

学生証番号

--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

点数

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1 R を整域とする. 直積集合 $R \times R$ の部分集合

$$X = \{(a, b) \mid a, b \in R, b \neq 0\}$$

を考える. X の 2 つの元 (a, b) と (a', b') に対し,

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' - a'b = 0$$

と定義すると, \sim は同値関係になることを示せ.

- 2 問題1の X と同値関係 \sim に対し, 同値類の集合を $F = X/\sim$ とおき, $(a, b) \in X$ を含む同値類を a/b と書く. このとき $(a, b), (c, d) \in X$ に対し,

$$a/b = c/d \iff ad - bc = 0$$

である. F において

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd \quad (\text{和})$$

$$(a/b)(c/d) = ac/bd \quad (\text{積})$$

により和と積を定義すると, この演算は代表元の取り方によらないことを示せ.

- 3 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のとき, R の商体

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) \neq (0, 0) \right\}$$

が

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0\}$$

に等しいことを示せ.