代数学2,第6回の内容の理解度チェックの解答

2025/6/2 担当:那須

 $\boxed{1}$ R,S を環とし, $f:R \to S$ を環の準同型写像とする. 0_S を S の零元とし, f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ は

$$\ker f = \{ a \in R \mid f(a) = 0_S \}$$
$$\operatorname{im} f = \{ f(a) \mid a \in R \}$$

により定義される.

- (1) $\ker f$ が R のイデアルになることを示せ.
- (2) im f は S の部分環になることを示せ.

(解答)

- (1) 任意の $2 \pi a, b \in \ker f$ をとる. $f(a b) = f(a) f(b) = 0_S$ より, $a b \in \ker f$ を得る. 一方 $r \in R$ に対し, $f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0_S = 0_S$ より, $ra \in \ker f$ となる. したがって $\ker f$ は R のイデアルである.
- (2) 任意の $2 \pi f(a)$, $f(b) \in \text{im } f$ をとる. $f(a) f(b) = f(a b) \in \text{im } f$ かつ $f(a)f(b) = f(ab) \in \text{im } f$ と $f(1_R) = 1_S$ より, im f は S の部分環である.
- 2 kを体とし, $a \in k$ とする. k上の1変数多項式環 k[x] から kへの写像 φ を

$$\varphi: k[x] \longrightarrow k, \qquad f(x) \longmapsto f(a)$$

により定める.

- (1) φ が環の準同型写像であることを証明せよ.
- (2) ker φ を求めよ.
- (3) 準同型定理を用いて、

$$k[x]/(x-a) \simeq k$$

を証明せよ.

(解答)

$$\varphi(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

$$\varphi(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \varphi(f)\varphi(g)$$

より φ は環の準同型写像である.

(2) 定義より

$$\ker(\varphi) = \left\{ f \in k[x] \mid f(a) = 0 \right\}$$

となる. 因数定理より $f \in \ker \varphi$ は f(x) が 1 次式 (x-a) で割り切れることと同値である. したがって, $\ker \varphi$ は単項生成イデアル (x-a) に等しい.

(3) φ が全射であることを示す. 任意の $c \in k$ に対し, 定数多項式 f(x) = c を考えれば, $\varphi(f(x)) = \varphi(c) = c$ より, $c \in \text{im} \varphi$ となる. つまり $k \subset \text{im} \varphi$ となり, φ は全射である. (2) より $\ker \varphi = (x-a)$ であるから, 準同型定理より $k[x]/(x-a) \simeq k$ を得る.

環の準同型写像 $f: R \to S$ に対し、

$$\bar{f}: R/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \qquad a + \ker f \longmapsto f(a)$$

は同型写像である.

(解答)

• $(\bar{f}$ がうまく定義されている (well-defined) こと)

 $a + \ker f = b + \ker f \ (a, b \in R)$ とすると, $a - b \in \ker f$ より, $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0_S$, よって f(a) = f(b) を得る. したがって \bar{f} の定義により, $\bar{f}(a + \ker f) = \bar{f}(b + \ker f)$ となり, \bar{f} の定義は $R/\ker f$ の元の代表元の取り方によらない.

(f̄ が準同型写像であること)

f が環準同型であることから従う. 実際, 任意の $a,b \in R$ に対し,

$$\bar{f}((a + \ker f) + (b + \ker f)) = \bar{f}((a + b) + \ker f)$$

$$= f(a + b)$$

$$= f(a) + f(b)$$

$$= \bar{f}(a + \ker f) + \bar{f}(b + \ker f)$$

$$\bar{f}((a + \ker f)(b + \ker f)) = \bar{f}(ab + \ker f)$$

$$= f(ab)$$

$$= f(a)f(b)$$

$$= \bar{f}(a + \ker f)\bar{f}(b + \ker f)$$

のように証明される.

(f̄ が全射であること)

 $b \in \text{im } f$ とする. $a \in R_S$ が存在し, b = f(a) を満たす. $a + \ker f \in R/\ker f$ を考えれば, $\bar{f}(a + \ker f) = f(a) = b$ となり, b は \bar{f} の像に含まれる. したがって, \bar{f} は全射である.

(f̄ が単射であること)

 $\bar{f}(a+\ker f)=0_S$ とする. このとき $f(a)=0_S$ が成り立ち, $a\in\ker f$, すなわち $a+\ker f=\ker f$ となり, $\ker \bar{f}=\{\ker f\}$ となる. したがって \bar{f} は単射である.

^{1※}この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html