線形代数 2, 第 5 回の内容の理解度チェック (解答)

2024/10/24 担当：那須

$\boxed{1}$ 次のベクトルの組が, 括弧内のベクトル空間の基底になるかどうか答えよ. (各 1 点)

(1) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ (ベクトル空間は $\mathbb{R}^2$)

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+\frac{2}{3}\times①} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rank}\, A = 1 < 2$ より, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底にならない.

(2) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ベクトル空間は $\mathbb{R}^3$)

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rank}\, B = 3$ より, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になる.

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対し, 線形関係式 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 係数 c_1, c_2, c_3 の値を求めよ. (1 点)

解答) c_1, c_2, c_3 の満たす連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を解くと,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{③+①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②-③]{①-③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

よって, $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 4$.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html