代数学 1，第 11 回の内容の理解度チェックの解答

2024/12/12 担当：那須

$\boxed{1}$ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ において次の元を計算せよ. **解答)**

(1) $(8,2)+(7,5)=(2,2)+(1,0)=(0,2)$

(2) $(4,-1)+(5,8)=(1,-1)+(2,3)=(0,2)$

(3) $(16,21)+(-37,-33)=(1,1)+(-1,-3)=(0,-2)=(0,3)$

■

$\boxed{2}$ 次の連立合同方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 7 \\ x & \equiv -2 \mod 11 \end{cases}$

解答) 合同方程式

$$\begin{cases} 11t_1 & \equiv 1 \quad \mod 7 \\ 7t_2 & \equiv 1 \quad \mod 11 \end{cases}$$

の解を求めると $t_1 \equiv 2 \mod 7$, $t_2 \equiv 8 \mod 11$. よって求める解は

$$x = 3 \cdot 11 \cdot 2 + (-2) \cdot 7 \cdot 8 = 66 - 112 = -46 \equiv 31 \quad \mod 77$$

■

(2) $\begin{cases} 3x & \equiv -5 \mod 4 \\ 4x & \equiv 6 \mod 13 \end{cases}$

解答) $3^{-1} = 3 \mod 4$. $4^{-1} = 10 \mod 13$. よって合同方程式

$$\begin{cases} x & \equiv -5 \cdot 3 \equiv 1 \quad \mod 4 \\ x & \equiv 6 \cdot 10 \equiv 8 \quad \mod 13 \end{cases}$$

を解けば良い. (1) と同様に解けば, $x \equiv 21 \mod 52$. ■

(3) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 5 \\ x & \equiv 3 \mod 8 \\ x & \equiv 4 \mod 9 \end{cases}$

解答)　合同方程式

$$\begin{cases} 8 \cdot 9 t_1 & \equiv 1 \mod 5 \\ 5 \cdot 9 t_2 & \equiv 1 \mod 8 \\ 5 \cdot 8 t_3 & \equiv 1 \mod 9 \end{cases}$$

を解く．$8 \cdot 9 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 2 \mod 5$. したがって 1 式より $2t_1 \equiv 1 \mod 5$. よって $t_1 \equiv 3 \mod 5$. 同様に $t_2 \equiv 5 \mod 8$, $t_3 \equiv 7 \mod 9$ を得る．よって,

$$x = 2 \cdot 72 \cdot 3 + 3 \cdot 45 \cdot 5 + 4 \cdot 40 \cdot 7 \equiv 67 \mod 360.$$

■

(4) $\begin{cases} x & \equiv 13 \mod 20 \\ x & \equiv -12 \mod 21 \\ x & \equiv -7 \mod 23 \end{cases}$

解答)　合同方程式

$$\begin{cases} 21 \cdot 23 t_1 & \equiv 1 \mod 20 \\ 20 \cdot 23 t_2 & \equiv 1 \mod 21 \\ 20 \cdot 21 t_3 & \equiv 1 \mod 23 \end{cases}$$

を解く．$t_1 \equiv 7 \mod 20$, $t_2 \equiv 10 \mod 21$, $t_3 \equiv 4 \mod 23$ となる．よって,

$$x = 13 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 7 + (-12) \cdot 20 \cdot 23 \cdot 10 + (-7) \cdot 20 \cdot 21 \cdot 4 \equiv 5973 \mod 9660.$$

■

$\boxed{3}$ 群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が同型でないことを示せ．(ヒント: 前者には位数 4 の元が存在するが, 後者の元の位数は 2 または 1 であることを用いると良い．両者の間に同型写像があったとして矛盾を導け．)

解答)　同型写像 $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が存在すると仮定する．このとき, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の任意の元は 2 倍すると零に等しいので,

$$\varphi(2 \mod 4) = \varphi(1 + 1 \mod 4) = 2\varphi(1 \mod 4) = (0 \mod 2, 0 \mod 2).$$

一方, $2 \mod 4 \neq 0$ より φ が単射であることに反する．■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html