

Obstructions to deforming space curves lying on an elliptic quartic surface

東海大学・理学部情報数理学科 那須 弘和*

Hirokazu NASU

Department of Mathematical Sciences,

Tokai University

1 はじめに

3次元射影空間に埋め込まれた曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ を空間曲線と呼ぶ. 空間曲線の分類問題は古くから取り組まれ, 19世紀の終わりには研究されていた. 近年ではヒルベルトスキームの存在により理論的側面において空間曲線の研究手法が十分整備され, 変形理論を用いてヒルベルトスキームの次元や既約成分, 特異点などを調べるのが可能になった. \mathbb{P}^3 内の非特異連結曲線のヒルベルトスキームを $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ で表し, 次数 d 種数 g の曲線のなす $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の部分スキームを $H_{d,g}^S$ で表す.

Mumford[13] は, ヒルベルトスキーム $H_{14,24}^S$ の (56 次元) 既約成分をひとつ構成し, その生成点において $H_{14,24}^S$ が (従って $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$) が被約でない (non-reduced) ことを示した. Mumford の構成した生成的に被約でない (generically non-reduced) 既約成分の例は, Kleppe[8], Ellia[1], Gruson-Peskine[6], Fløystad [3], 那須 [14] などにより $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ に対し様々な方向で一般化が行われた. 向井・那須 [12] では, Mumford の例を詳細に解析する事により, 3次元射影多様体上の曲線の 1 位無限小変形が 2 位変形にリフトする為の障害類を計算する技術が発展し, その結果 Mumford の例は次のように一般化された:

定理 1.1 ([12]). V を 3次元非特異射影多様体とする. 次が成り立つとき, V 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は (可算無限個の) 生成的に被約でない既約成分を持つ:

- (1) V 上に有理曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ が存在し, 法束 $N_{E/V}$ が大域切断で生成される.

*本研究は科研費 (課題番号: 25400048) の助成を受けたものである.

- (2) $E \subset S \subset V$ を満たす非特異 (中間) 曲面 S が存在し, E は S 上の (-1) -曲線, すなわち $E \simeq \mathbb{P}^1$ かつ $E^2 = -1$ であり, $p_g(S) = H^1(S, N_{S/V}) = 0$ が成り立つ.

上で述べた Mumford の例は, V が \mathbb{P}^3 , S が非特異 3 次曲面, E が S 上の直線 (27 本の直線のうちの 1 本) のときの特別な場合になっている. 上の定理を del Pezzo 多様体 [16] や射影直線束 [15] などに適用することにより, 現在まで多くの 3 次元単線織多様体 V に対し, $\text{Hilb}^{sc} V$ が生成的に被約でない既約成分を持つことが知られている. 一連の結果から, ヒルベルトスキームの非被約既約成分 (曲線の変形障害) と (-1) -曲線との間に何らかの関係があると推測される.

本報告では, 非特異 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ に含まれるような非特異空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ の \mathbb{P}^3 における変形について考察する. 良く知られているように, S は $K3$ 曲面であり, S 上の曲線 E に対し, E が有理的 ($E \simeq \mathbb{P}^1$) ならば, E は S 上の (-2) -曲線となる. また E が楕円曲線ならば $E^2 = 0$ となり, E は楕円曲面 $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ のファイバーとなる. 非特異 4 次曲面上では, (-2) -曲線と楕円曲線が Mumford の例における非特異 3 次曲面上の (-1) -曲線と良く似た役割を果たし, ヒルベルトスキーム $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ が生成的に被約でない既約成分を持つ.

定理 1.2. $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 4 次曲面, C を S 上の非特異連結曲線とする. \mathbf{h} を S の超平面切断とし, S 上の因子 $D := C - 4\mathbf{h}$ に対し, $|D|$ がメンバーを持つと仮定する. このとき,

- (1) $H^1(S, D) = 0$ ならば, $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は $[C]$ において非特異であり, 次元は $g + 33$ に等しい.
- (2) E を S 上の (-2) -曲線とし, $\text{Pic } S = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}E$ と仮定する. $E \cdot D = -2$ かつ $D \not\sim E$ ならば, $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は $[C]$ において特異である. 実際はより強く, $[C]$ は唯 1 つの既約成分 W に属し, $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は W に沿って生成的に被約でない.
- (3) E を S 上の非特異楕円曲線とする. $D \sim (m+1)E$ ($m \geq 1$) ならば, $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は $[C]$ において特異である. さらに $m = 1$ ならば, (2) と同様に $[C]$ が属す $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の唯 1 つの既約成分は生成的に被約でない.

