線形代数1, 第9回の内容の理解度チェック (解答)

2024/6/20 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列式を計算せよ. (各1点)

(1) $$\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} \overset{②-①}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(4\times(-1) - 3\times 1) = -21$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 2 & -11 & 13 \end{vmatrix} \overset{③-2\times①}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{③+②}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 8 = 40$$

(3) $$\begin{vmatrix} 9 & 3 & -2 \\ -6 & -8 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{=\!=\!=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{③-3\times①}{\overset{②+2\times①}{=\!=\!=}} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -3\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\left((-8)\times 1 - (-1)\times 3\right) = (-3)\times(-5) = 15$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{④+①}{\overset{②-①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{③-2\times①}{\overset{②-2\times①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\times 7 - 8\times 3 = 7 - 24 = -17$$

(5) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{②+①}{=\!=\!=} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2\left(-1^2\times(-1) - 1\times 2^2\right) = 2\times(-3) = -6$$

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{③\leftrightarrow④}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times 2 \times 3 \times 4 = -24$

$\boxed{2}$ 次の行列式を因数分解せよ. (各 1 点)

(1) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \overset{④-③}{=\!=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \overset{③-②}{=\!=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$

$\overset{②-①}{=\!=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$

(2) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix} \overset{①+(②+③)}{=\!=} \begin{vmatrix} 2a+b & 2a+b & 2a+b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix} = (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$

$\underset{\boxed{3}-\boxed{1}}{\overset{\boxed{2}-\boxed{1}}{=\!=}} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ b & a-b & a-b \end{vmatrix} = (2a+b)(b-a)(a-b)$

$= -(2a+b)(a-b)^2$

ポイント!

- 4 次以上の行列式は (サラスの公式が使えないので) 行列式の性質 (線形性と交代性) を用いて計算する.
- 文字を含む行列式を因数分解するときは, 行列式の性質 (線形性と交代性) を用いて計算すると良い.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/la1.html