代数学２, 第６回の内容の理解度チェックの解答

2025/6/2　担当：那須

$\boxed{1}$ R, S を環とし, $f : R \to S$ を環の準同型写像とする. 0_S を S の零元とし, f の核 $\ker f$ と像 $\mathrm{im}\, f$ は

$$\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$$
$$\mathrm{im}\, f = \{f(a) \mid a \in R\}$$

により定義される.

(1) $\ker f$ が R のイデアルになることを示せ.

(2) $\mathrm{im}\, f$ は S の部分環になることを示せ.

(**解答**)

(1) 任意の２元 $a, b \in \ker f$ をとる. $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0_S$ より, $a - b \in \ker f$ を得る. 一方 $r \in R$ に対し, $f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0_S = 0_S$ より, $ra \in \ker f$ となる. したがって $\ker f$ は R のイデアルである.

(2) 任意の２元 $f(a), f(b) \in \mathrm{im}\, f$ をとる. $f(a) - f(b) = f(a-b) \in \mathrm{im}\, f$ かつ $f(a)f(b) = f(ab) \in \mathrm{im}\, f$ と $f(1_R) = 1_S$ より, $\mathrm{im}\, f$ は S の部分環である.

$\boxed{2}$ k を体とし, $a \in k$ とする. k 上の１変数多項式環 $k[x]$ から k への写像 φ を

$$\varphi : k[x] \longrightarrow k, \qquad f(x) \longmapsto f(a)$$

により定める.

(1) φ が環の準同型写像であることを証明せよ.

(2) $\ker \varphi$ を求めよ.

(3) 準同型定理を用いて,

$$k[x]/(x-a) \simeq k$$

を証明せよ.

(**解答**)

(1) $f, g \in k[x]$ とする.

$$\varphi(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \varphi(f) + \varphi(g),$$
$$\varphi(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \varphi(f)\varphi(g)$$

より φ は環の準同型写像である.

(2) 定義より

$$\ker(\varphi) = \{f \in k[x] \mid f(a) = 0\}$$

となる. 因数定理より $f \in \ker \varphi$ は $f(x)$ が１次式 $(x-a)$ で割り切れることと同値である. したがって, $\ker \varphi$ は単項生成イデアル $(x-a)$ に等しい.

(3) φ が全射であることを示す. 任意の $c \in k$ に対し, 定数多項式 $f(x) = c$ を考えれば, $\varphi(f(x)) = \varphi(c) = c$ より, $c \in \mathrm{im}\, \varphi$ となる. つまり $k \subset \mathrm{im}\, \varphi$ となり, φ は全射である. (2) より $\ker \varphi = (x-a)$ であるから, 準同型定理より $k[x]/(x-a) \simeq k$ を得る.

$\boxed{3}$ 環の準同型定理を証明せよ．

準同型定理

環の準同型写像 $f : R \to S$ に対し，

$$\bar{f} : R/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \qquad a + \ker f \longmapsto f(a)$$

は同型写像である．

(解答)

- ($\bar{f}$ **がうまく定義されている (well-defined) こと**)
  $a + \ker f = b + \ker f \ (a, b \in R)$ とすると，$a - b \in \ker f$ より，$f(a-b) = f(a) - f(b) = 0_S$，よって $f(a) = f(b)$ を得る．したがって $\bar{f}$ の定義により，$\bar{f}(a + \ker f) = \bar{f}(b + \ker f)$ となり，$\bar{f}$ の定義は $R/\ker f$ の元の代表元の取り方によらない．
- ($\bar{f}$ **が準同型写像であること**)
  f が環準同型であることから従う．実際，任意の $a, b \in R$ に対し，

$$\begin{aligned}
\bar{f}((a + \ker f) + (b + \ker f)) &= \bar{f}((a+b) + \ker f) \\
&= f(a+b) \\
&= f(a) + f(b) \\
&= \bar{f}(a + \ker f) + \bar{f}(b + \ker f) \\
\bar{f}((a + \ker f)(b + \ker f)) &= \bar{f}(ab + \ker f) \\
&= f(ab) \\
&= f(a)f(b) \\
&= \bar{f}(a + \ker f)\bar{f}(b + \ker f)
\end{aligned}$$

  のように証明される．
- ($\bar{f}$ **が全射であること**)
  $b \in \operatorname{im} f$ とする．$a \in R_S$ が存在し，$b = f(a)$ を満たす．$a + \ker f \in R/\ker f$ を考えれば，$\bar{f}(a + \ker f) = f(a) = b$ となり，b は $\bar{f}$ の像に含まれる．したがって，$\bar{f}$ は全射である．
- ($\bar{f}$ **が単射であること**)
  $\bar{f}(a + \ker f) = 0_S$ とする．このとき $f(a) = 0_S$ が成り立ち，$a \in \ker f$，すなわち $a + \ker f = \ker f$ となり，$\ker \bar{f} = \{\ker f\}$ となる．したがって $\overline{f}$ は単射である．

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照．https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html