

学生証番号

--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

点数

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 1 R, S を環とし, $f: R \rightarrow S$ を環の準同型写像とする. 0_S を S の零元とし, f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ は

$$\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$$

$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in R\}$$

により定義される.

(1) $\ker f$ が R のイデアルになることを示せ.

(2) $\operatorname{im} f$ は S の部分環になることを示せ.

- 2 k を体とし, $a \in k$ とする. k 上の 1 変数多項式環 $k[x]$ から k への写像 φ を

$$\varphi: k[x] \longrightarrow k, \quad f(x) \longmapsto f(0)$$

により定める.

(1) φ が環の準同型写像であることを証明せよ.

(2) $\ker \varphi$ を求めよ.

(3) 準同型定理を用いて,

$$k[x]/(x - a) \simeq k$$

を証明せよ.

3 環の準同型定理を証明せよ.

準同型定理

環の準同型写像 $f : R \rightarrow S$ に対し,

$$\bar{f} : R / \ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \quad a + \ker f \mapsto f(a)$$

は同型写像である.