代数学２, 第10回の内容の理解度チェック

2025/7/7 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | | 氏名 | | 点数 | |

R を一意分解整域 (UFD) とする．R 上の 1 変数多項式環 $R[x]$ の元

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

に対し, 係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ の最大公約元を $c(f)$ と表し, f の**内容** *(content)* という.

$\boxed{1}$ 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対し, $f(x)$ の内容 $c(f)$ の値を求めよ.

(1) $f(x) = 4 - 10x$

(2) $f(x) = 6 - 9x + 18x^2$

(3) $f(x) = 1 - 2x + 4x^2 + \cdots + (-2)^n x^n$

$\boxed{2}$ $\mathbb{Z}[x]$ の元 $f(x) = 4 + 6x$ と $g(x) = 3 - 9x + 12x^3$ に対し $f(x)g(x)$ を計算せよ．また $c(fg)$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を

$$f(x) = 72x^4 + 48x^3 - 54x^2 - 18x + 12$$

とする.

(1) $f(x)$ を $\mathbb{Z}[x]$ において, 素元の積に分解せよ.

(2) $f(x)$ を $\mathbb{Q}[x]$ において, 素元の積に分解せよ.

$\boxed{4}$ R を一意分解整域とする. $p \in R$ を素元とすれば, p は $R[x]$ の素元であることを示せ.

$\boxed{5}$ R を一意分解整域とし, k を R の商体とする. $R[x]$ の素元は, k の単元かまたは $k[x]$ の素元であることを示せ. (ただし, もし必要であれば, 以下のガウスの定理を用いてもよい.)

ガウスの定理

整域 R に対し, R が一意分解整域であるための必要十分条件は, R 上の 1 変数多項式環 $R[x]$ が一意分解整域となることである.

[0] ※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html