線形代数2, 第7回の内容の理解度チェック (解答)

2024/11/21　担当：那須

$\boxed{1}$ (1) $f: V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像とする. f が線形写像であるための必要充分条件を書け. (1点)

(i) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$ に対し, $f(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$ が成り立つ.

(ii) 任意の $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$ に対し, $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ が成り立つ.

(2) 次の写像が線形写像かどうか調べ, 解答欄に線形写像なら○を, そうでなければ×を記入せよ. (答えのみで良い) (各1点)

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (3x, 4y)$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (2x+3y, -x+4y, 5x-2y)$

(c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+1, y-1)$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f$ は原点 $\mathbf{0}$ の周りの角度 θ の回転

答え：(a)　○　(b)　○　(c)　×　(d)　○

$\boxed{2}$ 右の線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 $(\ker f)$ の次元と1組の基底,

(2) f の像 $(\operatorname{im} f)$ の次元と1組の基底

を求めよ. (各2点)

解答)　A は基本変形により

$$A \xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}-3\times\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s+5t \\ s-4t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は2に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\operatorname{im} f$ の次元は $\operatorname{rank} A = 2$ に等しく, 基底として A の1列目と2列目である $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

$\boxed{3}$ 次の線形写像 $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ について, (1) $\ker f$ の次元と 1 組の基底, (2) $\mathrm{im}\, f$ の次元と 1 組の基底を求めよ. (各 2 点)

$$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x},\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2&-1\\1&-1&-2&1&-2\\-1&1&1&1&3\\1&-1&-2&0&0\end{pmatrix}$$

解答)　行列 A は

$$A\xrightarrow[④-①]{②-①,③+①}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2&-1\\0&0&-1&3&-1\\0&0&0&-1&2\\0&0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[④-②]{①-②}\begin{pmatrix}1&-1&0&-5&0\\0&0&-1&3&-1\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-③]{①-5\times③,②+3\times③}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-10\\0&0&-1&0&5\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[③\times(-1)]{②\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-10\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x}=0$ の解は,

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}s+10t\\s\\5t\\2t\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\0\\5\\2\\1\end{pmatrix}\qquad(s,t\text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\0\\5\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\mathrm{im}\, f$ の次元は $\mathrm{rank}\, A=3$ に等しく, 基底として A の $1,3,4$ 列目である $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ が取れる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html