

# Obstructions to deforming curves lying on a $K3$ surface in a Fano 3-fold \*

那須弘和 (Hirokazu NASU) †

## 1 はじめに

射影的代数多様体  $V$  に対し,  $V$  上の非特異連結曲線  $C \subset V$  のヒルベルトスキームを  $\mathrm{Hilb}^{sc} V$  で表す. Mumford [13] は, モジュライ空間の病理 (**pathology**) として,  $V$  が 3 次元射影空間  $\mathbb{P}^3$  の場合に,  $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$  が生成的に被約でない (generically non-reduced) 既約成分を持つことを初めて示した. その後, Kleppe [8], Ellia [1], Gruson-Peskine [5], Fløystad [3], 那須 [14] などにより  $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$  に対し, Mumford の例の様々な一般化が行われた. 近年になって, 向井・那須 [12] では, Mumford の例が詳細に調べられ, 3 次元射影多様体上の曲線の 1 位無限小変形が 2 位変形にリフトする為の障害類を計算する技術が発展し, その結果 Mumford の例は次のように一般化された [12, 定理 1.4].

**定理 1.1.**  $V$  を 3 次元非特異射影多様体とする.  $V$  が次を満たすとき,  $\mathrm{Hilb}^{sc} V$  は (可算無限個の) 生成的に被約でない既約成分を持つ:

- (1)  $V$  上に有理曲線  $E \simeq \mathbb{P}^1$  が存在し, 法束  $N_{E/V}$  が大域切断で生成される.
- (2)  $E \subset S \subset V$  を満たす非特異 (中間) 曲面  $S$  が存在し,  $E$  は  $S$  上の  $(-1)$ -曲線である, すなわち  $E \simeq \mathbb{P}^1$  かつ  $E^2 = -1$  である. さらに,  $p_g(S) = H^1(S, N_{S/V}) = 0$  が成り立つ.

Mumford の例は, 定理において  $V$  が  $\mathbb{P}^3$ ,  $S$  が非特異 3 次曲面,  $E$  が  $S$  上の直線 (27 本の直線のうちの 1 本) の場合になっている. この定理を del Pezzo 多様体 [16] や射影直線束 [15] などに適用することにより, 現在まで多くの 3 次元単線織多様体  $V$  に対し,  $\mathrm{Hilb}^{sc} V$  が生成的に被約でない既約成分を持つことが知られている. 一連の結果から, ヒルベルトス

---

\*研究集会『都の西北 代数幾何学シンポジウム』(平成 28 年 11 月 15 日~11 月 18 日, 早稲田大学) 報告

†東海大学理学部情報数理学科

本研究は科研費基盤研究 (C) 課題番号 25400048 の助成を受けたものです.

スキームの非被約既約成分 (より一般に, 曲線の変形障害) と多様体上の有理曲線との間に興味深い関係があることがわかってきた.

近年では Kleppe-Ottem [9] により, 非特異 4 次 (K3) 曲面上の空間曲線の変形が研究され,  $\text{Hilb}^{\text{sc}} \mathbb{P}^3$  の新しい非被約既約成分が構成された (注意 7.3). この結果を受けて, 本研究ではより一般の設定のもと, すなわち非特異 3 次元 Fano 多様体  $V$  上の曲線  $C \subset V$  が K3 曲面  $S \subset V$  に含まれる場合に,  $C$  の  $V$  における変形について考察する [17]. 本研究開始にあたり, 佐藤栄一氏による質問 (問題 7.5) がもう一つの重要な動機となった. 良く知られているように, K3 曲面上の有理曲線  $E$  ( $E \simeq \mathbb{P}^1$ ) の自己交点数  $E^2$  は  $-2$  に等しく,  $E$  は一般に  $(-2)$ -曲線と呼ばれる. また K3 曲面  $S$  上の楕円曲線  $F$  は,  $S$  に楕円曲面  $S \rightarrow \mathbb{P}^1$  の構造を与え,  $F^2 = 0$  である. K3 曲面上では,  $(-2)$ -曲線と楕円曲線が, Mumford の例における非特異 3 次曲面上の  $(-1)$ -曲線と同様の役割を果たし, ヒルベルトスキーム  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  が生成的に被約でない既約成分を持つことがわかった.

**定理 1.2.**  $V$  を非特異 3 次元 Fano 多様体,  $S \subset V$  を非特異 K3 曲面,  $C \subset S$  を非特異曲線とする.  $S$  上の因子  $D := C + K_V|_S$  が有効であり, さらに,  $S$  の 1 位無限小変形  $\tilde{S}$  でもって,  $C$  のどんな 1 位無限小変形  $\tilde{C}$  も含まないものが存在すると仮定する.

- (1)  $S$  上に  $(-2)$ -曲線も楕円曲線も存在しない, または  $H^1(S, D) = 0$  ならば,  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  は  $[C]$  において非特異である.
- (2)  $D^2 \geq 0$ , さらに  $S$  上の  $(-2)$ -曲線  $E$  でもって  $E \cdot D = -2$  かつ  $H^1(S, D - 3E) = 0$  を満たすものが存在するならば,  $h^1(S, D) = 1$  である. さらに, 法束の射影  $\pi_{E/S} : N_{E/V} \rightarrow N_{S/V}|_E$  によるコホモロジー群の誘導写像

$$\pi_{E/S}(E) : H^0(E, N_{E/V}(E)) \longrightarrow H^0(E, N_{S/V}(E)|_E) \quad (1.1)$$

が全射でないならば,  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  は  $[C]$  において特異である.