ヒルベルトスキーム $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の $[C]$ における接空間は法束 N_{C/\mathbb{P}^3} のコホモロジー群 $H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ に等しい. C を含む $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の 4-極大族 (§4) の $H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ における余次元は, コホモロジー群 $H^1(S, D)$ の次元に等しく ((5.2)), これが消滅しないとき $C \subset \mathbb{P}^3$ は 2 位変形にリフトしない 1 位無限小変形を持つことが示される (§5). 定理 1.2 の (2), (3) のそれぞれにおいて, $h^1(S, D) = 1$, $h^1(S, D) = m$ となる. $K3$ 曲面上の直線束に対する H^1 の非消滅定理 ([10], 補題 5.2) により, $D^2 \geq 0$ のとき, $H^1(S, D) \neq 0$ である為には, 次のどちらかが成り立つことが必要十分である: [i] $\Delta \cdot D \leq -2$ を満たす S 上の (-2) -因子 $\Delta \geq 0$ が存在する; [ii] 整数 $n \geq 2$ に対し $D \sim nF$ かつ $F^2 = 0$ となるようなネフかつ原始的な S 上の因子 $F \geq 0$ が存在する. 実際, S 上の (-2) -曲線や楕円曲線の存在が, $H^1(S, D)$ の非消滅を導く.

空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ に対し, C の 1 位無限小変形全体と N_{C/\mathbb{P}^3} の大域切断全体との間には自然な 1 対 1 対応が存在することが知られている. $\varphi \in H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ に対応する 1 位無限小変形 \tilde{C} が 2 位変形にリフトする為の障害類 $\text{ob}(\varphi)$ は, カップ積

$$H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \times H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \xrightarrow{\cup} H^1(C, N_{C/\mathbb{P}^3}), \quad \varphi \mapsto \varphi \cup \varphi = \text{ob}(\varphi)$$

で与えられる. [12] で与えられた $\text{ob}(\varphi)$ の計算方法を精密化し, 1 位無限小変形に対する障害類の非零をより一般の場合に示す (障害性判定法, 定理 3.3). この結果を用いて, 定理 1.2 を示す.

謝辞 本研究発表の機会を与えて頂いた北海道大学の松下大介氏と京都大学の向井茂先生に感謝します.

2 ヒルベルトスキームと無限小変形

まず埋め込まれた代数多様体の変形理論に関する基本事項について復習する. 基礎体 k は代数閉体で, 標数は特に断らない限り一般とする. $V \subset \mathbb{P}^n$ を \mathbb{P}^n の閉部分スキーム, $\mathcal{O}_V(1)$ を V 上の豊富な直線束とし, $X \subset V$ を V の閉部分スキーム, $P(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X(n))$ を X のヒルベルト多項式とする. このとき射影的スキーム H が存在し, V の閉部分スキーム X' でもって, X と同じヒルベルト多項式 $P(X') = P(X)$ を持つものすべてをパラメトライズする ([5]). このスキーム H を V のヒルベルトスキームと呼び, $\text{Hilb } V$ で表す.

\mathcal{I}_X と $N_{X/V} = (\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2)^\vee$ をそれぞれ X を定義するイデアル層, X の V 内での法層とする. $\text{Hilb } V$ において X に対応する点を $[X]$ で表す. 良く知られているように, $\text{Hilb } V$ の $[X]$ における接空間は $\text{Hom}(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ と同型であり, この群は $N_{X/V}$ のコホモロジー群 $H^0(X, N_{X/V})$ と同型である. X を V 内で変形する際の全ての障害 ob は, コホモロジー群 $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ に含まれ, もし X が V 内で局所完全交叉ならば, ob は部分群 $H^1(X, N_{X/V}) \subset \text{Ext}^1(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ に含まれる. ヒルベルトスキームの次元に関し, 不等式

$$h^0(X, N_{X/V}) - h^1(X, N_{X/V}) \leq \dim_{[X]} \text{Hilb } V \leq h^0(X, N_{X/V}).$$

が成り立ち, 左辺 (X が曲線なら $\chi(X, N_{X/V})$) は $\text{Hilb } V$ の $[X]$ における期待次元と呼ばれる. もし $H^1(X, N_{X/V}) = 0$ ならば, ヒルベルトスキーム $\text{Hilb } V$ は $[X]$ において非特異かつ, 次元は $h^0(X, N_{X/V})$ に等しい. 双数環 (ring of dual number) $k[t]/(t^2)$ を D で表す. X の V における 1 位無限小変形とは, D 上平坦な閉部分スキーム $\tilde{X} \subset X \times \text{Spec } D$ でもって, 中心ファイバー \tilde{X}_0 が X に等しいものをいう. ヒルベルトスキームの普遍的な性質 (universal property) により, 0 を $[X]$ に写す D -値点 $\psi: \text{Spec } D \rightarrow \text{Hilb } V$ の集合と X の V における 1 位無限小変形の集合の間には自然な 1 対 1 対応が存在する.

非特異性に関する無限小持ち上げの性質 ([7, Proposition 4.4, Chap. 1]) をアルティン環の全射 $k[t]/(t^{n+2}) \rightarrow k[t]/(t^{n+1}) \rightarrow 0$ ($n \geq 1$) に適用する事により, 次の命題を得る.

命題 2.1. もし $\text{Hilb } V$ が $[X]$ において非特異ならば, 任意の整数 $n \geq 1$ に対し, X の V における任意の n 位無限小変形はある $(n+1)$ 位無限小変形にリフトする.

この事実により, もし $X \subset V$ のある 1 位無限小変形 \tilde{X} がどんな 2 位変形 $\tilde{\tilde{X}}$ にもリフトしないとき, $\text{Hilb } V$ は $[X]$ において特異であることがわかる.

