代数学１，第３回の内容の理解度チェックの解答

2024/10/10 担当：那須

以下では S_n は n 次対称群を表す．σ^{-1} は σ の逆置換を表し，$\sigma^k = \underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{k\,個}$ $(k \in \mathbb{Z})$ とする．

$\boxed{1}$ (1) 次の置換 σ をサイクルの分離積として表せ．

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **解答)** $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 6)$

(実際 σ は 5 を固定し $1, 2, 3, 4, 6$ を

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left] & & 2 \arrow[dl, bend left] \\ & 4 \arrow[ul, bend left] & \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left] & 6 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

のようにうつす.) ■

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 10 & 5 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ **解答)** $\sigma = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)(4\ 6\ 10)(8\ 9)$ ■

(2) 次のサイクルの積を通常の置換の表し方 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ で表せ．

(a) $\sigma = (2\ 5\ 4)(3\ 4) \in S_5$ **解答)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ■

(b) $\sigma = (1\ 6\ 4)(2\ 7\ 4\ 8)(2\ 6) \in S_8$ **解答)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ■

(3) 次の置換 σ をサイクルの分離積として表せ．

(a) $\sigma = (2\ 3\ 1)(4\ 2\ 5) \in S_6$ **解答)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4\ 3)$ ■

(b) $\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(1\ 3\ 8\ 4) \in S_8$ **解答)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 7)(3\ 8\ 4)$

■

$\boxed{2}$ 次の置換 σ を計算せよ．なお答えはサイクルの分離積として表せ．

(1) $\sigma = (1\ 6\ 2\ 3)(2\ 3\ 5) \in S_6$

解答) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 6\ 2)(3\ 5)$ ■

(2) $\sigma = (1\ 4\ 3\ 6)^{-1} \in S_6$

解答) $\sigma = (6\ 3\ 4\ 1)$ ■

(3) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^3 \in S_5$

解答) $\sigma = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$ ■

(4) $\sigma = ((1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9))^2 \in S_9$

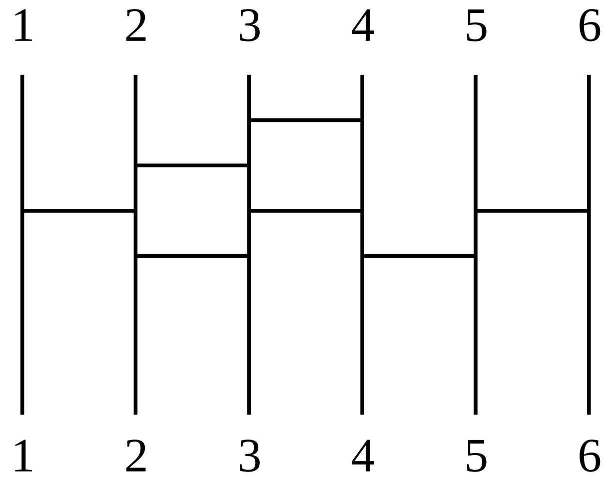
解答) $\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)$ とおけば，

$$\sigma = \tau^2 = (1\ 2)^2(3\ 4\ 5)^2(6\ 7\ 8\ 9)^2 = (3\ 5\ 4)(6\ 8)(7\ 9)$$

■

$\boxed{3}$ 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$ について以下の問に答えよ．

(1) σ をあみだくじで表せ．



(2) σ は偶置換と奇置換のいずれか答えよ．

解答) (横棒 (互換) の数が 7 本なので)σ は<u>奇置換</u>である． ■

$\boxed{4}$ 次の置換 (サイクルの分離積) の偶奇を判定せよ．ただし，$\cdots$ は連続する整数を表す．

(1) $(1\ \cdots 10) \in S_{10}$

解答) $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots a_r)$ (長さ r のサイクル) のとき，

$$r \text{ が偶数 (奇数)} \iff \sigma \text{ が奇置換 (偶置換)}$$

となる．与えられたサイクルは長さ 10 のサイクルなので奇置換である． ■

(2) $\underbrace{(1\ 2)}_{\text{奇}}\underbrace{(3\ 4\ 5)}_{\text{偶}}\underbrace{(6\ 7\ 8\ 9)}_{\text{奇}}\underbrace{(10\ 11\ 12\ 13)}_{\text{奇}} \in S_{13}$ **解答)** 奇置換が 3 個 (奇数) なので<u>奇置換</u>. ■

(3) $\underbrace{(1\ 2)}_{\text{奇}}\underbrace{(3\ \cdots 10)}_{\text{奇}}\underbrace{(11\ \cdots 18)}_{\text{奇}} \in S_{18}$ **解答)** 奇置換が 3 個 (奇数) なので<u>奇置換</u>. ■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照．https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html