代数学２, 第３回の内容の理解度チェック

2025/4/28 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | 氏名 | 点数 |

$\boxed{1}$ 次の多項式 $f(x), g(x)\mathbb{Z}[x]$ に対し, 多項式の割り算を実行し

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg g(x)$$

を満たす $q(x)$ と $r(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x - 2$

(2) $f(x) = 2x^3 - x + 5,\ g(x) = x + 1$

(3) $f(x) = 2x^5 - x^2 + 5,\ g(x) = x^2 + x + 1$

$\boxed{2}$ $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ を実数係数の多項式とし, $\alpha \in \mathbb{R}$ を実数とするとき次が成り立つことを証明せよ.

因数定理

$f(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow f(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れる

$\boxed{3}$ 次の環 R と R 上の多項式 $f(x) \in R[x]$ に対し, $f(x)$ の R における根, すなわち方程式 $f(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ $(\alpha \in R)$ をすべて求めよ.

(1) $R = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $f(x) = 5x + 37$

(2) $R = \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$

(3) $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 + 1$

(4) $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html