- (3)  $S$  上の楕円曲線  $F$  でもって,  $m \geq 2$  に対し  $D \sim mF$  を満たすものが存在すれば,  $h^1(S, D) = m - 1$  である. さらに,  $\pi_{F/S}(F)$  が全射でないならば,  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  は,  $[C]$  において特異である.

つまり  $H^1(S, D) = 0$  ならば,  $C$  は  $V$  上で障害を受けない (**unobstructed**). 一方,  $H^1(S, D) \neq 0$  ならば,  $C$  は  $V$  上で障害を受ける (**obstructed**) ことが, 部分的に示された. 定理 1.2 の仮定の下で,  $V$  のヒルベルト旗スキーム  $\text{HF} V$  (4 節参照) は, 点  $(C, S)$  において非特異であり (補題 5.1), 点  $(C, S)$  を通る  $\text{HF} V$  の唯一の既約成分  $\mathcal{W}_{C,S}$  が存在する. 自然な射  $pr_1 : \text{HF} V \rightarrow \text{Hilb}^{\text{sc}} V$ ,  $(C, S) \mapsto [C]$  による,  $\mathcal{W}_{C,S}$  の像  $W_{C,S}$  は,  $C$  を含む  $S$ -**極大族**と呼ばれる (定義 4.2).  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  の  $[C]$  における接空間  $H^0(C, N_{C/V})$  において,  $W_{C,S}$  の余次元は  $h^1(S, D)$  に等しく, コホモロジー群  $H^1(S, D)$  の元は,  $C$  の 1 位無限小変形のうち,  $S$  のあらゆる 1 位無限小変形から外へ逃れるものに対応する.

**系 1.3.** 定理 1.2 の (1),(2),(3) において, 次が成立する.

- (a)  $h^1(S, D) \leq 1$  ならば,  $W_{C,S}$  は  $(\text{Hilb}^{sc} V)_{\text{red}}$  の既約成分である.
- (b)  $h^1(S, D) = 0$  ならば,  $\text{Hilb}^{sc} V$  は  $W_{C,S}$  に沿って生成的に非特異であり,  $h^1(S, D) = 1$  ならば,  $\text{Hilb}^{sc} V$  は  $W_{C,S}$  に沿って生成的に被約でない.
- (c)  $H^0(S, -D) = 0$  ならば,  $\dim_{[C]} \text{Hilb}^{sc} V = S \cdot (K_V)^2/2 + g + 1$  が成り立つ. ただし  $g$  は  $C$  の種数を表す.

射影多様体  $V$  の部分多様体  $X$  に対し,  $X$  の 1 位無限小変形全体と  $N_{X/V}$  の大域切断全体との間には自然な 1 対 1 対応が存在する.  $\alpha \in H^0(X, N_{X/V})$  に対応する 1 位無限小変形  $\tilde{X}$  が 2 位変形にリフトする為の障害類  $\text{ob}(\alpha)$  は, カップ積

$$H^0(X, N_{X/V}) \times H^0(X, N_{X/V}) \xrightarrow{\cup} H^1(X, N_{X/V}), \quad \alpha \mapsto \alpha \cup \alpha = \text{ob}(\alpha)$$

で与えられる. [12] では, 3 次元射影多様体  $V$  上の曲線  $C \subset V$  と, その 1 位無限小変形  $\tilde{C} \subset V \times \text{Spec } k[t]/(t^2)$  (すなわち  $\alpha \in H^0(C, N_{C/V})$ ) に対し,  $\tilde{C}$  が 2 位変形  $\tilde{\tilde{C}} \subset V \times \text{Spec } k[t]/(t^3)$  にリフトしない (すなわち  $\text{ob}(\alpha) \neq 0$  である) 為の十分条件が与えられた (**障害性定理**). 最近その結果の一般化が得られたので, 3 節で紹介する (定理 3.3). また一般化された障害性定理を, 3 次元 Fano 多様体  $V$  と  $K3$  曲面  $S$  に適用することにより, 主結果の定理 1.2 (2),(3) が証明される (6 節).

## 2 ヒルベルトスキームと無限小変形

まず代数多様体の埋め込み変形に関する基本的事実について整理する. 基礎体  $k$  は代数閉体で, 標数は特に断らない限り一般とする.  $V$  を  $\mathbb{P}^n$  の閉部分スキーム,  $\mathcal{O}_V(1)$  を  $V$  上の豊富な直線束とし,  $X \subset V$  を  $V$  の閉部分スキーム,  $P(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X(n))$  を  $X$  のヒルベルト多項式とする. このとき射影的スキーム  $H$  が存在し,  $V$  の閉部分スキーム  $X'$  でもって,  $X$  と同じヒルベルト多項式を持つものすべてをパラメータ付ける ([4]). このスキーム  $H$  は  $V$  の**ヒルベルトスキーム**と呼ばれ,  $\text{Hilb } V$  または  $\text{Hilb}_P V$  で表される.

