線形代数 2, 第 4 回の内容の理解度チェック (解答)

2024/10/17 担当：那須

$\boxed{1}$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(1) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ. (1 点)

(2) r 個の 1 次独立なベクトルを前の方から順に求めよ. (1 点)

(3) 他のベクトルを (2) のベクトルの 1 次結合で書き表せ. (1 点)

解答) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{pmatrix}$ とおき, 階段行列に基本変形する.

$$A == \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[④-2\times①]{②+①,③-①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[④-③]{①-③,②+③} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

最後の行列を $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 \end{pmatrix}$ とおくと, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ の間の 1 次関係と $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$ の間の 1 次関係は等しい. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ は 1 次独立であり, $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5$ は,

$$\mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{b}_5 = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4$$

と表せる. よって,

(1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ の 1 次独立な最大個数は 3,

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ は 1 次独立,

(3) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la2.html