Obstructions to deforming degenerate curves on a scroll *

那須弘和 (Hirokazu Nasu) †

1　序文

代数閉体 k 上のスキーム V に対し, $C \subset V$ を局所完全交叉な閉部分スキームとする. 種々の変形理論においては, 接空間 (1 位無限小変形全体の空間) と障害空間が定まっているが, 閉部分スキーム $C \subset V$ の変形の場合には, 法束 $N_{C/V}$ のコホモロジー群 $H^0(C, N_{C/V})$ と $H^1(C, N_{C/V})$ がそれぞれヒルベルトスキームの点 $[C]$ における接空間と障害空間に対応する. C の 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$, すなわち対応する大域切断 $\alpha \in H^0(C, N_{C/V})$ に対し, 障害類 $\mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(C, N_{C/V})$ が定まり, $\tilde{C}$ が 2 位変形 $\tilde{\tilde{C}} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ にリフトするためには, $\mathrm{ob}(\alpha) = 0$ が必要十分である (cf. 3 節). 一般に障害類を具体的に求めるのは困難であるが, [4] では非特異三様体 V と非特異曲線 C に対し, C と V の中間曲面 S とその上の第一種例外曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ の存在を仮定し, $\tilde{C}$ が $\tilde{\tilde{C}}$ にリフトしない, すなわち $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$ となる為の十分条件が与えられた (定理 3.7, 障害性定理).

本研究では, 障害性定理における三様体 V をより高次元の多様体へ一般化する目的の下で, V を Segre 埋込 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ $(n \geq 2)$ とし, S を V の非特異超平面切断 $[V \subset \mathbb{P}^{2n+1}] \cap \mathbb{P}^{2n}$ と仮定して, (退化) 曲線 $C \subset S$ の V における変形について考察する.

2　退化曲線の変形と曲線の変形障害

$V \subset \mathbb{P}^n$ を射影多様体とする. V 上の曲線 C でもって, V の超平面切断 $S = [V \subset \mathbb{P}^n] \cap \mathbb{P}^{n-1}$ に含まれるものを V 上の退化曲線 (**degenerate curve**) という. 退化曲線 C がいつ非退化曲線に変形するか？は退化曲線の変形を考える上で自然な問いである. V 上の退化曲線 $C \subset S$ の全ての小変形 C' が退化曲線であるとき, すなわち, C' が $S = V \cap H$

* 『都の西北　代数幾何学シンポジウム』(平成 22 年 11 月 10 日〜13 日, 早稲田大学) 報告
† 東京電機大学情報環境学部

のある変形 $S' = V \cap H'$ に含まれるとき, C は安定的に退化する **(stably degenerate)** という. C を V 内で少しだけ変形しても, やはり S も C と一緒に変形し, C が別の (あるいは同じ) 超平面切断 S' に含まれることを云う. ここでは与えられた退化曲線 $C \subset S \subset V$ に対し, 次の問題を考える：

問題 2.1. (1) C が安定的に退化する為の条件を求めよ. (2) V のヒルベルトスキーム $\operatorname{Hilb} V$ は, C に対応する点 $[C]$ において非特異か？

以下に (V が 3 次元の場合の) 例をいくつかあげる.

例 2.2. (1) $V = \mathbb{P}^3$ とする. 退化曲線 $C \subset S = \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ は平面曲線であり, C は次数や種数によらずいつでも安定的に退化する. さらに C は完全交叉, 特に ACM 曲線であるから, $\operatorname{Hilb} \mathbb{P}^3$ は $[C]$ において非特異である.

(2) V を非特異 2 次超曲面 $Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ とする. 一般の退化曲線 C は, 非特異 2 次曲面 $S = Q^2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に含まれ, C が安定的に退化する為には, オイラー標数に関する条件 $\chi(V, \mathcal{I}_{C/V}(1)) \geq 1$ が必要十分である. ここで $\mathcal{I}_{C/V}$ は C の V における定義イデアル層を表す. さらに $\operatorname{Hilb} Q^3$ は $[C]$ において非特異である.

