

## 線型確率的動学一般均衡モデルの合理的期待均衡解の求め方 (Incomplete. Please do not cite.)

線型の確率的動学一般均衡モデルの合理的期待均衡解を求める際の解法を簡単に紹介する.<sup>1</sup>

### 1 線型動学的確率的一般均衡モデルの行列表現

動学的な一般均衡モデルに確率的な外生ショックを導入したモデルは動学的確率的一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium models, DSGE models) と呼ばれる. 対数線型化した離散時間 DSGE モデルの多くは以下のような線型差分方程式システムとして表現できる<sup>2</sup>.

$$\underset{(n \times n)}{B} \underset{(n \times 1)}{E_t x_{t+1}} = \underset{(n \times n)}{A} \underset{(n \times 1)}{x_t} + \underset{(n \times n_z)}{C} \underset{(n_z \times 1)}{z_t} \quad (1)$$

ただし、 $x_t$  は第  $t$  期に観測される内生変数のベクトル、 $z_t$  は外生的に変化する確率変数のベクトルである.

ここで、内生変数  $x_t$  を後ろ向き変数 (backward-looking variables) とそうでない変数に分ける. 後ろ向き変数の定義は以下の通り.

#### Definition 1: Backward-looking variables

確率過程  $k$  が後ろ向きであるとは、以下の 2 つを満たすことを言う.

1. 予測誤差の確率過程  $\xi$  を、 $\xi_{t+1} \equiv k_{t+1} - E_t k_{t+1}$  と定義すると、予測誤差は外生的な difference martingale process である、つまり、 $\xi$  は外生であり、かつ  $E_t \xi_{t+1} = 0$  である.
2.  $k_0$  は外生的に与えられる変数である.

モデルを式 (1) の形に表現する際、内生変数ベクトル  $x_t$  の中の変数は、上に後ろ向き変数を並べるものとする. つまり、 $x_t$  は下のように後ろ向き変数のベクトル  $k_t$  とそれ以外の内生変数ベクトル  $d_t$  に分けられる.

$$x_t = \begin{bmatrix} k_t \\ d_t \end{bmatrix} \quad (2)$$

後ろ向き変数の数を  $n_k$  とする. つまり、 $k_t$  は  $(n_k \times 1)$  の列ベクトル、 $d_t$  は  $((n - n_k) \times 1)$  の列ベクトルである.

<sup>1</sup>ここでの議論は主に Klein (2000) に沿っている. ただし、Klein (2000) とは記法や行列の命名などが大きく異なっていることに注意しなさい. 線型の確率的動学モデルの合理的期待均衡を求める手法については Klein (2000) の他にも多数開発されている. 例えば Sims (2002) 等. それぞれに長所と短所があるので、興味があれば参照されたい.

<sup>2</sup>Sims (2002) は連続時間線型モデルについても解法を提案しているので必要に応じて参照すること.

## 1.1 Example 1: A Stochastic Neoclassical Growth Model with an AR(1) productivity shock

Basic な新古典派成長モデル (Ramsey Model) に定常な AR(1) 過程に従う生産性ショックを導入したモデルは、対数線形近似すると

$$[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \alpha)\tilde{k}_{t+1} + \sigma E_t \tilde{c}_{t+1} = \sigma \tilde{c}_t + [1 - \beta(1 - \delta)]\rho \tilde{a}_t \quad (3)$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta} \tilde{k}_t - \frac{1 - \beta + (1 - \alpha)\beta\delta}{\alpha\beta} \tilde{c}_t + \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta} \tilde{a}_t \quad (4)$$

with

$$\tilde{a}_t = \rho \tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t.$$

と書くことができる。ここで、 $\tilde{k}_0$  は外生的に与えられ、かつ ( $E_t \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_{t+1}$  であるから、) 予測誤差は  $\xi_{t+1}^k = 0$ 。よって  $\xi^k$  は exogenous difference martingale である。したがって、 $\tilde{k}$  は後ろ向き変数。よって、

$$k_t = \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \end{bmatrix}, d_t = \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix} \tilde{a}_t \end{bmatrix}, \xi_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \alpha) & \sigma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \frac{1}{\beta} & -\frac{1 - \beta + (1 - \alpha)\beta\delta}{\alpha\beta} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} [1 - \beta(1 - \delta)]\rho \\ \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

