動態マクロ経済学

Week 2

佐藤健治

sato@eco.osakafu-u.ac.jp

2020/5/15

本日の目標

- 変化率について学ぶ
  - 定義
  - 平均
  - 近似計算
- IPython を（関数）電卓として使う
  - 変化率の計算
- 今週の練習問題

変化率

どっちが嬉しい？

1. 年収が 50 万円増えた。
2. 年収が 100 万円増えた。

同一人物，同時点の 2 つのシナリオとしては 2 の方がよいだろう。

どっちが嬉しい？

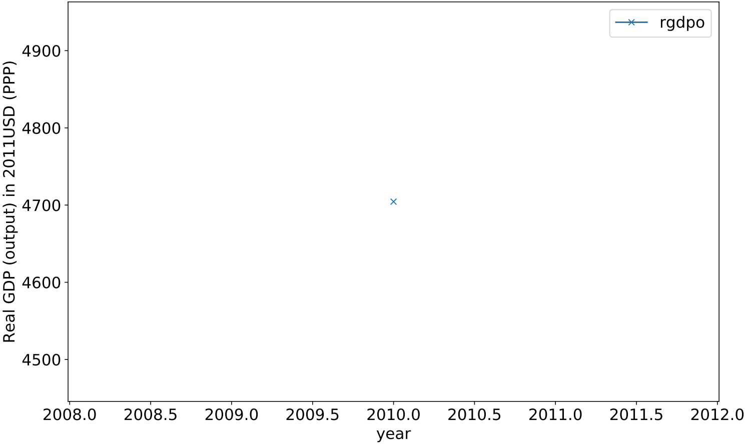
1. 年収が 300 万円から 50 万円増えた。
2. 年収が 1 億円から 100 万円増えた。

1 の方がインパクトが大きい。

比較が大事，比較には基準が必要

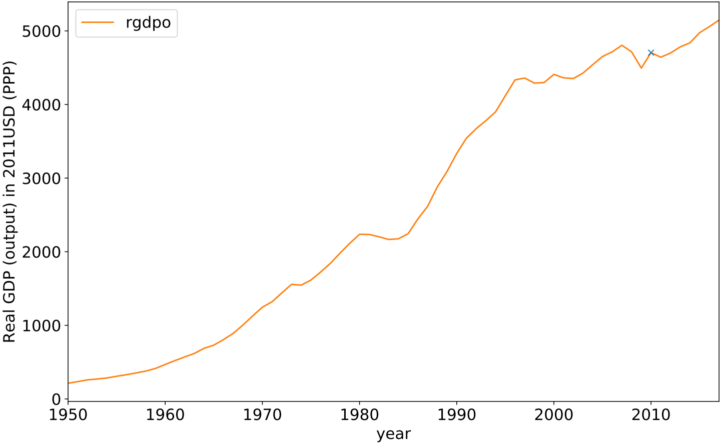
- マクロ経済学の分析では国際比較，経年変化の追跡が重要
  - これらだけが重要
- 比較には対象または基準が必要
  - 例えば，「実質 GDP 600 兆円」という数値目標は基準となる GDP の水準が分からなければほとんど意味をなさない。
    - この数字に意味を見出だせてしまった人は，最近の日本の GDP の水準をおおよそ把握しているに違いない。
- この授業ではマクロ経済の時間変化を扱う。

判断の難しい情報

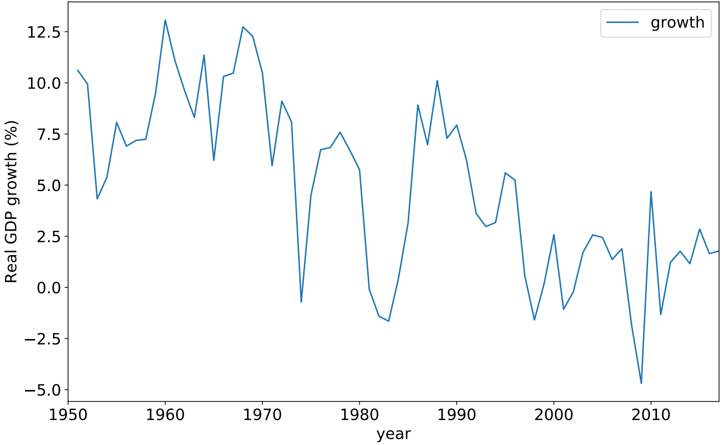


rgdpo
4900
4800
4700
4600
4500
Real GDP (output) in 2011USD (PPP)
2008.0
2008.5
2009.0
2009.5
2010.0
2010.5
2011.0
2011.5
2012.0
year

