代数学２, 第５回の内容の理解度チェック

2025/5/26　担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | | 氏名 | | 点数 | |

$\boxed{1}$ 環 R と R のイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ と積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ を

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \left\{ a+b \;\middle|\; a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b} \right\},$$
$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \left\{ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \;\middle|\; a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}$$

によって定義する. $R = \mathbb{Z}$ のとき, 以下の $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ に対し, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ を求めよ.

(1) $\mathfrak{a} = (2)$, $\mathfrak{b} = (3)$

(2) $\mathfrak{a} = (4)$, $\mathfrak{b} = (6)$

(3) $\mathfrak{a} = (x)$, $\mathfrak{b} = (y)$, ($x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$, x, y は互いに素)

(4) $\mathfrak{a} = (x)$, $\mathfrak{b} = (y)$, ($x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$\boxed{2}$ 環 R とそのイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対し, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{3}$ 環 R とそのイデアル $\mathfrak{p}$ に対し, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\mathfrak{p}$ は R の素イデアル $\Longleftrightarrow$ 剰余環 $R/\mathfrak{p}$ は整域

(2) (0) は R の素イデアル $\Longleftrightarrow$ 環 R は整域

$\boxed{4}$ $R = \mathbb{Z}$ とし, $x \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (x)$ とする. x が素数のとき $\mathfrak{a}$ は極大イデアルであることを示せ. また $x = 0$ のとき $\mathfrak{a}$ は極大イデアルではないが, 素イデアルであることを示せ.

$\boxed{5}$ 体のイデアルは零イデアル (0) と R のみであることを示せ. また環 R が単位元 1 をもつとき, R のイデアルが (0) と R のみならば, R は体であることを示せ.

[0] ※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html