代数学１, 第９回の内容の理解度チェックの解答

2024/11/28 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の剰余群の群表 (演算の表) をかけ.

(a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{5\mathbb{Z}, 1+5\mathbb{Z}, 2+5\mathbb{Z}, 3+\mathbb{Z}, 4+5\mathbb{Z}\}$ (加法群)

(b) $S_n/A_n = \{A_n, \tau A_n\}$, ただし τ は任意の互換をひとつ固定する.

解答) 群表は表 1 の通りとなる. 計算方法は以下の通り.

(a) $(a+5\mathbb{Z}) + (b+5\mathbb{Z}) = (a+b \mod 5) + 5\mathbb{Z}$ で計算する.

(b) 奇置換 $\tau \in S_n$ に対し, τ^2 は偶置換 ($\tau^2 \in A_n$) になる. 従って, $(\tau A_n)^2 = (\tau A_n)(\tau A_n) = \tau^2 A_n = A_n$.

(a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

a \ b	$5\mathbb{Z}$	$1+5\mathbb{Z}$	$2+5\mathbb{Z}$	$3+5\mathbb{Z}$	$4+5\mathbb{Z}$
$5\mathbb{Z}$	$5\mathbb{Z}$	$1+5\mathbb{Z}$	$2+5\mathbb{Z}$	$3+5\mathbb{Z}$	$4+5\mathbb{Z}$
$1+5\mathbb{Z}$	$1+5\mathbb{Z}$	$2+5\mathbb{Z}$	$3+5\mathbb{Z}$	$4+5\mathbb{Z}$	$5\mathbb{Z}$
$2+5\mathbb{Z}$	$2+5\mathbb{Z}$	$3+5\mathbb{Z}$	$4+5\mathbb{Z}$	$5\mathbb{Z}$	$1+5\mathbb{Z}$
$3+5\mathbb{Z}$	$3+5\mathbb{Z}$	$4+5\mathbb{Z}$	$5\mathbb{Z}$	$1+5\mathbb{Z}$	$2+5\mathbb{Z}$
$4+5\mathbb{Z}$	$4+5\mathbb{Z}$	$5\mathbb{Z}$	$1+5\mathbb{Z}$	$2+5\mathbb{Z}$	$3+5\mathbb{Z}$

(b) S_n/A_n

a \ b	A_n	τA_n
A_n	A_n	τA_n
τA_n	τA_n	A_n

表 1: 群表

■

$\boxed{2}$ 剰余群

$$G/H = \left\{ aH \;\middle|\; a \in G \right\}$$

において, 剰余類 aH に含まれる元のことを aH の**代表元**という.

次の剰余群の代表元の集合を (ひとくみ) 与えよ. ただし剰余群が無限群になるときは, 代表元の集合も無限集合になる.

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (加法群)

解答) 任意の整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し, $\overline{x} = \overline{y} \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$. 部分群 $n\mathbb{Z}$ による $x \in \mathbb{Z}$ の剰余類は,

$$x + n\mathbb{Z} = \left\{ x + kn \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

と表される. 代表元は, $0 \leq x < n$ の範囲に取ることが可能であり, $0, 1, \ldots, n-1$ で尽きている. 従って代表元の集合は, 例えば $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. ■

(2) 加法群 $\mathbb{R}$ の部分群 $\mathbb{Z}$ による剰余群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

解答) 任意の実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し, $\overline{x} = \overline{y} \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. 部分群 $\mathbb{Z}$ による $x \in \mathbb{R}$ の剰余類は,

$$x + \mathbb{Z} = \left\{ x + n \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

と表される. 代表元は, $0 \leq x < 1$ の範囲に取ることが可能であり, またそれで尽きている. 従って代表元の集合は, 例えば区間 $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$. ■

$\boxed{3}$ A_4 を 4 次交代群, V_4 をクラインの 4 元群とする (前回の理解度チェックまたは講義ノート参照). 剰余群 A_4/V_4 に関する以下の問に答えよ. なお以下では $(i_1\ i_2\ \ldots i_r)$ は $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \cdots \mapsto i_r \mapsto i_1$ のように順番に移す長さ r の巡回置換を表す.

