

学生証番号

--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

点数

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

以下  $d$  は素因数分解に平方因子を含まない整数とする. 環  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  を

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

と定義する.  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  の元  $\alpha = a + b\sqrt{d}$  に対し,  $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$  を  $\alpha$  の**共役元**という.  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  において  $\alpha$  のノルム  $N(\alpha)$  は,

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 - db^2$$

と定義される.

□  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  とする. 次を示せ.

(1)  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$

(2)  $\alpha$  が単元  $\iff N(\alpha) = \pm 1$

(3)  $N(\alpha)$  が  $\mathbb{Z}$  の既約元ならば,  $\alpha$  は  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  の既約元である

[2] 環  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  において、次の元が既約元かどうか判定せよ.

- (1)  $2$       (2)  $2 - \sqrt{5}$       (3)  $4 + \sqrt{5}$

[3] 次の環  $R$  において、指定された  $R$  の元  $\alpha$  が  $R$  の素元かどうか判定せよ.

- (1)  $R = \mathbb{Z}, \alpha = 7$   
(2)  $R = \mathbb{Z}[i]$  ( $R$  はガウス整数環,  $i = \sqrt{-1}$ ),  $\alpha = 2$   
(3)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \alpha = 3$   
(4)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}], \alpha = 2 - \sqrt{5}$