# 対数近似についてのメモ

荒戸寛樹

August 7, 2019
revised:August 19, 2019

線形近似・2 次近似はモデルの解析を格段に容易にする．そのため，適切な近似法を理解することは理論を理解する上で重要である．また，変数の自然対数を取ることで，変数の（変化量ではなく）変化率で理解することができる．このことは，経済変数の単位を意識する必要がなくなるという意味で大変便利である．本稿では，対数近似の手法について解説する．

## 1 Taylor 展開と線型近似・2 次近似

### 1.1 1 変数関数の Taylor 展開

$k \in \mathbb{N}, D \subset \mathbb{R}$ とする．$D$ を定義域とする関数 $f : D \to \mathbb{R}$ は，$k$ 回微分可能であるとする．このとき，次の定理が得られる．

**定理 1：1 変数関数における Taylor の定理**

$D$ の内点において $k$ 回微分可能な関数 $D \to \mathbb{R}$ を考える．任意の $\bar{x} \in \mathrm{int}(D)$ に対して[a]，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\bar{x}) + \frac{f'(\bar{x})}{1!} \cdot (x - \bar{x}) + \frac{f^{(2)}(\bar{x})}{2!} \cdot (x - \bar{x})^2 + \cdots + \frac{f^(k)(\bar{x})}{k!} \cdot (x - \bar{x})^k + R_k(x) \\
&= f(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^n + R_k(x), \qquad (1)
\end{aligned}
$$

where

$$
R_k(x) = O(|x - \bar{x}|^{k+1}) \quad (x \to \bar{x})
$$

ただし，$O$ はランダウの記号であり，$h(x) = O(g(x))$ とは，$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| < \infty$ であることを表す．(1) を使って，定義域内のある点 $\bar{x}$ での微分係数を用いて関数を $k$ 次関数の形に近似する作業を，$x = \bar{x}$ の周りでの $k$ 次の Taylor 展開という．

[a] $\mathrm{int}(D)$ は，$D$ の内部（内点すべての集合）を表す．

**例 1：1 変数関数の Taylor 展開の例**

1. 関数 $f(x) = e^x$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開は，

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + e^0 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!} \cdot e^0 \cdot (x - 0)^2 + \frac{1}{3!} \cdot e^0 \cdot (x - \bar{x})^3 + \cdots \\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

2. 関数 $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開は，

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos 0 + \frac{1}{1!}(-\sin 0) \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!}(-\cos 0) \cdot (x - 0)^2 + \frac{1}{3!} \sin 0 \cdot (x - 0)^3 + \frac{1}{4!} \cos 0 \cdot (x - 0)^4 + \cdot \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots
\end{aligned}
$$

3. 関数 $f(x) = \ln x$ の $x = 1$ の周りでの Taylor 展開は，

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \ln 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{1}\right)(x - 1) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{1^2}\right)(x - 1)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{1^3}\right)(x - 1)^3 + \cdots \\
&= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \cdots
\end{aligned}
$$

4. 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c + (2a \cdot 0 + b)(x - 0) + \frac{1}{2!}(2a)(x-0)^2 \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}
$$

5. 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の $x = \bar{x}$ の周りでの Taylor 展開は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c + (2a\bar{x} + b)(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}(2a)(x-\bar{x})^2 \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}
$$

※ 2 次関数を Taylor 展開すると元の 2 次関数を得る（当たり前）

## 1.2　多変数関数の Taylor 展開

$D \subset \mathbb{R}^n$ とする．無限回連続微分可能な関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して，次の定理が成り立つ．

**定理 2：多変数関数の Taylor 展開**

$x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]' \in D$ とする．任意の $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_n]' \in D$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\bar{x}) + f_1(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + f_2(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + f_n(\bar{x})(x_n - \bar{x}_n) \\
&\quad + \frac{1}{2!}f_{11}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \frac{2}{2!}f_{12}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{1}{2!}f_{22}(\bar{x})(x_2 - \bar{x})^2 \\
&\quad + \cdots \\
&= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2!}f_{ij}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3!}f_{ijk}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k) + \cdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

**例 2：多変数関数の Taylor 展開の例**

1. $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ の $(x,y)=(0,0)$ の周りでの Taylor 展開は，

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^0\ln 1+\underbrace{e^0\ln 1}_{f_x(0,0)}\cdot(x-0)+\underbrace{e^0\frac{1}{1}}_{f_y(0,0)}\cdot(y-0)\\
&+\frac{1}{2!}\underbrace{e^0\ln 1}_{f_{xx}(0,0)}\cdot(x-0)^2+\frac{1}{2!}\underbrace{e^0(-\frac{1}{1})}_{f_{yy}(0,0)}\cdot(y-0)^2+\\
&+\frac{2}{2!}\underbrace{e^0\frac{1}{1}}_{f_{xy}(0,0)}\cdot(x-0)(y-0)+\cdots\\
&= y+xy-\frac{1}{2}y^2+\cdots
\end{aligned}$$

2. $f(K,L)=K^\alpha L^{1-\alpha}$ の，$(K,L)=(\bar{K},\bar{L})$ の周りでの Taylor 展開は，

$$\begin{aligned}
f(K,L) &= \bar{K}^\alpha\bar{L}^{1-\alpha}+\alpha\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{1-\alpha}(K-\bar{K})+(1-\alpha)\bar{K}^\alpha\bar{L}^{-\alpha}(L-\bar{L})\\
&+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\bar{K}^{\alpha-2}\bar{L}^{1-\alpha}(K-\bar{K})^2+\frac{1}{2}(1-\alpha)(-\alpha)\bar{K}^\alpha\bar{L}^{-\alpha-1}(L-\bar{L})^2\\
&+\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{-\alpha}(K-\bar{K})(L-\bar{L})+\cdots
\end{aligned}$$

Taylor 展開を $n$ 次の項まで行い，$n+1$ 次より高次の項を無視して $n$ 次関数で近似することを，関数 $f$ の $n$ 次近似と呼び，1 次近似のことを特に線形近似と呼ぶ.

