線形代数2, 第6回の内容の理解度チェック (解答)

2024/11/7 担当：那須

$\boxed{1}$ 連立方程式の解空間

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

の次元と1組の基底を求めよ. (次元：1点, 基底：1点)

解答) 方程式の係数行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ とおいて, 階段行列まで基本変形する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって一般の解は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2t \\ -2s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は W を生成し, 明らかに1次独立である. よって $\dim W = 2$ で $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が W の1組の基底となる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html