線形代数 2, 第 12 回の内容の理解度チェック (解答)

2025/1/9 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A が対角化可能かどうかについて答えよ. ただし, A の固有多項式が重根 α を持つ場合には, $\mathrm{rank}(A-\alpha E)$ を計算し, 理由を付して答えること (E は A と同じサイズの単位行列). (各 1 点)

(1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t+1 & -9\\ 1 & t-5\end{vmatrix}=(t+1)(t-5)-(-9)=t^2-4t+4=(t-2)^2.$

固有多項式が重根 $\lambda=2$ (重複度 2) を持つ. $A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -1 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ より,

$$2-\mathrm{rank}(A-2E)=2-1=1.$$

固有値 2 に対し, 固有空間の次元が重複度と異なるので, 対角化不可能である.

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2 & 2\\ 2 & t-5\end{vmatrix}=(t-2)(t-5)-2^2=t^2-7t+6=(t-1)(t-6).$

A は相異なる 2 つの固有値を持つ (固有多項式が重根を持たない) ので, 対角化可能である.

(3) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t & -1 & -1\\ -1 & t & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}=t^3-3t-2=(t+1)^2(t-2).$

固有多項式が重根 $\lambda=-1$ (重複度 2) を持つ. $A+E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より,

$$3-\mathrm{rank}(A+E)=3-1=2.$$

固有空間の次元が重複度に等しいので, A は対角化可能である.

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -1 & 0\\ 0 & t-1 & 0\\ 0 & 0 & t-2\end{vmatrix}=(t-1)^2(t-2).$

固有多項式が重根 $\lambda=1$ (重複度 2) を持つ. $A-E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より,

$$3-\mathrm{rank}(A-E)=3-2=1.$$

固有値 1 に対し, 固有空間の次元が重複度と異なるので, A は対角化不可能である.

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ に関する以下の問題に答えよ．(**問題は次の頁にもあるので注意！**) (各 1 点)

(1) A の固有値を全て求めよ．

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&-2\\-1&t\end{vmatrix}=(t-1)t-(-2)(-1)=t^2-t-2=(t+1)(t-2).$

よって A の固有値は $\lambda=-1,2.$

(2) A を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ与えよ．解答は「$P=(\ \ )$ のとき，$P^{-1}AP=(\ \ )$ となる」の形で答えること．

解答)

- $\lambda=-1$ のとき，

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル (の 1 つ) は，$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

- $\lambda=2$ のとき，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル (の 1 つ) は，$\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

よって $P=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$ となる．

(3) A^n $(n=0,1,\ldots)$ を求めよ．

解答)

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\right)\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n&2^{n+1}\\(-1)^{n+1}&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+2^{n+1}&2(-1)^{n+1}+2^{n+1}\\(-1)^{n+1}+2^n&2(-1)^{n+2}+2^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4) $a_0=1,\, a_1=1,\, a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ $(n=0,1,\dots)$ の一般項 a_n を求めよ.

(ヒント：$\mathbf{a}_n=\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ と置くと, $\mathbf{a}_n=A\mathbf{a}_{n-1}=\cdots=A^{n-1}\mathbf{a}_1=A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$)

解答)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_n &= A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}+2^n & 2(-1)^n+2^n \\ (-1)^n+2^{n-1} & 2(-1)^{n+1}+2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}+2^n+2(-1)^n+2^n \\ (-1)^n+2^{n-1}+2(-1)^{n+1}+2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1)^n+2(-1)^n+2\cdot 2^n \\ -(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1}+2\cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n+2^{n+1} \\ (-1)^{n-1}+2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって求める数列 a_n の一般項は,

$$a_n=\frac{1}{3}\left\{(-1)^n+2^{n+1}\right\}, \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html