代数学２，第６回の内容の理解度チェック

2025/6/2　担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | |　氏名 |　　　|　点数 |　　|

$\boxed{1}$ R, S を環とし，$f : R \to S$ を環の準同型写像とする．0_S を S の零元とし，f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ は

$$\ker f = \left\{ a \in R \;\middle|\; f(a) = 0_S \right\}$$
$$\operatorname{im} f = \left\{ f(a) \;\middle|\; a \in R \right\}$$

により定義される．

(1) $\ker f$ が R のイデアルになることを示せ．

(2) $\operatorname{im} f$ は S の部分環になることを示せ．

$\boxed{2}$ k を体とし，$a \in k$ とする．k 上の１変数多項式環 $k[x]$ から k への写像 φ を

$$\varphi : k[x] \longrightarrow k, \qquad f(x) \longmapsto f(a)$$

により定める．

(1) φ が環の準同型写像であることを証明せよ．

(2) $\ker \varphi$ を求めよ．

(3) 準同型定理を用いて，

$$k[x]/(x-a) \simeq k$$

を証明せよ．

$\boxed{3}$ 環の準同型定理を証明せよ.

準同型定理

環の準同型写像 $f : R \to S$ に対し,

$$\bar{f} : R/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \qquad a + \ker f \longmapsto f(a)$$

は同型写像である.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html