ここから先は, X は V 内で局所完全交叉であると仮定する. \tilde{X} を $X \subset V$ の 1 位無限小変形とし, φ を \tilde{X} に対応する $N_{X/V}$ の大域切断とする. V 上の標準的な層短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

の定める拡大類を $\mathbf{e} \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_X)$ とする. φ に対し (従って \tilde{X} に対し), カップ積 $\text{ob}(\varphi) \in \text{Ext}^1(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ を

$$\text{ob}(\varphi) := \varphi \cup \mathbf{e} \cup \varphi$$

により定義する. このとき, \tilde{X} が 2 位変形にリフトする為の必要十分条件は $\text{ob}(\varphi) = 0$ で与えられる. X は局所完全交叉であるので, $\text{ob}(\varphi)$ はコホモロジー群 $H^1(X, N_{X/V})$ に含まれる. $\text{ob}(\varphi)$ を φ に対する (\tilde{X} に対する) 障害類と呼ぶ. 以下では $\text{Hilb } V$ が $[X]$ において非特異であるとき, X は **unobstructed** であるといい, そうでないとき (特異であるとき), **obstructed** であるという. また $\text{Hilb } V$ の既約成分 W に対し, $\text{Hilb } V$ が W の生成点 X_η で非特異であるとき, $\text{Hilb } V$ は W に沿って生成的に非特異 (**generically smooth**) といい, X_η で特異であるとき, $\text{Hilb } V$ は W に沿って生成的に被約でない (**generically non-reduced**) という.

3 障害性判定法

向井・那須 [12] では, 3次元射影多様体 V 上の曲線 C の埋め込み変形について, $C \subset S \subset V$ を満たす中間曲面 S の存在を仮定し研究が行われ, C の V における 1 位無限小変形が 2 位変形へのリフトの際に障害を受ける為の十分条件が与えられた. S 上に (-1) -曲線などの負曲線 E (すなわち $E^2 < 0$) が存在し, 法束 $N_{C/V}$ の大域切断 φ の外成分が E に沿って 1 位の極をもつ $N_{S/V}$ の有理切断にリフトするとき, E, C, v に関するある弱い条件を満たせば, $\text{ob}(\varphi)$ の外成分は零でない. 本節では, この結果を v の E に沿った極の位数と自己交点数 E^2 に関して一般化する.

V を k 上の 3次元非特異射影多様体とし, C を V 上の非特異連結曲線とする. §2 で述べたように, C の 1 位無限小変形 \tilde{C} は, 大域切断 $\varphi \in H^0(C, N_{C/V})$ と障害類 $\text{ob}(\varphi) \in H^1(C, N_{C/V})$ を定め, \tilde{C} が $\text{Spec } k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトする為の必要十分条件は, $\text{ob}(\varphi) = 0$ で与えられる.

$\pi_{C/S} : N_{C/V} \rightarrow N_{S/V}|_C$ を法束の自然な射影とすると、 $\pi_{C/S}$ はコホモロジー群の写像

$$H^i(\pi_{C/S}) : H^i(C, N_{C/V}) \rightarrow H^i(C, N_{S/V}|_C) \quad (i = 0, 1)$$

を誘導する.

定義 3.1. 誘導写像 $H^i(\pi_{C/S})$ による φ と $\text{ob}(\varphi)$ の像

$$\begin{aligned} \pi_{C/S}(\varphi) &:= H^0(\pi_{C/S})(\varphi) \\ \text{ob}_S(\varphi) &:= H^0(\pi_{C/S})(\text{ob}(\varphi)) \end{aligned}$$

を、それぞれ φ と $\text{ob}(\varphi)$ の外成分と呼ぶ.

直感的に説明すれば、 C の V における 1 位無限小変形に対し、外成分は S の法線方向への変形とその障害を抽出したものである.

S を非特異とし、 $E \subset S$ を S 上の非特異曲線、 $m \geq 1$ を整数とする. E は S 上の有効因子であるので、 S 上の層の短完全列 $[0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(E) \rightarrow \mathcal{O}_E(E) \rightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_S(mE)$ が存在する. 任意の m に対し、コホモロジー群上の誘導写像

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(mE)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E))$$

が単射であると仮定する. このとき、 E の S における補集合 $S \setminus E \subset S$ から定まる開曲面を S° で表せば、 $H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$ 上には自然なフィルトレーション

$$H^1(S, E) \subset H^1(S, 2E) \subset \cdots \subset H^1(S, mE) \subset \cdots \subset H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$$

が存在する.

定義 3.2. E に沿って m 位の極を持つ $N_{S/V}$ の有理切断 v 、すなわち $v \in H^0(S, N_{S/V}(mE)) \setminus H^0(S, N_{S/V}(m-1)E)$ を (E に沿って m 位の) 極付無限小変形と呼ぶ.

任意の極付無限小変形は、自然な単射

$$H^0(S, N_{S/V}(mE)) \hookrightarrow H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$$

により、開曲面 $S^\circ = S \setminus E$ の開多様体 $V^\circ = V \setminus E$ における 1 位無限小変形を誘導する.

