# 代数学１，第２回の内容の理解度チェックの解答

2024/10/3　担当：那須

$\boxed{1}$ 3次対称群 $S_3$ の元を全て書け．

**解答)**　3次対称群の元は $1,2,3$ の順列に対応するので，列挙すると

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の合計6つとなる (列挙する順番は任意で構わない)． ■

$\boxed{2}$ 4次対称群 $S_4$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，以下を計算せよ．

(1) 積 $\sigma\tau$

**解答)**　$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ■

(2) 積 $\tau\sigma$

**解答)**　$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ■

(3) 逆置換 $\tau^{-1}$

**解答)**　$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ■

(4) 積 $\sigma^2$

**解答)**　$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ■

(5) 値 $\sigma^{-1}(2)$

**解答)**　$\sigma$ によって2にうつる数は4なので，$\sigma^{-1}(2) = 4$． ■

$\boxed{3}$ 3 次対称群 $S_3$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 以下を計算せよ.

(1) 積 $\sigma^3$

**解答)** $\sigma$ は $1, 2, 3$ を

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left] & & 2 \arrow[dl, bend left] \\ & 3 \arrow[ul, bend left] & \end{tikzcd}$$

の順にうつすので, $\sigma^3 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. ■

(2) 積 $\tau^2$

**解答)** $\tau$ は 2 と 3 を入れ替える互換なので, 2 回合成すると恒等置換に等しい. したがって $\tau^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. ■

(3) 積 $\tau\sigma\tau$

**解答)** $\tau\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(= \sigma^{-1})$ ■

(4) 逆置換 $\sigma^{-1}$

**解答)** $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ■

$\boxed{4}$ 5 次対称群 $S_5$ の元 $\sigma$ でもって, $\sigma(1) = 2$, $\sigma^{-1}(4) = 5$, $\sigma^{-1}(5) = 3$ を満たすものを全て書け.

**解答)** 条件を満たす置換 $\sigma$ は,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & & 5 & & 4 \end{pmatrix}$$

となる. したがって $(\sigma(2), \sigma(4)) = (1, 3)$ または $(\sigma(2), \sigma(4)) = (3, 1)$ が成り立つ. 求める置換 $\sigma$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html