**練習問題 1**

1. オイラー方程式

$$C_t^{-\frac{1}{\sigma}}=\beta R_{t+1}C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$$

を定常状態 $(C_t,C_{t+1},R_{t+1})=(\bar{C},\bar{C},\frac{1}{\beta})$ の周りで線型近似せよ.

2. CES 型生産関数

$$Y=[aK^{\frac{\theta-1}{\theta}}+bL^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{3}$$

を $(K,L,Y)=(\bar{K},\bar{L},\bar{Y})$ の周りで線形近似せよ.

# 2 対数線型化（log-linearization）

$D\subset\mathbb{R}^n$ を定義域とする関数 $f(x)$ を（場合によっては近似して）$\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n$ の線型関数で表すことを，$f$ の対数線型化という.

## 2.1 対数線型化の方法 1

**対数線型化の方法 1：$x$ で Taylor 展開するやり方**

- Step1: 任意に選んだ $\bar{x}$ の周りで $f$ を 1 次の Taylor 展開（線型近似）する．
- Step2: $x_i - \bar{x}_i (i \in 1, \cdots, n)$ の各項の分子と分母にそれぞれ $x_i$ を掛けて，$\dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i}$ を作る．
- Step3: $\ln x_i$ を $\bar{x}_i$ の周りで線型近似すると，

$$\frac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i} = \ln x_i - \ln \bar{x}_i \tag{4}$$

が得られるので，Step2 の各 $\dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i}$ に (4) を代入．

**例 3: 方法 1 による Cobb-Douglas 型生産関数の対数線型化**

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{5}$$

を，定常状態 $(A, K, L, Y) = (\bar{A}, \bar{K}.\bar{L}, \bar{Y})$ の周りで対数線型化する．

- Step1: 両辺をそれぞれ $(A, K, L, Y) = (\bar{A}, \bar{K}.\bar{L}, \bar{Y})$ の周りで線型近似すると，

  $\bar{Y} + (Y - \bar{Y}) = \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha} + \bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}(A - \bar{A}) + \alpha\bar{A}\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{1-\alpha}(K - \bar{K}) + (1-\alpha)\bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{-\alpha}(L - \bar{L})$

  定常状態の関係から $\bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$ が成り立つので，

$$Y - \bar{Y} = \bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}(A - \bar{A}) + \alpha\bar{A}\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{1-\alpha}(K - \bar{K}) + (1-\alpha)\bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{-\alpha}(L - \bar{L})$$

- Step2: 左辺第 1 項には $\bar{Y}$，右辺第 1 項には $\bar{A}$，第 2 項には $\bar{K}$，第 3 項には $\bar{L}$ を，分子と分母に掛ける．

$$\bar{Y} \cdot \frac{Y - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha} \cdot \frac{A - \bar{A}}{\bar{A}} + \alpha\bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha} \cdot \frac{K - \bar{K}}{\bar{K}} + (1-\alpha)\bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha} \cdot \frac{L - \bar{L}}{\bar{L}}$$

  $\bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$ が成り立つので，

$$\frac{Y - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \frac{A - \bar{A}}{\bar{A}} + \alpha \cdot \frac{K - \bar{K}}{\bar{K}} + (1-\alpha) \cdot \frac{L - \bar{L}}{\bar{L}}$$

- Step3: (4) を使って，定常状態からの変化率になっている部分を対数の差に書き換える．

$$\ln Y - \ln \bar{Y} = (\ln A - \ln \bar{A}) + \alpha(\ln K - \ln \bar{K}) + (1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L}) \tag{6}$$

  これで対数線型化が完成．

- 解釈：対数の差は近似的に変化率を表している（式(4)）ので，Cobb-Douglas 型生産関数について（少なくとも定常状態の近傍では[1]）次のことが言える

  1. $A$ が 1%上昇すると，$Y$ は 1%増える
     ($Y$ の $A$ に対する弾力性は 1)
  2. $K$ が 1%増加すると，$Y$ は $\alpha$% 増える．
     ($Y$ の $K$ に対する弾力性は $\alpha$)
  3. $L$ が 1%増加すると，$Y$ は $(1-\alpha)$% 増える．
     ($Y$ の $L$ に対する弾力性は $1-\alpha$)

**練習問題 2**　方法 1 を使って以下の方程式を対数線型化しなさい．

1. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$ $((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで)
2. 財市場の均衡 $Y_t = C_t + I_t + G_t$ $((Y, C, I, G) = (\bar{Y}, \bar{C}, \bar{I}, \bar{G})$ の周りで)

## 2.2　対数線型化の方法 2

**対数線型化の方法その 2：** $x$ **を** $e^{\ln x}$ **に変形して，**$\ln x$ **の関数と見て Taylor 展開する**

- Step1: $x = e^{\ln x}$ を使って，$f(x)$ を $\ln x$ の関数 $g(\ln x)$ で書き直す．

$$f(x) = f(e^{\ln x}) \equiv g(\ln x)$$

- Step2: $g(\ln x)$ を $\ln x$ に関して Taylor 展開する．

**例 4：方法 2 による Cobb-Douglas 型生産関数の対数線型化**

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

を，対数線型化する．

- Step1: (左辺) $= Y = \exp[\ln Y]$，(右辺) $= AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \exp[\ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L]$ であるから，

$$\exp[\ln Y] = \exp[\ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L]$$

[1] 今は線型近似して (6) を導出したので，今のところこの関係は定常状態の近傍から離れたらどうなるかは定かではないが，本当は Cobb-Douglas に関しては以下の 3 つは任意の点で成立する．例 4 を見なさい．

したがって，

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L$$

となり，近似せずに対数線型化が完了[2]．
定常状態 $(\bar{A}, \bar{K}, \bar{L}, \bar{Y})$ で $\ln \bar{Y} = \ln \bar{A} + \alpha \ln \bar{K} + (1-\alpha)\ln \bar{L}$ なので，辺々引き算すると，

$$\ln Y - \ln \bar{Y} = \ln A - \ln \bar{A} + \alpha(\ln K - \ln \bar{K}) + (1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L})$$