上の 2 つの例において曲線 C は, $H^1(C, N_{C/V}) = 0$ (unobstructed), または次の S-正規性の条件を満たす.

定義 2.3. 制限写像

$$\rho : H^0(S, N_{S/V}) \xrightarrow{|_C} H^0(C, N_{S/V}\big|_C) \tag{2.1}$$

が全射のとき, C は **S-正規 (S-normal)** であると云う.

この S-正規性の定義は, 射影空間内の曲線に対する線形正規性の定義を, 一般の射影多様体 V 上の曲線の場合に翻訳したものである. S-正規な曲線に対し, 次の結果が知られている.

定理 2.4 (cf. [3],[6])**.** $\operatorname{Hilb} V$ が $[S]$ で非特異であり, $H^1(C, N_{C/S}) = 0$ が満たされると仮定する. もし C が S-正規ならば, C は (1) 安定的に退化し, (2) $\operatorname{Hilb} V$ は $[C]$ において非特異である.

定理 2.4 により, 問題 2.1 を考える上で, S-正規でなく, かつ $H^1(C, N_{C/V}) \neq 0$ となる曲線 C に対し, 安定的に退化しているか？が重要となる. 3 次超曲面 $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ 上の退化曲線には, このような曲線が存在する.

V を非特異 3 次超曲面 $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ としよう. V は 3 次元 Fano 多様体であり, 反標準因子 $-K_V$ が超平面切断 H (豊富因子, V の偏極と呼ぶ) の 2 倍に等しいことから, 一般には **del**

Pezzo 3 様体と呼ばれる．del Pezzo 3 様体 V 上の有理曲線 $\ell \simeq \mathbb{P}^1$ でもって偏極 H との交点数が 1 に等しいものを直線と呼び, 2 種類の直線が存在する：1 つ目は, **good line** と呼ばれ, 法束 $N_{\ell/V}$ が自明になる ($N_{\ell/V} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$)．2 つ目は **bad line**, すなわち $k \geq 1$ に対し, $N_{\ell/V} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ を満たす．[6] では, 非特異 del Pezzo 3 様体 V 上の退化曲線 C に対し, C が安定的に退化する為の十分条件が与えられた．

定理 2.5 (cf. [6])**.** V を非特異 del Pezzo 3 様体とし, H をその偏極とする．線形系 $|H|$ の非特異元 S に含まれる非特異曲線 $C \subset V$ が次の 2 つの条件を満たすならば, C は安定的に退化する：

(a) $\chi(V, \mathcal{I}_{C/V}(S)) \geq 1$.

(b) S 上の直線 ℓ に対し, $\ell \cap C = \emptyset$ ならば法束 $N_{\ell/V}$ は自明 ($\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$) である．

さらに, 曲線 C の種数 g が 2 以上であると仮定する．このとき次の 2 つは同値である．

(c) S 上の (good) line ℓ で C と交わらないものが存在する．

(d) $\mathrm{Hilb}\, V$ は点 $[C]$ において特異である．(実際は, より強く, $[C]$ を生成点とするような $\mathrm{Hilb}\, V$ の被約でない既約成分が存在する．)

仮定 (a) は例 2.2 (2) でも現れたが, 曲線 C が数値的に V の超平面切断 S に含まれるという条件である．退化曲線族の次元評価により, この条件は曲線 C が安定的に退化する為に必要であることがわかる．注目すべきは, 仮定 (b) の必要性や, (c) と (d) の同値性である．C と交わらない為に, 一見 C と無関係に思える直線 ℓ が, 曲線 C の V における変形の障害性に関わっている．このように退化曲線 $C \subset S = V \cap H \subset V$ の変形障害に, 超平面切断 S 上の第 1 種例外曲線の存在が影響することがある．

