代数学１，第１回の内容の理解度チェックの解答

2024/9/26　担当：那須

$\boxed{1}$ (**集合と写像の復習**)

(1) 次の写像 $f : X \to Y$ は，全射であるか？単射であるか？をそれぞれの場合について答えよ．

(例) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = \sqrt{x}$

(a) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$

(b) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2 + 1$

(c) $X = Y = \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 1$

(d) $X = \mathbb{Z},\ Y = \{-1, 1\},\ f(x) = (-1)^x$

(e) $X = Y = \mathbb{R},\ f(x) = x(x-1)(x+1)$

回答欄 (なるものは○を，ならないものには×を記入せよ．)

問題	単射？	全射？
(例)	○	○
(a)	○	○
(b)	○	×
(c)	○	○
(d)	×	○
(e)	×	○

(2) 2 つの写像 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$f(x) = e^x,\ g(x) = 3x$ により定める．合成写像 $g \circ f$ の $x \in \mathbb{R}$ における値を書け．

解答)　$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(e^x) = 3e^x.$ ■

$\boxed{2}$ (1) 次の集合のうち乗法 $(\times)$ に関し群になるもの (乗法群) を全て選べ．

(a) $\mathbb{R}_{>0} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > 0\right\}$

(b) $\left\{3^n \in \mathbb{Q} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 2\right\}$

解答)　(a),(b) は与えられた集合が乗法について閉じており，任意の元 a に対し，乗法逆元 a^{-1} が存在するため，逆元を取る操作でも閉じている．一方，(c) は単位元 1 を含まない．

答え：　(a)　(b)

■

(2) 次の集合のうち加法 $(+)$ に関し群になるもの (加法群) を全て選べ．

(d) 偶数全体の集合

(e) 奇数全体の集合

(f) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 2x\right\}$

(g) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x + 1\right\}$

解答)　(d) と (f) は集合が加法について閉じており，任意の元 a に対し，加法に関する逆元 $-a$ が与えられた集合内に存在する．一方，(e) と (g) については，単位元 0 と $(0, 0)$ を含まないため群にならない．

答え：　(d)　(f)

■

$\boxed{3}$ 2の整数冪全体からなる集合

$$G = \left\{2^n \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots\right\}$$

が, 乗法 (演算 $\times$) に関し, 群になることを示せ.

解答) G が乗法に関して, 群の公理を満たすことを示す.

(0) 任意の元 $2^n, 2^m \in G$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ に対し,

$$2^n \times 2^m = 2^{n+m} \in G$$

となり G は乗法について閉じている.

(1) 任意の元 $2^n, 2^m, 2^l \in G$ $(n, m, l \in \mathbb{Z})$ に対し,

$$(2^n \times 2^m) \times 2^l = 2^n \times (2^m \times 2^l) = 2^{n+m+l}$$

より, 結合法則が成り立つ.

(2) $1 = 2^0$ は乗法について G の単位元である. 実際, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$1 \times 2^n = 2^n \times 1 = 2^n$$

が成り立つ.

(3) 任意の元 $2^n \in G$ $(n \in \mathbb{Z})$ に対し,

$$2^{-n} \times 2^n = 2^n \times 2^{-n} = 1.$$

よって 2^{-n} は 2^n の乗法逆元である.

■

$\boxed{4}$ 実2次正則行列のなす乗法群 $GL(2, \mathbb{R}) = \left\{A \;\middle|\; 2 \times 2 \text{ 行列, かつ } \det A \neq 0\right\}$ の部分集合

$$SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

は, $GL(2, \mathbb{R})$ の部分群になることを示せ.

解答) 任意の2元 $A, B \in SO(2, \mathbb{R})$ は $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ と表せる.

(0) $SO(2, \mathbb{R})$ は単位行列 E を含む.

(1) 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立ち, $SO(2, \mathbb{R})$ は演算について閉じている.

(2) 2次の逆行列の公式により,

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

が成り立ち, $SO(2, \mathbb{R})$ は逆元について閉じている.

よって $SO(2, \mathbb{R})$ は $GL(2, \mathbb{R})$ の部分群である. ■

---

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html