が成り立ち，方法 1 で行った場合と全く同じ結果が得られる．

**例 5：方法 2 による財市場の均衡式の対数線型化**

$$Y = C + I + G$$

を対数線型化する．

- Step 1: (左辺) $= Y = \exp[\ln Y]$，(左辺) $= C + I + G = \exp[\ln C] + \exp[\ln I] + \exp[\ln G]$ であるから，

$$\exp[\ln Y] = \exp[\ln C] + \exp[\ln I] + \exp[\ln G]$$

- Step 2: 定常状態 $(\ln Y, \ln C, \ln I, \ln G) = (\ln \bar{Y}, \ln \bar{C}, \ln \bar{I}, \ln \bar{G})$ の周りで 1 次の Taylor 展開すると，

$$\begin{aligned}
&(\text{左辺}) \approx \exp(\ln \bar{Y}) \cdot (\ln Y - \ln \bar{Y}) = \bar{Y}(\ln Y - \ln \bar{Y}) \\
&(\text{右辺}) \approx \exp(\ln \bar{C}) \cdot (\ln C - \ln \bar{C}) + \exp(\ln \bar{I}) \cdot (\ln I - \ln \bar{I}) + \exp(\ln \bar{G}) \cdot (\ln G - \ln \bar{G}) \\
&\qquad = \bar{C} \cdot (\ln C - \ln \bar{C}) + \bar{I} \cdot (\ln I - \ln \bar{I}) + \bar{G} \cdot (\ln G - \ln \bar{G})
\end{aligned}$$

よって，

$$\ln Y - \ln \bar{Y} = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \cdot (\ln C - \ln \bar{C}) + \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \cdot (\ln I - \ln \bar{I}) + \frac{\bar{G}}{\bar{Y}} \cdot (\ln G - \ln \bar{G})$$

これで対数線型近似完了．生産量の各需要項目に対する弾力性はその需要項目のシェアである．

**練習問題 3**　方法 2 を使って以下の方程式を対数線型化しなさい．

1. 労働供給曲線 $\dfrac{N^{\frac{1}{\phi}}}{C^{-\frac{1}{\sigma}}} = w \quad ((C, N) = (\bar{C}, \bar{N})$ の周りで$)$
2. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} \quad ((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで$)$
3. CES aggregator に対する物価指数の式 $P = \left[\lambda (P^a)^{1-\theta} + (1-\lambda)(P^b)^{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad ((P^a, P^b, P) = (P^a, P^a, P^a)$ の周りで$)$

[2] この式から，Cobb-Douglas 型生産関数においては任意の点において $Y$ の $A$ に対する弾力性は 1，$K$ に対する弾力性は $\alpha$，$L$ に対する弾力性は $1-\alpha$ であることがわかる．方法 1 では，定常状態周りの弾力性しかわからなかった（例 3 を参照）．

# 3　対数2次近似 (log second-order approximation)

## 3.1　対数2次近似の方法1

**対数2次近似の方法1: $x$ に関して Taylor 展開する方法**

- Step 1: 任意に選んだ $\bar{x}$ の周りで $f$ に対して2次の Taylor 展開を施す.

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})\cdot(y-\bar{y}) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})^2 + f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \frac{1}{2}f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})^2 \end{aligned} \tag{7}$$

- Step 2: (7) の1次の項に分子と分母に $x_i$ を掛けて $\dfrac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i}$ を作る．2次の項には分子と分母に $x_i^2$ を掛けて $\left(\dfrac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i}\right)^2$ を作る.

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})\bar{x}\cdot\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}} + f_y(\bar{x},\bar{y})\bar{y}\cdot\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}} \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\bar{x}^2\left(\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2 + f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\bar{x}\bar{y}\cdot\frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}\cdot\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}} + \frac{1}{2}f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\bar{y}^2\left(\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}}\right)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

- Step 3: $\ln x$ を2次近似すると,

$$\ln x_i - \ln\bar{x}_i = \frac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i}\right)^2$$

なので,

$$\frac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i} = (\ln x_i - \ln\bar{x}_i) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i}\right)^2, \quad \left(\frac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i}\right)^2 = (\ln x_i - \ln\bar{x}_i)^2 \tag{9}$$

を得る．(9) を (8) に代入すると，$\ln x$ に関する2次関数が得られて，対数2次近似完了.

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})\bar{x}\left[(\ln x - \ln\bar{x}) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln\bar{x})^2\right] \\ &+ f_y(\bar{x},\bar{y})\bar{y}\cdot\left[(\ln y - \ln\bar{y}) + \frac{1}{2}(\ln y - \ln\bar{y})^2\right] \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\bar{x}^2(\ln x - \ln\bar{x})^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\bar{y}^2(\ln y - \ln\bar{y}) \\ &+ f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\bar{x}\bar{y}(\ln x - \ln\bar{x})(\ln y - \ln\bar{y}). \end{aligned} \tag{10}$$

**例 6：方法 1 による財市場の均衡式の対数 2 次近似**

$$Y = C + I + G$$

を定常状態 $(Y, C, I, G) = (\bar{Y}, \bar{C}, \bar{I}, \bar{G})$ に周りで対数 2 次近似する．

- Step 1: 元の式は線型なので，定常状態の式を辺々引き算して，

$$Y - \bar{Y} = (C - \bar{C}) + (I - \bar{I}) + (G - \bar{G})$$

を得る．

- Step 2: 全て 1 次の項なので，分子と分母に定常状態の値を掛けて，

$$\bar{Y} \cdot \frac{Y - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \bar{C} \cdot \frac{C - \bar{C}}{\bar{C}} + \bar{I} \cdot \frac{I - \bar{I}}{\bar{I}} + \bar{G} \cdot \frac{G - \bar{G}}{\bar{G}}$$

を得る．

- Step 3: (9) を使うと，

$$\begin{aligned}
\bar{Y}\left[(\ln Y - \ln \bar{Y}) + \frac{1}{2}(\ln Y - \ln \bar{Y})^2\right] = \bar{C}&\left[(\ln C - \ln \bar{C}) + \frac{1}{2}(\ln C - \ln \bar{C})^2\right] \\
&+ \bar{I}\left[(\ln I - \ln \bar{I}) + \frac{1}{2}(\ln I - \ln \bar{I})^2\right] \\
&+ \bar{G}\left[(\ln G - \ln \bar{G}) + \frac{1}{2}(\ln G - \ln \bar{G})^2\right] \qquad (11)
\end{aligned}$$

