代数学２, 第７回の内容の理解度チェック

2025/6/16　担当：那須

学生証番号									氏名		点数	

以下 d は素因数分解に平方因子を含まない整数とする. 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ を

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{ a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義する. $Z[\sqrt{d}]$ の元 $\alpha = a + b\sqrt{d}$ に対し, $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$ を α の**共役元**という. $Z[\sqrt{d}]$ において α の**ノルム** $N(\alpha)$ は,

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 - db^2$$

と定義される.

$\boxed{1}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ とする. 次を示せ.

(1) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$

(2) α が単元 $\Longleftrightarrow N(\alpha) = \pm 1$

(3) $N(\alpha)$ が $\mathbb{Z}$ の既約元ならば, α は $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ の既約元である

$\boxed{2}$ 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ において、次の元が既約元かどうか判定せよ.

(1) 2　　(2) $2-\sqrt{5}$　　(3) $4+\sqrt{5}$

$\boxed{3}$ 次の環 R において, 指定された R の元 α が R の素元かどうか判定せよ.

(1) $R=\mathbb{Z}$, $\alpha=7$

(2) $R=\mathbb{Z}[i]$ (R はガウス整数環, $i=\sqrt{-1}$), $\alpha=2$

(3) $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\alpha=3$

(4) $R=\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\alpha=2-\sqrt{5}$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html