代数学２，第８回の内容の理解度チェックの解答

2025/6/16　担当：那須

$\boxed{1}$ 次の整域が一位分解整域 (UFD) でないことを示せ.

(1) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

(2) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

(3) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

(解答)

(1) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ において, $4 \in R$ は $4 = 2^2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ と既約元の積に分解されるため, R は UFD でない.

(2) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において, $6 \in R$ は $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ と既約元の積に分解されるため, R は UFD でない.

(3) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ において, $10 \in R$ は $10 = 2 \cdot 5 = (2+\sqrt{-6})(2-\sqrt{-6})$ と既約元の積に分解されるため, R は UFD でない.

$\boxed{2}$ $R = \mathbb{Q}[x]$ とする. 次の $f \in R$ を R の素元の積に分解せよ. すなわち,

$$f(x) = p_1 p_2 \dots p_r,$$

かつ p_i は $\mathbb{Q}[x]$ の素元 (既約元), となるような p_i $(i = 1, \dots, r)$ を求めよ.

(1) $f = x^2 - 2x$

(2) $f = x^2 - 2x + 1$

(3) $f = x^3 + x^2 + x + 1$

(4) $f = x^3 - 3x + 2$

(5) $f = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

(解答)

(1) $f = x(x-2)$

(2) $f = (x-1)^2$

(3) $f = (x+1)(x^2+1)$

(4) $f = (x-1)^2(x+2)$

(5) $f = (x+1)(x+2)(x^2+2)$

$\boxed{3}$ $R = \mathbb{Q}[x]$ とする．次の $f, g \in R$ に対し R における最大公約元 $\gcd(f,g)$ および最小公倍元 $\mathrm{lcm}(f,g)$ を求めよ．

(1) $f = x^2 - 2x,\ g = x^2 - 2x + 1$

(2) $f = x^2 - 2x + 1,\ g = x^3 - 3x + 2$

(3) $f = x^3 - 3x + 2,\ g = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

(**解答**)

(1) $f = x(x-2),\ g = (x-1)^2$ より，

$$\gcd(f,g) = 1, \qquad \mathrm{lcm}(f,g) = fg = x(x-1)^2(x-2).$$

(2) $f = (x-1)^2,\ g = (x-1)^2(x+2)$ より，

$$\gcd(f,g) = (x-1)^2, \qquad \mathrm{lcm}(f,g) = g = (x-1)^2(x+2)$$

(3) $f = (x-1)^2(x+2),\ g = (x+1)(x+2)\,(x^2+2)$ より，

$$\gcd(f,g) = x+2, \qquad \mathrm{lcm}(f,g) = (x-1)^2(x+1)(x+2)(x^2+2)$$

[3]※この講義に関する情報はホームページを参照．https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html