$\mathcal{I}_X$  と  $N_{X/V} = (\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2)^\vee$  をそれぞれ  $X$  の定義イデアル層と法層とし,  $X$  に対応する  $\text{Hilb } V$  の点を  $[X]$  で表す. よく知られているように,  $\text{Hilb } V$  の  $[X]$  における接空間は, コホモロジー群  $H^0(X, N_{X/V})$  と同一視され, これは  $\text{Hom}(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$  と同型である.  $X$  を  $V$  内で変形する際の全ての障害  $\text{ob}$  は, コホモロジー群  $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$  に含まれ, 局所完全交叉な  $X$  に対しては,  $\text{ob}$  は (より小さな) 部分群  $H^1(X, N_{X/V})$  に含まれる. ヒルベルトスキームの次元に関し, 不等式

$$h^0(X, N_{X/V}) - h^1(X, N_{X/V}) \leq \dim_{[X]} \text{Hilb } V \leq h^0(X, N_{X/V}) \quad (2.1)$$

が成り立ち, 左辺の値 ( $X$  が曲線なら  $\chi(X, N_{X/V})$  に等しい) は  $\text{Hilb } V$  の  $[X]$  における**期待次元**と呼ばれる. もし  $H^1(X, N_{X/V}) = 0$  ならば,  $\text{Hilb } V$  は  $[X]$  において非特異であり, かつ期待次元を持つ.  $X$  の  $V$  における**1 位無限小変形**とは, 双数環 (ring of dual numbers)  $D = k[t]/(t^2)$  上の  $X$  の変形, すなわち, 平坦な閉部分スキーム  $\tilde{X} \subset X \times \text{Spec } D$  でもって, 中心ファイバー  $\tilde{X}_0$  が  $X$  に等しいものをいう.  $0$  を  $[X]$  に写すような  $\text{Hilb } V$  の  $D$ -値点全体は, ヒルベルトスキームの普遍性 (universal property) により,  $X$  の 1 位無限小変形全体に 1 対 1 に対応する.

次の命題は, 非特異性に関する無限小持ち上げの性質により従う.

**命題 2.1** (cf. [6, Prop. 4.4, Chap. 1]). もし  $\text{Hilb } V$  が  $[X]$  において非特異ならば, 任意の整数  $n \geq 1$  と  $X \subset V$  の任意の  $n$  位無限小変形に対し, それをリフトした  $(n+1)$  位無限小変形が存在する.

この事実により, もし  $X \subset V$  のある 1 位無限小変形  $\tilde{X}$  がどんな 2 位変形  $\tilde{\tilde{X}}$  にもリフトしなければ,  $\text{Hilb } V$  は  $[X]$  において特異であることがわかる.

以下  $X \subset V$  は局所完全交叉と仮定する.  $\tilde{X}$  を  $X \subset V$  の 1 位無限小変形とし,  $\alpha$  を  $\tilde{X}$  に対応する  $N_{X/V}$  の大域切断とする.  $V$  上の標準的な層短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

の定める拡大類を  $\mathbf{e} \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_X)$  とする.  $\alpha$  に対し (すなわち,  $\tilde{X}$  に対し), カップ積  $\text{ob}(\alpha) \in \text{Ext}^1(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$  を

$$\text{ob}(\alpha) := \alpha \cup \mathbf{e} \cup \alpha \quad (2.2)$$

により定義すれば,  $\tilde{X}$  が 2 位変形にリフトする為の必要十分条件は  $\text{ob}(\alpha) = 0$  で与えられる [17, 定理 2.1].  $X$  は局所完全交叉であるので,  $\text{ob}(\alpha)$  は  $H^1(X, N_{X/V})$  に含まれる.  $\text{ob}(\alpha)$  を  $\alpha$  (又は  $\tilde{X}$ ) に対する**第一障害 (primary obstruction)**と呼ぶ.  $\text{Hilb } V$  が  $[X]$  において非特異であるとき,  $X$  は **unobstructed** であるといい, そうでないとき **obstructed** であるという. また  $\text{Hilb } V$  の既約成分  $W$  に対し,  $\text{Hilb } V$  が  $W$  の生成点  $X_\eta$  で非特異であるとき,  $\text{Hilb } V$  は  $W$  に沿って**生成的に非特異 (generically smooth)** といい,  $X_\eta$  で特異であるとき,  $\text{Hilb } V$  は  $W$  に沿って**生成的に被約でない (generically non-reduced)** という.

### 3 障害性定理

向井・那須 [12] では, 非特異 3 次元射影多様体  $V$  上の非特異曲線  $C$  の埋め込み変形について,  $C \subset S \subset V$  を満たす非特異中間曲面  $S$  の存在を仮定して研究が行われた. 特に  $C$

の  $V$  における 1 位無限小変形が 2 位変形ヘリフトしない為の十分条件が与えられた. 本節では, 本結果の一般化について述べる.

$C \subset S \subset V$  を曲線  $C$ , 曲面  $S$ , 3 次元射影多様体  $V$  の旗とし,  $C$  は  $S$  の中で,  $S$  は  $V$  の中で, Cartier 因子であると仮定する.  $\tilde{C}$  を  $C$  の 1 位無限小変形とし, 対応する  $N_{C/V}$  の大域切断を  $\alpha$ , さらに  $\alpha$  の第一障害を  $\text{ob}(\alpha) \in H^1(C, N_{C/V})$  とする. 法束の自然な射影  $\pi_{C/S} : N_{C/V} \rightarrow N_{S/V}|_C$  はコホモロジー群の誘導写像

$$H^i(C, \pi_{C/S}) : H^i(C, N_{C/V}) \longrightarrow H^i(C, N_{S/V}|_C) \quad (i = 0, 1)$$

を定める.