次に射影多様体 V を Segre 埋込 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ の像としよう．V の非特異超平面切断 $S = [V \subset \mathbb{P}^5] \cap \mathbb{P}^4$ は, 3 次の有理スクロール $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$, すなわち Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_1$ に同型である．S の Picard 群 $\mathrm{Pic}\, S$ は, ファイバー f と負切断 C_0 ($C_0^2 = -1$, $C_0 \simeq \mathbb{P}^1$) により生成され, 自由加群 $\mathbb{Z}^2$ と同型になる．この場合には, V 上の退化曲線 C に対し, 安定的に退化する為の必要十分条件が知られている．

定理 2.6 (cf. [5])**.** $V \subset \mathbb{P}^5$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の Segre 埋込みとし, C を V の非特異超平面切断 $S \simeq \mathbb{F}_1$ 上の非特異曲線とする．このとき次が成り立つ．

(1) C が安定的に退化するためには, $\chi(V, \mathcal{I}_C(1)) \geq 1$ が必要十分である．

(2) C の $\mathrm{Pic}\, S$ におけるクラスが $n \geq 5$ に対し, $n(C_0 + f)$ に等しければ, $\mathrm{Hilb}\, V$ は $[C]$ の近傍において被約でない．そうで無ければ, $\mathrm{Hilb}\, V$ は $[C]$ において非特異である．

良く知られているように $\mathbb{F}_1$ は $\mathbb{P}^2$ の 1 点爆発と同型であり, C_0 が例外曲線である. S 上の完備線形系 $|C_0+f| \simeq \mathbb{P}^2$ は, 爆発の射 $\Phi_{|C_0+f|} : S \to \mathbb{P}^2$ を定める. 定理 2.6 により S 上の全ての障害曲線 (obstructed curve) は, 5 次以上の平面曲線の引き戻しに線形同値である. 平面 5 次曲線の引き戻し $C \sim 5(C_0+f)$ が V 上で被障害変形 (obstructed deformation) を持つという事実は, 赤堀氏と難波氏の先行結果 [1] において観察された. 図 1 に, 全ての S 上の非特異連結曲線 $C \sim aC_0 + bf$ に対し, (1) C が安定的に退化するような整数対 (a,b) のなす領域, および (2) C が障害を受けるような整数対 (a,b) のなす半直線を表す. これら

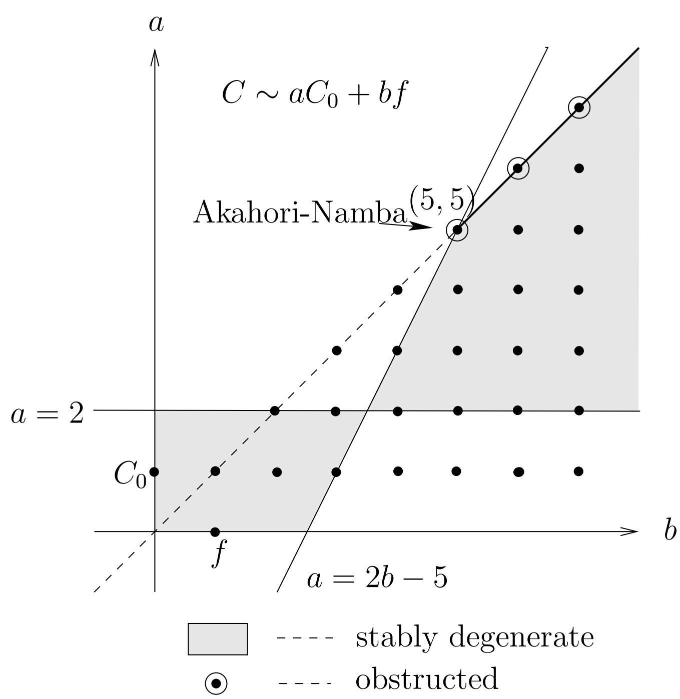

図 1: Stably degenerate curves and obstructed curves

の例が, 超平面切断上の第 1 種例外曲線の視点から退化曲線の変形 (とその障害) を研究する為の動機となった.

