代数学2,第5回の内容の理解度チェック

2025/5/19 担当:那須

W 41						I→ 3K1.	
学生証番号					 	点数	
·							

□ 環RとRのイデアルαとbの和α+bと積abを

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{ a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b} \},$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \}$$

によって定義する. $R = \mathbb{Z}$ のとき,以下の \mathfrak{a} と \mathfrak{b} に対し, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, \mathfrak{ab} , $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ を求めよ.

- (1) $\mathfrak{a} = (2), \mathfrak{b} = (3)$
- (2) $\mathfrak{a} = (4), \mathfrak{b} = (6)$
- (3) $\mathfrak{a}=(x),\,\mathfrak{b}=(y),\,(x,y\in\mathbb{Z}_{>0},\,x,y$ は互いに素)
- (4) $\mathfrak{a} = (x), \ \mathfrak{b} = (y), \ (x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

[2] 環Rとそのイデアル \mathfrak{a} , \mathfrak{b} に対し, $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ が成り立つことを示せ.

3 F	₹Rとそのイデアル p に対し, 次が成り立つことを示せ.
	(1) \mathfrak{p} は R の素イデアル \iff 剰余環 R/\mathfrak{p} は整域
	(2) (0) は R の素イデアル \iff 環 R は整域
	$R=\mathbb{Z}$ とし, $x\in\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a}=(x)$ とする. x が素数のとき \mathfrak{a} は極大イデアルであることを示せ. また $=0$ のとき \mathfrak{a} は極大イデアルではないが, 素イデアルであることを示せ.
	体のイデアルは零イデアル (0) と R のみであることを示せ.また環 R が単位元 1 をもつとき, R の $'$ デアルが (0) と R のみならば, R は体であることを示せ.