

代数学Ⅰ, 第10回の内容の理解度チェック

2024/12/5 担当: 那須

学生証番号

--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

点数

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1 $f: G \rightarrow G'$ を群 G, G' 間の準同型写像とする.

(1) e と e' をそれぞれ G, G' の単位元とする. $f(e) = e'$ および $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ ($\forall a \in G$) を示せ.

(2) f の像 $\text{im } f$ が G' の部分群であることを示せ.

(3) f の核 $\ker f$ が G の正規部分群であることを示せ.

(4) f が単射 $\iff \ker f = \{e\}$ を示せ.

2 G を加法群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ とする.

- (1) $H = 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の元で 3 の倍数からなる集合) の全ての元を求め, H が G の部分群になることを示せ.

- (2) G から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad x \bmod 12 \longmapsto x \bmod 3$$

により定める. f が準同型写像を定めることを示せ.

- (3) f の核 $\ker f$ を求めよ.

- (4) 同型

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

を示せ.