## 1.2 Example 2 : A Simple Real Business Cycle Model

例 1 に弾力的労働供給を加えると、シンプルな RBC モデルとなる。

$$\bar{K} \tilde{k}_{t+1} = (1 - \delta) \bar{K} \tilde{k}_t + \bar{Y} \tilde{y}_t - \bar{C} \tilde{c}_t \quad (6)$$

$$0 = \alpha \tilde{k}_t - \alpha \tilde{y}_t - (1 - \alpha) \tilde{c}_t + \tilde{a}_t \quad (7)$$

$$0 = \tilde{k}_t - \tilde{y}_t + \tilde{r}_t \quad (8)$$

$$E_t \tilde{c}_{t+1} - \beta \bar{R} E_t \tilde{r}_{t+1} = \tilde{c}_t \quad (9)$$

with

$$\tilde{a}_t = \rho \tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t$$

と書ける。ここで、1.1 節と同様に、 $\tilde{k}$  は後ろ向き変数。よって、

$$k_t = \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \end{bmatrix}, d_t = \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{r}_t \end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix} \tilde{a}_t \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \bar{R} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} (1 - \delta) \bar{K} & \bar{Y} & -\bar{C} & 0 \\ \alpha & -\alpha & -(1 - \alpha) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

where,

$$\bar{R} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\bar{K}}{\bar{Y}} = \frac{\alpha}{\bar{R}} \right) \\ \left( \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} = 1 - \delta \cdot \left( \frac{\bar{K}}{\bar{Y}} \right) \right) \\ \bar{H} = \frac{1 - \alpha}{\psi \cdot \left( \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \right)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\bar{K}}{\bar{H}} = \left[ A \cdot \left( \frac{\bar{K}}{\bar{Y}} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\ \bar{K} = \left( \frac{\bar{K}}{\bar{H}} \right) \cdot \bar{H} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{Y} = \left( \frac{\bar{K}}{\bar{Y}} \right)^{-1} \cdot \bar{K} \quad (14)$$

$$\bar{C} = \left( \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \right) \cdot \bar{Y} \quad (15)$$

### 練習問題 1 : New Keynesian Model

以下の New Keynesian Model

$$\hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n) \quad (16)$$

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa \hat{y}_t \quad (17)$$

$$i_t = \rho + \theta_\pi \pi_t + \theta_y \hat{y}_t + \nu_t \quad (18)$$

$$r_t^n = \rho - \sigma(1 - \rho_a) \psi_{ya} a_t + (1 - \rho_z) z_t \quad (19)$$

$$\nu_t = \rho_\nu \nu_{t-1} + \sigma_\nu \epsilon_t^\nu \quad (20)$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \sigma_a \epsilon_t^a \quad (21)$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \sigma_z \epsilon_t^z \quad (22)$$

を Canonical Form で表現しなさい.

**Answer:**

$$E_t \hat{y}_{t+1} + \frac{1}{\sigma} E_t \pi_{t+1} = \hat{y}_t + \frac{1}{\sigma} (i_t - \rho) - \frac{1}{\sigma} (r_t^n - \rho) \quad (23)$$

$$\beta E_t \pi_{t+1} = -\kappa \hat{y}_t + \pi_t \quad (24)$$

$$\nu_t = (i_t - \rho) - \theta_\pi \pi_t - \theta_y \hat{y}_t \quad (25)$$

$$-\sigma(1 - \rho_a) \psi_{ya} a_t + (1 - \rho_z) z_t = (r_t^n - \rho) \quad (26)$$

$$\nu_t = \rho_\nu \nu_{t-1} + \sigma_\nu \epsilon_t^\nu \quad (27)$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \sigma_a \epsilon_t^a \quad (28)$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \sigma_z \epsilon_t^z \quad (29)$$

と書き直せるので、Canonical Form は、

$$x_t = \begin{bmatrix} \nu_{t-1} \\ a_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_t \\ i_t - \rho \\ \pi_t \\ r_t^n - \rho \end{bmatrix}, \quad \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t^\nu \\ \epsilon_t^a \\ \epsilon_t^z \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma(1 - \rho_a)\psi_{ya} & 1 - \rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sigma} & 0 & -\frac{1}{\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_y & 1 & -\theta_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。

## 2 一般化 Schur 分解（QZ 分解）

モデルを式 (1) の形式で書くことができたとする。次のステップは、(1) 内の行列の組  $B, A$  を一般化 Schur 分解（QZ 分解とも呼ばれる）することである。一般化 Schur 分解に入る前に、以下のようにペンシルと一般化固有値を定義する。