$v \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$ を E に沿って m 位の極を持つ極付無限小変形とし、その E への制限 $v|_E \in H^0(E, N_{S/V}(mE)|_E)$ を考える. $N_{S/V}(mE)|_E$ を商層 $N_{S/V}(mE)/N_{S/V}((m-1)E)$ と同一視することにより、 $v|_E$ は v の E における主要部

$$v \bmod N_{S/V}((m-1)E)$$

とみなすことができる. E 上の層の短完全列

$$[0 \rightarrow \underbrace{N_{E/S}}_{\simeq \mathcal{O}_E(E)} \rightarrow N_{E/V} \rightarrow N_{S/V}|_E \rightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_S(mE)$$

の余境界写像を ∂_E とし, ∂_E による $v|_E$ の像 $\partial_E(v|_E)$ が

$$H^1(E, N_{E/S}(mE)) \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E))$$

の元として定まる. このとき, カップ積写像

$$H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E)) \times H^0(E, N_{S/V}(mE - C)|_E) \xrightarrow{\cup} H^1(E, N_{S/V}((2m+1)E - C)|_E)$$

による $\partial_E(v|_E)$ と $v|_E$ のカップ積

$$\partial_E(v|_E) \cup v|_E \in H^1(E, N_{S/V}((2m+1)E - C)|_E) \quad (3.1)$$

を考える.

次の定理は [12, Theorem 2.2] の一般化であり, C の V における 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset V \times \text{Spec } k[t]/(t^2)$ に対し, \tilde{C} が 2 位変形 $\tilde{\tilde{C}} \subset V \times \text{Spec } k[t]/(t^3)$ へのリフトの際に障害を受ける為の十分条件を与える.

定理 3.3 (障害性判定法). \tilde{C} または $\varphi \in H^0(C, N_{C/V})$ を $C \subset V$ の一位無限小変形とし, $\pi_{C/S}(\varphi) \in H^0(C, N_{S/V}|_C)$ を φ の外成分, $m \geq 1$ を整数とする. $\pi_{C/S}(\varphi)$ の $H^0(C, N_{S/V}(mE)|_C)$ における像が, E に沿って m 位の極付無限小変形

$$v \in H^0(S, N_{S/V}(mE)) \setminus H^0(S, N_{S/V}(m-1)E)$$

にリフトする, すなわち $H^0(C, N_{S/V}(mE)|_C)$ において

$$\pi_{C/S}(\varphi) = v|_C$$

が成り立つと仮定する. 加えて次の条件 (a), (b) が満たされれば, $\text{ob}(\varphi)$ の外成分 $\text{ob}_S(\varphi)$ は零でない.

(a) $\Delta := C + K_V|_S - 2mE$ を S 上の因子とする. このとき, 制限写像

$$H^0(S, \Delta) \xrightarrow{|_E} H^0(E, \Delta|_E)$$

は全射である.

(b) m は標数 p の倍数ではなく, 式 (3.1) で定義されたカップ積 $\partial_E(v|_E) \cup v|_E$ が零でない.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(N_{C/V}) & \ni & \varphi & & & & H^0(N_{E/V}(mE)) \\
\pi_{C/S} \downarrow & & \downarrow & & & & \pi_{E/S}(mE) \downarrow \\
H^0(N_{S/V}|_C) & \ni & v|_C & \xleftarrow{res} & v & \xrightarrow{res} & v|_E \in H^0(N_{S/V}(mE)|_E) \\
\cap & & & & \cap & & \downarrow \partial_E \\
H^0(N_{S/V}(mE)|_C) & \xleftarrow{res} & H^0(N_{S/V}(mE)) & & \partial_E(v|_E) & \in & H^1(\mathcal{O}_E((m+1)E))
\end{array}$$

図 1:

図 1 は $\varphi, v|_E, \partial(v|_E)$ の間の関係を表している.

注意 3.4. (1) [12, Theorem 2.2] では, E の S 上の自己交点数は負 ($E^2 < 0$) であり, かつ極付無限小変形 v の E に沿った極の位数は $m = 1$ と仮定されていた.

(2) 定理の応用において, E は必ずしも (-1) -曲線である必要はない. 例えば, $K3$ 曲面 S への応用があり, E が (-2) -曲線 ($E^2 = -2$) や楕円曲線 ($E^2 = 0$) の場合にも適用される (§5).

4 低次曲面上の空間曲線

本節では, 空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ と C を含む曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ の変形に関する基本的な結果について復習する. 本節の結果の詳しい証明については [8] と [9] を参照されたい.

