ゼミ紹介 問題と解答

山田・青木

はじめに

この度は那須ゼミを見学しに来て下さり, ありがとうございます. 那須先生のゼミ紹介概要に記載した問題の解答を提示します. 各問題の背景には代数学, 特に代数幾何学に関連する内容を入れました. 問題や解答を通して, 代数学の魅力を感じてもらえると幸いです. 皆さんの感想やゼミ配属に期待します.

問題 (再掲)

1. 曲線 $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ において, 特異点をすべて求めよ[*1].
2. フェルマーの最終定理とは,

$$3\text{ 以上の自然数 } n \text{ に対して}, x^n+y^n=z^n \text{となる自然数の組 } (x,y,z) \text{ は存在しない}$$

である. では, $n=3$ のときの方程式に"近い", 次の方程式

$$x^3+y^3=z^3+1$$

を満たす z が最小となる 2 以上の自然数の組 (x,y,z) を求めよ. ただし, $x<y$ とする.

3. 次の 2 つの方程式で定義されるグラフの交点の個数を複素数の範囲でそれぞれ求めよ.

(a) $\begin{cases} y=2x^2-2x-3 \\ y=2x-3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y=2x^2+2x-1 \\ y=2x-3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y=2x^2+2x-yx \\ y=2x-3 \end{cases}$

[*1] $f(x,y)=0$ が C^1 級に対し, $\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$ であるような曲線上の点 (a,b) を**特異点**という.

解答

1. $f(x,y)$ を展開すると,

$$f(x,y) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 4x^2y^2$$

となる[*2]. まず, x での偏微分を計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 - 8xy^2 \\ &= 2x(3(x^2+y^2)^2 - 4y^2)\end{aligned}$$

となる. 一方, y での偏微分を計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 6x^4y + 12x^2y^3 + 6y^5 - 8x^2y \\ &= 2y(3(x^2+y^2)^2 - 4x^2)\end{aligned}$$

となる. 特異点は $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ より,

$$\begin{aligned}x = 0,\ \text{または}\ (x^2+y^2)^2 &= \frac{4}{3}y^2 \ldots ① \\ y = 0,\ \text{または}\ (x^2+y^2)^2 &= \frac{4}{3}x^2 \ldots ②\end{aligned}$$

となる.

- $(x,y) = (0,0)$ のとき, 明らかに $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となり, 適する.
- $(x,y) \neq (0,0)$ のとき, ①, ② から,
  ① − ② $\implies x^2 = y^2 \iff x = y,\ x = -y$ となる.
  ① + ② $\implies 2(x^2+y^2)^2 = \frac{4}{3}(x^2+y^2)$ となる. ここで, $(x,y) \neq (0,0)$ で考えているので, $x^2+y^2 \neq 0$ である.
  よって, 両辺 x^2+y^2 で割ると, $x^2+y^2 = \frac{2}{3} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる. よって,

$$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

  となる. しかし, f に代入すると $f \neq 0$ となり不適.

したがって, f の特異点は $(0,0)$ のみ.

2. 存在する. このとき, z が最小の自然数の組は

$$(x,y,z) = (9,10,12)$$

である[*3].

3. (a) 2 点 : $(0,-3), (2,1)$
   (b) 2 点 : $(\pm i, -3 \pm 2i)$ ($i = \sqrt{-1}$, 複号同順)
   (c) 1 点 : $(-1,-5)$

[*2] 展開せず, 合成関数の微分で計算しても良い.
[*3] タクシー数を知っていれば知識問題として解ける. 知らない場合は, 地道に z を代入していき, 自然数の組を探す. または, 女神様に教えてもらう.

背景

1. 代数幾何学の射影平面 $\mathbb{P}^2$ において, 性質や話を進めていく上で扱いやすい曲線は非特異曲線である. しかし, 全ての曲線が非特異とは限らず, 問題のように特異点をもつ曲線も多く存在する. しかし, 特異点がある曲線でも, ブローアップという操作をして非特異曲線として扱えることがある.
2. この組でできる数は 1729 であり, タクシー数と呼ばれる. これを発見したのはシュリニヴァーサ・ラマヌジャンという, インドの数学者である. ラマヌジャンには色々な逸話があるが, このタクシー数を発見した背景に楕円曲線や K3 曲面に関連する話がある[*4].
3. 実は, 3. は射影平面 $\mathbb{P}^2$ という空間で考えると, ベズーの定理というものから交点数は 2 であることが分かる. 実際, 各々の式に射影化という操作を施すと,

$$\begin{cases} yz = 2x^2 + 2xz - yz \\ \ \ y = 2x - 3z \end{cases}$$

となり, 代入して計算すると $-3z(x+z) = 0$ となる.

- $x = -z$ のとき, $y = 5x$ より, 交点は $(-1 : -5 : 1)$ となる. これは, 複素数の範囲での点と一致する.
- $z = 0$ のとき, $y = 2x$ より, 交点は $(1 : 2 : 0)$ となる. これは, 無限遠直線 $\{z = 0\}$ との交わりである.

空間を変えることで, 目には見えないところで交点があることがわかり, 理論の面白さを感じることができる.

挑戦枠 (那須ゼミ室 18-721 にも掲載)

RSA 暗号方式で, 暗号 c と公開鍵 (n, e) が次のように与えられている.

$$c = 47034160493, \quad (n, e) = (65526343849, 18721)$$

このとき, 暗号 c を復号せよ. また, 復号後, ASCII コードを用いて文字列に変換しなさい.

[*4] 参考文献：https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/the-1729-k3-surface