東海大学理学部数学・情報数理談話会

以下の要領において談話会を開催致します. 多数の方の御来聴をお待ち致しております.

日程	2014年10月29日 (水) 17:00 〜 18:00
場所	東海大学湘南校舎18号館8階理学部ゼミ室3 (18-831)
講演者	板井昌典氏 (東海大学理学部情報数理学科)
タイトル	モデル理論と数論幾何

世話人: 笹木集夢 (理学部数学科)
那須弘和 (理学部情報数理学科)

モデル理論と数論幾何

板井　昌典
東海大学　理学部　情報数理学科

2011 年 5 月にオックスフォード大学の数学者 Jonathan Pila が「2011 年クレイ研究賞」を受賞した．数論幾何で重要な André-Oort 予想を解いたことが受賞理由であった．Pila は，モデル理論（数理論理学の一分野）の手法を応用し，それまで「一般リーマン予想」を仮定して得られていた結果を,「一般リーマン予想」を仮定することなく解くことに成功した．彼はその後，数理論理学分野で最も権威ある Karp 賞（5 年に一度授与）を 2013 年に受賞し，今年 7 月にソウルで開催された国際数学者会議で「総合講演」(Pi1) を行った．

有限個の多項式の解集合として定義される多様体を考え，その中で座標が全て有理数になっている点（有理点と呼ぶ）に着目する．多様体の有理点の個数を数えることは，数論幾何において重要な問題のひとつである．Pila は「順序極小理論 (O-minimal theory)」と呼ばれるモデル理論の手法を用いて，多様体の有理点の個数の評価を与え André-Oort 予想を解いた．

順序極小理論のモデルの典型的な例は，$(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ である．集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ が，$(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ の中で定義可能であるならば，X は有限個の区間あるいは有限個の点の和集合になっている．順序まで考えた実数体 $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ の性質を公理化することから順序極小理論の研究は始まった．1980 年代初めのことである．

談話会では，モデル理論の紹介から初め順序極小理論の解説を交えて Pila の用いた手法を紹介したい．以下に Oxford 大学のホームページを引用する．

> Jonathan Pila receives a 2011 Clay Research Award
>
> It was announced on March 22 2011 that Jonathan Pila is to receive a Clay Research Award for his resolution of the André-Oort Conjecture in the case of products of modular curves. This work gives the first unconditional proof of fundamental cases of these general conjectures beyond the original theorem of André concerning the product of two such curves. The foundational techniques that Pila developed to achieve this breakthrough range from results in real analytic geometry which give sharp upper bounds for the number of rational points of bounded height on certain analytic sets, to the use of O-minimal structures in mathematical logic.
>
> The award will be presented at the 2011 Clay Research Conference, to be held May 16-17 at Harvard University in Science Center Lecture Hall A.
>
> http://www.maths.ox.ac.uk/node/15208

講演の内容は，以下の通り.（チョーク・トーク形式）

(1) モデル理論紹介：代数的閉体（例えば $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ など）の理論や実数体 $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ の理論

(2) Pila-Wilkie counting theorem

(3) PW counting theorem の André-Oort 予想への応用

References

Pi1 Jonathan Pila, O-minimality and Diophantine geometry, 2014

Pi2 Jonathan Pila, O-minimality and the André-Oort conjecture for $\mathbb{C}^n$, *Annals Math.* 173(2011)

Sc1 Thomas Scanlon, O-minimality as an approach to the André-Oort conjecture, 2014

Sc2 Thomas Scanlon, A proof of the André-Oort conjecture via Mathematical Logic, *Astérisque*, 2011

Ts Jacob Tsimerman , Ax-Schanuel and O-minimality