代数学2, 第6回の内容の理解度チェックの解答

2025/5/26 担当：那須

$\boxed{1}$ R, S を環とし, $f : R \to S$ を環の準同型写像とする. 0_S を S の零元とし, f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ は

$$\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$$
$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in R\}$$

により定義される.

(1) $\ker f$ が R のイデアルになることを示せ.

(2) $\operatorname{im} f$ は S の部分環になることを示せ.

(解答)

(1) 任意の2元 $a, b \in \ker f$ をとる. $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0_S$ より, $a - b \in \ker f$ を得る. 一方 $r \in R$ に対し, $f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0_S = 0_S$ より, $ra \in \ker f$ となる. したがって $\ker f$ は R のイデアルである.

(2) 任意の2元 $f(a), f(b) \in \operatorname{im} f$ をとる. $f(a) - f(b) = f(a-b) \in \operatorname{im} f$ かつ $f(a)f(b) = f(ab) \in \operatorname{im} f$ と $f(1_R) = 1_S$ より, $\operatorname{im} f$ は S の部分環である.

$\boxed{2}$ k を体とし, $a \in k$ とする. k 上の1変数多項式環 $k[x]$ から k への写像 φ を

$$\varphi : k[x] \longrightarrow k, \qquad f(x) \longmapsto f(0)$$

により定める.

(1) φ が環の準同型写像であることを証明せよ.

(2) $\ker \varphi$ を求めよ.

(3) 準同型定理を用いて,

$$k[x]/(x-a) \simeq k$$

を証明せよ.

(解答)

(1) $f, g \in k[x]$ とする.

$$\varphi(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \varphi(f) + \varphi(g),$$
$$\varphi(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \varphi(f)\varphi(g).$$

より φ は環の準同型写像である.

(2) 定義より

$$\ker(\varphi) = \{f \in k[x] \mid f(a) = 0\}$$

となる. $f \in \ker \varphi$ は因数定理より $f(x)$ が1次式 $(x-a)$ で割り切れることと同値である. したがって, $\ker \varphi$ は単項生成イデアル $(x-a)$ に等しい.

(3) φ が全射であることを示す. 任意の $c \in k$ に対し, 定数多項式 $f(x) = c$ を考えれば, $\varphi(f(x)) = \varphi(c) = c$ より, $c \in \operatorname{im} \varphi$ となる. つまり $k \subset \operatorname{im} \varphi$ となり, φ は全射である. (2) より $\ker \varphi = (x-a)$ であるから, 準同型定理より $k[x]/(x-a) \simeq k$ を得る.

$\boxed{3}$ 環の準同型定理を証明せよ.

準同型定理

環の準同型写像 $f : R \to S$ に対し,

$$\bar{f} : R/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \qquad a + \ker f \longmapsto f(a)$$

は同型写像である.

(**解答**)

- ($\bar{f}$ **がうまく定義されている (well-defined) こと**)
$a + \ker f = b + \ker f\ (a, b \in R)$ とすると, $a - b \in \ker f$ より, $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0_S$, よって $f(a) = f(b)$ を得る. したがって $\bar{f}$ の定義により, $\bar{f}(a + \ker f) = \bar{f}(b + \ker f)$ となり, $\bar{f}$ の定義は $R/\ker f$ の元の代表元の取り方によらない.
- ($\bar{f}$ **が準同型写像であること**)
f が環準同型であることから従う. 実際, 任意の $a, b \in R$ に対し,

$$\begin{aligned}
\bar{f}((a + \ker f) + (b + \ker f)) &= \bar{f}((a+b) + \ker f) \\
&= f(a+b) \\
&= f(a) + f(b) \\
&= \bar{f}(a + \ker f) + \bar{f}(b + \ker f) \\
\bar{f}((a + \ker f)(b + \ker f)) &= \bar{f}(ab + \ker f) \\
&= f(ab) \\
&= f(a)f(b) \\
&= \bar{f}(a + \ker f)\bar{f}(b + \ker f)
\end{aligned}$$

のように証明される.
- ($\bar{f}$ **が全射であること**)
$b \in \operatorname{im} f$ とする. $a \in R_S$ が存在し, $b = f(a)$ を満たす. $a + \ker f \in R/\ker f$ を考えれば, $\bar{f}(a + \ker f) = f(a) = b$ となり, b は $\bar{f}$ の像に含まれる. したがって, $\bar{f}$ は全射である.
- ($\bar{f}$ **が単射であること**)
$\bar{f}(a + \ker f) = 0_S$ とする. このとき $f(a) = 0_S$ が成り立ち, $a \in \ker f$, すなわち $a + \ker f = \ker f$ となり, $\ker \bar{f} = \{\ker f\}$ となる. したがって $\bar{f}$ は単射である.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html