3　1 位無限小変形と障害

[4] では, 非特異 3 次元射影多様体 V 上の曲線 C に対し, C と V の間の中間曲面 S $(C \subset S \subset V)$ と S 上の第一種例外曲線 E を用いて, C の V における変形障害が研究された. 特に C の V における 1 位無限小変形が障害を受ける為の十分条件 (定理 3.7) が与えられた. この節ではその概略について紹介する.

☆1位無限小変形と障害 (基本)　まず始めに1位無限小変形と障害の一般論について復習しよう．V を非特異多様体, $X \subset V$ を局所完全交叉な閉部分多様体とする．X の1位無限小変形 **(first order infinitesimal deformation)** とは閉部分多様体 $\tilde{X} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ でもって $\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ 上平坦かつ中心ファイバーが X であるものをいう．良く知られているように X の1位無限小変形 $\tilde{X}$ 全体と層準同型 $\alpha : \mathcal{I}_X \to \mathcal{O}_X$ のなす群との間には自然な一対一対応がある (cf. [2, Thm. 2.4, Chap. 1])．与えられた $\alpha \in \operatorname{Hom}_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ に対し $\operatorname{ob}(\alpha) \in \operatorname{Ext}^1_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ を次のカップ積により定義する：

$$\operatorname{ob}(\alpha) = \delta(\alpha) \cup \alpha. \tag{3.1}$$

ただしここで δ は V 上の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

から誘導される余境界写像 $\delta : \operatorname{Hom}_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Ext}^1_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{I}_X)$ であり, カップ積は写像

$$\operatorname{Ext}^1_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{I}_X) \times \operatorname{Hom}_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\cup} \operatorname{Ext}^1_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$$

により定義される．このとき $\tilde{X}$ が $\operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトする為には $\operatorname{ob}(\alpha) = 0$ が必要十分である．$\operatorname{ob}(\alpha)$ は α の障害 **(obstruction)** と呼ばれる．同型 $\operatorname{Hom}_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, N_{X/V})$ により, α は法束 $N_{X/V}$ の大域切断とみなすことができる．V は非特異であり, X は V において局所完全交叉であるから, $\operatorname{ob}(\alpha)$ は部分群 $H^1(X, N_{X/V}) \subset \operatorname{Ext}^1_V(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ に含まれる (cf. [2, Cor.9.3, Chap.2])．

☆超曲面の場合　X が V の超曲面のとき, α の障害 $\operatorname{ob}(\alpha)$ は, (3.1) より簡単なコホモロジーのカップ積として表される．X は V 上の因子であるから, $\mathcal{I}_X \simeq \mathcal{O}_V(-X)$．短完全列 (3.2) に $\mathcal{O}_V(X)$ をテンソルすれば, 完全列 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_V(X) \longrightarrow N_{X/V} \longrightarrow 0$ を得る．これの余境界写像 $\delta : H^0(X, N_{X/V}) \to H^1(V, \mathcal{O}_V)$ と X への制限写像 $H^1(V, \mathcal{O}_V) \xrightarrow{|_X} H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の合成を, $d_X : H^0(X, N_{X/V}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ により表す．このとき次の命題が成り立つ．

命題 3.1. X を V の超曲面とし, α を法束 $N_{X/V} \simeq \mathcal{O}_X(X)$ の大域切断とする．このとき, $\operatorname{ob}(\alpha) = d_X(\alpha) \cup \alpha$ が成り立つ．ただし $\cup$ はカップ積写像

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \times H^0(X, N_{X/V}) \xrightarrow{\cup} H^1(X, N_{X/V})$$

により取る．

☆外成分　$C \subset S \subset V$ を射影多様体の旗とする．法束 $N_{C/V}$ の大域切断 α は C の V における1位無限小変形 C_α を定め, その障害類 $\operatorname{ob}(\alpha) \in H^1(C, N_{C/V})$ がカップ積として定ま

る. C の V における変形を S の変形を用いて研究するとき, α や $\mathrm{ob}(\alpha)$ の外成分を考えることが有用である. 法束の間の全射準同型 (射影) $N_{C/V} \xrightarrow{\pi_{C/S}} N_{S/V}\big|_C$ はコホモロジー群の間の写像

$$H^i(\pi_{C/S}) : H^i(C, N_{C/V}) \longrightarrow H^i(C, N_{S/V}\big|_C) \qquad (i = 0, 1)$$

を誘導する.