**定義 3.1.**  $H^i(C, \pi_{C/S})$  ( $i = 0, 1$ ) による  $\alpha$  と  $\text{ob}(\alpha)$  の像

$$\pi_{C/S}(\alpha) := H^0(C, \pi_{C/S})(\alpha), \quad \text{および} \quad \text{ob}_S(\alpha) := H^1(C, \pi_{C/S})(\text{ob}(\alpha))$$

を, それぞれ  $\alpha$  と  $\text{ob}(\alpha)$  の**外成分**と呼ぶ.

直感的には,  $\pi_{C/S}(\alpha)$  は  $\tilde{C}$  に対し,  $S$  の法線方向への変形を抽出し,  $\text{ob}_S(\alpha)$  はその変形に付随する障害を表している.

$E \subset S$  を  $S$  上の有効 Cartier 因子とし,  $m \geq 1$  を整数とする. ここで  $E$  は特に既約 (曲線) とは限らない.  $S$  上の直線束の単射  $\mathcal{O}_S(mE) \hookrightarrow \mathcal{O}_S((m+1)E)$  は, コホモロジー群の写像

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(mE)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E)) \quad (3.1)$$

を誘導する. 以下では任意の  $m \geq 1$  に対し, この写像が単射であると仮定し, その結果として, 開曲面  $S^\circ := S \setminus E$  に対し,  $H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$  上には自然なフィルトレーション  $H^1(S, E) \subset H^1(S, 2E) \subset \cdots \subset H^1(S, mE) \subset \cdots \subset H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$  が入る.

**定義 3.2.** ( $E$  に沿って  $m$  位の極を持つ)  $N_{S/V}$  の有理切断

$$\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE)) \setminus H^0(S, N_{S/V}(m-1)E)$$

を  $S$  の ( $E$  に沿って  $m$  位の) **極付き無限小変形**と呼ぶ.

$S$  の任意の極付き無限小変形は, 自然な単射  $H^0(S, N_{S/V}(mE)) \hookrightarrow H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$  により,  $S^\circ$  の  $V^\circ := V \setminus E$  における 1 位無限小変形を誘導する.

$\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$  を  $S$  の極付き無限小変形とする. このとき, その主要部, すなわち,  $\beta$  の  $E$  への制限  $\beta|_E \in H^0(E, N_{S/V}(mE)|_E)$  を考える.  $\beta|_E$  は  $E$  の法束 (達) から定まる短完全列

$$[0 \longrightarrow \underbrace{N_{E/S}}_{\simeq \mathcal{O}_E(E)} \longrightarrow N_{E/V} \longrightarrow N_{S/V}|_E \longrightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_S(mE) \quad (3.2)$$

の余境界写像  $\partial_E$  により,

$$H^1(E, N_{E/S}(mE)) \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E))$$

の元  $\partial_E(\beta|_E)$  に写される.

次の定理は [12, 定理 2.2] の一般化であり,  $C$  の  $V$  における 1 位無限小変形  $\tilde{C} \subset V \times \text{Spec } k[t]/(t^2)$  に対し,  $\tilde{C}$  がどんな 2 位変形  $\tilde{\tilde{C}} \subset V \times \text{Spec } k[t]/(t^3)$  にもリフトしない為の十分条件を与える.

**定理 3.3 (障害性定理).**  $\alpha$  を  $N_{C/V}$  の大域切断とし,  $m \geq 1$  を整数とする.  $\alpha$  の外成分  $\pi_{C/S}(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}|_C)$  が  $S$  の極付き無限小変形  $\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$  にリフトする, すなわち,

$$\pi_{C/S}(\alpha) = \beta|_C \in H^0(C, N_{S/V}(mE)|_C)$$

が成り立ち, さらに次の条件が満たされれば,  $\text{ob}(\alpha)$  の外成分  $\text{ob}_S(\alpha)$  は零でない.

(a)  $\Delta := C + K_V|_S - 2mE$  を  $S$  上の因子とする. このとき, 制限写像  $H^0(S, \Delta) \xrightarrow{|_E} H^0(E, \Delta|_E)$  は全射である.

(b)  $(E \text{ 上の })$  カップ積  $m\partial_E(\beta|_E) \cup \beta|_E$  が消えない. ただしカップ積  $\cup$  は次の写像で定義される:

$$H^1(\mathcal{O}_E((m+1)E)) \times H^0(N_{S/V}(mE - C)|_E) \xrightarrow{\cup} H^1(N_{S/V}((2m+1)E - C)|_E).$$

つまり  $C$  上のカップ積  $(\text{ob}(\alpha) \equiv \alpha^2)$  の計算が,  $E$  上のカップ積  $(\equiv (\beta|_E)^2)$  に帰着する.

**注意 3.4.** (1)  $\alpha$  と  $\beta|_E$  の間の関係が見えにくいので, 図 1 に関係を図示する.

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(N_{C/V}) & \ni & \alpha & & & & H^0(N_{E/V}(mE)) \\ \downarrow \pi_{C/S} & & \downarrow & & & & \downarrow \pi_{E/S}(mE) \\ H^0(N_{S/V}|_C) & \ni & \beta|_C & \xleftarrow{res} & \beta & \xrightarrow{res} & \beta|_E \in H^0(N_{S/V}(mE)|_E) \\ \cap & & & & \cap & & \downarrow \partial_E \\ H^0(N_{S/V}(mE)|_C) & \xleftarrow{res} & H^0(N_{S/V}(mE)) & & \partial_E(\beta|_E) & \in & H^1(\mathcal{O}_E((m+1)E)) \end{array}$$

図 1:  $\alpha, \beta|_E, \partial(\beta|_E)$  の関係

(2) [12, 定理 2.2] では,  $E$  は非特異既約かつ  $E^2 < 0$ , さらに  $m = 1$  と仮定されていたが, これを上記の形に一般化した.

