線形代数2, 第11回の内容の理解度チェック (解答)

2024/12/19 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 行列 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t)$=$|tE-A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (3点)

解答) A の固有多項式は,

$$g_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&0&0\\-1&t-3&-1\\-1&0&t-2\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}t-3&-1\\0&t-2\end{vmatrix}=t(t-3)(t-2).$$

従って A の固有値は $\lambda=0,2,3$ である.

(2) A を対角化せよ. (「$P=(\quad)$ のとき $P^{-1}AP=(\quad)$ となる」の形で答えること.) (3点)

解答)

- $\lambda=0$ のとき,

$$A-0E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-0E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1=t\begin{pmatrix}-2\\1/3\\1\end{pmatrix}=t'\begin{pmatrix}-6\\1\\3\end{pmatrix}\quad(t,t'\neq 0).$

- $\lambda=2$ のとき,

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-2E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2=t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(t\neq 0).$

- $\lambda=3$ のとき,

$$A-3E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-3E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3=t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(t\neq 0).$

従って, $P=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&0&0\\1&1&1\\3&-1&0\end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ となる.

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問に答えよ. (各 1 点)

(1) A の固有値 λ を全て求めよ.

解答)

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 1^2 = t^2 - 2t = t(t-2).$$

従って A の固有値は $\lambda = 0, 2$

(2) A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ を全て求めよ.

解答)

- $\lambda = 0$ のとき, $A - 0E = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.
- $\lambda = 2$ のとき, $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

(3) A を対角化せよ.

解答) $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる. [2]

(4) A^n (n は自然数) を求めよ. (ヒント：$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のとき, $A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$)

解答) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ である. よって,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 0^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

[2] $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. これも正解である. この P で対角化しても, 次の問題 (4) で A^n の計算結果は同じになる.

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html