まずヒルベルト旗スキームを紹介する. ヒルベルト旗スキーム $D(d, g, s)$ は, $C \subset S \subset \mathbb{P}^3$ を満たす次数 d 種数 g の空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ と s 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ の対 (C, S) をパラメータづける. C が非特異曲線のときの対 (C, S) のなす $D(d, g, s)$ の開部分スキームを $D(d, g, s)^S$ により表す. s 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ のヒルベルトスキームを $H(s)$ で表す. このとき, ヒルベルト (旗) スキームの自然な図式

$$\begin{array}{ccc}
D(d, g, s)^S & \xrightarrow{pr_2} & H(s) \\
pr_1 \downarrow & & \left(\begin{array}{c} (C, S) \mapsto S \\ \downarrow \\ C \end{array} \right) \\
H_{d,g}^S & &
\end{array}$$

が存在する. ここで i 番目の射影 ($i = 1, 2$) から定まる射を pr_i で表す. $D(d, g, s)$ の (C, S) における接空間 A^1 は, $H_{d,g}^S$ と $H(s)$ のそれぞれの接空間の $H^0(C, N_{S/\mathbb{P}^3}|_C)$ 上の直積

$$\begin{array}{ccc}
A^1 & \xrightarrow{p_2} & H^0(S, N_{S/\mathbb{P}^3}) \\
p_1 \downarrow & \square & m \downarrow \\
H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) & \xrightarrow{\pi_{C/S}} & H^0(C, N_{S/\mathbb{P}^3}|_C)
\end{array}$$

として定まる. ここで m は制限写像 $N_{S/\mathbb{P}^3} \rightarrow N_{S/\mathbb{P}^3}|_C$ の誘導する写像である. C と S がともに非特異とし, \mathbb{P}^3 上の自然な短完全列 $0 \rightarrow N_{C/S} \rightarrow N_{C/\mathbb{P}^3} \rightarrow N_{S/\mathbb{P}^3}|_C \rightarrow 0$ の余境界写像を $\delta : H^0(C, N_{S/\mathbb{P}^3}|_C) \rightarrow H^1(C, N_{C/S})$ とする. ここで写像 $\alpha_{C/S}$ を m と δ の合成 $\delta \circ m$ により定めれば, $C \subset S \subset \mathbb{P}^3$ を満たす曲線 C と曲面 S の対 (C, S) が変形する為の全ての障害は, $\alpha_{C/S}$ の余核

$$A^2 := \text{coker } \alpha_{C/S}$$

に含まれる. この A^2 をヒルベルト旗スキーム $D(d, g, s)$ の (C, S) における障害群と呼ぶ. さらに, コホモロジー群の完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) \longrightarrow A^1 \longrightarrow H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \\ \longrightarrow H^1(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) \longrightarrow A^2 \longrightarrow H^1(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \\ \longrightarrow H^2(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

が存在し, $H_{d,g}^S$ と $D(d, g, s)^S$ のそれぞれの接空間と障害群を関連づける. 完全列 (4.1) から以下の事実が導かれる.

補題 4.1 (cf. [8, 9]). (1) $H^1(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) = 0$ ならば, 第一射影 $pr_1 : D(d, g, s)^S \rightarrow H_{d,g}^S$ は (C, S) において非特異である.

(2) $d > s^2$ ならば, $H^0(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) = 0$ であり, このとき pr_1 は (C, S) において局所埋め込みである.

(3) (ヒルベルト旗スキームの期待次元)

$$\begin{aligned} \dim A^1 - \dim A^2 &= \chi(S, N_{S/\mathbb{P}^3}) + \chi(C, N_{C/S}) \\ &= (4-s)d + g + \binom{s+3}{3} - 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

式 (4.2) はヒルベルト旗スキーム $D(d, g, s)$ の (C, S) における期待次元を表す. 随伴公式により $N_{C/S} \sim -K_S|_C + K_C$ と $K_S \sim \mathcal{O}_S(s-4)$ が得られ, Serre 双対定理により

$$H^1(C, N_{C/S}) \simeq H^1(C, -K_S|_C + K_C) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C(s-4))^\vee$$

を得る. $s \leq 3$ ならば $H^1(C, N_{C/S}) = 0$ であり, $s = 4$ ならば $H^1(C, N_{C/S})$ は 1 次元となる. 無限小 Noether-Lefschets の定理 ([4, Theorem 4.f.3]) から従う帰結として, $s \geq 4$ かつ C が S と他の曲面との完全交叉でなければ, $\alpha_{C/S}$ は零写像でない. よって $s = 4$ のときも $\alpha_{C/S}$ は全射, すなわち $A^2 = 0$ を得る. 従って次の命題の最初の主張を得る.

命題 4.2 (cf. [9, Proposition 1.2], [8]). $s \leq 4$ かつ $d > s^2$ とする. そして $s = 4$ のときは加えて C が完全交叉でないとは定する. このとき,

(1) $D(d, g, s)$ は (C, S) において非特異かつ期待次元 (4.2) である.

(2) ある $i = 1, 2$ に対し $H^i(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) = 0$ ならば, $H_{d,g}^S$ は $[C]$ において非特異である.

証明. (2) を示す. もし $H^1(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) = 0$ ならば, 補題 4.1(1) により, pr_1 は (C, S) において非特異である. よって最初の主張により, $H_{d,g}^S$ の $[C]$ における非特異性を得る. もし $H^2(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) = 0$ ならば, 完全列 (4.1) により, $H^1(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) = 0$ を得る. \square

$S \subset \mathbb{P}^3$ を次数 $s \leq 4$ の非特異曲面, $C \subset S$ を S 上の次数 $d > s^2$ の非特異連結曲線とする. $s = 4$ のときは加えて C は S と他の曲面の完全交叉ではないとする. このとき命題 4.2(1) により, 点 (C, S) を通る $D(d, g, s)$ の既約成分 W が唯 1 つ存在する. $W \subset H_{d,g}^S$ を W の pr_1 による像とすれば, W は $H_{d,g}^S$ の既約閉部分集合であり, $d > s^2$ と補題 4.1(2) より $\dim W$ は (4.2) に等しい. W の一般元 C は次数 s の非特異曲面 S に含まれる.

