線形代数2, 第9回の内容の理解度チェック (解答)　　2024/12/5　担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. (3 点: 固有値 1 点, 固有ベクトル 2 点)

解答)　A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)^2 - (-2)^2 = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5).$$

従って A の固有値は $\lambda = 1, 5$.

- $\lambda = 1$ のとき,

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

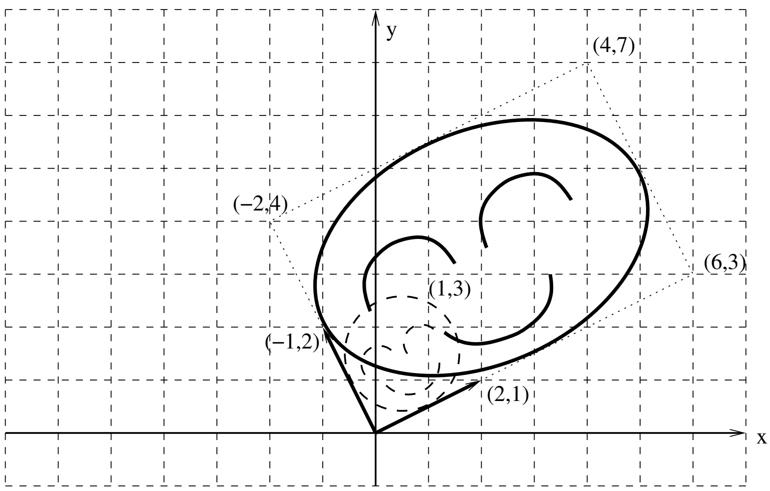
$(A-E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 5$ のとき,

$$A - \lambda E = A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-5E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

$\boxed{2}$ 2 次正方行列 A が $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすとする. このとき A の定める線形写像 T により、下の図形（ニコニコマーク）はどのような図形に写されるか？概形を描け. (1 点)



ポイント!

それぞれの固有ベクトルの方向に, 固有値 λ 倍された図形を描く. つまり $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に 3 倍, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 方向に 2 倍された図形を描く.

$\boxed{3}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (2 点)

解答) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-8 & -15 \\ 2 & t+3 \end{vmatrix} \\ &= (t-8)(t+3) - (-15)\cdot 2 \\ &= t^2 - 5t + 6 \\ &= (t-2)(t-3). \end{aligned}$$

従って A の固有値は $\lambda = 2, 3$.

(2) A のそれぞれの固有値に対し, 固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. (2 点)

解答)

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 3$ のとき,

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (3 点)

解答) A の固有多項式は,

$$\begin{aligned} g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -3 \\ -3 & t+2 & -3 \\ 1 & -1 & t+2 \end{vmatrix} \\ &= (t-2)(t+2)^2 - 3 - 9 + 3(t+2) - 3(t-2) + 3(t+2) \\ &= (t^2-4)(t+2) + 3t + 6 \\ &= t^3 + 2t^2 - 4t - 8 + 3t + 6 \\ &= t^3 + 2t^2 - t - 2 \\ &= (t-1)(t+1)(t+2). \end{aligned}$$

従って A の固有値は $\lambda = -2, -1, 1$.

$\boxed{5}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (3 点)

解答) A の固有多項式は,

$$
\begin{aligned}
g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 1 & t-4 \end{vmatrix} &= (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t-4 \end{vmatrix} \\
&= (t-1)\left\{(t-1)(t-4) - (-2)\right\} \\
&= (t-1)(t^2 - 5t + 6) \\
&= (t-1)(t-2)(t-3)
\end{aligned}
$$

従って A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ である.

(2) A のそれぞれの固有値に対し, 固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. (3 点)

解答)

- $\lambda = 1$ のとき,

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-2E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

- $\lambda = 3$ のとき,

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-3E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_3 \neq 0)$.

ポイント!

固有値 λ に対する固有ベクトルは, 連立方程式 $(A - \lambda E)\mathbf{x} = 0$ を解いて求める.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html