

# レッツわりざん！(合同式の数学)

那須 弘和 (東海大学理学部情報数理学科)<sup>1</sup>

今日は 2012 年の 7 月 22 日で日曜日です. 8 日後の 7 月 30 日は何曜日でしょうか? 答えは簡単で  $8=7+1$  ですから, 日曜日の次の月曜日ですね. では, 夏休みの終わる 8 月 31 日 (40 日後) は何曜日でしょうか?

$$40 = 7 \times 5 + 5$$

ですから, 日曜日の 5 日後の金曜日だとわかります. 「1 週間=7 日」であることを知っていれば, 何日後であっても 7 で割ったときの余りを求めることにより, 曜日を計算することができます. 逆に 7 で割った余りが等しい,  $7/1, 7/8, 7/15, 7/22, 7/29$  は全て同じ (日) 曜日だとわかります. このように, 曜日を求める為には「余り」が大事です.

**定義 1.**  $n$  を正の整数とします. 二つの整数  $a, b$  のそれぞれを  $n$  で割ったときの余りが等しいとき,

$$a \equiv b \pmod{n}$$

と書き,  $a$  と  $b$  は  $n$  を法として合同であると言います.

23 と 9 を 7 で割ったときの余りは共に 2 に等しいので,

$$23 \equiv 9 \pmod{7}$$

と表せます.

**問題 2.** 次の合同式のうち, 正しいものはどれでしょう?

$$(1) \quad 23 \equiv 3 \pmod{10} \quad (2) \quad 51 \equiv 19 \pmod{7} \quad (3) \quad 43 \equiv -2 \pmod{9}$$

合同式の性質として, 次が良く知られています.

合同式の性質

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{cases} \quad \text{ならば} \quad \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{n} \\ ac \equiv bd \pmod{n} \end{cases}$$

この性質を利用すれば,  $1357 \times 2468$  を 7 で割ったときの余りを,  $1357 (= 193 \times 7 + 6)$  と  $2468 (= 352 \times 7 + 4)$  のそれぞれを 7 で割った時の余り 6 と 4 を用いて,

$$1357 \times 2468 \equiv 6 \times 4 \equiv 24 \equiv 3 \pmod{7}$$

のように求めることができます.<sup>2</sup>

**問題 3.**  $701 \times 7002$  を 7 で割った時の余りを求めて下さい.

<sup>1</sup>E-mail: nasu@tokai-u.jp

<sup>2</sup>この計算は  $1357 \times 2468 = 3349076$  を求めてから, 7 で割って余りを求めるよりもずっと簡単です.

さて、ではもとの曜日計算の話に戻り、次の問題を考えてみましょう。

曜日計算問題 1

2052 年の 7 月 22 日は何曜日でしょう？

最初に述べたように、今日からちょうど 40 年後の 7/22 までの日数がわかれば、その数を 7 で割った余りを求めることで曜日がわかります。一年は 365 日で

$$365 = 7 \times 52 + 1,$$

すなわち合同式で表せば  $365 \equiv 1 \pmod{7}$  ですから、

$$365 \times 40 \equiv 1 \times 5 \equiv 5 \pmod{7}$$

より、日曜日の 5 日後の「金曜日」と答えたくになりますが、ちょっと待って下さい。この問題に答えるにはうるう年に注意しなければなりません。うるう年において 1 年は 366 日 (2 月が 29 日) になります。

うるう年のルール

1. 西暦年が 4 で割り切れる年 (例えば 2012 (=  $4 \times 503$ ) 年) はうるう年
2. ただし、そのうち西暦年が 100 で割り切れる年は含めない
3. ただし、そのうち西暦年が 400 で割り切れる年はうるう年

問題の解答) 2012 年から 2052 年までのうるう年は、2016<sup>3</sup>, 2020, ..., 2052 の  $(2052 - 2012)/4 = 40/4 = 10$  年分あります。従って先ほどの計算にうるう年の分 (10 日分) を加算すると

$$365 \times 40 + 10 \equiv 1 \times 5 + 3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}.$$

従って、2052 年の 7 月 22 日は日曜日の翌日の月曜日です。

では最後の問題です。

曜日計算問題 2

(今年の誕生日の曜日から) 自分の生まれた日が何曜日か計算してみましょう。

例 4 (誕生日が 1980 年 7 月 22 日の場合). 今年 2012 年の 7/22 は日曜日です。1980 年から 2012 年までの 32 年間にうるう年は  $(2012 - 1980)/4 = 32/4 = 8$  年あります。従って、

$$365 \times (-32) + (-8) \equiv 1 \times (-32) - 8 = -40 \equiv 2 \pmod{7}.$$

よって、生まれた日は日曜日の翌々日の火曜日です。

<sup>3</sup>2012 年もうるう年ですが、同年 2 月は考えている期間に含まれません。

2012年カレンダー

2012

1月

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

2月

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29			

3月

日	月	火	水	木	金	土
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

4月

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

5月

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

6月

日	月	火	水	木	金	土
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

7月

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

8月

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

9月

日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

10月

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

11月

日	月	火	水	木	金	土
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

12月

日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					