# 代数学２, 第６回の内容の理解度チェック

2025/6/2 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | | 氏名 | 点数

$\boxed{1}$ $R, S$ を環とし, $f : R \to S$ を環の準同型写像とする. $0_S$ を $S$ の零元とし, $f$ の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ は

$$\ker f = \left\{ a \in R \;\middle|\; f(a) = 0_S \right\}$$
$$\operatorname{im} f = \left\{ f(a) \;\middle|\; a \in R \right\}$$

により定義される.

(1) $\ker f$ が $R$ のイデアルになることを示せ.

(2) $\operatorname{im} f$ は $S$ の部分環になることを示せ.

$\boxed{2}$ $k$ を体とし, $a \in k$ とする. $k$ 上の１変数多項式環 $k[x]$ から $k$ への写像 $\varphi$ を

$$\varphi : k[x] \longrightarrow k, \qquad f(x) \longmapsto f(0)$$

により定める.

(1) $\varphi$ が環の準同型写像であることを証明せよ.

(2) $\ker \varphi$ を求めよ.

(3) 準同型定理を用いて,

$$k[x]/(x - a) \simeq k$$

を証明せよ.

$\boxed{3}$ 環の準同型定理を証明せよ．

**準同型定理**

環の準同型写像 $f : R \to S$ に対し，

$$\bar{f} : R/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \qquad a + \ker f \longmapsto f(a)$$

は同型写像である．

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照．https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2025/alg2.html