線形代数1,第12回演習問題

2024/7/11 担当:那須

1 次の行列式を計算せよ.

- (1) $A \circ (i,j)$ 余因子 Δ_{ij} ($1 \le i,j \le 3$) を (i,j) 成分とする 3 次行列 $B = (\Delta_{ij})$ を求めよ.
- (2) Aの行列式 |A|の値を求めよ.
- (3) Aの逆行列 A-1 を求めよ.
- 3 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix}
a & a & b \\
2a & a+b & 2b \\
2a+b & a+2b & 3a
\end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix}
a & b & c \\
c & a & b \\
b & c & a
\end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix}
1 & x & x^2 \\
1 & y & y^2 \\
1 & z & z^2
\end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix}
a & a & a & a \\
a & b & b & b \\
a & b & c & c \\
a & b & c & d
\end{vmatrix}$$

第12回演習問題の解答:

1 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = \underbrace{\bigcirc - \bigcirc}_{1} \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(4 \times (-1) - 3 \times 1) = -21$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 2 & -11 & 13 \end{vmatrix} = \underbrace{ \begin{vmatrix} 3 - 2 \times 1 \end{vmatrix}}_{ \begin{vmatrix} 3 - 2 \times 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{ \begin{vmatrix} 3 + 2 \end{vmatrix}}_{ \begin{vmatrix} 2 + 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 8 = 40$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underbrace{ \frac{2-1}{4+1}}_{0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{ \frac{2-2\times1}{3-2\times1}}_{3-2\times1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 8 \times 3 = 7 - 24 = -17$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underbrace{ \begin{vmatrix} 2 + 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} }_{= 2 \cdot (-1)^2 \times (-1) - 1 \times 2^2 = 2 \times (-3) = -6$$

$$\boxed{2} \quad (1) \ \ B = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & -7 & -6 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) |A| = 11

(3)
$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -6 & -7 & -3 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$