

- 1 R, S を環とし, $f: R \rightarrow S$ を環の準同型写像とする. 0_S を S の零元とし, f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ は

$$\begin{aligned}\ker f &= \{a \in R \mid f(a) = 0_S\} \\ \operatorname{im} f &= \{f(a) \mid a \in R\}\end{aligned}$$

により定義される.

- (1) $\ker f$ が R のイデアルになることを示せ.
- (2) $\operatorname{im} f$ は S の部分環になることを示せ.

(解答)

- (1) 任意の2元 $a, b \in \ker f$ をとる. $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0_S$ より, $a - b \in \ker f$ を得る. 一方 $r \in R$ に対し, $f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0_S = 0_S$ より, $ra \in \ker f$ となる. したがって $\ker f$ は R のイデアルである.
- (2) 任意の2元 $f(a), f(b) \in \operatorname{im} f$ をとる. $f(a) - f(b) = f(a - b) \in \operatorname{im} f$ かつ $f(a)f(b) = f(ab) \in \operatorname{im} f$ と $f(1_R) = 1_S$ より, $\operatorname{im} f$ は S の部分環である.

- 2 k を体とし, $a \in k$ とする. k 上の1変数多項式環 $k[x]$ から k への写像 φ を

$$\varphi: k[x] \longrightarrow k, \quad f(x) \longmapsto f(a)$$

により定める.

- (1) φ が環の準同型写像であることを証明せよ.
- (2) $\ker \varphi$ を求めよ.
- (3) 準同型定理を用いて,

$$k[x]/(x - a) \simeq k$$

を証明せよ.

(解答)

- (1) $f, g \in k[x]$ とする.

$$\begin{aligned}\varphi(f + g) &= (f + g)(a) = f(a) + g(a) = \varphi(f) + \varphi(g), \\ \varphi(fg) &= (fg)(a) = f(a)g(a) = \varphi(f)\varphi(g).\end{aligned}$$

より φ は環の準同型写像である.

- (2) 定義より

$$\ker(\varphi) = \{f \in k[x] \mid f(a) = 0\}$$

となる. 因数定理より $f \in \ker \varphi$ は $f(x)$ が1次式 $(x - a)$ で割り切れることと同値である. したがって, $\ker \varphi$ は単項生成イデアル $(x - a)$ に等しい.

- (3) φ が全射であることを示す. 任意の $c \in k$ に対し, 定数多項式 $f(x) = c$ を考えれば, $\varphi(f(x)) = \varphi(c) = c$ より, $c \in \operatorname{im} \varphi$ となる. つまり $k \subset \operatorname{im} \varphi$ となり, φ は全射である. (2) より $\ker \varphi = (x - a)$ であるから, 準同型定理より $k[x]/(x - a) \simeq k$ を得る.

3 環の準同型定理を証明せよ.

準同型定理

環の準同型写像 $f: R \rightarrow S$ に対し,

$$\bar{f}: R/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \quad a + \ker f \mapsto f(a)$$

は同型写像である.

(解答)

• (\bar{f} がうまく定義されている (well-defined) こと)

$a + \ker f = b + \ker f$ ($a, b \in R$) とすると, $a - b \in \ker f$ より, $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0_S$, よって $f(a) = f(b)$ を得る. したがって \bar{f} の定義により, $\bar{f}(a + \ker f) = \bar{f}(b + \ker f)$ となり, \bar{f} の定義は $R/\ker f$ の元の代表元の取り方によらない.

• (\bar{f} が準同型写像であること)

f が環準同型であることから従う. 実際, 任意の $a, b \in R$ に対し,

$$\begin{aligned} \bar{f}((a + \ker f) + (b + \ker f)) &= \bar{f}((a + b) + \ker f) \\ &= f(a + b) \\ &= f(a) + f(b) \\ &= \bar{f}(a + \ker f) + \bar{f}(b + \ker f) \\ \bar{f}((a + \ker f)(b + \ker f)) &= \bar{f}(ab + \ker f) \\ &= f(ab) \\ &= f(a)f(b) \\ &= \bar{f}(a + \ker f)\bar{f}(b + \ker f) \end{aligned}$$

のように証明される.

• (\bar{f} が全射であること)

$b \in \operatorname{im} f$ とする. $a \in R_S$ が存在し, $b = f(a)$ を満たす. $a + \ker f \in R/\ker f$ を考えれば, $\bar{f}(a + \ker f) = f(a) = b$ となり, b は \bar{f} の像に含まれる. したがって, \bar{f} は全射である.

• (\bar{f} が単射であること)

$\bar{f}(a + \ker f) = 0_S$ とする. このとき $f(a) = 0_S$ が成り立ち, $a \in \ker f$, すなわち $a + \ker f = \ker f$ となり, $\ker \bar{f} = \{\ker f\}$ となる. したがって \bar{f} は単射である.