定義 3.2. $H^i(\pi_{C/S})$ $(i = 0, 1)$ による α と $\mathrm{ob}(\alpha)$ の像を各々の外成分 **(exterior component)** と呼び, それぞれ $\pi_S(\alpha)$ と $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ で表す.

C の V における 1 位無限小変形 C_α $(\alpha \in H^0(C, N_{C/V}))$ に対し外成分 $\pi_S(\alpha)$ や $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ を考える事は, 直感的には, C の V における変形のうち S の法線方向への変形 (成分) を取り出し, その変形に付随する障害を考える事に相当する.

☆極付無限小変形と開代数多様体の変形　V を射影多様体, $S \subset V$ を V の超曲面, $E \subset S$ を S 上の (可縮) 因子とし, $E \subset S \subset V$ は全て非特異であると仮定する. 法束 $N_{S/V}$ の大域切断は S の V における 1 位無限小変形と同一視されるが, [4] では次の極付き無限小変形が導入された.

定義 3.3. 法束 $N_{S/V}$ の有理切断 v でもって E に沿って 1 位の極を持つもの (すなわち $v \in H^0(S, N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$) を S の V における極付き 1 位無限小変形 **(infinitesimal deformation with pole)** と呼ぶ.

S° と V° をそれぞれ $S^\circ := S \setminus E$ と $V^\circ := V \setminus E$ により定義される開代数多様体とする. 開埋め込み $S^\circ \hookrightarrow S$ を ι で表せば, 層準同型 $[\mathcal{O}_S(E) \hookrightarrow \iota_*\mathcal{O}_{S^\circ}] \otimes N_{S/V}$ の誘導する自然な写像 $H^0(S, N_{S/V}(E)) \to H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$ は単射的になる. $H^0(N_{S/V}(E))$ の元 v の像を v° により表せば, v° は S° の V° における 1 位無限小変形 $\tilde{S}^\circ$ を定める. $S^\circ \subset V^\circ$ は余次元 1 の部分多様体であるから, 命題 3.1 により, 障害 $\mathrm{ob}(v^\circ) \in H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$ は, 写像

$$H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ}) \times H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ}) \xrightarrow{\cup} H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$$

によるカップ積 $d_{S^\circ}(v^\circ) \cup v^\circ$ に等しい. 外成分と極付き無限小変形を組み合わせることにより, 次の命題を得る.

命題 3.4. $C \subset S \subset V$ を射影多様体の旗とし, $E \subset S$ を C と交わりを持たない S 上の (可縮) 因子とする. 大域切断 $\alpha \in H^0(C, N_{C/V})$ に対し, α の外成分 $\pi_S(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ が制限写像

$$H^0(S, N_{S/V}(E)) \xrightarrow{|_C} H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$$

により, 大域切断 $v \in H^0(S, N_{S/V}(E))$ にリフトするならば,

$$\mathrm{ob}_S(\alpha) = \mathrm{ob}(v^\circ)\big|_C \in H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ}\big|_C) \simeq H^1(S, N_{S/V}\big|_C)$$

が成り立つ.

一般に $\mathrm{ob}(v^\circ) \neq 0$ や $\mathrm{ob}(v^\circ)\big|_C \neq 0$ を示すのは難しいが, 次の事実が知られており, [6] や [5] において, 定理 2.5 や定理 2.6 の証明に用いられた.

定理 3.5. V を 3 次元とする. 曲線 E の曲面 S における自己交点数 $(E^2)_S$ が負かつ $\det N_{E/V} \simeq \mathcal{O}_E$ を仮定する. もし E 上の完全列

$$0 \longrightarrow N_{E/S} \longrightarrow N_{E/V} \xrightarrow{\pi_{E/S}} N_{S/V}\big|_E \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

が分裂しないならば, 極付き 1 位無限小変形 $v \in H^0(S, N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$ に対し, $\mathrm{ob}(v^\circ) \neq 0$. 特に v° の定める S° の V° における 1 位無限小変形は, $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしない.