### Definition 2: Matrix Pencil

複素数を定義域に持つ複素数行列値関数  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  をペンシルと呼ぶ。

特に、2つの複素数正方行列  $B, A$  に対して、ペンシル  $P(z) = Bz - A$  を、ペンシル  $(B, A)$  と書くことにする。

### Definition 3: Generalized Eigenvalues

$P$  をペンシルとする。このペンシル  $P$  の一般化固有値の集合  $\lambda(P)$  は、以下のように定義される。

$$\lambda(P) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = 0\}.$$

つまり、一般化固有値  $\lambda \in \lambda(P)$  は、行列  $P(\lambda)$  の行列式をゼロにする複素数である。

特に、ペンシル  $(B, A)$  の一般化固有値の集合を  $\lambda(B, A)$  と書く。つまり、

$$\lambda(B, A) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |Bz - A| = 0\}.$$

$\lambda \in \lambda(B, A)$  に対して、ゼロでないベクトル  $x \in \mathbb{C}^n$  が存在して、 $Ax = \lambda Bx$  を満たす。この事実が、 $\lambda \in \lambda(B, A)$  が一般化固有値と呼ばれる所以である。

次に、ペンシルの正則性（regularity）を定義する。

#### Definition 4: Regular Matrix Pencil

$P$  をペンシルとする。ペンシル  $P$  が正則 (regular) であるとは、 $|P(z)| \neq 0$  となるような  $z \in \mathbb{C}$  が存在することを言う。つまり、 $P$  が正則であるとは、 $\lambda(P) \neq \mathbb{C}$  であることを言う。

以下では、モデル (1) 内の行列  $B, A$  から作られるペンシル  $(B, A)$  は正則であると仮定する<sup>3</sup>。

#### Assumption 1: Regularity

モデル (1) の行列  $B, A$  から作られるペンシル  $(B, A)$  は正則である。つまり、

$$\exists z \in \mathbb{C} \text{ such that } |Bz - A| \neq 0.$$

Assumption 1 が満たされていれば、 $A$  や  $B$  が逆行列を持たなくても問題はない。これが、一般化 Schur 分解を使う方法の大きな利点である。以上を踏まえて、一般化 Schur 分解は、以下のような定理にまとめられる。

#### Theorem 1: Complex Generalized Schur Decomposition

$A$  と  $B$  はともに  $n \times n$  の複素数行列であり、ペンシル  $(B, A)$  は regular である (つまり、 $\exists z \in \mathbb{C}$  such that  $|Bz - A| \neq 0$ .) とする。この時、複素数からなる  $n \times n$  行列  $Q, Z, S, T$  が存在して、以下が成り立つ。

1.  $Q^H A Z = S$  は上三角行列 (an upper triangular matrix) である<sup>a</sup>。
2.  $Q^H B Z = T$  は上三角行列 (an upper triangular matrix)。
3.  $Q$  と  $Z$  はユニタリー行列、つまり、 $Q Q^H = Q^H Q = I, Z Z^H = Z^H Z = I$  である。
4. 全ての  $i (= 1, 2, \dots, n)$  に対して、 $s_{ii}$  と  $t_{ii}$  が同時にゼロになることはない<sup>b</sup>。
5. ペンシル  $(B, A)$  の第  $i$  一般化固有値  $\lambda_i \in \lambda(B, A)$  は  $S$  の第  $i$  対角成分  $s_{ii}$  と  $T$  の第  $i$  対角成分  $t_{ii}$  を使って  $\lambda_i = \frac{s_{ii}}{t_{ii}}$  で求められる。(  $t_{ii} = 0$  のときは、 $\lambda_i = \infty$  と書くことにする。)
6. ペア  $(s_{ii}, t_{ii}) (i = 1, 2, \dots, n)$  の順番は任意に入れ替えられ、 $Q, Z, S, T$  はそのペア順番に依存して決まる。

*Proof:* Golub and van Loan (2012) を参照。

<sup>a</sup>ここで、 $X^H$  は  $X$  のエルミート共軛行列 (Hermitian conjugate matrix)、つまり  $X$  の転置および各成分の複素共軛をとった行列である。