$H_{d,g}^S$ の既約閉部分集合 U に対し, U の一般元を含む曲面の最低次数を $s(U)$ で表す. $s(U) = s$ かつ W を真に含む $H_{d,g}^S$ の任意の既約閉部分集合 V に対し, $s(V) > s$ が成り立つとき, $H_{d,g}^S$ の既約閉部分集合 U は, s -極大であるという. このとき, U を $H_{d,g}^S$ の s -極大族 (または s -極大部分集合) と呼ぶ. $d > s^2$ のとき, 上で定めた既約閉部分集合 $W = pr_1(W)$ は定義より $H_{d,g}^S$ の s -極大族となる.

5 非特異 4 次曲面上の空間曲線の変形障害

本節では簡単の為に基礎体 k の標数を 0 と仮定する. $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 4 次曲面, C を S 上の非特異連結曲線とし, C の \mathbb{P}^3 における変形について考察する. 良く知られているように, S は $K3$ 曲面, すなわち標準因子 K_S は自明であり, $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ である. S が一般ならば, S の Picard 群 $\text{Pic } S$ は S の超平面切断類 \mathbf{h} で生成される. このとき C の $\text{Pic } S$ におけるクラスは $n\mathbf{h}$ ($n \geq 1$) と等しくなり, C は S と n 次曲面との完全交叉になる. 特に C は数値的 Cohen-Macaulay 曲線と呼ばれるクラスに属す, すなわち任意の整数 l に対し $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(l)) = 0$ となり, Ellingsrud [2] の結果により, C は unobstructed である.

以下では, S は一般ではないとし, C は S と他の曲面の完全交叉でないと仮定する. C の次数と種数をそれぞれ d と g とし, S 上の因子 $D := C - 4\mathbf{h}$ が有効因子であるとする. C は完全交叉でないので $d > 16 = 4^2$ であり, 補題 4.1(2) により射影 $pr_1 : D(d, g, 4)^S \rightarrow H_{d,g}^S$ は (C, S) において局所埋め込みである. 従って C は唯 1 つの 4-極大族 $W \subset H_{d,g}^S$ に属す. さらに (4.2) により, W の次元は $g + 33$ に等しい. $H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ はヒルベルトスキーム $H_{d,g}^S$ の $[C]$ における接空間を表すので, 次元の不等式

$$\dim W \leq \dim_{[C]} H_{d,g}^S \leq h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \quad (5.1)$$

が成り立つ. 次の補題は明らかである.

補題 5.1. (1) $H_{d,g}^S$ が $[C]$ において非特異である為には, $\dim_{[C]} H_{d,g}^S = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ が必要十分である.

(2) W が $(H_{d,g}^S)_{\text{red}}$ の既約成分である為には, $\dim W = \dim_{[C]} H_{d,g}^S$ が必要十分である.

\mathbb{P}^3 上の層の短完全列 $[0 \rightarrow \mathcal{I}_S \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$ が存在する. $\mathcal{I}_S \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$ により, コホモロジー群の同型

$$H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(4)) \simeq H^1(S, 4\mathbf{h} - C) \simeq H^1(S, D)^\vee$$

を得る. 一方, $\dim W = \dim_{(C,S)} D(d, g, 4)^S = \dim A^1$ と $A^2 = 0$ により, この次元は完全列 (4.1) を用いて

$$h^1(S, D) = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) - \dim W \quad (5.2)$$

と計算できる. よって $H^1(S, D) = 0$ ならば,

$$\dim W = \dim_{[C]} H_{d,g}^S = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}),$$

となり, 補題 5.1 より定理 1.2 (1) の主張を得る. $H^1(S, D) \neq 0$ ならば, W の次元と接空間 $H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ の次元にずれが生じ, C の \mathbb{P}^3 における 1 位無限小変形のうち, 全ての 4 次曲面から逃れるものが存在する.

$K3$ 曲面 X 上の直線束 L に対する $H^1(X, L)$ の非消滅に関し次の事実が知られており, その非消滅には X 上の (-2) -因子と自己交点数 0 の因子の存在が関係している.

補題 5.2 ([10] の特別な場合). X を $K3$ 曲面, L を X 上の直線束とする. $L > 0$ と $L^2 \geq 0$ を仮定する. このとき $H^1(X, L) \neq 0$ は次と同値である:

(1) X 上の有効因子 Δ が存在し, $\Delta^2 = -2$ かつ $L \cdot \Delta \leq -2$, または

(2) X 上のネフかつ原始的な有効因子 F が存在し, $F^2 = 0$ かつ $L \sim nF$ ($n \geq 2$) となる.

