代数学１, 第10回の内容の理解度チェックの解答

2024/12/5　担当：那須

$\boxed{1}$ $f: G \to G'$ を群 G, G' 間の準同型写像とする．

(1) e と e' をそれぞれ G, G' の単位元とする．$f(e) = e'$ および $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ ($^\forall a \in G$) を示せ．

解答)　準同型写像の定義より，$f(e) = f(e \cdot e) = f(e)f(e)$．両辺に $f(e)^{-1}$ を乗じると $e' = f(e)$ を得る．また $e' = f(e) = f(a \cdot a^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$．両辺に左から $f(a)^{-1}$ を乗じると，$f(a)^{-1} = f(a^{-1})$ を得る．■

(2) f の像 $\mathrm{im}\, f$ が G' の部分群であることを示せ．

解答)　任意の $a', b' \in \mathrm{im}\, f$ に対し，$f(a) = a'$, $f(b) = b'$ となる $a, b \in G$ が存在する．

$$a'b' = f(a)f(b) = f(ab) \in \mathrm{im}\, f \quad \text{かつ} \quad a'^{-1} = f(a)^{-1} = f(a^{-1}) \in \mathrm{im}\, f.$$

$\mathrm{im}\, f$ は空でない ($e' \in \mathrm{im}\, f$) ので部分群である．■

(3) f の核 $\ker f$ が G の正規部分群であることを示せ．

解答)　$a, b \in G$ に対し，$f(a) = f(b) = e$ ならば，$f(ab) = f(a)f(b) = e^2 = e$．$f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e^{-1} = e$．よって $a, b \in \ker f$ ならば, $ab \in \ker f$, かつ $a^{-1} \in \ker f$ である．$\ker f$ は空でない ($e \in \ker f$) ので部分群である．また任意の $a \in \ker f$ と任意の $c \in G$ に対し，

$$f(cac^{-1}) = f(c)f(a)f(c^{-1}) = f(c)e'f(c^{-1}) = f(c)f(c)^{-1} = e'.$$

よって $cac^{-1} \in \ker f$．従って $\ker f$ は G の正規部分群である．■

(4) f が単射 $\Longleftrightarrow \ker f = \{e\}$ を示せ．

解答)　f が単射のとき, $f(a) = e'$ とすれば, $f(e) = e'$ より $a = e$．従って $\ker f = \{e\}$．逆に $\ker f = \{e\}$ を仮定する．$f(a) = f(b)$ のとき，

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e'.$$

よって仮定より, $ab^{-1} = e$, 従って $a = b$．故に f は単射である．■

$\boxed{2}$ G を加法群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ とする.

(1) $H = 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の元で 3 の倍数からなる集合) の全ての元を求め, H が G の部分群になることを示せ.

解答) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. このうち $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ に含まれるもの (3 の倍数) は, $0,3,6,9$ したがって, $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0,3,6,9\}$. 3 の倍数全体は和と (-1) 倍に関し閉じているので, H は群になる. (H の群表を書いて示しても良い.) ■

(2) G から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \qquad x \mod 12 \longmapsto x \mod 3$$

により定める. f が準同型写像を定めることを示せ.

解答) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の任意の元 $x, y \pmod{12}$ に対し,

$$\begin{aligned}((x \mod 12) + (y \mod 12)) \mod 3 &= (x + y \mod 12) \mod 3 \\ &= x + y \mod 3 \\ &= (x \mod 3) + (x \mod 3)\end{aligned}$$

より, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成り立つ. 従って f は準同型写像である. ■

(3) f の核 $\ker f$ を求めよ.

解答) $x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ かつ $f(x) = 0$ とする. このとき $x \mod 3 = 0$, すなわち x は 3 の倍数である. よって $\ker f = 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $(= H)$. ■

(4) 同型

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

を示せ.

解答) f は明らかに全射である. 実際, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の代表元 $x = 0,1,2 \in \mathbb{Z}$ に対し, $f(x \mod 12) = x \mod 3$ となる. よって, $\mathrm{im}\, f = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 準同型定理より,

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/\ker f \simeq \mathrm{im}\, f = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html