(3) 定理の応用において,  $E$  は必ずしも  $(-1)$ -曲線である必要はない. 例えば,  $K3$  曲面  $S$  への応用があり,  $E$  が  $(-2)$ -曲線 ( $E^2 = -2$ ) や楕円曲線 ( $E^2 = 0$ ) の場合にも適用される (§5).

(4) [17, Thm. 3.3] では, さらに  $\beta$  の極  $E$  が可約である場合や, 重複成分を持つ場合において, 定理の精密化が行われている.

射影多様体  $V$  に対し,  $V$  の有効 Cartier 因子のヒルベルトスキームを  $\mathrm{Hilb}^{cd} V$  で表す.  $V$  の超曲面  $S \subset V$  に対し,  $S$  の Picard スキーム  $\mathrm{Pic} S$  への射 (Hilbert-Picard morphism) を

$$\psi_S : \mathrm{Hilb}^{cd} V \longrightarrow \mathrm{Pic} S, \quad S' \subset V \longmapsto \mathcal{O}_V(S')|_S$$

により定義する.  $\psi_S$  の  $[S]$  における接写像

$$d_S : H^0(S, N_{S/V}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S)$$

は  $S \subset V$  に対する  $d$ -map と呼ばれる. この  $d$ -map は,  $S$  上の有効因子  $E$  に対し写像 (3.1) が単射であるとき, **極付き  $d$ -map**

$$d_{S^\circ} : H^0(S, N_{S/V}(mE)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E))$$

へと自然に拡張される. このとき,  $d_{S^\circ}$  の像を極  $E$  の近傍で計算することにより次の補題を得る.

**補題 3.5** (鍵補題).  $\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$  とする. 像  $d_{S^\circ}(\beta) \in H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E))$  の主要部  $d_{S^\circ}(\beta)|_E \in H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E))$  に対し,

$$d_{S^\circ}(\beta)|_E = m\partial_E(\beta|_E).$$

**定理 3.3 の証明の方針** 直接  $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$  を示すのではなく, 自然な全射  $H^1(C, N_{S/V}|_C) \twoheadrightarrow H^1(C, N_{S/V}((m+1)E)|_C)$  による  $\mathrm{ob}_S(\alpha)$  の像  $\overline{\mathrm{ob}_S(\alpha)}$  の非零を示す. カップ積による表示  $\overline{\mathrm{ob}_S(\alpha)} = d_{S^\circ}(\beta) \cup \pi_{C/S}(\alpha)$  を用いると, 補題 3.5 により,  $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$  の証明は, 定理のカップ積  $m\partial_E(\beta) \cup \beta|_E$  の非零へと帰着される.  $\square$

## 4 ヒルベルト旗スキーム

$V$  を射影多様体とする.  $V$  の閉部分スキームの旗  $C \subset S \subset V$  をパラメータ付ける射影スキームが存在し,  $V$  の **ヒルベルト旗スキーム** (Hilbert-flag scheme) と呼ばれる. 存在性や局所的性質など詳細については [7, 8, 6, 18]などを参照されたい. ヒルベルトスキーマ

ムと同様に,  $C$  と  $S$  のヒルベルト多項式  $P, Q$  を固定した旗スキームを  $\mathrm{HF}_{P,Q} V$  で表し,  $\bigsqcup_{P,Q} \mathrm{HF}_{P,Q} V$  を  $\mathrm{HF} V$  で表す. ヒルベルト (旗) スキームの自然な図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HF}_{P,Q} V & \xrightarrow{pr_2} & \mathrm{Hilb}_Q V \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \\ \mathrm{Hilb}_P V & & C \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc} (C, S) & \mapsto & S \\ \downarrow & & \\ & & C \end{array} \right),$$

が存在し,  $pr_i (i = 1, 2)$  は  $\mathrm{Hilb} V$  への射影を表す.  $\mathrm{HF} V$  の点  $(C, S)$  における接空間  $A^1(C, S)$  は,  $[C]$  と  $[S]$  における  $\mathrm{Hilb} V$  の接空間の  $(H^0(C, N_{S/V}|_C)$  上の) ファイバー積

$$\begin{array}{ccc} A^1(C, S) & \xrightarrow{p_1} & H^0(S, N_{S/V}) \\ \downarrow p_2 & \square & \downarrow \rho \\ H^0(C, N_{C/V}) & \xrightarrow{\pi_{C/S}} & H^0(C, N_{S/V}|_C), \end{array} \quad (4.1)$$

として定義される. ただし,  $\rho$  は制限写像を表し,  $p_i (i = 1, 2)$  は  $pr_i$  の接写像を, そして  $\pi_{C/S}$  は法束の射影を表す. 以下  $C$  と  $S$  はともに非特異であり,  $H^1(S, N_{S/V}) = 0$  と仮定する. 短完全列  $0 \rightarrow N_{C/S} \rightarrow N_{C/V} \rightarrow N_{S/V}|_C \rightarrow 0$  の余境界写像  $\partial_{C/S} : H^0(C, N_{S/V}|_C) \rightarrow H^1(C, N_{C/S})$  と  $\rho$  との合成  $\partial_{C/S} \circ \rho$  により, 写像  $\alpha_{C/S} : H^0(S, N_{S/V}) \rightarrow H^1(C, N_{C/S})$  を定義すれば,  $\alpha_{C/S}$  の余核

$$A^2(C, S) := \mathrm{coker} \alpha_{C/S} \quad (4.2)$$

は  $\mathrm{HF} V$  の  $(C, S)$  における**障害空間 (obstruction space)** となる. また, ヒルベルトスキームに対する次元評価式 (2.1) と同様に, 不等式

$$\dim A^1(C, S) - \dim A^2(C, S) \leq \dim_{(C,S)} \mathrm{HF} V \leq \dim A^1(C, S) \quad (4.3)$$