定理 3.5 を 3 次超曲面 $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ とその超平面切断である 3 次曲面 $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ に適用すれば, 次の例が得られる.

例 3.6. $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ を非特異 3 次超曲面とし, S_3 を V_3 の非特異超平面切断, そして E を S_3 上の直線 ($E \simeq \mathbb{P}^1$ かつ $(E^2)_S = -1$) と仮定する. もし E が V_3 の上で good line (すなわち $N_{E/V_3} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$) ならば, 完全列 (3.3) は

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}{}^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow 0$$

に等しく, 特に分裂しない. 従って $v \in H^0(S, N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$ により定まる S_3° の V_3° 内での 1 位無限小変形は $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしない.

命題 3.4 では, $C \cap E = \emptyset$ を仮定したが, $\dim V = 3$ のとき, この仮定は必ずしも必要でない.

定理 3.7 ([4, Thm. 1.1], 障害性定理)**.** V を 3 次元と仮定し, $S \subset V$ を曲面, $C \subset S$ を曲線, $E \subset S$ を S 上の第一種例外曲線とする. 大域切断 $\alpha \in H^0(C, N_{C/V})$ (すなわち C の 1 位無限小変形) に対し, 次の条件が満たされるならば, α の障害類 $\mathrm{ob}(\alpha)$ の外成分 $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ は零でない：

(a) α の外成分 $\pi_S(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ が $v \in H^0(S, N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$ にリフトする, すなわち $\pi_S(\alpha) = v\big|_C \in H^0(N_{S/V}(E)\big|_C)$ が成り立つ. さらに v の E への制限 $v\big|_E \in H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E)$ が写像

$$\pi_{E/S}(E) = \pi_{E/S} \otimes \mathcal{O}_E(E) : H^0(E, N_{E/V}(E)) \longrightarrow H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E)$$

の像に含まれない;

(b) $(\Delta \cdot E)_S = 0$, ただし $\Delta := C - 2E + K_V\big|_S$ は S 上の因子;

(c) 制限写像 $H^0(S, \Delta) \to H^0(E, \Delta\big|_E) \overset{(b)}{\simeq} H^0(E, \mathcal{O}_E) \simeq k$ が全射的.

仮定 (a) は複雑なので, 図 2 により, α と v の関係を理解して欲しい.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H^0(C, N_{C/V}) & \ni & \alpha & & & & & & H^0(E, N_{E/V}(E)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{C/S}} & & \big\downarrow & & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{E/S}(E)} \\
H^0(C, N_{S/V}\big|_C) & \ni & v\big|_C & \xleftarrow{\text{制限}} & v & \xmapsto{\text{制限}} & v\big|_E & \in & H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E) \\
\bigcap & & & & \Cap & & & & \\
H^0(C, N_{S/V}(E)\big|_C) & & \xleftarrow{res} & & H^0(S, N_{S/V}(E)) & & & &
\end{array}
$$

図 2: α と v の間の関係

[4] では定理 3.7 を適用する事により, 多くの 3 次元単線織多様体 V に対し, V 上の曲線のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分を持つ事が示された (cf. [4, Thm. 1.4]).

4 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ 上の退化曲線の変形障害

定理 3.7 における三様体 V をより高次元の多様体へ一般化する目的で, 定理 2.6 の類似の設定を考える. V を Segre 埋込 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ $(n \geq 2)$ の像, S を V の非特異超平面切断 $[V \subset \mathbb{P}^{2n+1}] \cap \mathbb{P}^{2n}$ と仮定し, 退化曲線 $C \subset S$ の V における変形について考察する. このとき S は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-1}$-束 $(\simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)))$ と同型であり, そのファイバーを F で表す. さらに S 上には, 部分束 $\mathcal{F} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n-1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ に対応する負スクロール E が存在し, E をつぶすことにより, S は $\mathbb{P}^n$ の余次元 2 の線形部分空間 $L^{n-2} \subset \mathbb{P}^n$ に沿った爆発 $\pi : S \to \mathbb{P}^n$ と同型になる. 特に π の例外因子 E は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$ と同型である.