これで対数 2 次近似完了．$\ln Y$ を他の変数で対数 2 次近似したい場合は，(11) を両辺 2 乗して 2 次以下の項のみを書くと，

$$\begin{aligned}
(\ln Y - \ln \bar{Y})^2 = &\left(\frac{\bar{C}}{\bar{Y}}\right)^2 (\ln C - \ln \bar{C})^2 + \left(\frac{\bar{I}}{\bar{Y}}\right)^2 (\ln I - \ln \bar{I})^2 + \left(\frac{\bar{G}}{\bar{Y}}\right)^2 (\ln G - \ln \bar{G})^2 \\
&+ 2\left(\frac{\bar{C}\bar{I}}{\bar{Y}^2}\right)(\ln C - \ln \bar{C})(\ln I - \ln \bar{I}) + 2\left(\frac{\bar{I}\bar{G}}{\bar{Y}^2}\right)(\ln I - \ln \bar{I})(\ln G - \ln \bar{G}) \\
&+ 2\left(\frac{\bar{G}\bar{C}}{\bar{Y}^2}\right)(\ln G - \ln \bar{G})(\ln C - \ln \bar{C})
\end{aligned}$$

これを (11) に代入して $\ln Y$ の 2 次の項を消去すると，

$$\begin{aligned}
\ln Y - \ln \bar{Y} =& \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \cdot (\ln C - \ln \bar{C}) + \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \cdot (\ln I - \ln \bar{I}) + \frac{\bar{G}}{\bar{Y}} \cdot (\ln G - \ln \bar{G}) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \left( 1 - \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \right) (\ln C - \ln \bar{C})^2 \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \left( 1 - \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \right) (\ln I - \ln \bar{I})^2 \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{G}}{\bar{Y}} \left( 1 - \frac{\bar{G}}{\bar{Y}} \right) (\ln G - \ln \bar{G})^2 \\
&- \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} (\ln C - \ln \bar{C})(\ln I - \ln \bar{I}) \\
&- \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{G}}{\bar{Y}} (\ln I - \ln \bar{I})(\ln G - \ln \bar{G}) \\
&- \frac{\bar{G}}{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} (\ln G - \ln \bar{G})(\ln C - \ln \bar{C})
\end{aligned}$$

となり，$Y$ の定常状態からの対数乖離を需要項目の定常状態からの対数乖離で 2 次近似できた．

**練習問題 4**　方法 1 を使って，次の式を対数 2 次近似しなさい．

1. Cobb-Douglas 型生産関数 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$　$((A, K, L, Y) = (\bar{A}, \bar{K}, \bar{L}, \bar{Y})$ の周りで)
2. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$　$((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで)
3. 資本蓄積の動学を表す式 $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$ (定常状態 $(K_t, K_{t+1}, I_t) = (\bar{K}, \bar{K}, \bar{I})$ の周りで．ただし，$\delta\bar{K} = \bar{I}$ を満たす．)

### 3.2 対数 2 次近似の方法 2

**対数 2 次近似の方法 2：$\ln x$ の関数に直して，$\ln x$ に関して Taylor 展開**

- Step 1: $x = \exp(\ln x)$ を使うと，

$$f(x, y) = f(\exp(\ln x), \exp(\ln y)). \tag{12}$$

- Step 2: $f(\exp(\ln x)), \exp(\ln y))$ を，$(\ln x, \ln y)$ の関数と見て，Taylor 展開.

$$\begin{aligned} f(x) =& f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}(\ln x - \ln \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}(\ln y - \ln \bar{y}) \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}^2(\ln x - \ln \bar{x})^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}^2(\ln y - \ln \bar{y}) \\ &+ f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}^2\bar{y}^2(\ln x - \ln \bar{x})(\ln y - \ln \bar{y}) \end{aligned} \tag{13}$$

**例 7： 方法 2 による財市場の均衡式の対数 2 次近似**

$$Y = C + I + G$$

を定常状態 $(Y, C, I, G) = (\bar{Y}, \bar{C}, \bar{I}, \bar{G})$ に周りで対数 2 次近似する.

- Step 1: $x = \exp(\ln x)$ を使うと，

$$\exp(\ln Y) = \exp(\ln C) + \exp(\ln I) + \exp(\ln G)$$

- Step 2: $(\ln Y, \ln C, \ln I, \ln G) = (\ln \bar{Y}, \ln \bar{C}, \ln \bar{I}, \ln \bar{G})$ の周りで 2 次の Taylor 展開を行うと，

$$\begin{aligned} \bar{Y} \cdot (\ln Y - \ln \bar{Y}) + \frac{1}{2}\bar{Y} \cdot (\ln Y - \ln \bar{Y})^2 =& \bar{C} \cdot (\ln C - \ln \bar{C}) + \frac{1}{2}\bar{C} \cdot (\ln C - \ln \bar{C})^2 \\ &+ \bar{I} \cdot (\ln I - \ln \bar{I}) + \frac{1}{2}\bar{I} \cdot (\ln I - \ln \bar{I})^2 \\ &+ \bar{G} \cdot (\ln G - \ln \bar{G}) + \frac{1}{2}\bar{G} \cdot (\ln G - \ln \bar{G})^2 \end{aligned}$$

これで対数 2 次近似完了．方法 1 で行った場合（例 6）と同じになっている．

**練習問題 5**　方法 2 を使って，次の式を対数 2 次近似しなさい．

1. Cobb-Douglas 型生産関数 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$　$((A, K, L, Y) = (\bar{A}, \bar{K}, \bar{L}, \bar{Y})$ の周りで)
2. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$　$((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで)
3. 資本蓄積の動学を表す式 $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$ (定常状態 $(K_t, K_{t+1}, I_t) = (\bar{K}, \bar{K}, \bar{I})$ の周りで．ただし，$\delta\bar{K} = \bar{I}$ を満たす．)

