

学生証番号

氏名

点数

1 (集合と写像の復習)

(1) 次の写像 $f : X \rightarrow Y$ は, 全射であるか? 単射であるか? をそれぞれの場合について答えよ.

回答欄 (なるものは○を, ならないものには×を記入せよ.)

- (例) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$
- (a) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$
- (b) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2 + 1$
- (c) $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$
- (d) $X = \mathbb{Z}, Y = \{-1, 1\}, f(x) = (-1)^x$
- (e) $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = x(x - 1)(x + 1)$

| 問題 | 単射? | 全射? |
|-----|-----|-----|
| (例) | ○ | ○ |
| (a) | | |
| (b) | | |
| (c) | | |
| (d) | | |
| (e) | | |

(2) 2つの写像 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $f(x) = e^x, g(x) = 3x$ により定める. 合成写像 $g \circ f$ の $x \in \mathbb{R}$ における値を書け.

2 (1) 次の集合のうち乗法 (×) に関し群になるもの (乗法群) を全て選べ.

- (a) $\mathbb{R}_{> 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- (b) $\{3^n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$

答え：

(2) 次の集合のうち加法 (+) に関し群になるもの (加法群) を全て選べ.

- (d) 偶数全体の集合
- (e) 奇数全体の集合
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$
- (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$

答え：

3 2 の整数冪全体からなる集合

$$G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots \right\}$$

が, 乗法 (演算 \times) に関し, 群になることを示せ. ((0) 演算に関し, 閉じていること, (1) 結合法則を満たすこと, (2) 単位元が存在すること, (3) 逆元が存在すること, を示せ.)

4 実 2 次正則行列のなす乗法群 $GL(2, \mathbb{R}) = \{A \mid 2 \times 2 \text{ 行列, かつ } \det A \neq 0\}$ の部分集合

$$SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

は, $GL(2, \mathbb{R})$ の部分群になることを示せ. ($SO(2, \mathbb{R})$ が (0) 単位元 E を含むこと, (1) 演算に関し閉じていること, (2) 逆元の存在, を示せ.)