Obstructions to deforming degenerate curves on a scroll

那須 弘和 (東京電機大学・情報環境学部)*

代数閉体 k 上のスキーム V に対し, $C \subset V$ を局所完全交叉な閉部分スキームとする. 種々の変形理論においては, 接空間 (1 位無限小変形全体の空間) と障害空間が定まっているが, 部分スキーム $C \subset V$ の変形の場合には, 法束 $N_{C/V}$ のコホモロジー群 $H^0(C, N_{C/V})$ と $H^1(C, N_{C/V})$ がそれぞれヒルベルトスキームの点 $[C]$ における接空間と障害空間に対応する. C の 1 位無限小変形 $C' \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$, すなわち対応する大域切断 $\alpha \in H^0(C, N_{C/V})$ に対し, 障害類 $\operatorname{ob}(\alpha) \in H^1(C, N_{C/V})$ が定まり, C' が 2 位変形 $C'' \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ にリフトするためには, $\operatorname{ob}(\alpha) = 0$ が必要十分である. 一般に障害類の具体的な計算は困難であるが, [2] では, 非特異三様体 V と非特異曲線 C に対し, C と V の中間曲面 S とその上の第一種例外曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ の存在の仮定の下で, C' が C'' にリフトしない, すなわち $\operatorname{ob}(\alpha) \neq 0$ となる為の十分条件が与えられた (障害性判定定理 [2, Thm.1.4]). 例えば V を Segre 埋込 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ とし, V の非特異超平面切断 $V \cap \mathbb{P}^4$ (次数 3 のスクロールで, $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \simeq \operatorname{Blow}_p \mathbb{P}^2$ に同型) を $S \subset V$ とすれば, この判定定理を適用することにより, 次の障害曲線 (**obstructed curve**) の例を得る.

例 1 (cf. [3, Thm. 1.1]) *1 点爆発 $S \to \mathbb{P}^2$ の中心 p を通らない, d 次平面曲線 $D \subset \mathbb{P}^2$ に対し, D の S への引き戻しを $C \subset S$ とする. $d \geq 5$ ならば, C の V 内における 1 位無限小変形 C' でもって, 2 位変形 C'' にリフトしないものが存在する.*

$d = 5$ のときの上の事実は, [1] において赤堀氏と難波氏により障害正則写像 (obstructed holomorphic map) の例 (射影 $\pi_p : D \to \mathbb{P}^1$) として発見され, 研究された.

本研究では, 障害性判定定理における三様体 V をより高次元の多様体へ一般化する目的の下で, V を Segre 埋込 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ $(n \geq 2)$ とし, S を V の非特異超平面切断 $V \cap \mathbb{P}^{2n} \subset V$ と仮定して, (退化) 曲線 $C \subset S$ の V における変形について考察する. このとき S は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-1}$-束 $(\simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)))$ と同型であり, そのファイバー

*e-mail: nasu@sie.dendai.ac.jp

を F で表す．さらに S 上には, 部分束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n-1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ に対応する負スクロール E が存在し, E をつぶすことにより, S は $\mathbb{P}^n$ の余次元2の線形部分空間 $L^{n-2} \subset \mathbb{P}^n$ に沿った爆発 $\pi : S \to \mathbb{P}^n$ と同型になる．特に π の例外因子 E は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$ と同型である．

定理 1 (主結果) *$C \subset \mathbb{P}^n$ を非特異曲線とし, C は爆発 $\pi : S \to \mathbb{P}^n$ の中心 L^{n-2} と交わりを持たないと仮定する．C が以下の条件を全て満たせば, C の S への引き戻し $\pi^{-1}(C)$ は V において2位変形にリフトしない1位無限小変形 C' を持つ:*

(1) $H^1(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) = 0$;

(2) $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)) = 0$;

(3) $H^1(C, \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)) \neq 0$;

(4) $H^1(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes \mathcal{O}_S(4E + 2F)) = 0$.

法束 $N_{S/V}$ の有理切断のうち, 有効因子 $E \subset S$ に沿って極をもつものを, S の V における極付き無限小変形と呼ぶ．[4] では曲面 S の三様体 V における極付き無限小変形 v が, 第一種例外曲線 $E_0 \simeq \mathbb{P}^1$ に沿って極をもつ場合に, 付随する障害 $\mathrm{ob}(v) \neq 0 \in H^1(S, N_{S/V}(3E_0))$ が計算された．定理1の証明には次の補題を用いる．

補題 1 *定理1の $E \subset S \subset V$ に対し, 2つの開代数多様体 $S \setminus E$ と $V \setminus E$ をそれぞれ S° と V° により表す．このとき任意の極付き無限小変形 $v \in H^0(N_{S/V}(E)) \setminus H^0(N_{S/V})$ は, 2位変形にリフトしないような S° の V° における1位無限小変形を与える.*

実際, $h^0(S, N_{S/V}(E)) - h^0(S, N_{S/V}) = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} - (2n+1) = \dfrac{n(n-1)}{2}, (n \geq 2)$. $S \subset V$ には, 通常の1位無限小変形に加えて, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次元の極付き1位無限小変形が存在し, 補題1により, 2位変形にリフトしないことがわかる．

参考文献

[1] T. Akahori and M. Namba, Examples of obstructed holomorphic maps, *Proc. Japan Acad. Ser.A*, **54** (1978), no. 7, pp.189–191.

[2] S. Mukai and H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes, *J. Algebraic Geom.*, **18** (2009), no. 4, 691–709.

[3] H. Nasu, Deformations of degenerate curves on a Segre 3-fold. Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles, 163 -174, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.

[4] H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **60** (2010), no. 4, 1289–1316.