# 4　練習問題の解答

### 練習問題 1

1. オイラー方程式

$$C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$$

を定常状態 $(C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで線型近似せよ．

**解答:** $\partial(\text{左辺})/\partial C_t = -\frac{1}{\sigma} C_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}$, $\partial(\text{右辺})/\partial C_{t+1} = -\frac{1}{\sigma}\beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}-1}$, $\partial(\text{右辺})/\partial R_{t+1} = \beta C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) =& \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}} + \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-1}(C_t - \bar{C}), \\
(\text{右辺}) =& \beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}} + \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-1} \cdot (C_{t+1} - \bar{C}) \\
& + \beta \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(R_{t+1} - \frac{1}{\beta}\right) \\
=& \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}} - \frac{1}{\sigma} \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-1}(C_{t+1} - \bar{C}) + \beta \bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}}(R_{t+1} - \frac{1}{\beta})
\end{aligned}$$

よって，

$$C_t - \bar{C} = (C_{t+1} - \bar{C}) - \sigma\beta\bar{C}(R_{t+1} - \frac{1}{\beta})$$

2. CES 型生産関数

$$Y = [aK^{\frac{\theta-1}{\theta}} + bL^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

を $(K, L, Y) = (\bar{K}, \bar{L}, \bar{Y})$ の周りで線形近似せよ．

**解答:** $\partial(\text{左辺})/\partial Y = 1$,
$\partial(\text{右辺})/\partial K = [aK^{\frac{\theta-1}{\theta}} + bL^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot aK^{-\frac{1}{\theta}}$,
$\partial(\text{右辺})/\partial L = [aK^{\frac{\theta-1}{\theta}} + bL^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot bL^{-\frac{1}{\theta}}$ なので，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) =& \bar{Y} + 1 \cdot (Y - \bar{Y}), \\
(\text{右辺}) =& [a\bar{K}^{\frac{\theta-1}{\theta}} + b\bar{L}^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\
& + [a\bar{K}^{\frac{\theta-1}{\theta}} + b\bar{L}^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot a\bar{K}^{-\frac{1}{\theta}}(K - \bar{K}) + [a\bar{K}^{\frac{\theta-1}{\theta}} + b\bar{L}^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot b\bar{L}^{-\frac{1}{\theta}}(L - \bar{L})
\end{aligned}$$

ここで $\bar{Y} = [a\bar{K}^{\frac{\theta-1}{\theta}} + b\bar{L}^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$, $\bar{Y}^{\frac{1}{\theta}} = [a\bar{K}^{\frac{\theta-1}{\theta}} + b\bar{L}^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{1}{\theta-1}}$ なので,

$$Y - \bar{Y} = \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}\right)^{\frac{1}{\theta}} a(K - \bar{K}) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{L}}\right)^{\frac{1}{\theta}} b(L - \bar{L})$$

**練習問題 2**　方法 1 を使って以下の方程式を対数線型化しなさい.

1. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$ $((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで)

   **解答:** 線型近似すると,

   $$C_t - \bar{C} = (C_{t+1} - \bar{C}) - \sigma\beta\bar{C}(R_{t+1} - \frac{1}{\beta})$$

   辺々 $\bar{C}$ で割ると,

   $$\frac{C_t - \bar{C}}{\bar{C}} = \frac{C_{t+1} - \bar{C}}{\bar{C}} - \sigma\frac{R_{t+1} - (1/\beta)}{1/\beta}$$

   ここで $\ln C_t - \ln \bar{C} = \dfrac{C_t - \bar{C}}{\bar{C}}$, $\ln(R_{t+1}) - \ln \bar{R} = \dfrac{R_{t+1} - 1/\beta}{1/\beta}$　(ただし，$\bar{R} \equiv 1/\beta$) なので，

   $$\ln C_t - \ln \bar{C} = (\ln C_{t+1} - \ln \bar{C}) - \sigma(\ln R_{t+1} - \ln \bar{R}), \quad \text{ただし，} \bar{R} = 1/\beta.$$

   これで対数線型化完了.

2. 財市場の均衡 $Y_t = C_t + I_t + G_t$ $((Y, C, I, G) = (\bar{Y}, \bar{C}, \bar{I}, \bar{G})$ の周りで)

   **解答:** 既に線型なので，定常状態の式 $\bar{Y} = \bar{C} + \bar{I} + \bar{G}$ を辺々引き算して，

   $$Y - \bar{Y} = (C - \bar{C}) + (I - \bar{I}) + (G - \bar{G})$$

   を得る．各項の分子と分母に定常状態での値を掛けると，

   $$\bar{Y} \cdot \frac{Y - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \bar{C} \cdot \frac{C - \bar{C}}{\bar{C}} + \bar{I} \cdot \frac{I - \bar{I}}{\bar{I}} + \bar{G} \cdot \frac{G - \bar{G}}{\bar{G}}$$

   この式に (4) を使うと，

   $$\bar{Y} \cdot (\ln Y - \ln \bar{Y}) = \bar{C} \cdot (\ln C - \ln \bar{C}) + \bar{I} \cdot (\ln I - \ln \bar{I}) + \bar{G} \cdot (\ln G - \ln \bar{G}).$$

   これで対数線型化完了.

**練習問題 3**　方法 2 を使って以下の方程式を対数線型化しなさい.

1. 労働供給曲線 $\dfrac{N^{\frac{1}{\phi}}}{C^{-\frac{1}{\sigma}}} = w_t$ 　$((C, N) = (\bar{C}, \bar{N})$ の周りで$)$

   **解答:** $x = e^{\ln x}$ を使うと,

$$\frac{\left(e^{\ln N}\right)^{\frac{1}{\phi}}}{\left(e^{\ln C}\right)^{\frac{1}{\sigma}}} = e^{\ln w}$$

   変形すると,

$$\exp\left[\frac{1}{\phi}\ln N - \frac{1}{\sigma}\ln C\right] = \exp\left[\ln w\right]$$

   したがって,

$$\frac{1}{\phi}\ln N - \frac{1}{\sigma}\ln C = \ln w$$

   これで対数線型化完了. 労働供給の賃金弾力性は $\phi$ である
   （賃金が 1%上昇すると労働供給を $\phi$% 増やす.）.

2. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$ 　$((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで$)$

   **解答:** $x = e^{\ln x}$ を使うと, $(\exp[\ln C_t])^{-\frac{1}{\sigma}} = \exp[\ln\beta]\exp[\ln R_{t+1}](\exp[\ln C_{t+1}])^{-\frac{1}{\sigma}}$. 変形すると,

$$\exp\left[-\frac{1}{\sigma}\ln C_t\right] = \exp\left[\ln\beta + \ln R_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\ln C_{t+1}\right]$$

   したがって,

$$-\frac{1}{\sigma}\ln C_t = -\frac{1}{\sigma}\ln C_{t+1} + [\ln R_{t+1} - (-\ln\beta)]$$

   両辺に $-\sigma$ を掛けて, $-\ln\beta = \ln\frac{1}{\beta}$ を使うと,

$$\ln C_t = \ln C_{t+1} - \sigma\left[\ln R_{t+1} - \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

   これで対数線型化が完了. 定常状態周りで表すには, $\ln\bar{C}$ を辺々引いて,

$$(\ln C_t - \ln\bar{C}) = (\ln C_{t+1} - \ln\bar{C}) - \sigma\left[\ln R_{t+1} - \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

   利子率が 1%上昇すると, $C_t/C_{t+1}$ が $\sigma$% 低下する.
   （$\sigma$ は消費の異時点間の代替の弾力性.）

3. CES aggregator に対する物価指数の式 $P = \left[\lambda(P^a)^{1-\theta} + (1-\lambda)(P^b)^{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}$ $\quad ((P^a, P^b, P) = (P^a, P^a, P^a)$ の周りで)

解答: $x = e^{\ln x}$ を使うと，

$$\exp\left[(1-\theta)\ln P\right] = \lambda\exp\left[(1-\theta)\ln P_a\right] + (1-\lambda)\exp\left[(1-\theta)\ln P_b\right]$$

$(\ln P^a, \ln P^b, \ln P) = (\ln P^a, \ln P^a, \ln P^a)$ の周りで 1 次の Taylor 展開すると，

$$(1-\theta)(P^a)^{1-\theta}(\ln P - \ln P^a) = (1-\lambda)(1-\theta)(P^a)^{1-\theta}(\ln P^b - \ln P^a)$$

したがって，

$$\ln P = \lambda \ln P^a + (1-\lambda)\ln P^b$$

これで対数線型化終了．物価水準の財 a 価格に対する弾力性は $\lambda$，財 b 価格に対する弾力性は $1-\lambda$ である．

**練習問題 4**　方法 1 を使って，次の式を対数 2 次近似しなさい．

1. Cobb-Douglas 型生産関数 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ $\quad ((A, K, L, Y) = (\bar{A}, \bar{K}, \bar{L}, \bar{Y})$ の周りで)

解答: 左辺と右辺をそれぞれ 2 次の Taylor 展開すると，

$$\begin{aligned}
\bar{Y} + (Y - \bar{Y}) =& \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha} + \bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}(A-\bar{A}) + \alpha\bar{A}\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{1-\alpha}(K-\bar{K}) + (1-\alpha)\bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{-\alpha}(L-\bar{L}) \\
&+ \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\bar{A}\bar{K}^{\alpha-2}\bar{L}^{1-\alpha}(K-\bar{K})^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha)(-\alpha)\bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{-\alpha-1}(L-\bar{L})^2 \\
&+ \alpha\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{1-\alpha}(A-\bar{A})(K-\bar{K}) \\
&+ (1-\alpha)\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{-\alpha}(A-\bar{A})(L-\bar{L}) \\
&+ \alpha(1-\alpha)\bar{A}\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{-\alpha}(K-\bar{K})(L-\bar{L})
\end{aligned}$$

$\bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$ で 0 次の項は消える．1 次の項には分子と分母に定常状態の値を，2 次の項には分子と分母に定常状態の 2 乗を掛けると，

$$\begin{aligned}
\bar{Y}\cdot\frac{Y-\bar{Y}}{\bar{Y}} =& \bar{Y}\cdot\frac{A-\bar{A}}{\bar{A}} + \alpha\bar{Y}\cdot\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}} + (1-\alpha)\bar{Y}\cdot\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}} \\
&- \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\cdot\bar{Y}\cdot\left(\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}}\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\cdot\bar{Y}\cdot\left(\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}}\right)^2 \\
&+ \alpha\bar{Y}\cdot\left(\frac{A-\bar{A}}{\bar{A}}\right)\cdot\left(\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}}\right) \\
&+ (1-\alpha)\bar{Y}\cdot\left(\frac{A-\bar{A}}{\bar{A}}\right)\cdot\left(\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}}\right) \\
&+ \alpha(1-\alpha)\cdot\bar{Y}\cdot\left(\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}}\right)\cdot\left(\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}}\right)
\end{aligned}$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\frac{Y-\bar{Y}}{\bar{Y}} =& \frac{A-\bar{A}}{\bar{A}} + \alpha \cdot \frac{K-\bar{K}}{\bar{K}} + (1-\alpha) \cdot \frac{L-\bar{L}}{\bar{L}} \\
& - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) \cdot \left(\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}}\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) \cdot \left(\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}}\right)^2 \\
& + \alpha \cdot \left(\frac{A-\bar{A}}{\bar{A}}\right) \cdot \left(\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}}\right) \\
& + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{A-\bar{A}}{\bar{A}}\right) \cdot \left(\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}}\right) \\
& + \alpha(1-\alpha) \cdot \left(\frac{K-\bar{K}}{\bar{K}}\right) \cdot \left(\frac{L-\bar{L}}{\bar{L}}\right)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i} = \ln x_i - \ln \bar{x}_i + \dfrac{1}{2}(\ln x_i - \ln \bar{x}_i)^2$, $\left(\dfrac{x_i-\bar{x}_i}{\bar{x}_i}\right)^2 = (\ln x_i - \ln \bar{x}_i)^2$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\ln Y - \ln \bar{Y} + \frac{1}{2}(\ln Y - \ln \bar{Y})^2 =& \ln A - \ln \bar{A} + \frac{1}{2}(\ln A - \ln \bar{A})^2 \\
& + \alpha(\ln K - \ln \bar{K}) + \frac{1}{2}\alpha(\ln K - \ln \bar{K})^2 \\
& + (1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L}) + \frac{1}{2}(1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L})^2 \\
& - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)(\ln K - \ln \bar{K})^2 - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L})^2 \\
& + \alpha(\ln A - \ln \bar{A})(\ln K - \ln \bar{K}) \\
& + (1-\alpha)(\ln A - \ln \bar{A})(\ln L - \ln \bar{L}) \\
& + \alpha(1-\alpha)(\ln K - \ln \bar{K}) \cdot (\ln L - \ln \bar{L})
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\ln Y - \ln \bar{Y} + \frac{1}{2}(\ln Y - \ln \bar{Y})^2 =& \ln A - \ln \bar{A} + \frac{1}{2}(\ln A - \ln \bar{A})^2 \\
& + \alpha(\ln K - \ln \bar{K}) + \frac{1}{2}\alpha^2(\ln K - \ln \bar{K})^2 \\
& + (1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L}) + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2(\ln L - \ln \bar{L})^2 \\
& + \alpha(\ln A - \ln \bar{A})(\ln K - \ln \bar{K}) \\
& + (1-\alpha)(\ln A - \ln \bar{A})(\ln L - \ln \bar{L}) \\
& + \alpha(1-\alpha)(\ln K - \ln \bar{K}) \cdot (\ln L - \ln \bar{L})
\end{aligned} \tag{14}
$$

