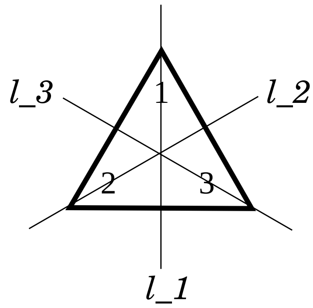
代数学１，第４回の内容の理解度チェックの解答

2024/10/17　担当：那須

$\boxed{1}$ 右の基準の正三角形 $\triangle$ を含む平面において, I を恒等変換, R_1 と R_2 を $\triangle$ の中心の周りのそれぞれ角度 120° と 240° の回転 (反時計回り) とし, さらに T_i $(i = 1, 2, 3)$ を, 直線 l_i に関する折り返し (対称移動) とする.

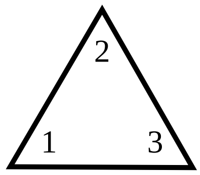
基準の正三角形 $\triangle$ を次の合成変換で変換した正三角形を求めよ．なお解答は解答欄の三角形の頂点に数字を記入して答えよ．なお合同変換 f に対し f^{-1} は f の逆変換を表すものとする.

$\Delta =$ 

解答)　正三角形の合同変換 I, R_i $(i = 1, 2)$, T_j $(j = 1, 2, 3)$ は, Δ の 3 頂点の置換を誘導する．置換の積の計算を用いて対応する合同変換を求めればよい.

(1) $T_2 \circ R_1$

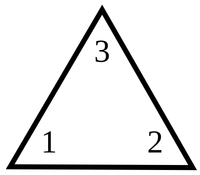
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$



よって $T_2 \circ R_1 = T_3$.

(2) R_2^{-1}

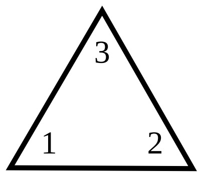
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



よって $R_2^{-1} = R_1$.

(3) $T_3 \circ R_2 \circ T_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

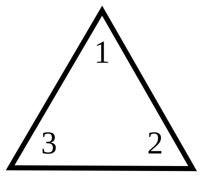


よって $T_3 \circ R_2 \circ T_3 = R_1$.

(4) $R_1^{-1} \circ T_2 \circ R_1$

$R_1^{-1} \circ T_2 \circ R_1 = R_2 \circ T_2 \circ R_1$ に注意する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$



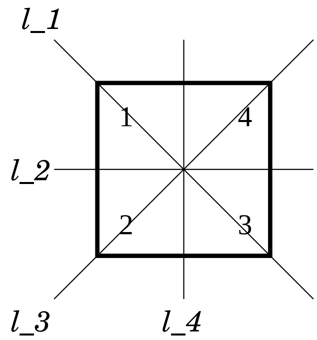
よって $R_1^{-1} \circ T_2 \circ R_1 = T_1$.

■

$\boxed{2}$ 右の基準の正方形□を含む平面において, I を恒等変換, R_1,R_2,R_3 を□の中心の周りのそれぞれ角度 90°,180°,270° の回転 (反時計回り) とし, さらに T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を, 直線 l_i に関する折り返し (対称移動) とする.

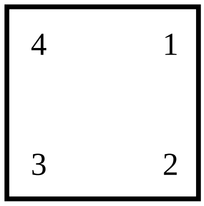
基準の正方形□を次の合成変換で変換した正方形を求めよ. なお解答は解答欄の正方形の頂点に数字を記入して答えよ.

□ =



解答)　対応する 4 次置換を用いて計算する.

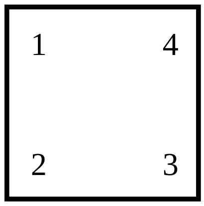
(1) $T_2 \circ R_2$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2\,3)(1\,4).$$

よって $T_2 \circ R_2 = T_4$.

(2) $T_4 \circ R_3 \circ T_1$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

よって $T_4 \circ R_3 \circ T_1 = I$.

■

$\boxed{3}$ (1) 次の群の位数を答えよ.

(a) 6 次対称群 S_6

解答)　n 次対称群 S_n の位数は $n!$ に等しい. したがって S_6 の位数は $6! = 720$. ■

(b) 5 次交代群 A_5

解答)　n 次交代群 A_n の位数は $n!/2$ に等しい. したがって A_5 の位数は $5!/2 = 60$. ■

(2) 次の対称群の元 σ の位数を求めよ.

(c) $\sigma = (1\ 2\ 5\ 3)(4\ 8)(6\ 9\ 7) \in S_9$

解答)　サイクル $(1\ 2\ 5\ 3)$,$(4\ 8)$,$(6\ 9\ 7)$ の位数はそれぞれ $4, 2, 3$ に等しい. したがって σ の位数は, それらの最小公倍数に等しく, $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(4, 2, 3) = 12$. ■

(d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$

解答)　σ をサイクルの分離積として表すと, $\sigma = (1\ 3\ 4\ 9)(2\ 5\ 8)(6\ 7)$ と表される. したがって $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(4, 3, 2) = 12$. ■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html