代数学1, 第8回の内容の理解度チェック

2024/11/21 担当：那須

学生証番号									氏名		点数	

$\boxed{1}$ 4次対称群 S_4 の元 σ, ρ, τ を

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 4), \qquad \tau = (1\ 3)(2\ 4), \qquad \rho = (1\ 4)(2\ 3)$$

により定める．このとき部分群 (Kleinの4元群) $V_4 = \{e, \sigma, \tau, \rho\}$ の演算表を完成せよ．

a \ b	e	σ	τ	ρ
e				
σ				
τ				
ρ				

$\boxed{2}$ (1) G を群とする．部分群 $H \subset G$ が G の正規部分群であることの定義を述べよ．

(2) 次の群 G と部分群 H に対し，H が G の正規部分群になることを示せ．ただし，H が G の部分群であることは示さなくて (認めて) 良い．

(a) G が可換群, H は任意の部分群

(b) G は群, H は G の**中心** $Z(G)$, すなわち

$$Z(G) = \left\{ a \in G \,\middle|\, \text{任意の } b \in G \text{ に対し } ab = ba \right\}$$

(c) $G = S_n$ (n 次対称群), $H = A_n$ (n 次交代群)

(d) G は 2 次の実正則行列全体のなす乗法群, すなわち

$$GL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A \;\middle|\; A \text{ は 2 次正方行列で } \det(A) \neq 0 \right\},$$

H は, 行列式が 1 に等しいものからなる部分群

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A \;\middle|\; A \text{ は 2 次正方行列で } \det(A) = 1 \right\},$$

$\boxed{3}$ 群 G とその部分群 H において,

$$a \sim b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$$

によって関係を定めると, $\sim$ は G 上の同値関係を定めることを示せ. すなわち, 任意の $a, b, c \in G$ に対し

(1) $a \sim a$ (反射律)

(2) $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ (対称律)

(3) $a \sim b$ かつ $b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ (推移律)

の 3 つが満たされることを示せ.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. ‘https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html