代数学２，第４回の内容の理解度チェックの解答

2025/5/19　担当：那須

$\boxed{1}$ 次の環 R と部分集合 I に対し，I が R のイデアルであることを示せ．

(1) $R=\mathbb{Z}$, $I=n\mathbb{Z}=\{na \mid a\in\mathbb{Z}\}$

(2) $R=k[x]$ (k は体), $I=(f(x))=\{f(x)g(x) \mid g(x)\in k[x]\}$ $(f(x)\in k[x])$

(3) $R=k[x]$ (k は体), $I=\{f(x)\in k[x] \mid f(1)=0\}$

(**解答**)　I が R のイデアルであることを示すには，

(a) I が R の減法について閉じていること，および

(b) I が R の元と積をとる操作について閉じていること，

の２つを示せば十分である．

(1) (a) $a,b\in I$ とする．$a=nx$, $b=ny$ を満たす $x,y\in\mathbb{Z}$ が存在する．$a-b=nx-ny=n(x-y)\in n\mathbb{Z}$ より，$a-b$ は I に含まれる．したがって I は R の減法について閉じている．

(b) $a\in I$ かつ $b\in R$ ならば，$ab=(nx)b=n(xb)\in n\mathbb{Z}$ より，$ab\in I$ を満たす．

したがって I は R のイデアルである．

(2) (a) $g(x),h(x)\in I$ とする．I の定義より，$g(x)=f(x)g_0(x)$, $h(x)=f(x)h_0(x)$ を満たす $g_0(x),h_0(x)\in k[x]$ が存在する．

$$g(x)-h(x)=f(x)g_0(x)-f(x)h_0(x)=f(x)(g_0(x)-h_0(x))\in I$$

より I は R の減法について閉じている．

(b) $g(x)\in I$, $h(x)\in R$ とする．$g(x)=f(x)g_0(x)$ を満たす $g_0(x)\in R$ が存在する．

$$h(x)g(x)=h(x)f(x)g_0(x)=f(x)(h(x)g_0(x))\in I.$$

したがって，I は R の元との積について閉じている．

したがって I は R のイデアルである．

(3) (a) $f(x),g(x)\in I$ とする．このとき I の定義より，$f(1)=g(1)=0$ となる．$(f-g)(1)=f(1)-g(1)=0-0=0$ より $f-g\in I$ を得る．

(b) $f(x)\in I$, $g(x)\in R$ とする．このとき，$gf(1)=g(1)f(1)=g(1)\cdot 0=0$ より $gf\in I$ を得る．

したがって I は R のイデアルである．

$\boxed{2}$ $R=k[x,y]$ とする．

$$I=\{f(x,y)\in k[x,y] \mid f(0,0)=0\}$$

が R の単項イデアルでないことを示せ．

(**解答**)　$f(x,y)=x$ とおくと $f(0,0)=0$ より，$x\in I$ を得る．同様に $g(x,y)=y$ とおくと $g(0,0)=0$ より，$y\in I$ を得る．もし $I=(f(x,y))$ となる多項式 $f(x,y)\in k[x,y]$ が存在したと仮定すると，

$$x=f(x,y)p(x,y)$$

を満たす多項式 $p(x,y)\in k[x,y]$ が存在する．同様に $y=f(x,y)q(x,y)$ を満たす多項式 $q(x,y)\in k[x,y]$ が存在する．このことは x,y をともに割り切るような $f(x,y)\in I$ の存在を意味するが，そのような多項式は定数しか存在しない．$f(x,y)=c$ (c は定数) とおくと $c=f(0,0)=0$ となり，$I=(0)$ となって矛盾が生じる．

$\boxed{3}$ 実数を係数とする1変数の多項式環 $R=\mathbb{R}[x]$ とその単項イデアル $I=(p(x))$ に対し, 剰余環 R/I において次の元 $f(x)$ を計算せよ. (ただし答えは $p(x)$ の次数未満の多項式としてこたえること.)

(1) $I=(x^2+1)$, $f(x)=(x+1)(x+2)$

(2) $I=(x^2-x+1)$, $f(x)=(x+1)(x+2)$

(3) $I=(x^3-x-1)$, $f(x)=(x+1)^9$

(**解答**) 剰余環 $R/I=R/(p(x))$ において, $p(x)=0$ とおいて計算する.

(1) $p(x)=x^2+1=0$ より, $x^2=-1$. したがって

$$f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2=(-1)+3x+2=3x+1.$$

(2) $p(x)=x^2-x+1=0$ より, $x^2=x-1$. したがって

$$f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2=(x-1)+3x+2=4x+1.$$

(3) $p(x)=x^3-x+1=0$ より, $x^3=x-1$. したがって

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1=(x-1)+3x^2+3x+1=3x^2+4x=x(3x+4).$$

ゆえに

$$f(x)=(x+1)^9=\left((x+1)^3\right)^3=(x(3x+4))^3=x^3(3x+4)^3.$$

ここで

$$(3x+4)^3=27x^3+108x^2+144x+64=27(x-1)+108x^2+144x+64=108x^2+171x+37.$$

よって

$$f(x)=x^3(3x+4)^3=(x-1)(108x^2+171x+37)=108x^3+63x^2-134x-37.$$

$x^3=x-1$ を代入して

$$f(x)=108(x-1)+63x^2-134x-37=63x^2-26x-145.$$

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html