異なる時間を比較するための時系列プロット



相対的な変化を調べるとより評価しやすくなる



時間の表現

- 分析の起点を $t = 0$ とし，$t = 0, 1, 2, \ldots$ のようにその後のデータを整数値で表現する。
  - 離散時間モデル。モデルの時間単位を「期」とか「時点」と呼ぶ。
    - Solow モデルの話をするときにもう少し詳しく掘り下げる。
  - 1 つの期が表す，現実の時間的な広がりは分析によって異なる。
    - 年次データの場合は 1 期 $=$ 1 年，
    - 四半期データの場合は 1 期 $=$ 3 ヶ月など。
  - 統計上の基準時点 $\neq$ データ分析の起点（$t = 0$）
    - 統計上の基準は 2005 年かもしれないし，2010 年かもしれない。その時点を $t = 0$ とするなら，（例えば 1990 年から分析したいなら）時間インデックスに負数も認める必要がある。これはプログラミングの観点からは若干面倒である。

時間変化の表現

- 変数 y （これは物価かもしれないし，GDP かもしれない）の時間変化を次のように表す
  - y_0，y_1，y_2，...
    - 下付きの数字は「期」を表す
    - 各 y_0，y_1 などに具体的な数字が代入されていると考えてほしい。
- 絶対的な変化量は差分で測る。

$$\Delta y_{t+1} = y_{t+1} - y_t$$

  - 最初の例から分かるように，多くの場合に適切な変化の指標ではない。
  - この指標で確実に判断できることは変数の増減のみ。

相対的な変化の指標

- 通常，変化の大きさは相対的な変化で測る。
  - 例）「5% 増加した」，「2% 減少した」
- 定義は次の通り：

$$\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t}$$

  - $g_{t+1} = \Delta y_{t+1}/y_t$ と定義したものは，「変化率」「成長率」

$$y_{t+1} = (1 + g_{t+1})y_t$$

  - $1 + g$ は「粗成長率」

余談：率の変化率

- もともと「率」であるようなデータに関心があることも多い。
  - 政策金利
  - 失業率，有効求人倍率
  - インフレ率
- 例）4% から 5%に増えることをどう表現するか？
  1. $5\% - 4\% = 1\%$ 増える。（曖昧，よく使われるけど，避けるべし）
     - この表現は回帰分析の解釈で躓く危険性あり！
  2. $(5 - 4)/4 = 0.25 = 25\%$ 増える。（曖昧，あまり使わないけど使ってもいい）
  3. 上はどちらも曖昧なので，「1 % ポイント増える」とか「1 ポイント増える」というのがよい。
- FRB の政策金利は 0.25% 刻みで，25 basis point (= 0.01% point, bp) 上がった，下がったと報道されます。

複利計算

- 変化率が小さくても，長い期間持続すれば大きな変化が起こる。
  - 利息にも利息がつく「複利計算」
- $g_t \equiv g > 0$ （$g_t \equiv g$ は t に関わらず $g_t = g$ という意味）としよう。すると，

$$\begin{aligned} y_{t+n} &= \prod_{k=1}^{n}(1+g_{t+k})y_t \\ &= (1+g)^n y_t \end{aligned}$$

- $g = 0.01 = 1\%$ でも

$$(1+0.01)^5 \approx 1.051, \qquad (1+0.01)^{20} \approx 1.220$$

Rule of 70

- 例）年率 3% 増加する変数が 2 倍になるのにかかる年数はおよそ $70/3 \approx 23.3$ 年である。

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x = 2$$

を x について解けばよい（対数の計算をする）。

Example

年率 5% で成長する国の GDP が 2 倍になるのにかかる年数は何年か？

年率 1% 成長の国が GDP を 2 倍にするには何年かかるか？

10 倍になる期間は？

問題

Rule of 70 は定率で成長する変数が 2 倍になる期間の近似公式を与えてくれる。同様にして，「定率で成長する変数が 10 倍になる期間」を計算する近似公式を作りなさい。

対数差分

- 自然対数関数は変化率の計算をする際に非常に重要。

$$g_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \approx \log y_{t+1} - \log y_t$$

- 定率 $g_t \equiv g$ で成長する場合，

$$\begin{aligned}
\log y_{t+1} &= g + \log y_t \\
&= 2g + \log y_{t-1} \\
&= \cdots \\
&= gt + \log y_0
\end{aligned}$$

