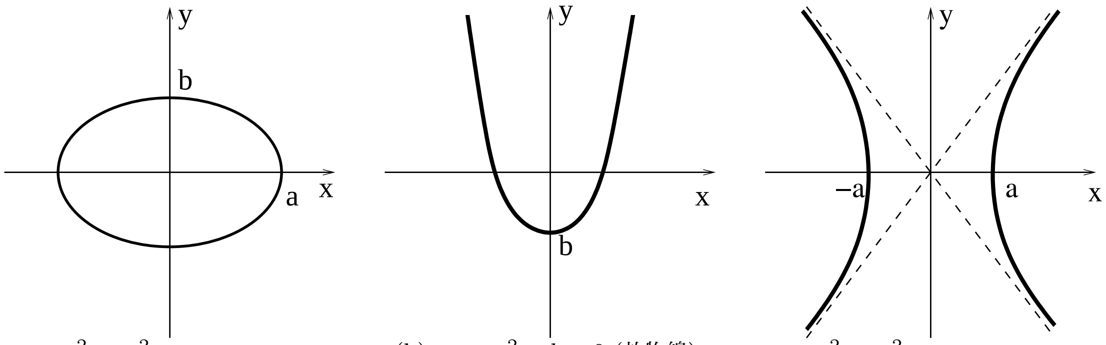
代数幾何学とは?

那須ゼミでは**代数学**, または**代数幾何学**を研究しています. 代数幾何学は**代数多様体**を研究する数学の分野です. 高校の頃に習った (かもしれない)(楕) 円, 放物線, 双曲線は, 代数多様体 (代数曲線) の最も簡単な例の一つです.



(a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ (楕円)　(b) $y-ax^2-b=0$ (放物線)　(c) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ (双曲線)

一般には k を体として, 多項式 $f(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]$ の**零点集合**として現れる図形

$$V(f)=\left\{(a_1,\dots,a_n)\in k^n \;\middle|\; f(a_1,\dots,a_n)=0\right\}$$

や m 個の多項式 $f_i(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]$ $(i=1,\dots,m)$ の**共通零点集合**として現れる図形

$$V(f_1,\dots,f_m)=\left\{(a_1,\dots,a_n)\in k^n \;\middle|\; f_i(a_1,\dots,a_n)=0 \quad (i=1,\dots,m)\right\}$$

を**アフィン代数的集合** *(***アフィン代数多様体***)* と呼びます. 線形代数で学んだ連立方程式

$$\begin{cases}2x+3y-7=0\\ 4x+5y-13=0\end{cases}$$

の解 $\{(2,1)\}$ は, 共通零点集合 $V(2x+3y-7,4x+5y-13)$ で (一点からなる) アフィン代数的集合です! 方程式の係数や次数, 本数を変えると様々な図形 (アフィン代数的集合) が現れ, これらの性質を調べたり分類するのが代数幾何学の目標です.

今日は 2 次曲線の分類を紹介します. 簡単のために体 k を複素数体 $\mathbb{C}$ とし, 2 変数 2 次多項式

$$f(x,y)=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2+2a_3x+2a_4y+a_5 \qquad (a_i\in\mathbb{C})$$

を考えます. f の定める代数曲線

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \;\middle|\; f(x,y)=0\right\}$$

を *(***平面***)*2 **次曲線**と呼びます. 平面 $\mathbb{C}^2$ の境界 (縁の部分) に図 1 のような虹のような直線 (**無限遠直線** ℓ_∞ という) を加えてやると, $\mathbb{C}^2$ は "コンパクト化" され**射影平面**と呼ばれる図形 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ が現れます. "とある" 理由で C を $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ まで拡張して考えた図形

$$\left\{(x:y:z)\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \;\middle|\; f(x,y,z)=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2+2a_3xz+2a_4yz+a_5z^2=0\right\}$$

を $\overline{C}$ で表し, 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_4\\ a_3 & a_4 & a_5\end{pmatrix}$$

と定めます. すると次の定理が成り立ちます.

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2 \cup \ell_\infty =$$

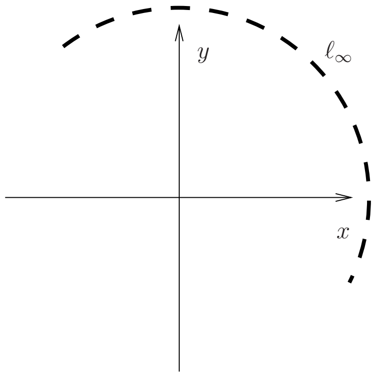
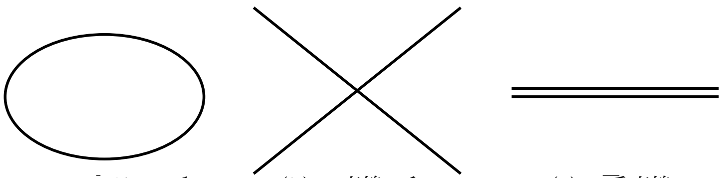


図 1　射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ と無限遠直線 ℓ_∞

定理 1. 行列 A の階数 ($\operatorname{rank} A$) により, 曲線 $\overline{C}$ は次のように分類される:

$\operatorname{rank} A$	曲線 $\overline{C}$
3	(非特異) 円錐曲線 (図 (a))
2	2 直線の和 (図 (b))
1	2 重直線 (図 (c))



(a) 円錐曲線 $\simeq \mathbb{P}^1$　(b) 2 直線の和　(c) 2 重直線

一般的 (general) な 2 次曲線 $\overline{C}$ は (楕) 円のような形ですが, $\operatorname{rank} A$ が小さくなるにつれ "退化" し, 特殊 (special) な図形になることがわかるでしょうか? $\mathbb{C}$ 上では上記の 3 種類ですが、体を別の体 ($\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}$) にするとまた分類が異なります.

問題 2. (複素数体上において) 次の 2 次曲線 C を (または $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ を) 定理 1 を用いて分類せよ[*1].

(1) $C : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
(2) $C : x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$
(3) $C : x^2 + 6xy + 9y^2 = 0$

[*2]

[*1] ヒント: それぞれに対応する行列 A は

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となります. A の階数 $\operatorname{rank} A$ を計算してみましょう!

[*2] $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ は連比 $(x : y : z)$ の空間ですが, 一般に連比 $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ の空間を**射影空間**と呼び, 記号 $\mathbb{P}^n$ で表します. 2 次曲線のパラメータ $(a_0 : \cdots : a_5)$ の空間は $\mathbb{P}^5$ と見ることが可能です. このように (別の) 代数多様体のパラメータ空間となるような代数多様体を**モジュライ**と呼びます. 那須は**ヒルベルトスキーム**と呼ばれるモジュライを研究しています.