が成り立ち ([8, §2] 参照), ヒルベルト (旗) スキームの接空間と障害空間を関連づける完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes N_{S/V}) &\longrightarrow A^1(C, S) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/V}) \\ &\longrightarrow \mathrm{coker} \rho \longrightarrow A^2(C, S) \longrightarrow H^1(C, N_{C/V}) \longrightarrow H^1(C, N_{S/V}|_C) \end{aligned} \quad (4.4)$$

が存在する. 以上より, 次の事実が導かれる.

**補題 4.1** ([8, 9]). (1)  $\rho$  が全射ならば,  $pr_1 : \mathrm{HF} V \rightarrow \mathrm{Hilb} V$ ,  $(C, S) \mapsto C$  は  $(C, S)$  において非特異である.

(2)  $H^0(S, N_{S/V}(-C)) = 0$  ならば,  $pr_1$  は  $(C, S)$  において局所埋め込みである.



(3)  $\dim C = 1, \dim S = 2$  かつ,  $H^i(S, N_{S/V}) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) ならば

$$\begin{aligned} \dim A^1(C, S) - \dim A^2(C, S) &= \chi(C, N_{C/V}) + \chi(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes N_{S/V}) \\ &= \chi(C, N_{C/S}) + \chi(S, N_{S/V}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

右辺は HF  $V$  の期待次元と呼ばれる.

**定義 4.2.** HF  $V$  が点  $(C, S)$  において非特異であるとし,  $(C, S)$  を通る HF  $V$  の既約成分を  $\mathcal{W}_{C,S}$  とする. 射影  $pr_1$  による  $\mathcal{W}$  の像  $W = pr_1(\mathcal{W}) \subset \text{Hilb}^{sc} V$  を  $(C$  を含む) $S$ -極大族と呼ぶ.

## 5 $K3$ 曲面上の曲線の変形障害

前節の設定で,  $V$  を非特異 3 次元 Fano 多様体,  $S$  を非特異  $K3$  曲面,  $C$  は非特異曲線とする.  $K_S$  は自明なので, 随伴公式により  $N_{C/S} \simeq K_C$  と  $N_{S/V} \simeq -K_V|_S$  となる. 特に  $H^1(C, N_{C/S}) \simeq k$  かつ  $H^i(S, N_{S/V}) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) を得る. 以下では,  $S$  の 1 位無限小変形  $\tilde{S}$  でもって,  $C$  のどんな 1 位無限小変形  $\tilde{C}$  も含まないものが存在すると仮定する. 図式 (4.1) は Cartesian なので, このとき次が成り立つ.

**補題 5.1.**  $A^2(C, S) = 0$  である. 特に HF  $V$  は  $(C, S)$  において非特異, かつ期待次元  $(K_V|_S)^2/2 + g + 1$  を持つ. ただし  $g$  は曲線  $C$  の種数を表す.

したがって,

$$0 \longrightarrow H^0(S, N_{S/V}(-C)) \longrightarrow A^1(C, S) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/V}) \longrightarrow \text{coker } \rho \longrightarrow 0 \quad (5.1)$$

は完全であり, 接写像  $p_1$  の核と余核はそれぞれ  $H^0(S, -D)$  と  $\text{coker } \rho$  に等しい (cf. (4.4)). ここで  $S$  上の因子  $D$  を  $D := C + K_V|_S$  で定義し,  $D \geq 0$  を仮定する. 完全列  $[0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0] \otimes N_{S/V}$  と  $H^1(S, N_{S/V}) = 0$  により,  $\text{coker } \rho \simeq H^1(S, N_{S/V}(-C)) \simeq H^1(S, -D) \simeq H^1(S, D)^\vee$  が成り立つ. したがって,  $H^1(S, D) = 0$  のとき, 補題 4.1(1) により,  $\text{Hilb } V$  は  $C$  において非特異である. したがって, 定理 1.2 (1) が示された.

**注意 5.2.**  $K3$  曲面上の直線束  $L$  に対し,  $H^1(L) \neq 0$  であるための条件は良く知られている (cf. [10]). 非特異  $K3$  曲面  $X$  上の直線束  $L$  が  $L > 0$  かつ  $L^2 \geq 0$  を満たすとき,  $H^1(X, L) \neq 0$  は次と同値である:

- (1)  $X$  上の有効因子  $\Delta$  が存在し,  $\Delta^2 = -2$  かつ  $L \cdot \Delta \leq -2$ , または
- (2)  $X$  上のネフかつ原始的な有効因子  $F$  が存在し,  $F^2 = 0$  かつ  $L \sim nF$  ( $n \geq 2$ ).