特に S 上の (-2) -曲線 E に対し $D \cdot E \leq -2$ となる場合や, S 上の楕円曲線 F に対し $D \sim mF$ ($m \geq 2$) となる場合に $H^1(S, D)$ が消滅しない. このとき E や F に沿って極を持つ S の極付き無限小変形が存在し, C の \mathbb{P}^3 における 1 位無限小変形が, 障害を受けることが期待される (§5.1).

最後に定理 1.2(2) における S の Picard 群に関する仮定について述べる. この仮定は S 上の直線束に対する H^1 の消滅を示す為の技術的な仮定であるが, ヒルベルトスキームの既約成分を調べる上でこの仮定をおいても十分である. 実際, $H_{d,g}^S$ の既約成分の一般元が非特異 4 次曲面 S に含まれるとき, S の Picard 数 ρ が 1 でなければ, 森 [11] の結果により, $\rho = 2$ であることが知られている.

命題 5.3 (森 [11]). 次数 d 種数 g の非特異曲線 E_0 を含む非特異 4 次曲面 S_0 が存在すれば, E_0 と同次数と同種数の非特異曲線 E を含む非特異 4 次曲面 S でもって, $\text{Pic } S$ が超平面切断 \mathbf{h} と E で生成されるものが存在する.

5.1 主定理の証明の概略

定理 1.2 の (2) と (3) の証明の概略を述べる. (2) から始めよう. S 上の (完全交叉でない) 非特異有理曲線 E に対し, $\text{Pic } S = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}E$ と仮定する. このとき, $C \sim a\mathbf{h} + bE$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) となる. E の \mathbb{P}^3 における次数を e とすれば, S 上の交点行列は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}^2 & \mathbf{h}.E \\ \mathbf{h}.E & E^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & e \\ e & -2 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 仮定 $E.D = -2$ と $D \not\sim E$ により, $D = C - 4\mathbf{h}$ はある $k \geq 1$ に対し,

$$\begin{cases} k(2\mathbf{h} + eE) + E & (e \text{ が奇数のとき}) \\ k(\mathbf{h} + e'E) + E & (e \text{ が偶数 } 2e' \text{ のとき}) \end{cases}$$

と線形同値である. 川又・Viehweg 消滅定理を用いて計算すると $H^i(S, D - E) = 0$ ($i = 1, 2$) となる. よって完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D - E) \longrightarrow \mathcal{O}_S(D) \longrightarrow \mathcal{O}_E(D) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \longrightarrow 0,$$

により, $h^1(S, D) = 1$ が得られる. C の属する 4-極大族 $W \subset H_{d,g}^S$ の $[C]$ における接空間を t_W で表せば, t_W はヒルベルトスキーム $H_{d,g}^S$ の接空間 $H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$ の部分空間となる. (5.2) により, t_W に含まれない法束 N_{C/\mathbb{P}^3} の大域切断 φ が存在する. このとき障害性判定定理 (定理 3.3) により, $\text{ob}_S(\varphi) \neq 0$ を得る. 従って命題 2.1 により, $H_{d,g}^S$ は $[C]$ において特異である ($\dim H_{d,g}^S < h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3})$). 不等式 (5.1) と命題 5.1 により, W が $H_{d,g}^S$ の既約成分であることがわかる. C は W の一般元であるので, $H_{d,g}^S$ は W に沿って至るところ被約でない. 故に (2) が証明された.

最後に (3) の証明の概略を述べる. E を S 上の非特異楕円曲線とし, 整数 $m \geq 1$ に対し, $D = C - 4\mathbf{h} \sim (m+1)E$ であると仮定する. このとき (5.2) により $h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) - \dim W = h^1(S, D) = h^1(S, (m+1)E) = m \geq 1$ である. φ を t_W に含まれない N_{C/\mathbb{P}^3} の任意の大域切断とする. $N_{S/\mathbb{P}^3}(mE - C) \sim 4\mathbf{h} + mE - C \sim -D + mE = -E$ により, $H^1(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(mE - C)) = 0$ を得る. 図 2 の可換図式により, φ の外成分 $\pi_{C/S}(\varphi)$ は E に沿って位数 $1 \leq k \leq m$ の極付無限小変形 $v \in H^0(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(kE)) \subset H^0(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(mE))$ にリフトする (§3). ここで, v に障害性判定定理 (定理 3.3) を適用する. $m+1 \geq 2k$ のとき, $\Delta = C + K_{\mathbb{P}^3}|_S - 2kE = C - 4\mathbf{h} - 2kE = (m+1-2k)E$

$$\begin{array}{ccccc}
\varphi & \longrightarrow & \pi_{C/S}(\varphi) & & H^0(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(mE)) \ni \exists v \\
\cap & & \cap & & \downarrow \\
H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) & \xrightarrow{\pi_{C/S}} & H^0(C, N_{S/\mathbb{P}^3}|_C) & \subset & H^0(C, N_{S/\mathbb{P}^3}(mE)|_C) \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & H^1(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(-C)) \simeq k^m & \rightarrow & H^1(S, N_{S/\mathbb{P}^3}(mE - C)) = 0
\end{array}$$

図 2:

は有効因子である. 従って, 制限写像 $H^0(S, \Delta) \rightarrow H^0(E, \Delta|_E)$ は全射となる. 一方 E は S 上の完全交叉でないことから, E 上の層の短完全列

$$[0 \rightarrow N_{E/S} \rightarrow N_{E/\mathbb{P}^3} \rightarrow N_{S/\mathbb{P}^3}|_E \rightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_S(kE)$$

は分裂しない. このことから $\partial_E(v|_E) \neq 0$, 故に $\partial_E(v|_E) \cup v|_E \neq 0$ を得る. 従って定理 3.3 により, $\text{ob}_S(\varphi) \neq 0$, すなわち C は \mathbb{P}^3 において obstructed である. $m = 1$ のときには, $H^1(S, D)$ は 1 次元となり, (2) と同様の議論により $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は $[C]$ において被約でないことが示される. 以上により定理 1.2(3) が証明された.