<sup>b</sup> $x_{ij}$  によって、任意の行列  $X$  の  $(i, j)$  成分を表すものとする

Theorem 1.6 より、一般化 Schur 分解は一般に複数存在する。以下では一般化 Schur 分解は結果として得られる一般化固有値の絶対値が小さい順に上から並ぶように  $S, T, Q, Z$  を定めるとする。<sup>4</sup>

<sup>3</sup>動学的一般均衡モデルにおいて、ほぼ一般的にこの仮定が満たされる。

<sup>4</sup>この順序を指定した一般化 Schur 分解は、R では `eigen` パッケージにある `gqz` 関数で簡単に計算が可能である。

一般化 Schur 分解によって、 $A = QSZ^H, B = QTZ^H$  と分解できるので、式 (1) は

$$QTZ^H E_t x_{t+1} = QSZ^H x_t + C z_t$$

と書ける。両辺に左から  $Q^H$  を掛けて、 $Q^H Q = I$  を使うと

$$TZ^H E_t x_{t+1} = SZ^H x_t + Q^H C z_t \quad (32)$$

ここで、補助的な変数として

$$y_t \equiv Z^H x_t \quad (33)$$

と定義すると、式 (32) は

$$TE_t y_{t+1} = S y_t + Q^H C z_t \quad (34)$$

と書き直すことができる。

### 3 解の安定性の確認 (stable な一般化固有値の数と後ろ向き変数の数の比較)

式 (1) を式 (34) に書き直したら、一般化固有値の絶対値を確認する。全部で  $n$  個ある一般化固有値  $\lambda_i = \frac{s_{ii}}{t_{ii}}$  のうち、絶対値が 1 より小さいものを「stable な一般化固有値」、絶対値が 1 より大きいものを「unstable な一般化固有値」と呼ぶことにする<sup>5</sup>。また、stable な一般化固有値の数を  $n_s$  で表すことにする。このとき、以下の定理が得られる<sup>6</sup>。

#### Theorem 2: Stability

行列  $Z_{11}$  を、行列  $Z$  の左上  $n_k \times n_s$  部分を取り出した行列とする。この時、

1.  $n_s = n_k$  かつ  $Z_{11}$  が逆行列を持つならば、stable な合理的期待均衡解は unique に定まる。(Saddle path stable)
2.  $n_s < n_k$  ならば、stable な合理的期待均衡解は存在しない。(No solution)
3.  $n_s > n_k$  ならば、stable な合理的期待均衡解は無数に存在する。(Indeterminacy)

以下の説明は、解の求め方であるとともに、Theorem 2 の証明でもある。

$n$  個の補助変数からなるベクトル  $y_t$  のうち、上から  $n_s$  個の変数からなるベクトルを  $s_t$ 、残り  $n_u (= n - n_s)$  個の変数からなるベクトルを  $u_t$  と書く。つまり、 $y_t$  を以下のように partition する。

$$y_t = \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (n_s \times 1) \\ (n_u \times 1) \end{matrix} \quad (35)$$

<sup>5</sup>絶対値がちょうど 1 である一般化固有値はないと仮定する。もしこれが存在すると、解くのは非常に難しくなる。

<sup>6</sup>Theorem 2 のように、stable な固有値の数と後ろ向き変数（または先決変数）の数を比較して解の安定性を判別するための定理は Blanchard-Kahn Theorem と呼ばれる。

行列  $S, T, Q^H$  もそれに合わせて partition する． $S$  と  $T$  は上三角行列であることに注意すると,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ (n_s \times n_s) & (n_s \times n_u) \\ 0 & S_{22} \\ (n_u \times n_s) & (n_u \times n_u) \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ (n_s \times n_s) & (n_s \times n_u) \\ 0 & T_{22} \\ (n_u \times n_s) & (n_u \times n_u) \end{bmatrix}, Q^H = \begin{bmatrix} (Q^H)_1 \\ (n_s \times n) \\ (Q^H)_2 \\ (n_u \times n) \end{bmatrix} \quad (36)$$

と書ける．これを使って (34) を書き直すと,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t s_{t+1} \\ E_t u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (Q^H)_1 \\ (Q^H)_2 \end{bmatrix} C z_t \quad (37)$$

