代数学１, 第５回の内容の理解度チェックの解答

2024/10/24 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 置換 $(1\ \cdots 13)(14\ \cdots\ 33)(34\ \cdots\ 43)(44\ \cdots\ 77)(78\ \cdots\ 123) \in S_{123}$ の偶奇を判定せよ．ただし，$\cdots$ は連続する整数を表す．

解答) $13-1=12$, $33-14=19$, $43-34=9$, $77-44=33$, $123-78=45$. 与えられた置換は1つの偶置換と4つの奇置換の合成なので，偶置換となる． ■

(2) 置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(5\ 6\ 7\ 8\ 9)(9\ 10\ 11\ 12\ 13) \in S_{13}$ の位数を求めよ．

解答) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(5\ 6\ 7\ 8\ 9)(9\ 10\ 11\ 12\ 13) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13)$ に注意する．長さ13の巡回置換 (サイクル) なので位数は13となる． ■

$\boxed{2}$ (1) x, y, z を変数とする次の3変数多項式 f_1, f_2, f_3, f_4 の中から対称式であるものを全て選べ．

- $f_1 = x^3 + y^3 + z^3$
- $f_2 = x^2 + y^2$
- $f_3 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$
- $f_4 = x^2y + y^2z + z^2x$

解答) f_1 と f_3 は任意の $\sigma \in S_3$ に関して，$\sigma f(x,y,z) = f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$ を満たすので x, y, z に関する対称式である．f_2 は2変数では対称式であるが，3変数では非対称である．f_4 は例えば，$(1,2)f_4 = y^2x + x^2z + z^2y \neq f_4$ となるため，非対称である．したがって対称式は f_1, f_3 である． ■

(2) 4変数 x, y, z, w の基本対称式を書け (各１点)：

解答) $\sigma_1 = x + y + z + w$

$\sigma_2 = xy + xz + xw + yz + yw + zw$

$\sigma_3 = xyz + xyw + xzw + yzw$

$\sigma_4 = xyzw$ ■

$\boxed{3}$ 次の3変数多項式 f, g, h に置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \in S_3$ を作用させたときの多項式 $\sigma f, \sigma g, \sigma h$ をそれぞれ求めよ．

解答) σ は1と3の互換であるので，σ を多項式 $f(x_1, x_2, x_3)$ に作用させると，

$$\sigma f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = f(x_3, x_2, x_1)$$

となり，σf は x_1 と x_3 を入れ替えた式に等しくなる．

(1) $f = 3x_1 + 2x_2x_3 + x_1^2x_3$

$\sigma f = 3x_3 + 2x_2x_1 + x_3^2x_1$

(2) $g = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

$\sigma g = \underbrace{x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_3 = g}_{\text{どちらでも正解}}$

(3) $h = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ $\qquad \sigma h = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_3^2 & x_2^2 & x_1^2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{3}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = -h}_{\text{どれでも正解}}$

■

$\boxed{4}$ 次の 2 変数対称式 $f(x,y)$ を基本対称式 $\sigma_1 = x+y$ および $\sigma_2 = xy$ を用いて表せ.

(1) $f(x,y) = x^2 - 7xy + y^2$

解答)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 2xy + y^2 - 9xy \\ &= (x+y)^2 - 9xy \\ &= \sigma_1^2 - 9\sigma_2. \end{aligned}$$

■

(2) $f(x,y) = x^4 y + xy^4$

解答)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 y + xy^4 \\ &= xy(x^3 + y^3) \\ &= xy\left((x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2\right) \\ &= xy\left((x+y)^3 - 3xy(x+y)\right) \\ &= \sigma_2\left(\sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1\right) \\ &= \sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2. \end{aligned}$$

■

(3) $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$

解答)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^2+y^2)^2 - (xy)^2 \end{aligned}$$

ここで

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

より

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right)^2 - \sigma_2^2 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 - \sigma_2^2 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2. \end{aligned}$$

■

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/alg1.html