代数学１，第12回の内容の理解度チェックの解答

2024/12/19 担当：那須

1 (1) G, G' を群とし，$f : G \to G'$ を準同型写像とする．G がアーベル群ならばその像 $\mathrm{im}\, f$ もアーベル群になることを示せ．

(2) 群 G の部分群 G_i の列

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{e\}$$

が存在し，各 $i = 1, \ldots, r-1$ について G_i が G_{i-1} の正規部分群である ($G_i \triangleleft G_{i-1}$) と仮定する．$H_i = H \cap G_i$ と定めるとき，任意の i について，H_i が H_{i-1} の正規部分群となることを示せ．

解答)

(1) f の像 $\mathrm{im}\, f$ は $\mathrm{im}\, f = \left\{ f(a) \;\middle|\; a \in G \right\}$ と表される．$\mathrm{im}\, f$ の２元 $f(a), f(b)$ に対し，f は準同型より，

$$f(a)f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b)f(a)$$

が満たされる．したがって $\mathrm{im}\, f$ は可換である．

(2) 任意の $a \in H_{i-1}$ と $b \in H_i$ に対し，$aba^{-1} \subset H_i$ を示せば良い．$a \in G_{i-1}$ かつ $b \in G_i$ であり，仮定より G_i は G_{i-1} の正規部分群なので，$aba^{-1} \in G_i$ が成り立つ．また a, b はともに H の元であり，部分群は演算と逆元で閉じているので，$aba^{-1} \in H$ が従う．したがって $aba^{-1} \in H \cap G_i = H_i$ が示された．

■

2 $n \geq 5$ とし，S_n を n 次対称群とする．任意の $i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, 2\}$ に対し，

$$(1\ i\ k)(k\ 2\ j)(k\ i\ 1)(j\ 2\ k) = (1\ 2\ k)$$

が成り立つことを示せ．(ヒント：場合わけをして考える.)

解答) $1, \ldots, n$ のうち $1, 2, i, j, k$ 以外は，両辺の置換による像が等しい．またこれらの元については，左辺の置換は

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \multicolumn{3}{c}{(j\ 2\ k)} & \multicolumn{2}{c}{(k\ i\ 1)} & \multicolumn{2}{c}{(k\ 2\ j)} \quad (1\ i\ k) & \\
1 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & k & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 2 \\
2 & \longmapsto & k & \longmapsto & i & \longmapsto & i & \longmapsto & k \\
i & \longmapsto & i & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & i \\
j & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & j & \longmapsto & j \\
k & \longmapsto & j & \longmapsto & j & \longmapsto & k & \longmapsto & 1
\end{array}$$

のように順に元を送る．よって，左辺の置換は巡回置換 $(1\ 2\ k)$ に等しい． ■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照．https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html