定理 4.1. $C \subset \mathbb{P}^n$ を非特異曲線とし, C は爆発 $\pi : S \to \mathbb{P}^n$ の中心 L^{n-2} と交わりを持たないと仮定する. C が以下の条件を満たせば, C の S への引き戻し $\pi^{-1}(C)$ は V において 2 位変形にリフトしない 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ を持つ:

(1) $H^1(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) = 0$;

(2) $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)) = 0$;

(3) $H^1(C, \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)) \neq 0$;

(4) $H^1(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes \mathcal{O}_S(4E + 2F)) = 0$.

定理 4.1 の証明の為には, まず次の補題を示す. 前節と同様に, 開代数多様体 $S \setminus E$ および $V \setminus E$ をそれぞれ, S° と V° により表す.

補題 4.2. $v \in H^0(S, N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$ を超平面切断 S の $V \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ における極付き無限小変形, $v^\circ \in H^0(S^0, N_{S^\circ/V^\circ})$ を v から誘導される S° の V° における 1 位無限小変形とする. このとき, $\mathrm{ob}(v^\circ) \neq 0 \in H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$.

コホモロジー群の次元の計算

$$h^0(S, N_{S/V}) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))) = 2(n-1) + 3 = 2n + 1,$$
$$h^0(S, N_{S/V}(E)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathrm{Sym}^2 \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

により, $h^0(S, N_{S/V}(E)) - h^0(S, N_{S/V}) = n(n-1)/2 > 0$ $(n \geq 2)$ を得る. 従って補題 4.2 の仮定を満たす $v \in H^0(S, N_{S/V}(E)) \setminus H^0(S, N_{S/V})$ が実際に存在する. 補題 4.2 は, 商ベクトル空間 $H^0(S, N_{S/V}(E))/H^0(S, N_{S/V})$ の適当な基底をとり, (部分群 $H^1(S, N_{S/V}(3E))$ の元として) $\mathrm{ob}(v^\circ)$ を具体的に計算することにより証明される.

系 4.3. S° の V° における 1 位無限小変形で, $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしないものが存在する.

定理 4.1 は補題 4.2 より次のように導かれる. まず $v \in H^0(S, N_{S/V}(E))$ を 1 つ固定する. 標準的な短完全列 $0 \longrightarrow N_{C/S} \longrightarrow N_{C/V} \longrightarrow N_{S/V}\big|_C \longrightarrow 0$ と $H^1(N_{C/S}) = 0$ により, v の C への制限 $v\big|_C \in H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ を外成分とするような $\alpha \in H^0(C, N_{C/V})$ が存在する. 補題 4.2 より $\mathrm{ob}(v^\circ) \neq 0 \in H^1(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$ を得る. $\mathrm{ob}(v^\circ)$ は $H^1(S, N_{S/V}(3E))$ に含まれ, 制限写像 $H^1(S, N_{S/V}(3E)) \xrightarrow{|_C} H^1(C, N_{S/V}\big|_C)$ が単射であることから, 命題 3.4 により $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$ を得る. □

謝辞　研究集会で講演の機会を与えて頂いた早稲田大学の楫元先生と, 会場の設営や準備等でお世話になった早稲田大学代数幾何学研究グループの皆さんに, この場をお借りして心から感謝の意を表したい.

参考文献

[1] T. Akahori and M. Namba. Examples of obstructed holomorphic maps. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 54(7):189–191, 1978.

[2] R. Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.

[3] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.

[4] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.

[5] H. Nasu. Deformations of degenerate curves on a Segre 3-fold. In *Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, pages 163–174. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.

[6] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.