問題

1. 実平面上の曲線 $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ において，特異点をすべて求めよ[*1].

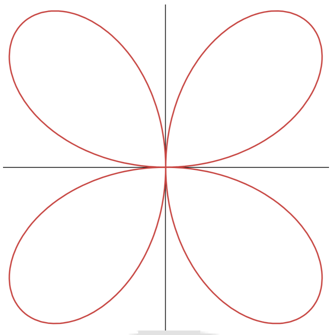

図 1　$(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$

2. フェルマーの最終定理とは，

3 以上の自然数 n に対して，$x^n+y^n=z^n$ となる自然数の組 (x,y,z) は存在しない

である．では，$n=3$ のときの方程式に”近い”，次の方程式

$$x^3+y^3=z^3+1$$

を満たす z が最小となる 2 以上の自然数の組 (x,y,z) を求めよ．ただし，$x<y$ とする．

3. 次の 2 つの方程式で定義されるグラフの交点の個数を複素数の範囲でそれぞれ求めよ．

(a) $\begin{cases} y=2x^2-2x-3 \\ y=2x-3 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} y=2x^2+2x-1 \\ y=2x-3 \end{cases}$　(c) $\begin{cases} y=2x^2+2x-yx \\ y=2x-3 \end{cases}$

[*1] $f(x,y)=0$ が C^1 級に対し，$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$ であるような曲線上の点 (a,b) を**特異点**という．