  - 時系列図の縦軸を対数値にすると直線になる。（片対数プロット）

平均変化率

- t 期の変数 y_t から，$t+n$ 期の変数 y_{t+n} の変化率は

$$\frac{y_{t+n}-y_t}{y_t}$$

  には n 年分の変化が蓄積している（→ 1 年分より振れ幅が大きい）
- 1 年分に換算した平均変化率を $\bar{g}$ とすると

$$y_{t+n}=(1+\bar{g})^n\,y_t$$

- $\bar{g}$ について解くと

$$\bar{g}=\left(\frac{y_{t+n}}{y_t}\right)^{1/n}-1$$

平均変化率（対数近似）

- 自然対数の近似公式
$$\log(1+\bar{g}) \approx \bar{g}$$
に当てはめると，
$$\bar{g} \approx \frac{\log y_{t+n} - \log y_t}{n}$$

平均変化率（変化率がわかっている場合）

- ある期間の最初と最後の値がわかっている場合には上のように変化率を計算できる。
- その期間の変化率がわかっている場合には，どのように平均を取ればよいだろうか？
- 例）平均成長率を計算しなさい。
  - 4 年間の成長率が，2%, 3%, 5%, 1%

平均変化率（変化率がわかっている場合）

$$(1+\bar{g})^4 = 1.02 \times 1.03 \times 1.05 \times 1.01$$

- すなわち，前期比成長率が $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$ である連続する $(n+1)$ 期間の平均成長率 $\bar{g}$ は

$$\bar{g} = ((1+g_1) \times (1+g_2) \times \cdots (1+g_n))^{1/n} - 1$$

  で計算できる（幾何平均）
- 単年度では，外的な要因で起こる変化を受けて大きく変動しやすい。数年ごとに平均を取ると，分析対象に関するより正確な理解が得られることがある。

平均変化率（対数近似）

- 変化率がわかっている場合にも対数近似を使った便利な公式がある。
- $\bar{g}, g_1, g_2, \ldots, g_n$ が小さいときには，概算のために普通の算術平均を使っても大きな問題にはならない。

$$\bar{g} \approx \log(1+\bar{g}) = \frac{\log(1+g_1)+\cdots+\log(1+g_n)}{n} \approx \frac{g_1+\cdots+g_n}{n}$$

  - 幾何平均はいつでも算術平均より小さいので，この概算は過大評価の傾向がある。

Python で変化率の計算

準備

- Notebook (kenjisato/MaD/Jupyter/ch01.ipynb) を開く
  - `https://git.io/Jf89s`
- IPython を立ち上げる
  - Anaconda Prompt を起動 → コマンド ipython を実行
  - Google Colaboratory 利用の人は Colab のノートでも OK。ただし・・・・

Notebook でコードを実行するときの注意

- Jupyter Notebook, Google Colaboratory の「セル」の特徴
  - セル単位でコードを実行
  - 単一セルに複数行のコードを書ける
    → 最後に実行したコードの出力のみ表示される
  - たとえば，以下のコードを 1 つのブロックに書いて実行すると
    1 + 1 の結果は表示されない。

```
1 + 1
2 + 5
```

- Notebook はセルを自由に動かせるので
  - セルの実行順と見た目の順番が一致しない可能性あり
    - 使いはじめの頃は，これを理解せずに困ってしまう人も多い
  - 正しくコードが書けているのに，動きがおかしいと思ったら，
    不平不満を言う前に「Kernel -> Restart and Run All Cells...」を実行

準備運動

いまから 10 分間，「挿入用のコード」のセクションにあるコードを 1 行ずつ入力＆実行してみてください。　（もう終わったという人は Exercises）

注意：ハッシュタグ # の後ろの内容（コメント）は編集用のコードなので入力不要です。

写す
↓
Enter/Return を押す
↓
実行結果を確認する

この筋トレを省いてプログラミングは習得できません。Jupyter は筋トレには不向きです（個人の感想です）

ここまでで確認すること

- コマンドは上から順に実行・評価されていく
- 四則演算
- カッコの使い方
- エラーの対処法
- 関数呼び出し（`print()`）

練習

次の計算をしなさい。

- $\sqrt{1000}$
- $500^{1/3}$
- $3 + 3(3 - 8)$

問題

1. $y_0 = 500,\ y_1 = 550,\ y_2 = 600,\ y_3 = 650$ とする。この期間の平均成長率を計算しなさい。

```
y0, y1, y2, y3 = 500, 550, 600, 650
```

2. ある連続する期間の前期比成長率が $g_1 = 0.02,\ g_2 = 0.05,\ g_3 = 0.01,\ g_4 = 0.04,\ g_5 = 0.03$ だったとする。この期間の平均成長率を計算しなさい。また，近似公式を用いたときの結果と比較して，誤差を評価しなさい（誤差/正確に計算した平均成長率 のパーセント値を答えるとよい）。

```
y0, y1, y2, y3 = 500, 550, 600, 650
```