

1 次の環  $R$  と部分集合  $I$  に対し,  $I$  が  $R$  のイデアルであることを示せ.

$$(1) R = \mathbb{Z}, I = n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

$$(2) R = k[x] \text{ (} k \text{ は体)}, I = (f(x)) = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in k[x]\} \text{ (} f(x) \in k[x]\text{)}$$

$$(3) R = k[x] \text{ (} k \text{ は体)}, I = \{f(x) \in k[x] \mid f(1) = 0\}$$

(解答)  $I$  が  $R$  のイデアルであることを示すには, (a)  $I$  が  $R$  の元としての差について閉じていることと, (b)  $R$  の元との積について閉じていること, の2つを示せば十分である.

$$(1) (a) a, b \in I \text{ とする. } a = nx, b = ny \text{ を満たす } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する. } a - b = nx - ny = n(x - y) \in n\mathbb{Z} \text{ より, } a - b \text{ は } I \text{ に含まれる.}$$

$$(b) a \in I \text{ かつ } b \in R \text{ ならば, } ab = (nx)b = n(xb) \in n\mathbb{Z} \text{ より, } ab \in I \text{ を満たす.}$$

したがって  $I$  は  $R$  のイデアルである.

$$(2) (a) g(x), h(x) \in I \text{ とする. } I \text{ の定義より, } g(x) = f(x)g_0(x), h(x) = f(x)h_0(x) \text{ を満たす } g_0(x), h_0(x) \in k[x] \text{ が存在する.}$$

$$g(x) - h(x) = f(x)g_0(x) - f(x)h_0(x) = f(x)(g_0(x) - h_0(x)) \in I$$

より  $I$  は  $R$  の元としての差について閉じている.

$$(b) g(x) \in I, h(x) \in R \text{ とする. } g(x) = f(x)g_0(x) \text{ を満たす } g_0(x) \in R \text{ が存在する.}$$

$$h(x)g(x) = h(x)f(x)g_0(x) = f(x)(h(x)g_0(x)) \in I.$$

したがって,  $I$  は  $R$  の元との積について閉じている.

したがって  $I$  は  $R$  のイデアルである.

$$(3) (a) f(x), g(x) \in I \text{ とする. このとき } I \text{ の定義より, } f(1) = g(1) = 0 \text{ となる. } (f - g)(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0 \text{ より } f - g \in I \text{ を得る.}$$

$$(b) f(x) \in I, g(x) \in R \text{ とする. このとき, } gf(1) = g(1)f(1) = g(1) \cdot 0 = 0 \text{ より } gf \in I \text{ を得る.}$$

したがって  $I$  は  $R$  のイデアルである.

2  $R = k[x, y]$  とする.

$$I = \{f(x, y) \in k[x, y] \mid f(0, 0) = 0\}$$

が  $R$  の単項イデアルでないことを示せ.

(解答)  $f(x, y) = x$  とおくと  $f(0, 0) = 0$  より,  $f(x, y) = x \in I$ . 同様に  $g(x, y) = y$  とおくと  $g(0, 0) = 0$  より,  $g(x, y) = y \in I$ . したがって  $(x, y) \subset I$  がわかる.  $I = (f(x, y))$  となる  $f(x, y) \in k[x, y]$  が存在したと仮定すると,

$$x = f(x, y)p(x, y)$$

を満たす多項式  $p(x, y) \in k[x, y]$  が存在する. 同様に  $y = f(x, y)q(x, y)$  を満たす多項式  $q(x, y) \in k[x, y]$  が存在する. このことは  $x, y$  をともに割り切る多項式  $f(x, y)$  が存在することを意味するが, そのような多項式は定数しか存在しないため,  $(f(x, y)) = (1) = R$  となって矛盾が生じる.

3 実数を係数とする1変数の多項式環  $R = \mathbb{R}[x]$  とその単項イデアル  $I = (p(x))$  に対し, 剰余環  $R/I$  において次の元  $f(x)$  を計算せよ. (ただし答えは  $p(x)$  の次数未満の多項式としてこたえること.)

(1)  $I = (x^2 + 1), f(x) = (x + 1)(x + 2)$

(2)  $I = (x^2 - x + 1), f(x) = (x + 1)(x + 2)$

(3)  $I = (x^3 - x - 1), f(x) = (x + 1)^9$

(解答) 剰余環  $R/I = R/(p(x))$  において,  $p(x) = 0$  において計算する.

(1)  $p(x) = x^2 + 1 = 0$  より,  $x^2 = -1$ . したがって

$$f(x) = (x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2 = (-1) + 3x + 2 = 3x + 1.$$

(2)  $p(x) = x^2 - x + 1 = 0$  より,  $x^2 = x - 1$ . したがって

$$f(x) = (x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2 = (x - 1) + 3x + 2 = 4x + 1.$$

(3)  $p(x) = x^3 - x - 1 = 0$  より,  $x^3 = x + 1$ . したがって

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1) + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 + 4x + 2 = x(3x + 4) + 2.$$

ゆえに

$$f(x) = (x + 1)^9 = ((x + 1)^3)^3 = (x(3x + 4) + 2)^3 = x^3(3x + 4)^3 + 3x^2(3x + 4)^2 + 6x(3x + 4) + 8.$$

ここで

$$(3x + 4)^3 = 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64 = 27(x + 1) + 108x^2 + 144x + 64 = 108x^2 + 171x + 91.$$

よって

$$f(x) = x^3(3x + 4)^3 + 3x^2(3x + 4)^2 + 6x(3x + 4) + 8 = (x + 1)(108x^2 + 171x + 91) + 3x^2(3x + 4)^2 + 6x(3x + 4) + 8.$$

$x^3 = x + 1$  を代入して

$$f(x) = 108(x + 1) + 171x + 91 + 3x^2(3x + 4)^2 + 6x(3x + 4) + 8 = 63x^2 + 26x + 145.$$