注意 5.4. Kleppe-Ottem[9] においても, 非特異 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ に含まれるような空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ の変形が研究されている. 考察対象の 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ は直線 E を含む Picard 数 2 の曲面である. E を含む超平面によって切り取られる平面 3 次曲線を F とすれば, $\text{Pic } S = \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}F$, $E^2 = -2$, $F^2 = 0$, $E \cdot F = 3$ を満たす. $C \subset S$ が次数 d , 種数 g の非特異連結曲線で, $D := C - 4h$ が有効因子, C が完全交叉でないとき, C は $H_{d,g}^S$ の唯 1 つの 4-極大族 W に含まれ, やはり $\dim W = g + 33$ となる. さらに以下の事実が示された.

- (1) $D \cdot E \geq -1$ かつ $D \cdot F > 0$ ならば, W は $H_{d,g}^S$ の生成的に非特異な既約成分になり,
- (2) $D \cdot E \leq -2$ かつ g が十分大きければ*, W は $H_{d,g}^S$ の生成的に被約でない既約成分となる.

ここで, $C \sim aE + bF$ ($a, b \geq 0$) とする (省略の為 $C \equiv (a, b)$ と表す). C の次数 d と種数 g は a, b を用いてそれぞれ $d = a + 3b$, $g = 3ab - a^2 + 1$ と表される. 彼らの結果を表に表せば, 表 1 のようになる (k は非負整数を表す). 一般の F は非特異楕円曲線であるので, 定理 1.2 により表 2 が得られ, これは Kleppe-Ottem の結果を補う ([9, Remark 4.1] を参照). $C \equiv (4, 5)$ ならば, $H^1(S, D) = H^1(S, E) = 0$ により W は $H_{d,g}^S$ の生成的に非特異な既約成分となる.

*より正確には, $d \geq 21$ かつ $g > \min \{G(d, 5) - 1, d^2/10 + 21\}$ において主張が証明された. ここで $G(d, 5)$ は 4 次曲面に含まれない d 次空間曲線の最大種数を表す.

Cases	[I]	[II]	[III]	[IV]
$C \equiv (a, b)$	$3b - 2a \geq 3$	$(8 + 3k, 6 + 2k)$	$(10 + 3k, 7 + 2k)$	$(15 + 3k, 10 + 2k)$
$C.E = 3b - 2a$	≥ 3	2	1	0
$D.E$	≥ -1	-2	-3	-4
$h^1(S, D)$	0	1	2	4
W	生成的非特異成分	生成的非被約成分		

表 1:

Case	[V]
$C \equiv (a, b)$	$(4, 4 + k)$ with $k \geq 2$
$C.F$	12
$h^1(S, D)$	$k - 1$
W	$\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は W に沿って生成的に特異, または被約でない ($k = 2$)

表 2:

参考文献

- [1] P. Ellia. D'autres composantes non réduites de $\text{Hilb } \mathbf{P}^3$. *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.
- [2] G. Ellingsrud. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans \mathbf{P}^e à cône de Cohen-Macaulay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):423–431, 1975.
- [3] G. Fløystad. Determining obstructions for space curves, with applications to nonreduced components of the Hilbert scheme. *J. Reine Angew. Math.*, 439:11–44, 1993.
- [4] P. Griffiths and J. Harris. Infinitesimal variations of Hodge structure. II. An infinitesimal invariant of Hodge classes. *Compositio Math.*, 50(2-3):207–265, 1983.
- [5] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6, no. 221*. 1960.
- [6] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):401–418, 1982.
- [7] R. Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.

- [8] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.
- [9] J. O. Kleppe. Components of the Hilbert scheme of space curves on low-degree smooth surface (with an appendix by J. C. Ottem). preprint, arXiv:1204.4819v1 (the first version), 2012.
- [10] A. L. Knutsen and A. F. Lopez. A sharp vanishing theorem for line bundles on $K3$ or Enriques surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(11):3495–3498, 2007.
- [11] S. Mori. On degrees and genera of curves on smooth quartic surfaces in \mathbf{P}^3 . *Nagoya Math. J.*, 96:127–132, 1984.
- [12] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford’s example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.
- [13] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.
- [14] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(1):117–141, 2006.
- [15] H. Nasu. Deformations of degenerate curves on a Segre 3-fold. In *Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, pages 163–174. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.
- [16] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.

〒 259-1292, 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 東海大学理学部情報数理学科
e-mail address : nasu@tokai-u.jp