線形代数1, 第12回の内容の理解度チェック (解答)

2024/7/11　担当：那須

$\boxed{1}$ 3次行列 A の行列式 $|A|$ の値が2のとき, 次の値を求めよ. ただし ${}^tA$ は A の転置行列を表す. (各1点)

(1) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(2) $|{}^tA| = |A| = 2$

(3) $|-A| = (-1)^3|A| = -|A| = -2$

(4) $|A^6 \cdot ({}^tA)^4 \cdot A^{-5}| = |A|^6 \cdot |{}^tA|^4 \cdot |A^{-1}|^5 = 2^6 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{6+4-5} = 2^5 = 32$

ポイント!

n 次行列 A, B に対し,

- $|AB| = |A||B|$
- ${}^tA$: $|{}^tA| = |A|$
- A が逆行列を持たない $\Longleftrightarrow |A| = 0$
- $|A^k| = |A|^k$
- $|A| \neq 0$ のとき, $|A^{-1}| = 1/|A|$
- $|-A| = (-1)^n|A|$

$\boxed{2}$ 次の行列式を計算せよ. (3点)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}+3\times\boxed{3}}{=\!=} \begin{vmatrix} -7 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②\text{で展開}}{=\!=} 1 \times \left(- \begin{vmatrix} -7 & 3 & 5 \\ -6 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \right) \underset{③+5\times②}{\overset{①+3\times②}{=\!=}} - \begin{vmatrix} -25 & 0 & 14 \\ -6 & -1 & 3 \\ -32 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=} -(-1) \begin{vmatrix} -25 & 14 \\ -32 & 20 \end{vmatrix} \overset{②-①}{=\!=} \begin{vmatrix} -25 & 14 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{1}+\boxed{2}}{=\!=} \begin{vmatrix} -11 & 14 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-11) \times 6 - 14 \times (-1) = -52$$

ポイント!

行列式の計算は行または列の基本変形を用いて0成分を増やした後に0をたくさん含む行または列において展開する.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/la1.html