代数学２, 第10回の内容の理解度チェックの解答

2025/6/30　担当：那須

$\boxed{1}$ R を整域とする. 直積集合 $R \times R$ の部分集合

$$X = \{(a,b) \mid a, b \in R, b \neq 0\}$$

を考える. X の 2 つの元 (a,b) と (a',b') に対し,

$$(a,b) \sim (a',b') \iff ab' - a'b = 0$$

と定義すると, $\sim$ は同値関係になることを示せ.

(**解答**)

- (**反射律**) $ab - ab = 0$ より $(a,b) \sim (a,b)$
- (**対称律**) $(a,b) \sim (a',b')$ とする. このとき $a'b - ab' = -(ab' - a'b) = 0$ より, $(a',b') \sim (a,b)$ が成り立つ.
- (**推移律**) $(a,b) \sim (a',b')$ かつ $(a',b') \sim (a'',b'')$ とする. このとき

$$ab' - a'b = 0 \text{ かつ } a'b'' - a''b' = 0$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} b'(ab'' - a''b) &= b'ab'' - b'a''b \\ &= b'ab'' - b''a'b + b''a'b - b'a''b \\ &= b''(ab' - a'b) + b(a'b'' - a''b') \\ &= b'' \cdot 0 + b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

R は整域で, $b' \neq 0$ より, $ab'' - a''b = 0$ を得る. すなわち, $(a,b) \sim (a'',b'')$ となる.

$\boxed{2}$ 問題$\boxed{1}$の X と同値関係 $\sim$ に対し, 同値類の集合を $F = X/\sim$ とおき, $(a,b) \in X$ を含む同値類を a/b と書く. このとき $(a,b),(c,d) \in X$ に対し,

$$a/b = c/d \Longleftrightarrow ad - bc = 0$$

である. F において

$$\begin{aligned} a/b + c/d &= (ad+bc)/bd \qquad (\text{和}) \\ (a/b)(c/d) &= ac/bd \qquad (\text{積}) \end{aligned}$$

により和と積を定義すると, この演算は代表元の取り方によらないことを示せ.

(**解答**)　$a/b = a'/b'$ かつ $c/d = c'/d'$ とする. このとき

$$\begin{aligned} (ad+bc)b'd' - (a'd'+b'c')bd &= adb'd' - a'd'bd + bcb'd' - b'c'bd \\ &= dd'(ab' - a'b) + bb'(cd' - c'd) \\ &= dd' \cdot 0 + bb' \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より, $(ad+bc)/bd = (a'd'+b'c')/b'd'$ となる. したがって, 和の定義は代表元の取り方によらない. 同様に

$$\begin{aligned} (ac)(b'd') - (a'c')(bd) &= (ac)(b'd') - a'bcd' + a'bcd' - (a'c')(bd) \\ &= cd'(ab' - a'b) + a'b(cd' - c'd) \\ &= cd' \cdot 0 + a'b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より, $ac/bd = a'c'/b'd'$ となる. したがって, 積の定義も代表元の取り方によらない.

$\boxed{3}$ $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のとき, R の商体

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}, (c,d) \neq (0,0) \right\}$$

が

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ p + q\sqrt{2} \mid p,q \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \right\}$$

に等しいことを示せ.

(**解答**)　$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は明らか $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を任意の元とすると, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}, (c,d) \neq (0,0)$ が存在し,

$$\alpha = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$$

となる. $(ac-2bd)/(c^2-2d^2) \in \mathbb{Q}$ かつ $(-ad+bc)/(c^2-2d^2) \in \mathbb{Q}$ より, $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. したがって, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. 以上により $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ がわかる.

[3]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html