線形代数 1, 第 10 回の内容の理解度チェック (解答)

2024/6/27 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i,j \leq 3)$ を全て求めよ. (9 点)

$$\Delta_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\Delta_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

よって

$$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 12 \\ -6 & 4 & -9 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 次の行列式を計算せよ. (各 2 点)

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} 0\Delta_{12} - 2\Delta_{22} + 0\Delta_{32} = -2\Delta_{22} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2(2 \times 5 - 1 \times 3) = -14.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=\!=\!=} (-3)\Delta_{41} = (-3) \times \left(-\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = 3\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{3}\text{で展開}}{=\!=\!=} 3 \times 3 \left(-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = -9 \times (1 \times (-1) - (-3) \times 2) = -45.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{④+①}{\overset{③-2\times①}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{③+①}{\overset{②-①}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 = 4$$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/la1.html