

1 次の整域が一位分解整域 (UFD) でないことを示せ.

(1)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

(2)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

(3)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

(解答)

(1)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  において,  $4 \in R$  は  $4 = 2^2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$  と既約元の積に分解されるため,  $R$  は UFD でない.

(2)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  において,  $6 \in R$  は  $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$  と既約元の積に分解されるため,  $R$  は UFD でない.

(3)  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$  において,  $10 \in R$  は  $10 = 2 \cdot 5 = (2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6})$  と既約元の積に分解されるため,  $R$  は UFD でない.

2  $R = \mathbb{Q}[x]$  とする. 次の  $f \in R$  を  $R$  の素元の積に分解せよ. すなわち,

$$f(x) = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

かつ  $p_i$  は  $\mathbb{Q}[x]$  の素元 (既約元), となるような  $p_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) を求めよ.

(1)  $f = x^2 - 2x$

(2)  $f = x^2 - 2x + 1$

(3)  $f = x^3 + x^2 + x + 1$

(4)  $f = x^3 - 3x + 2$

(5)  $f = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

(解答)

(1)  $f = x(x - 2)$

(2)  $f = (x - 1)^2$

(3)  $f = (x + 1)(x^2 + 1)$

(4)  $f = (x - 1)^2(x + 2)$

(5)  $f = (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$

3  $R = \mathbb{Q}[x]$  とする. 次の  $f, g \in R$  に対し  $R$  における最大公約元  $\gcd(f, g)$  および最小公倍数  $\text{lcm}(f, g)$  を求めよ.

(1)  $f = x^2 - 2x, g = x^2 - 2x + 1$

(2)  $f = x^2 - 2x + 1, g = x^3 - 3x + 2$

(3)  $f = x^3 - 3x + 2, g = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

(解答)

(1)  $f = x(x - 2), g = (x - 1)^2$  より,

$$\gcd(f, g) = 1, \quad \text{lcm}(f, g) = fg = x(x - 1)^2(x - 2).$$

(2)  $f = (x - 1)^2, g = (x - 1)^2(x + 2)$  より,

$$\gcd(f, g) = (x - 1)^2, \quad \text{lcm}(f, g) = g = (x - 1)^2(x + 2)$$

(3)  $f = (x - 1)^2(x + 2), g = (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$  より,

$$\gcd(f, g) = x + 2, \quad \text{lcm}(f, g) = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$$