

- [1] 次の行列を行基本変形により, 階段行列に変形し, 階数を求めよ. (2 点)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - 3 \times \textcircled{1} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\textcircled{3} - 5 \times \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

よって  $A$  の階数は 3 ( $\text{rank } A = 3$ ).

- [2] 次の連立 1 次方程式の解の個数がどのようなになっているか調べよ.

答えは「1: 解無し」, 「2: 解は無限個ある」, 「3: 解は唯一」の 3 つの中から選択せよ. (各 1 点)

(1)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} + \textcircled{1} \\ \textcircled{3} + 2 \times \textcircled{1} \end{matrix}} \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

第 3 式が  $0x + 0y + 0z = 3$  より矛盾. 従って「解無し」.

(2)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{3} + 3 \times \textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\textcircled{3} + 4 \times \textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

変数の数は 3 個であり, 一方係数行列の階数は 2 に等しい. よって「解は無限個ある」.

$$(3) \left( \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

変数の数は 4 個. (拡大) 係数行列の階数は 3. 従って「解は無限個ある」.

—— ポイント! ——

一般に係数行列が横長 ( $m \times n$  行列で  $m < n$ ) のとき, 解が存在すれば無限個ある.