線形代数1, 第11回の内容の理解度チェック (解答)

2024/7/4 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を全て求めよ. (9点)

$$\Delta_{11} = +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad \Delta_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

よって, $(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ -5 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(2) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ. (1点)

$$|A| \xlongequal[②+2\times③]{①+2\times③} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{3}\text{で展開}} 1 \times \Delta_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \times 6 - 5 \times (-1) = -7$$

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ. (1点)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t(\Delta_{ij}) = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 行列 $\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & a+1 & 3 \\ 2a & 2 & a \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないような定数 a の値を<u>全て</u>求めよ. (3点)

解答)

行列 A が逆行列 A^{-1} を持たないためには $|A| = 0$ が必要かつ十分である.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 0 & a+1 & 3 \\ 2a & 2 & a \end{vmatrix} \xlongequal{③-2\times①} \begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & -2 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}\text{で展開}} a\begin{vmatrix} a+1 & 3 \\ -2 & -a \end{vmatrix}$$

$$= a(-a(a+1) - 3(-2)) = a(-a^2 - a + 6) = -a(a^2 + a - 6) = -a(a+3)(a-2).$$

従って求める a は $a = 0, -3, 2$ である.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/la1.html