

学生証番号

氏名

点数

- 1 次の剰余群の群表 (演算の表) をかけ.
- (a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$ (加法群)
- (b) $S_n/A_n = \{A_n, \tau A_n\}$, ただし τ は任意の互換をひとつ固定する.

2 剰余群

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

において, 剰余類 aH に含まれる元のことを aH の**代表元**という.

次の剰余群の代表元の集合を (ひとくみ) 与えよ. ただし剰余群が無限群になるときは, 代表元の集合も無限集合になる.

- (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (加法群)
- (2) 加法群 \mathbb{R} の部分群 \mathbb{Z} による剰余群 \mathbb{R}/\mathbb{Z}

- 3 A_4 を 4 次交代群, V_4 をクラインの 4 元群とする (前回の理解度チェックまたは講義ノート参照). 剰余群 A_4/V_4 に関する以下の問に答えよ. なお以下では $(i_1 i_2 \dots i_r)$ は $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_r \mapsto i_1$ のように順番に移す長さ r の巡回置換を表す.

(1) 次の剰余類の等式が正しいか否か判定せよ:

$$(i) (1\ 2\ 3)V_4 = (1\ 2\ 4)V_4 \quad (ii) (1\ 3\ 2)V_4 = (1\ 2\ 4)V_4 \quad (iii) (2\ 3\ 4)V_4 = (1\ 3\ 4)V_4$$

(2) 剰余群 A_4/V_4 の元は

$$V_4, (1\ 2\ 3)V_4, (1\ 2\ 4)V_4 \quad (\heartsuit)$$

と表される. 次の元を計算せよ. なお途中の計算 (理由) を明らかにすると共に, 答えは (??) で与えられた 3 つの剰余類の中から一つ選んで解答すること.

$$(a) (1\ 2\ 3)V_4 \cdot (1\ 2\ 4)V_4 \quad (b) ((1\ 2\ 3)V_4)^2 \quad (c) (1\ 2\ 4)V_4 \cdot (2\ 4\ 3)V_4$$

(3) $A_4/V_4 = \{V_4, (123)V_4, (124)V_4\}$ の演算表を求めよ, ただし V_4 はクラインの 4 元群とする.