代数学２, 第９回の内容の理解度チェックの解答

2025/6/23　担当：那須

$\boxed{1}$ $\mathbb{Z}$ は単項イデアル環であることを示せ.

(**解答**)　I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとする. $I = (0)$ ならば, I は単項イデアルであるため, $I \neq (0)$ とする. $a \in I, a \neq 0$ が存在する. $a < 0$ ならば (-1) 倍した $-a = (-1)a$ も I の元であるため, I は自然数を含む. I に含まれる自然数 a の中で最小のものを b とすれば, $I = (b)$ となる. 実際, $(b) \subset I$ は明らかであり, I の任意の元 c に対し, 剰余定理より,

$$c = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

となる q, r が存在するが, b の最小性により $r = 0$, すなわち $b \mid c$ となる. したがって $c \in (b)$ となり, $I \subset (b)$ が従う. つまり $I = (b)$ となり, I は単項イデアルである.

$\boxed{2}$ $\mathbb{Z}$ のイデアル $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ において, $d = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とおけば, $I = (d)$ を満たすことを示せ.

(**解答**)　$\boxed{1}$ より $\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域 (PID) である. したがって $I = (a)$ となる $a \in \mathbb{Z}$ が存在する. -1 は $\mathbb{Z}$ の単元なので, $a > 0$ と仮定して良い. $I = (a) \subset (d)$ より, $d \mid a$ を満たす. 任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し $a_i \in I = (a)$, したがって, $a \mid a_i$ を満たす. 故に $a \mid d$ を得る. 以上により a と d は同伴 $(a \sim d)$ であり, 両者の生成する単項イデアルは等しい $((a) = (d))$.

$\boxed{3}$ 体 k 上の１変数多項式環 $k[x]$ は単項イデアル環であることを示せ.

(**解答**)　I を $k[x]$ のイデアルとする. $I = (0)$ ならば, I は単項イデアルであるため, $I \neq (0)$ とする. $f \neq 0$ となる $f \in I$ が存在する. $f \in I$ となる $f \neq 0$ の中で次数が最小の元をひとつ選び, それを f_0 とする. $(f_0) \subset I$ は明らかであり, I の任意の元 g に対し, 剰余定理より,

$$g = f_0 q + r, \quad 0 \leq \deg r < \deg f_0$$

となる $q, r \in k[x]$ が存在するが, f_0 の次数の最小性により $r = 0$, すなわち $f_0 \mid g$ となる. したがって $g \in (f_0)$ となり, $I \subset (f_0)$ が従う. つまり $I = (f_0)$ となり, I は単項イデアルである.

$\boxed{4}$ 体 k 上の 1 変数多項式環 $k[x]$ のイデアル $I = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ において, $d = \gcd(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ とおけば, $I = (d)$ を満たすことを示せ.

(**解答**) $\boxed{3}$ より $I = (f_0)$ となる $f_0 \in \mathbb{Z}$ が存在する. $I = (f_0) \subset (d)$ より, $d \mid f_0$ を満たす. 任意の i について $f_i \in I = (f_0)$ より $f_0 \mid f_i$, したがって $f_0 \mid d$ を得る. 以上により f_0 と d は同伴であり $(f_0 \sim d)$, 両者の生成する単項イデアルは等しい, すなわち $(f_0) = (d)$ が得られた.

$\boxed{5}$ $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ とする.

(1) R は単項イデアル整域でないことを示せ.

(2) 単項イデアルでない R のイデアルの例を一つ与えよ.

(**解答**)

(1) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ において, $4 \in R$ は分解

$$4 = 2^2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$$

をもつ. したがって R は一意分解整域ではない. したがって単項イデアル整域でもない.

(2) $\mathfrak{a} = (2, \sqrt{-3})$ を考えると, 2 と $\sqrt{-3}$ のいずれも既約元であり ($N(2) = 4$, $N(\sqrt{-3}) = 3$ であり, $(N(\alpha) =)$ $a^2 + 3b^2 = \pm 2$ を満たす $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ は存在しない.), $2 \nmid \sqrt{-3}$ かつ $\sqrt{-3} \nmid 2$ より, $\mathfrak{a} = (\beta)$ となる $\beta \in R$ は存在しない. したがって $\mathfrak{a}$ は単項イデアルではない.

[3]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html