ここで (14) を両辺 2 乗して，2 次以下の項のみ書き出すと，

$$
\begin{aligned}
(\ln Y - \ln \bar{Y})^2 =& (\ln A - \ln \bar{A})^2 + \alpha^2(\ln K - \ln \bar{K})^2 + (1-\alpha)^2(\ln L - \ln \bar{L})^2 \\
&+ 2\alpha(\ln A - \ln \bar{A})(\ln K - \ln \bar{K}) + 2(1-\alpha)(\ln A - \ln \bar{A})(\ln L - \ln \bar{L}) \\
&+ 2\alpha(1-\alpha)(\ln K - \ln \bar{K})(\ln L - \ln \bar{L})
\end{aligned}
$$

以上から，2 次の項は全て打ち消しあい，以下のようになり対数 2 次化完了．

$$
\ln Y - \ln \bar{Y} = \ln A - \ln \bar{A} + \alpha(\ln K - \ln \bar{K}) + (1-\alpha)(\ln L - \ln \bar{L})
$$

（もともと対数線型の形なので，対数 2 次化しても，2 次の項は現れない．）

2. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$　$((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで)

**解答:** 左辺と右辺をそれぞれ 2 次の Taylor 展開すると（定数項は消せるので），

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\sigma}\bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-1}(C_t - \bar{C}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)\bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-2}(C_t - \bar{C})^2 \\
&= \beta\bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}}\left(R_{t+1} - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\sigma}\bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-1}(C_{t+1} - \bar{C}) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)\bar{C}^{-\frac{1}{\sigma}-2}(C_{t+1} - \bar{C})^2
\end{aligned}
$$

変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_t - \bar{C}}{\bar{C}} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)\cdot\left(\frac{C_t - \bar{C}}{\bar{C}}\right)^2 \\
&= \frac{C_{t+1} - \bar{C}}{\bar{C}} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)\cdot\left(\frac{C_{t+1} - \bar{C}}{\bar{C}}\right)^2 - \sigma\cdot\frac{R_{t+1} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i} = \ln x_i - \ln \bar{x}_i + \frac{1}{2}(\ln x_i - \ln \bar{x}_i)^2, \left(\dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i}\right)^2 = (\ln x_i - \ln \bar{x}_i)^2$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\ln C_t - \ln \bar{C} - \frac{1}{2\sigma}(\ln C_t - \ln \bar{C})^2 =& \ln C_{t+1} - \ln \bar{C} - \frac{1}{2\sigma}(\ln C_{t+1} - \ln \bar{C})^2 \\
&- \sigma\left(\ln R_{t+1} - \ln\frac{1}{\beta}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(\ln R_{t+1} - \ln\frac{1}{\beta}\right)^2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

両辺を 2 乗して，2 次の項まで見ると，

$$
(\ln C_t - \ln \bar{C})^2 = (\ln C_{t+1} - \ln \bar{C})^2 + \sigma^2\left(\ln R_{t+1} - \ln\frac{1}{\beta}\right)^2
$$

これを (15) に代入すると，ちょうど 2 次の項が打ち消しあい，

$$\ln C_t - \ln \bar{C} = \ln C_{t+1} - \ln \bar{C} - \sigma \left( \ln R_{t+1} - \ln \frac{1}{\beta} \right)$$

（もともと対数線型なので，2 次の項は現れない.）

3. 資本蓄積の動学を表す式 $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$ (定常状態 $(K_t, K_{t+1}, I_t) = (\bar{K}, \bar{K}, \bar{I})$ の周りで．ただし，$\delta\bar{K} = \bar{I}$ を満たす．)

**解答:** 両辺をそれぞれ 2 次の Taylor 展開すると，

$$K_{t+1} - \bar{K} = (1-\delta)(K_t - \bar{K}) + (I_t - \bar{I})$$

（もともと線型なので，基本的に変わらない．定常状態の値を引いただけの形になる.）これを変形すると，

$$\frac{K_{t+1} - \bar{K}}{\bar{K}} = (1-\delta) \cdot \frac{K_t - \bar{K}}{\bar{K}} + \frac{\bar{I}}{\bar{K}} \cdot \frac{I_t - \bar{I}}{\bar{I}}$$

$\bar{I}/\bar{K} = \delta$ なので，

$$\frac{K_{t+1} - \bar{K}}{\bar{K}} = (1-\delta) \cdot \frac{K_t - \bar{K}}{\bar{K}} + \delta \cdot \frac{I_t - \bar{I}}{\bar{I}}$$

