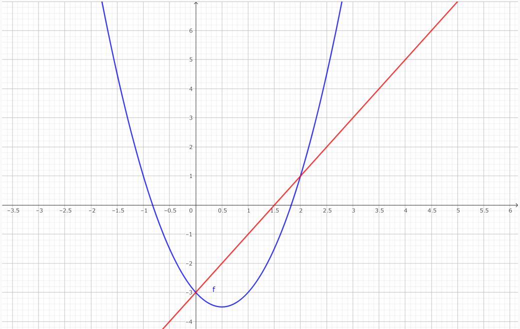
(b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - yx \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

問 3．2 次曲線と直線の交点の個数

(a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

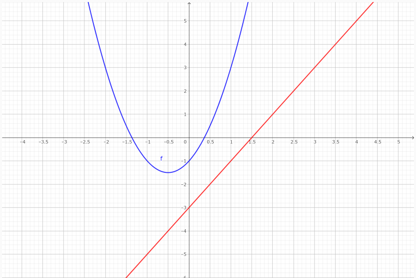
(解答) 上の連立方程式を解くと，
$(x, y) = (0, -3), (2, 1)$ となり，2 つの実数解をもつことがわかる．よって，交点は 2 個である．



問 3．2 次曲線と直線の交点の個数

(b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

(解答) 上の連立方程式を解くと，
$(x, y) = (i, 2i - 3), (-i, -2i - 3)$ となり，
実数解はもたないが，2 つの複素数解をもつことがわかる．よって，交点は 2 個である．



問 3．2 次曲線と直線の交点の個数

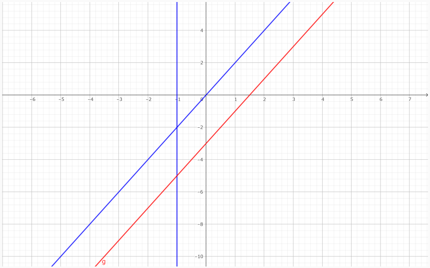
(c) $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - yx \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

(解答) 上の連立方程式を解くと,
$(x, y) = (-1, -5)$ となり，交点は 1 個となる.
(a) と (b) の 2 次曲線と直線の交点は 2 個であったが, (c) では 1 個となってしまった.

なぜこのようなことが起きるのでしょうか?

問 3．2 次曲線と直線の交点の個数

2 次曲線 $y = 2x^2 + 2x - yx$ は $(y - 2x)(x + 1) = 0$ と変形することができ，$y = 2x$ と $x = -1$ の和集合であることがわかる．しかし，$y = 2x - 3$ と $y = 2x$ は平行な直線なので交わらず，$y = 2x - 3$ は $x = -1$ とのみ交わり，下の図のように，交点は 1 点しかない．



余談 平行な直線が交わる世界?

実は，射影平面 $\mathbb{P}^2$ という平行な直線が交わる特別な空間を考えることによって，先ほどの 2 次曲線と直線も 2 点で交わるようになる．また，その $\mathbb{P}^2$ では以下のような定理が成り立つ．

定理 (ベズーの定理)
$\mathbb{P}^2$ の共通因子をもたない m 次曲線と n 次曲線の交点数は mn 個である．

ベズーの定理は大学 4 年次のゼミの目標になることがある．