代数学１, 理解度チェック (余りの問題)

担当：那須

$\boxed{1}$ (部分群) 次の群 G と部分集合 $H \subset G$ に対し, H が G の部分群になることを示せ.

(1) 対称群 $G = S_n$ において, 偶置換の全体の集合 $H = A_n$

(2) 乗法群 $G = GL(2, \mathbb{R})$ (実数を成分とする 2 次正則行列全体) と $H = SL(2, \mathbb{R})$ (実数を成分とする 2 次正方行列で行列式が 1 に等しいもの)

(3) 加法群 $G = \mathbb{R}^2$ (ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$) と原点を通る傾き 2 の直線 $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 2x\right\}$.

$\boxed{2}$ (置換, 対称群) 次の 4 次置換 $\sigma, \tau \in S_4$ に対し, (a)〜(d) の元を計算せよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $\sigma\tau$ (b) $\tau\sigma$ (c) σ^3 (d) τ^{-1}

$\boxed{3}$ (1) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 8 & 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \in S_9$ をサイクルの分離積として表せ.

(2) σ を互換の積の形で表せ.

$\boxed{4}$ 次の置換の等式を示せ.

(1) 任意の i, j ($i, j \neq 1$ かつ $i \neq j$) に対し, $(ij) = (1i)(1j)(1i)$

(2) 任意の i, j ($i, j \neq 1, 2$ かつ $i \neq j$) に対し,

$$(1i)(12) = (12i), \quad (12)(1j) = (1j2) = (12j)^2, \quad (1i)(1j) = (12i)(12j)^2$$

$\boxed{5}$ (同型) 正三角形の対称群 $\mathrm{Sym}(\triangle)$ と 3 次対称群 S_3 が同型であること示せ. (両者の群表を書き, 一致することを示せばよい.)

$\boxed{6}$ 同型

$$GL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times$$

を示せ. ただし,

$$\begin{aligned} GL(2, \mathbb{R}) &= \left\{A \;\middle|\; A \text{ は 2 次正方行列で } \det(A) \neq 0\right\}, \\ SL(2, \mathbb{R}) &= \left\{A \;\middle|\; A \text{ は 2 次正方行列で } \det(A) = 1\right\}, \\ \mathbb{R}^\times &= \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

とする.

$\boxed{7}$ (1) 次の合同方程式を解け.

$$x^2 \equiv 1 \mod 35$$

(2) p, q を異なる 2 つの素数とする. 合同方程式

$$x^2 \equiv 1 \mod pq$$

の解を全て求めよ.

$\boxed{8}$ (1) 合同方程式

$$19x^2 + 12x + 11 \equiv 0 \mod 21$$

を解け.

(2) 方程式 $7x^2 - 6y^2 = -1$ が整数解 (x, y) を持たない事を示せ. (ヒント：3 を法として $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の世界で考えてみよう.)

---

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. ‘https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html