代数学２, 第４回の内容の理解度チェックの解答

2025/5/19 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の環 R と部分集合 I に対し, I が R のイデアルであることを示せ.

(1) $R = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$

(2) $R = k[x]$ (k は体), $I = (f(x)) = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in k[x]\}$ ($f(x) \in k[x]$)

(3) $R = k[x]$ (k は体), $I = \{f(x) \in k[x] \mid f(1) = 0\}$

(**解答**) I が R のイデアルであることを示すには,

(a) I が R の減法について閉じていること, および

(b) I が R の元と積をとる操作について閉じていること,

の 2 つを示せば十分である.

(1) (a) $a, b \in I$ とする. $a = nx$, $b = ny$ を満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する. $a - b = nx - ny = n(x - y) \in n\mathbb{Z}$ より, $a - b$ は I に含まれる. したがって I は R の減法について閉じている.

(b) $a \in I$ かつ $b \in R$ ならば, $ab = (nx)b = n(xb) \in n\mathbb{Z}$ より, $ab \in I$ を満たす.

したがって I は R のイデアルである.

(2) (a) $g(x), h(x) \in I$ とする. I の定義より, $g(x) = f(x)g_0(x)$, $h(x) = f(x)h_0(x)$ を満たす $g_0(x), h_0(x) \in k[x]$ が存在する.

$$g(x) - h(x) = f(x)g_0(x) - f(x)h_0(x) = f(x)(g_0(x) - h_0(x)) \in I$$

より I は R の減法について閉じている.

(b) $g(x) \in I$, $h(x) \in R$ とする. $g(x) = f(x)g_0(x)$ を満たす $g_0(x) \in R$ が存在する.

$$h(x)g(x) = h(x)f(x)g_0(x) = f(x)(h(x)g_0(x)) \in I.$$

したがって, I は R の元との積について閉じている.

したがって I は R のイデアルである.

(3) (a) $f(x), g(x) \in I$ とする. このとき I の定義より, $f(1) = g(1) = 0$ となる. $(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$ より $f - g \in I$ を得る.

(b) $f(x) \in I$, $g(x) \in R$ とする. このとき, $gf(1) = g(1)f(1) = g(1) \cdot 0 = 0$ より $gf \in I$ を得る.

したがって I は R のイデアルである.

$\boxed{2}$ $R = k[x, y]$ とする.

$$I = \{f(x, y) \in k[x, y] \mid f(0, 0) = 0\}$$

が R の単項イデアルでないことを示せ.

(**解答**) $f(x, y) = x$ とおくと $f(0, 0) = 0$ より, $x \in I$ を得る. 同様に $g(x, y) = y$ とおくと $g(0, 0) = 0$ より, $y \in I$ を得る. もし $I = (f(x, y))$ となる多項式 $f(x, y) \in k[x, y]$ が存在したと仮定すると,

$$x = f(x, y)p(x, y)$$

を満たす多項式 $p(x, y) \in k[x, y]$ が存在する. 同様に $y = f(x, y)q(x, y)$ を満たす多項式 $q(x, y) \in k[x, y]$ が存在する. このことは x, y をともに割り切るような $f(x, y) \in I$ の存在を意味するが, そのような多項式は定数しか存在しない. $f(x, y) = c$ (c は定数) とおくと $c = f(0, 0) = 0$ となり, $I = (0)$ となって矛盾が生じる.

$\boxed{3}$ 実数を係数とする1変数の多項式環 $R = \mathbb{R}[x]$ とその単項イデアル $I = (p(x))$ に対し, 剰余環 R/I において次の元 $f(x)$ を計算せよ. (ただし答えは $p(x)$ の次数よりも小さな次数の多項式としてこたえること.)

(1) $I = (x^2+1)$, $f(x) = (x+1)(x+2)$

(2) $I = (x^2-x+1)$, $f(x) = (x+1)(x+2)$

(3) $I = (x^3-x-1)$, $f(x) = (x+1)^9$

(**解答**)　剰余環 $R/I = R/(p(x))$ において, $p(x) = 0$ とおいて計算する.

(1) $p(x) = x^2+1 = 0$ より, $x^2 = -1$. したがって

$$f(x) = (x+1)(x+2) = x^2+3x+2 = (-1)+3x+2 = 3x+1.$$

(2) $p(x) = x^2-x+1 = 0$ より, $x^2 = x-1$. したがって

$$f(x) = (x+1)(x+2) = x^2+3x+2 = (x-1)+3x+2 = 4x+1.$$

(3) $p(x) = x^3-x+1 = 0$ より, $x^3 = x-1$. したがって

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 = (x-1)+3x^2+3x+1 = 3x^2+4x = x(3x+4).$$

ゆえに

$$f(x) = (x+1)^9 = \left((x+1)^3\right)^3 = (x(3x+4))^3 = x^3(3x+4)^3.$$

ここで

$$(3x+4)^3 = 27x^3+108x^2+144x+64 = 27(x-1)+108x^2+144x+64 = 108x^2+171x+37.$$

よって

$$f(x) = x^3(3x+4)^3 = (x-1)(108x^2+171x+37) = 108x^3+63x^2-134x-37.$$

$x^3 = x-1$ を代入して

$$f(x) = 108(x-1)+63x^2-134x-37 = 63x^2-26x-145.$$

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. https://hirokazunasu.github.io/2025/alg2.html