代数学１，第６回の内容の理解度チェックの解答

2024/11/7　担当：那須

$\boxed{1}$ 次の 3 変数多項式 $f(x,y,z)$ を基本対称式 $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+yz+zx$, $\sigma_3 = xyz$ を用いて表せ.

(1) $f(x,y,z) = (x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3$

解答)　a, b, c を定数とし,

$$f(x,y,z) = a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$$

とおく.

- 両辺に $x=1, y=0, z=0$ を代入すると $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ より,

$$1+0+1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1\cdot 0 + c\cdot 0.$$

よって $a=2$ を得る.

- 両辺に $x=1, y=1, z=0$ を代入すると $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$ より,

$$2^3+1+1 = a\cdot 2^3 + b\cdot 2\cdot 1 + c\cdot 0.$$

よって $10 = 8a+2b$ となり, $a=2$ から $b=-3$ が従う.

- 両辺に $x=1, y=-1, z=1$ を代入すると $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$ より,

$$0^3+0^3+2^3 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1\cdot(-1) + c\cdot(-1).$$

よって $8 = 2-(-3)-c$ となり, これを解いて $c=-3$ を得る.

したがって $f(x,y,z) = 2\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ と表される. ■

(2) $f(x,y,z) = (x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4$

解答)

$$f(x,y,z) = a\sigma_1^4 + b\sigma_1^2\sigma_2 + c\sigma_2^2 + d\sigma_1\sigma_3 \qquad (a,b,c,d \text{ は定数})$$

とおく.

- $x=1, y=z=0$ を代入する $(\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$

$$1^4+0^4+(-1)^4 = a\cdot 1^4 + b\cdot 1^2\cdot 0 + c\cdot 0^2 + d\cdot 1\cdot 0$$

より $a=2$ を得る.

- $x=1, y=1, z=0$ を代入する $(\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0)$

$$0^4+1^4+(-1)^4 = a\cdot 2^4 + b\cdot 2^2\cdot 1 + c\cdot 1^2 + d\cdot 2\cdot 0$$

より $16a+4b+c = 2$ が満たされる.

- $x=1, y=-1, z=0$ を代入する $(\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = 0)$

$$2^4+(-1)^4+(-1)^4 = a\cdot 0^4 + b\cdot 0^2\cdot(-1) + c\cdot(-1)^2 + d\cdot 0\cdot 0$$

より $c=18$ を得る.

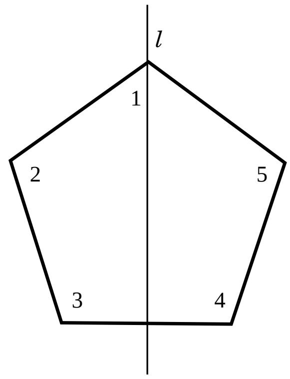
- $x=1, y=-1, z=1$ を代入する $(\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1)$

$$2^4+(-2)^4+0^4 = a\cdot 1^4 + b\cdot 1^2\cdot(-1) + c\cdot(-1)^2 + d\cdot 1\cdot(-1)$$

より $a-b+c-d = 32$ が満たされる.

これらの a,b,c,d に関する連立方程式を解けば, $a=2, b=-12, c=18, d=0$ を得る. したがって $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4 = 2\sigma_1^4 - 12\sigma_1^2\sigma_2 + 18\sigma_2^2$ と表される. ■

$\boxed{2}$ 右の正五角形を, 垂直軸 l に関し対称移動し, 中心の周りに角度 $72°(=2\pi/5)$ の回転移動 (反時計回り) をし, 再び l に関し対称移動するという操作を 1 回の操作とする. 右のように頂点に数字を並べた状態から始めて, この操作を n 回繰り返すとき, もとの数字の状態に戻るまでに必要な最小の操作回数 n(自然数 n) を求めよ.



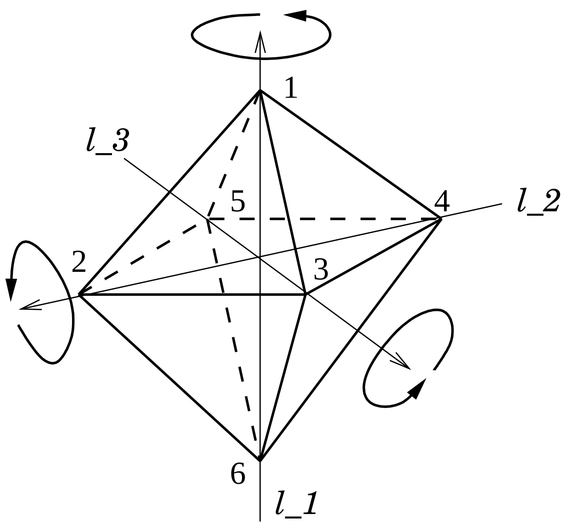
解答) ℓ に関する対称移動は互換の積 $(2\ 5)(3\ 4)$ に対応し, $72°(=2\pi/5)$ の回転移動は巡回置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ に対応する.

問題文の 1 回の操作に対応する置換の積は

$$(2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 5)(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

に等しい. 巡回置換 $(1\ 5\ 4\ 3\ 2)$ の位数は 5 に等しいので求める n は $n=5$ となる. ■

$\boxed{3}$ 右の正八面体を, 垂直軸 l_1 を中心に 90° 回転移動し, 続けて図の水平軸 l_2 を中心に 90° 回転移動し, さらに図の水平軸 l_3 を中心に 90° 回転移動するという操作を 1 回の操作とする. ただし, いずれの回転移動も矢印に向かって右ねじ (図の方向) の方向に回転する. 右のように頂点に数字を並べた状態から始めて, この操作を n 回繰り返すとき, もとの数字の状態に戻るまでに必要な最小の操作回数 n(自然数 n) を求めよ.



解答) 直線 ℓ_i $(i=1,2,3)$ を中心とする $90°$ $(=\pi/2)$ の回転移動が誘導する頂点の置換はそれぞれ以下のようになる:

$$\begin{array}{lcl} \ell_1 \text{ 中心の回転} & \longleftrightarrow & (2\ 3\ 4\ 5) \\ \ell_2 \text{ 中心の回転} & \longleftrightarrow & (1\ 5\ 6\ 3) \\ \ell_3 \text{ 中心の回転} & \longleftrightarrow & (1\ 2\ 6\ 4) \end{array}$$

したがって問題文の 1 回の操作に対応する置換は

$$(1\ 2\ 6\ 4)(1\ 5\ 6\ 3)(2\ 3\ 4\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 6\ 3)$$

に等しい. 巡回置換 $(1\ 5\ 6\ 3)$ の位数は 4 に等しいため, 求める最小の操作回数 n は $n=4$ となる. ■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html