線形代数2, 第12回の内容の理解度チェック

2025/1/9 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | | 氏名 | | 点数 | |

$\boxed{1}$ 次の行列 A が対角化可能かどうかについて答えよ. ただし, A の固有多項式が重根 α を持つ場合には, $\mathrm{rank}(A-\alpha E)$ を計算し, 理由を付して答えること (E は A と同じサイズの単位行列). (各 1 点)

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に関する以下の問題に答えよ. (**問題は次の頁にもあるので注意！**) (各 1 点)

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) A を対角化せよ. すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ与えよ. 解答は「$P = (\ )$ のとき, $P^{-1}AP = (\ )$ となる」の形で答えること.

(3) A^n $(n = 0, 1, \dots)$ を求めよ.

(4) $a_0 = 1,\, a_1 = 1,\, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ の一般項 a_n を求めよ.
(ヒント：$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ と置くと, $\mathbf{a}_n = A\mathbf{a}_{n-1} = \cdots = A^{n-1}\mathbf{a}_1 = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$)

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/la2.html