代数学１，第７回の内容の理解度チェックの解答

2024/11/14 担当：那須

$\boxed{1}$ 4 変数対称式

$$f(x,y,z,w) = (x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w)$$

を基本対称式

$$\begin{cases} \sigma_1 = x+y+z+w, \\ \sigma_2 = xy+xz+xw+yz+yw+zw, \\ \sigma_3 = xyz+xyw+xzw+yzw, \\ \sigma_4 = xyzw \end{cases}$$

を用いて表せ.

解答)

$$f(x,y,z,w) = a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3 \qquad (a,b,c \text{ は定数})$$

とおく.

- 両辺に $x=1, y=z=w=0$ を代入すると $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ より,

  $$1^3 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1\cdot 0 + c\cdot 0.$$

  よって $a=1$ を得る.
- 両辺に $x=1, y=1, z=w=0$ を代入すると $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$ より,

  $$2\cdot 0\cdot 0 = a\cdot 2^3 + b\cdot 2\cdot 1 + c\cdot 0.$$

  よって $8a+2b=0$, この式を解いて $b=-4$ を得る.
- 両辺に $x=y=1, z=-1, w=0$ を代入すると $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$ より,

  $$3\cdot(-1)\cdot 1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1\cdot(-1) + c\cdot(-1).$$

  よって $-3 = a-b-c$. すでに求めた $a=1, b=-4$ を代入し, c について解くと $c=8$ を得る.

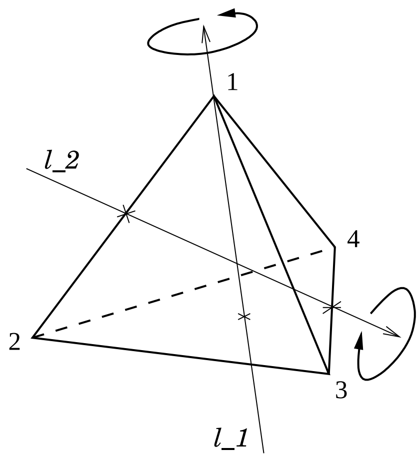
したがって

$$f(x,y,z,w) = \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$$

と表される. ■

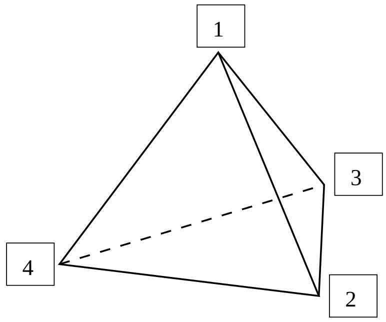
$\boxed{2}$ 右の基準の正四面体を含む空間において, 直線 l_1 を中心とする角度 120° の回転移動を表す合同変換を R とし, 直線 l_2 を中心とする角度 180° の回転移動を表す合同変換を T とする. ただし, 回転は矢印に向かって右ねじ方向 (図の方向) に回転する. なお合同変換 f に対し f^n は f の n 回の合成 $f^n = f \circ \cdots \circ f$ を表すものとする.

基準の正四面体を次の合同変換で変換した正四面体を求めよ. なお解答は解答欄の正四面体の頂点に数字を記入して答えよ.



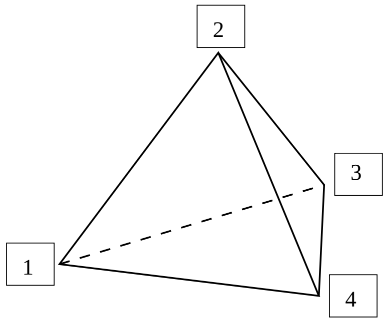
(1) R

解答) R はサイクル $(2\ 3\ 4)$ に対応する. ■



(2) T

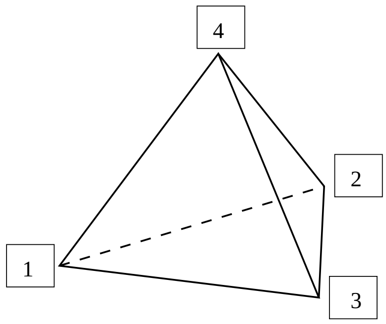
解答) T は 2 つの互換の積 $(1\ 2)(3\ 4)$ に対応する. ■



(3) $T \circ R$

解答) $T \circ R$ は置換 $(1\ 2)(3\ 4)(2\ 3\ 4)$ に対応する.

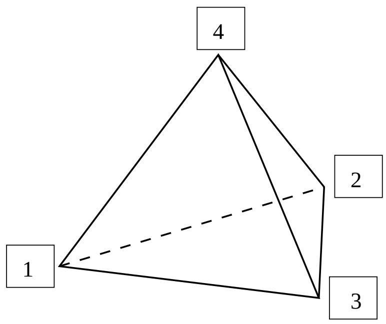
$$(1\ 2)(3\ 4)(2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4).$$ ■



(4) $(T \circ R)^{100}$

解答) $(T \circ R)^{100}$ は置換 $(1\ 2\ 4)^{100}$ に対応する. $(1\ 2\ 4)^3$ は恒等置換 e に等しいので

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 4)^{100} &= (1\ 2\ 4)^{99+1} \\ &= (1\ 2\ 4)^{3\times 33+1} \\ &= ((1\ 2\ 4)^3)^{33} \cdot (1\ 2\ 4) \\ &= (1\ 2\ 4). \end{aligned}$$



■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html