

1 \mathbb{R} 上のベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件を書け. (1 点)

- (i) $\mathbf{0}$ が W に含まれる.
 - (ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ が成り立つ.
 - (iii) $a \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in W$ ならば, $a\mathbf{x} \in W$ が成り立つ.
- ((i),(ii),(iii) の順番は任意)

2 次の部分集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_{(x,y)}^2$ の部分空間となるかどうか答えよ. (各 1 点)

- (1) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 1\}$
- (2) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = 0\}$
- (3) $W = \{(0, 0)\}$
- (4) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
- (5) $W = \{\mathbf{x} = (t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$
- (6) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

解説 (1) $\mathbf{0} = (0, 0)$ を含まない.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の形

(3) (2) と同じ集合である.

(4) $\mathbf{x} = (1, 0)$ のとき, $\mathbf{x} \in W, 2\mathbf{x} \notin W$

(5) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0\}$ と表せる.

(6) W は原点中心の半径 1 の円.

答え: (1) 部分空間でない (2) 部分空間 (3) 部分空間

答え: (4) 部分空間でない (5) 部分空間 (6) 部分空間でない

3 次の部分集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間となるかどうか答えよ. ただし, $\mathbb{R}[x]_2$ は実係数の 2 次以下の多項式のベクトル空間を表す. (各 1 点)

- (1) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(0) = 1, f(1) = 0\}$
- (2) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = 0, f(2) = 0\}$
- (3) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f'(2) = 0, f(3) = 0\}$
- (4) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid xf'(x) = f(x)\}$

解説 (1) $\mathbf{0}$ (多項式 0) を含まない.

(2) $f(x), g(x) \in W$ のとき,

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0, \quad (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0$$

より $f(x) + g(x) \in W$. 同様に $a \in \mathbb{R}, f(x) \in W$ のとき $af(x) \in W$. W は 0 を含むので, W は部分空間の条件を満たす.

(3) (2) と同様に部分空間であることが示せる.

(4) $f(x), g(x) \in W$ のとき,

$$x(f(x) + g(x))' = xf'(x) + xg'(x) = f(x) + g(x)$$

より $f(x) + g(x) \in W$. 同様に $a \in \mathbb{R}, f(x) \in W$ のとき $af(x) \in W$. W は 0 を含むので, W は部分空間の条件を満たす.

答え: (1) 部分空間でない (2) 部分空間 (3) 部分空間 (4) 部分空間