代数学2,第7回の内容の理解度チェック

点数

2025/6/9 担当:那須

以下dは素因数分解に平方因子を含まない整数とする. 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ を

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{ a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

氏名

と定義する. $Z[\sqrt{d}]$ の元 $\alpha=a+b\sqrt{d}$ に対し, $\bar{\alpha}=a-b\sqrt{d}$ を α の共役元という. $Z[\sqrt{d}]$ において α のノルム $N(\alpha)$ は,

$$N(\alpha) = \alpha \bar{\alpha} = a^2 - db^2$$

と定義される.

 $\boxed{1} \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ とする. 次を示せ.

学生証番号

- (1) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$
- (2) α が単元 $\Longleftrightarrow N(\alpha) = \pm 1$
- (3) $N(\alpha)$ が \mathbb{Z} の既約元ならば, α は $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ の既約元である

- 2 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ において、次の元が既約元かどうか判定せよ.
- (1) 2 (2) $2-\sqrt{5}$ (3) $4+\sqrt{5}$

- $\boxed{3}$ 次の環Rにおいて、指定されたRの元 α がRの素元かどうか判定せよ.
 - (1) $R = \mathbb{Z}, \alpha = 7$
 - (2) $R=\mathbb{Z}[i]$ (R はガウス整数環, $i=\sqrt{-1}$), $\alpha=2$
 - (3) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \ \alpha = 3$
 - (4) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}], \ \alpha = 2 \sqrt{5}$