代数学２, 第９回の内容の理解度チェックの解答

2025/6/30 担当：那須

$\boxed{1}$ $\mathbb{Z}$ は単項イデアル環であることを示せ.

(**解答**) I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとする．$I = (0)$ ならば, I は単項イデアルであるため, $I \neq (0)$ とする．$a \in I, a \neq 0$ が存在する．$a < 0$ ならば (-1) 倍した $-a = (-1)a$ も I の元であるため, I は自然数を含む．I に含まれる自然数 a の中で最小のものを b とすれば, $I = (b)$ となる．実際, $(b) \subset I$ は明らかであり, I の任意の元 c に対し, 剰余定理より,

$$c = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

となる q, r が存在するが, b の最小性により $r = 0$, すなわち $b \mid c$ となる．したがって $c \in (b)$ となり, $I \subset (b)$ が従う．つまり $I = (b)$ となり, I は単項イデアルである.

$\boxed{2}$ $\mathbb{Z}$ のイデアル $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ において, $d = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とおけば, $I = (d)$ を満たすことを示せ.

(**解答**) $\boxed{1}$ より $\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域 (PID) である．したがって $I = (a)$ となる $a \in \mathbb{Z}$ が存在する．-1 は $\mathbb{Z}$ の単元なので, $a > 0$ と仮定して良い．$I = (a) \subset (d)$ より, $d \mid a$ を満たす．任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し $a_i \in I = (a)$, したがって, $a \mid a_i$ を満たす．故に $a \mid d$ を得る．以上により a と d は同伴 $(a \sim d)$ であり, 両者の生成する単項イデアルは等しい $((a) = (d))$.

$\boxed{3}$ 体 k 上の１変数多項式環 $k[x]$ は単項イデアル環であることを示せ.

(**解答**) I を $k[x]$ のイデアルとする．$I = (0)$ ならば, I は単項イデアルであるため, $I \neq (0)$ とする．$f \neq 0$ となる $f \in I$ が存在する．$f \in I$ となる $f \neq 0$ の中で次数が最小の元をひとつ選び, それを f_0 とする．$(f_0) \subset I$ は明らかであり, I の任意の元 g に対し, 剰余定理より,

$$g = f_0 q + r, \quad 0 \leq \deg r < \deg f_0$$

となる $q, r \in k[x]$ が存在するが, f_0 の次数の最小性により $r = 0$, すなわち $f_0 \mid g$ となる．したがって $g \in (f_0)$ となり, $I \subset (f_0)$ が従う．つまり $I = (f_0)$ となり, I は単項イデアルである.

$\boxed{4}$ 体 k 上の 1 変数多項式環 $k[x]$ のイデアル $I=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ において, $d=\gcd(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ とおけば, $I=(d)$ を満たすことを示せ.

(**解答**) $\boxed{3}$ より $I=(f_0)$ となる $f_0\in\mathbb{Z}$ が存在する. $I=(f_0)\subset(d)$ より, $d\mid f_0$ を満たす. 任意の i について $f_i\in I=(f_0)$ より $f_0\mid f_i$, したがって $f_0\mid d$ を得る. 以上により f_0 と d は同伴であり $(f_0\sim d)$, 両者の生成する単項イデアルは等しい, すなわち $(f_0)=(d)$ が得られた.

$\boxed{5}$ $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ とする.

(1) R は単項イデアル整域でないことを示せ.

(2) 単項イデアルでない R のイデアルの例を一つ与えよ.

(**解答**)

(1) $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ において, $4\in R$ は分解

$$4=2^2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$

をもつ. したがって R は一意分解整域ではない. したがって単項イデアル整域でもない.

(2) $\mathfrak{a}=(2,\sqrt{-3})$ を考えると, 2 と $\sqrt{-3}$ のいずれも既約元であり ($N(2)=4$, $N(\sqrt{-3})=3$ であり, ($N(\alpha)=$) $a^2+3b^2=\pm2$ を満たす $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ は存在しない.), $2\nmid\sqrt{-3}$ かつ $\sqrt{-3}\nmid 2$ より, $\mathfrak{a}=(\beta)$ となる $\beta\in R$ は存在しない. したがって $\mathfrak{a}$ は単項イデアルではない.

[3]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html