ここで (9) を使うと，

$$\begin{aligned} \ln K_{t+1} - \ln \bar{K} + \frac{1}{2}(\ln K_{t+1} - \ln \bar{K})^2 =&(1-\delta)(\ln K_t - \ln \bar{K}) + \frac{1}{2}(1-\delta)(\ln K_t - \ln \bar{K})^2 \\ &+ \delta \cdot (\ln I_t - \ln \bar{I}) + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot (\ln I_t - \ln \bar{I})^2 \end{aligned} \tag{16}$$

これで対数 2 次の式になった．もし $K_{t+1}$ の 1 次の対数乖離を $K_t$ と $I_t$ の 2 次までの対数乖離で近似したければ，以下のようにすれば良い．(16) を 2 乗して 2 次以下の項を無視すると，

$$\begin{aligned} (\ln K_{t+1} - \ln \bar{K})^2 =&(1-\delta)^2(\ln K_t - \ln \bar{K})^2 + \delta^2 \cdot (\ln I_t - \ln \bar{I})^2 \\ &+ 2\delta \cdot (1-\delta) \cdot (\ln K_t - \ln \bar{K}) \cdot (\ln I_t - \ln \bar{I}) \end{aligned}$$

これを (16) に代入すると，

$$\begin{aligned} \ln K_{t+1} - \ln \bar{K} =&(1-\delta)(\ln K_t - \ln \bar{K}) + \frac{1}{2} \cdot (1-\delta)\delta(\ln K_t - \ln \bar{K})^2 \\ &+ \delta(\ln I_t - \ln \bar{I}) + \frac{1}{2} \cdot \delta\,(1-\delta)\,(\ln I_t - \ln \bar{I})^2 \\ &- \delta \cdot (1-\delta) \cdot (\ln K_t - \ln \bar{K})(\ln I_t - \ln \bar{I}) \end{aligned}$$

これで完了[3].

**練習問題 5**　方法 2 を使って，次の式を対数 2 次近似しなさい.

1. Cobb-Douglas 型生産関数 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$　$((A, K, L, Y) = (\bar{A}, \bar{K}, \bar{L}, \bar{Y})$ の周りで)

   **解答:**　$x = e^{\ln x}$ を使って，

$$\exp[\ln Y] = \exp[\ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L]$$

   したがって，

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L$$

   となり，もともと対数線型であるので，これで終了．定常状態では $\ln\bar{Y} = \ln\bar{A} + \alpha\ln\bar{K} + (1-\alpha)\ln\bar{L}$ なので，これを辺々引くと，

$$\ln Y - \ln\bar{Y} = \ln A - \ln\bar{A} + \alpha(\ln K - \ln\bar{K}) + (1-\alpha)(\ln L - \ln\bar{L})$$

   となり，方法 1 と同じ結果になる.

2. オイラー方程式 $C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$　$((C_t, C_{t+1}, R_{t+1}) = (\bar{C}, \bar{C}, \frac{1}{\beta})$ の周りで)

   **解答:**　$x = e^{\ln x}$ を使って，

$$\exp\left[-\frac{1}{\sigma}\ln C_{t+1}\right] = \exp\left[\ln\beta + \ln R_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\ln C_{t+1}\right]$$

   したがって，

$$-\frac{1}{\sigma}\ln C_t = \ln\beta + \ln R_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\ln C_{t+1}$$

   両辺に $-\sigma$ を掛けると，

$$\ln C_t = \ln C_{t+1} - \sigma\left(\ln R_{t+1} - \ln\frac{1}{\beta}\right)$$

   これで完了.（もともと対数線型なので，2 次の項は現れない.）

3. 資本蓄積の動学を表す式 $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$ (定常状態 $(K_t, K_{t+1}, I_t) = (\bar{K}, \bar{K}, \bar{I})$ の周りで．ただし，$\delta\bar{K} = \bar{I}$ を満たす．)

---

[3] これを変形すると

$$\ln K_{t+1} - \ln K_t = \delta\left(\ln\frac{I_t}{K_t} - \ln\frac{\bar{I}_t}{\bar{K}_t}\right) + \frac{1}{2}\delta(1-\delta)\left(\ln\frac{I_t}{K_t} - \ln\frac{\bar{I}}{\bar{K}}\right)^2$$

と書くことができる．つまり，資本の成長率の期待値は，投資-資本比率の期待値と分散の増加関数に近似できる.

**解答:** $x = e^{\ln x}$ を使って，

$$\exp[\ln K_{t+1}] = (1-\delta)\exp[\ln K_t] + \exp[\ln I_t].$$

$(\ln K_t, \ln K_t, \ln I_t) = (\ln \bar{K}, \ln \bar{K}, \ln \bar{I})$ の周りで 2 次の Taylor 展開をすると，

$$\begin{aligned}\bar{K}(\ln K_{t+1} - \ln K_t) + \frac{1}{2}\bar{K}(\ln K_{t+1} - \ln \bar{K})^2 =& (1-\delta)\bar{K}(\ln K_t - \ln \bar{K}) + \frac{1}{2}(1-\delta)\bar{K}(\ln K_t - \ln \bar{K})^2 \\ &+ \bar{I}(\ln I_t - \ln \bar{I}) + \frac{1}{2}\bar{I}(\ln I_t - \ln \bar{I})^2.\end{aligned}$$

両辺を $\bar{K}$ で割って，$\bar{I}/\bar{K} = \delta$ を使うと，

$$\begin{aligned}(\ln K_{t+1} - \ln K_t) + \frac{1}{2}(\ln K_{t+1} - \ln \bar{K})^2 =& (1-\delta)(\ln K_t - \ln \bar{K}) + \frac{1}{2}(1-\delta)(\ln K_t - \ln \bar{K})^2 \\ &+ \delta(\ln I_t - \ln \bar{I}) + \frac{1}{2}\delta(\ln I_t - \ln \bar{I})^2.\end{aligned}$$

となり，(16) と同じ式を得る．