代数学１，第８回の内容の理解度チェックの解答

2024/11/21 担当：那須

$\boxed{1}$ 4 次対称群 S_4 の元 σ, ρ, τ を

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 4), \qquad \tau = (1\ 3)(2\ 4), \qquad \rho = (1\ 4)(2\ 3)$$

により定める．このとき部分群 (Klein の 4 元群) $V_4 = \{e, \sigma, \tau, \rho\}$ の演算表を完成せよ．

解答) 答えのみ記す．

a \ b	e	σ	τ	ρ
e	e	σ	τ	ρ
σ	σ	e	ρ	τ
τ	τ	ρ	e	σ
ρ	ρ	τ	σ	e

■

$\boxed{2}$ (1) G を群とする．部分群 $H \subset G$ が G の正規部分群であることの定義を述べよ．

解答) G の任意の元 a と H の任意の元 b に対し，$aba^{-1} \in H$ が成り立つ． ■

(2) 次の群 G と部分群 H に対し，H が G の正規部分群になることを示せ．ただし，H が G の部分群であることは示さなくて (認めて) 良い．

(a) G が可換群，H は任意の部分群

解答) $a \in G$, $b \in H$ とする．G は可換群なので $ab = ba$．従って $aba^{-1} = baa^{-1} = be = b \in H$ となる． ■

(b) G は群，H は G の**中心** $Z(G)$，すなわち

$$Z(G) = \left\{ a \in G \;\middle|\; \text{任意の } b \in G \text{ に対し } ab = ba \right\}$$

解答) $a \in G$, $b \in Z(G)$ とする．b は G の任意の元と可換であるため，$aba^{-1} = baa^{-1} = be = b \in Z(G)$ となる． ■

(c) $G = S_n$ (n 次対称群), $H = A_n$ (n 次交代群)

解答) $\sigma \in S_n$, $\tau \in A_n$ とする．τ は偶置換であり, 偶数個の互換の積として表される．σ が偶置換・奇置換のいずれであっても, $\sigma\tau\sigma^{-1}$ は偶置換となるため, $\sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$ となる． ■

(d) G は 2 次の実正則行列全体のなす乗法群, すなわち

$$GL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A \,\middle|\, A \text{ は 2 次正方行列で } \det(A) \neq 0 \right\},$$

H は, 行列式が 1 に等しいものからなる部分群

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A \,\middle|\, A \text{ は 2 次正方行列で } \det(A) = 1 \right\},$$

解答) $A \in GL(2,\mathbb{R})$, $B \in SL(2,\mathbb{R})$ とする．行列式の性質により,

$$\det(ABA^{-1}) = \det A \cdot \det B \cdot \det A^{-1} = \det A \cdot 1 \cdot (\det A)^{-1} = 1$$

従って, $ABA^{-1} \in SL(2,\mathbb{R})$ となる． ■

$\boxed{3}$ 群 G とその部分群 H において,

$$a \sim b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$$

によって関係を定めると, $\sim$ は G 上の同値関係を定めることを示せ．すなわち, 任意の $a, b, c \in G$ に対し

(1) $a \sim a$ (反射律)

(2) $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ (対称律)

(3) $a \sim b$ かつ $b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ (推移律)

の 3 つが満たされることを示せ．

解答) 上記の 3 つの関係 (反射律, 対称律, 推移律) が満たされることを示せば良い．

(1) H は G の部分群であり, H は単位元 e を含む．したがって $a^{-1}a = e \in H$ より, 任意の元 $a \in G$ に対し $a \sim a$ が成り立つ．

(2) H は G の部分群であるため, H の任意の元の逆元が H に含まれる．したがって $a \sim b$ ならば,

$$b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H,$$

すなわち $b \sim a$ が成り立つ．

(3) $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば, $a^{-1}b \in H$ かつ $b^{-1}c \in H$ である．H は G の演算について閉じているため,

$$a^{-1}c = a^{-1}(b \cdot b^{-1})c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H.$$

したがって $a \sim c$ が成り立つ．

■

[0] ※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html