$X$  上に  $(-2)$ -曲線も楕円曲線も存在しなければ,  $X$  上の任意の因子  $D \geq 0$  に対し  $H^1(X, D) = 0$  である. このとき  $X$  の有効錐体  $\text{NE}(X)$  は  $X$  の豊富錐体  $\text{Amp}(X)$  に一致する. 逆に,  $X$  上の有理曲線  $E$  に対し  $D \cdot E \leq -2$  となる場合や,  $X$  上の楕円曲線  $F$  に対し  $D \sim mF$  ( $m \geq 2$ ) となる場合に  $H^1(X, D) \neq 0$  となる.

## 6 定理 1.2 の証明

以下では基礎体  $k$  の標数を 0 と仮定する. 定理 1.2 (2) の証明の概略は以下の通りである.  $D \geq 0$  かつ  $D \neq 0$  より,  $H^0(S, -D) = 0$ . よって, 完全列  $0 \rightarrow A^1(C, S) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/V}) \rightarrow H^1(S, -D) \rightarrow 0$  が存在する. 簡単な計算より  $H^1(S, -D) \simeq k$  かつ  $H^1(S, -D + E) = 0$  であることがわかる. 特に  $p_1$  は全射でないので,  $p_1$  の像に含まれないような  $N_{C/V}$  の大域切断  $\alpha$  が存在する. このとき次が成り立つ.

**主張 6.1.**  $\alpha \notin \text{im } p_1$  ならば,  $\text{ob}_S(\alpha) \neq 0$ .

従って  $\alpha$  に対応する  $C$  の 1 位無限小変形  $\tilde{C}$  は, 如何なる 2 位無限小変形  $\tilde{\tilde{C}}$  にもリフトせず, 命題 2.1 により,  $\text{Hilb } V$  が  $[C]$  において特異であることが従う. 主張 6.1 の証明には, 極付無限小変形 (定義 3.2) の議論を用いる.  $\alpha$  の外成分  $\pi_{C/S}(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}|_C)$  (定義 3.1) を, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \rightarrow & H^0(S, -D + E) & \xrightarrow{|_E} & H^0(E, \mathcal{O}_E(-D + E)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(S, N_{S/V}) & \rightarrow & H^0(S, N_{S/V}(E)) & \xrightarrow{|_E} & H^0(E, N_{S/V}(E)|_E) \\
\downarrow |_C & & \downarrow |_C & & \downarrow |_C \\
H^0(C, N_{S/V}|_C) & \rightarrow & H^0(C, N_{S/V}(E)|_C) & \xrightarrow{|_E} & k(C \cap E) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(S, -D) \simeq k & \rightarrow & H^1(S, -D + E) = 0 & & 
\end{array}$$

上で追跡すれば,  $E$  に沿って極を持つ  $S$  の極付き無限小変形  $\beta \in H^0(S, N_{S/V}(E))$  にリフトすることがわかる.  $\beta$  に対し定理 3.3 を適用すれば, 最終的に  $\text{ob}_S(\alpha) \neq 0$  を得る.

定理 1.2 (3) の証明についても同様に, やはり  $S$  の極付無限小変形を考察することにより, 定理 3.3 を用いて証明される.  $\square$

## 7 例と応用

定理 1.2 と系 1.3 を 4 次曲面上の曲線に応用する. 前節までの設定で,  $V$  を  $\mathbb{P}^3$ , または非特異 4 次超曲面  $V_4 \subset \mathbb{P}^4$  とし,  $S$  を非特異 4 次曲面  $S \subset \mathbb{P}^3$ , または  $V_4$  の非特異超平面切断と

する. 良く知られているように,  $S$  は  $K3$  曲面であり,  $S$  が一般ならば,  $S$  の Picard 群  $\text{Pic } S$  は  $S$  の超平面切断類  $\mathbf{h}$  で生成され,  $C$  は  $S$  上の完全交叉になる.  $V = \mathbb{P}^3$  の場合は, このとき  $C$  は数値的 Cohen-Macaulay 曲線と呼ばれる良い曲線のクラスに属し, Ellingsrud [2] の結果により,  $C$  は障害を受けない (unobstructed). 障害を受ける曲線 (族) を構成するためには, Picard 数が 2 以上の 4 次曲面を用いる.

**例 7.1.** 次の例において,  $W$  の閉包  $\overline{W}$  は,  $(\text{Hilb}^{\text{sc}} V)_{\text{red}}$  の既約成分を成し,  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  は  $W$  に沿って, 生成的に被約でない (generically non-reduced). 実際,  $W$  の生成点に  $[C_\eta]$  において,  $h^0(C, N_{C/V}) = \dim W + 1$  となる.

- (1)  $V$  を非特異 4 次超曲面  $V_4 \subset \mathbb{P}^4$  とし,  $E$  を  $V$  上の円錐曲線でもって自明な法束  $N_{E/V} \simeq \mathcal{O}_E^2$  を持つもの,  $S$  を  $E$  を含む  $V$  の超平面切断でもって  $\text{Pic } S = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}E$  を満たすものとする ( $\mathbf{h} \sim \mathcal{O}_S(1)$ ). このとき,  $S$  上の完備線形系  $|2\mathbf{h} + 2E|$  の一般元  $C$  は,  $S$  上の次数 12, 種数 13 の非特異連結曲線を定める. このような曲線  $C$  は  $\text{Hilb}^{\text{sc}} V$  の既約な 16 次元局所閉部分集合  $W$  によりパラメータ付けられる.
- (2)  $V = \mathbb{P}^3$  とし,  $F \subset \mathbb{P}^3$  を非特異 3 次楕円曲線,  $S \subset \mathbb{P}^3$  を  $F$  を含む非特異 4 次曲面とする. このとき,  $S$  上の完備線形系  $|4\mathbf{h} + 2F|$  ( $\mathbf{h} \sim \mathcal{O}_S(1)$ ) の一般元  $C$  は,  $S$  上の次数 22, 種数 57 の非特異連結曲線を定める. このような曲線  $C$  は  $\text{Hilb}^{\text{sc}} \mathbb{P}^3$  の既約な 90 次元局所閉部分集合  $W$  によりパラメータ付けられる.