(1) 次の剰余類の等式が正しいか否か判定せよ:

(i) $(1\ 2\ 3)V_4 = (1\ 2\ 4)V_4$ (ii) $(1\ 3\ 2)V_4 = (1\ 2\ 4)V_4$ (iii) $(2\ 3\ 4)V_4 = (1\ 3\ 4)V_4$

解説 (剰余類の等式)

G が群のとき, G の部分群 H と元 a, b に対し,

$$aH = bH \iff a^{-1}b \in H$$

が成り立つ (教科書 p.26, 命題 6.1 参照).

解答)

(i) $(1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2\ 4) = (2\ 4\ 3) \notin V_4$. したがって $(1\ 2\ 3)V_4 \neq (1\ 2\ 4)V_4$ となり等式は正しくない.

(ii) $(1\ 3\ 2)^{-1}(1\ 2\ 4) = (1\ 3)(2\ 4) \in V_4$. したがって $(1\ 3\ 2)V_4 = (1\ 2\ 4)V_4$ となり等式は正しい.

(iii) $(2\ 3\ 4)^{-1}(1\ 3\ 4) = (1\ 2\ 4) \notin V_4$. したがって $(2\ 3\ 4)V_4 \neq (1\ 3\ 4)V_4$ となり等式は正しくない.

■

(2) 剰余群 A_4/V_4 の元は

$$V_4, \quad (1\ 2\ 3)V_4, \quad (1\ 2\ 4)V_4 \qquad (\heartsuit)$$

と表される. 次の元を計算せよ. なお途中の計算 (理由) を明らかにすると共に, 答えは $(\heartsuit)$ で与えられた 3 つの剰余類の中から一つ選んで解答すること.

(a) $(1\ 2\ 3)V_4 \cdot (1\ 2\ 4)V_4$ (b) $((1\ 2\ 3)V_4)^2$ (c) $(1\ 2\ 4)V_4 \cdot (2\ 4\ 3)V_4$

解説 (剰余類の演算)

G が群, H が G の正規部分群であるとき, 剰余群 G/H の演算は

$$aH \cdot bH = abH \qquad (\text{ただし } aH, bH \in G/H)$$

によって定義される (教科書 p.27, 7 節参照).

解答) 剰余群の定義に従って計算する.

(a) $(1\ 2\ 3)V_4 \cdot (1\ 2\ 4)V_4 = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)V_4 = (1\ 3)(2\ 4)V_4 = V_4$.

(b) $((1\ 2\ 3)V_4)^2 = (1\ 2\ 3)^2V_4 = (1\ 3\ 2)V_4 = (1\ 2\ 3)^{-1}V_4 = ((1\ 2\ 3)V_4)^{-1}$. 前問 (a) より $((1\ 2\ 3)V_4)^{-1} = (1\ 2\ 4)V_4$. したがって $((1\ 2\ 3)V_4)^2 = (1\ 2\ 4)V_4$.

(c) $(1\ 2\ 4)V_4 \cdot (2\ 4\ 3)V_4 = (1\ 2\ 4)(2\ 4\ 3)V_4 = (1\ 2)(3\ 4)V_4 = V_4$.

■

(3) $A_4/V_4 = \{V_4, (123)V_4, (124)V_4\}$ の演算表を求めよ, ただし V_4 はクラインの 4 元群とする.

解答)

$a \backslash b$	V_4	$(1\ 2\ 3)V_4$	$(1\ 2\ 4)V_4$
V_4	V_4	$(1\ 2\ 3)V_4$	$(1\ 2\ 4)V_4$
$(1\ 2\ 3)V_4$	$(1\ 2\ 3)V_4$	$(1\ 2\ 4)V_4$	V_4
$(1\ 2\ 4)V_4$	$(1\ 2\ 4)V_4$	V_4	$(1\ 2\ 3)V_4$

■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html