Picard 数 2 の非特異 4 次曲面  $S$  とその上の非特異曲線  $C$  の対  $(C, S)$  の存在については, 次の結果が有名である.

**命題 7.2** (森 [11]). (1)  $d > 0, g \geq 0$  を整数とする. 非特異 4 次曲面に含まれるような種数  $g$  の  $d$  次非特異曲線  $C \subset \mathbb{P}^3$  が存在するためには, (i)  $g = d^2/8 + 1$ , または (ii)  $g < d^2/8$  かつ  $(d, g) \neq (5, 3)$  が必要十分である.

- (2) 非特異 4 次曲面  $S_0 \subset \mathbb{P}^3$  上に非特異曲線  $C_0 \subset S_0$  が存在すれば, 非特異 4 次曲面  $S_1 \subset \mathbb{P}^3$  と,  $C_0$  と同次同種数の非特異曲線  $C_1 \subset S_1$  が存在し,  $\text{Pic } S_1$  が超平面切断類  $\mathbf{h}$  と  $C_1$  で生成される.

**注意 7.3.** Kleppe-Ottem [9] においても, 4 次曲面上の空間曲線の変形が研究された. 特に, 非特異 4 次曲面  $S \subset \mathbb{P}^3$  でもって, (i) 直線  $E$  を含み, かつ (ii)  $S$  の Picard 数が 2 に等しく, (iii)  $\text{Pic } S = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}E$  を満たす ( $\mathbf{h} \sim \mathcal{O}_S(1)$ ) ものに対し,  $S$  上の非特異曲線  $C$  の変形の障害性が詳細に調べられている.

例 7.1 (1) において,  $n = 3, 4, \dots$  に対し完備線形系  $|n(\mathbf{h} + E)|$  の一般元  $C$  を考えれば, 例と同様に,  $C$  は  $S$  上の非特異連結曲線となり, 次数は  $6n$ , 種数は  $3n^2 + 1$  に等しい.  $C$  を

含む  $S$ -極大族  $W_n$  は  $\mathrm{Hilb}^{sc} V_4$  の生成的に被約でない既約成分となる ( $\dim W_n = 3n^2 + 4$ ). 以上により, 次の定理を得る.

**定理 7.4.**  $V_4 \subset \mathbb{P}^4$  を非特異 4 次超曲面とする. このとき,  $\mathrm{Hilb}^{sc} V_4$  は可算無限個の生成的に被約でない既約成分を含む.

佐藤栄一氏によって与えられた次の問題に対し,  $V = V_4$  の場合の肯定的な解答が得られた.

**問題 7.5** (佐藤 2007).  $V$  が指数 1 の非特異 3 次元 Fano 多様体のとき,  $\mathrm{Hilb}^{sc} V$  は生成的に被約でない既約成分を含むか?

Fano 指数が 2 に等しい場合 (すなわち, del Pezzo 3-fold の場合) の同問題に対しては, [16] において, 肯定的な解答が与えられている.

**謝辞** 都の西北代数幾何学シンポジウムを企画していただいた楫元先生と早稲田大学の代数幾何研究グループのみなさまに感謝します.

## 参考文献

- [1] P. Ellia. D'autres composantes non réduites de  $\mathrm{Hilb} \mathbf{P}^3$ . *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.
- [2] G. Ellingsrud. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans  $\mathbf{P}^e$  à cône de Cohen-Macaulay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):423–431, 1975.
- [3] G. Fløystad. Determining obstructions for space curves, with applications to nonreduced components of the Hilbert scheme. *J. Reine Angew. Math.*, 439:11–44, 1993.
- [4] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6, no. 221*. 1960.
- [5] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):401–418, 1982.
- [6] R. Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.
- [7] J. O. Kleppe. The Hilbert-flag scheme, its properties and its connection with the Hilbert scheme. Applications to curves in 3-space. Preprint (part of thesis), Univ. of Oslo, <http://www.iu.hio.no/~jank/papers.htm>, 3 1981.

- [8] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.
- [9] J. O. Kleppe and J. C. Ottem. Components of the Hilbert scheme of space curves on low-degree smooth surfaces. *Internat. J. Math.*, 26(2):1550017, 30, 2015.
- [10] A. L. Knutsen and A. F. Lopez. A sharp vanishing theorem for line bundles on  $K3$  or Enriques surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(11):3495–3498, 2007.
- [11] S. Mori. On degrees and genera of curves on smooth quartic surfaces in  $\mathbf{P}^3$ . *Nagoya Math. J.*, 96:127–132, 1984.
- [12] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford’s example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.
- [13] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.
- [14] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(1):117–141, 2006.
- [15] H. Nasu. Deformations of degenerate curves on a Segre 3-fold. In *Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, pages 163–174. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.
- [16] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.
- [17] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. III. Deformations of curves lying on a  $K3$  surface. preprint, arXiv:1601.07301, 2016.
- [18] E. Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

〒 259-1292, 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 東海大学理学部情報数理学科  
*e-mail address* : nasu@tokai-u.jp