## 4 $u_t$ の決定

$S$  と  $T$  がともに上三角行列であることから, (37) の下  $n_u$  行には  $s_t$  および  $E_t s_{t+1}$  が現れず,  $u_t$  および  $E_t u_{t+1}$  は以下の式を満たす事がわかる．

$$T_{22} E_t u_{t+1} = S_{22} u_t + (Q^H)_2 C z_t. \quad (38)$$

上の式は  $n_u$  本の連立方程式になっている． $S_{22}$  と  $T_{22}$  も上三角行列であることに気をつけると, (38) の上から数えて第  $i$  番目の方程式は以下の形式になっている．

$$(t_{22})_{ii} E_t u_{i,t+1} + \sum_{j=i+1}^{n_u} (t_{22})_{ij} E_t u_{j,t+1} = (s_{22})_{ii} u_{i,t} + \sum_{j=i+1}^{n_u} (s_{22})_{ij} u_{j,t} + g_{i \cdot} z_t, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n_u - 1, \quad (39)$$

$$(t_{22})_{ii} E_t u_{i,t+1} = (s_{22})_{ii} u_{i,t} + g_{i \cdot} z_t, \quad \text{for } i = n_u. \quad (40)$$

ここで,  $u_{i,t}$  はベクトル  $u_t$  の第  $i$  成分,  $g_{i \cdot}$  は行列  $(Q^H)_2 C$  の第  $i$  行を表す．

(39), (40) の方程式は, 下から順に解いていくことができる．一番下にある (上から数えると第  $n_u$  番目の) 方程式は, (40) を使って

$$\begin{aligned} (t_{22})_{n_u, n_u} E_t u_{n_u, t+1} &= (s_{22})_{n_u, n_u} u_{n_u, t} + g_{n_u \cdot} z_t. \\ \Leftrightarrow u_{n_u, t} &= \frac{(t_{22})_{n_u, n_u}}{(s_{22})_{n_u, n_u}} E_t u_{n_u, t+1} - \frac{1}{(s_{22})_{n_u, n_u}} g_{n_u \cdot} z_t. \end{aligned}$$

となる． $u_t$  に対応する一般化固有値は unstable なので,  $|(t_{22})_{n_u, n_u} / (s_{22})_{n_u, n_u}| < 1$ ．よって上の式は forward に解くことができ,

$$\Leftrightarrow u_{n_u, t} = -\frac{1}{(s_{22})_{n_u, n_u}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(t_{22})_{n_u, n_u}}{(s_{22})_{n_u, n_u}} \right)^k g_{n_u \cdot} E_t z_{t+k}. \quad (41)$$

となる．ここで外生の確率変数ベクトル  $z_t$  は VAR 過程に従い, 自己相関行列  $\Phi$  を持つ場合はより明示的に解ける．

**Assumption 2: VAR exogenous shock process**

確率過程  $z$  は、自己相関行列  $\Phi$  の VAR 過程に従う。つまり、 $E_t z_{t+k} = \Phi^k z_t$ 。

Assumption 2 が成立する場合は、(41) は、

$$\begin{aligned} u_{n_u, t} &= -\frac{1}{(s_{22})_{n_u, n_u}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(t_{22})_{n_u, n_u}}{(s_{22})_{n_u, n_u}} \right)^k g_{n_u \cdot} \Phi^k z_t. \\ &= g_{n_u \cdot} [(t_{22})_{n_u, n_u} \Phi - (s_{22})_{n_u, n_u} I_{n_z}]^{-1} z_t \\ &= m_{n_u \cdot} z_t, \end{aligned} \quad (42)$$

where

$$m_{n_u \cdot} \equiv g_{n_u \cdot} [(t_{22})_{n_u, n_u} \Phi - (s_{22})_{n_u, n_u} I_{n_z}]^{-1} \quad (43)$$

となる（最後の式変形は Appendix B を参照）。

次に、一段上（上から第  $(n_u - 1)$  番目）の方程式を書き下すと、(39) 式から、

$$\begin{aligned} (t_{22})_{n_u-1, n_u-1} E_t u_{n_u-1, t+1} + (t_{22})_{n_u-1, n_u} E_t u_{n_u, t+1} \\ = (s_{22})_{n_u-1, n_u-1} u_{n_u-1, t} + (s_{22})_{n_u-1, n_u} u_{n_u, t} + g_{n_u-1 \cdot} z_t \end{aligned}$$

となるが、(42) 式と Assumption 2 から、 $u_{n_u, t} = m_{n_u \cdot} z_t$ ,  $E_t u_{n_u, t+1} = m_{n_u \cdot} \Phi z_t$  であるから、

$$\begin{aligned} (t_{22})_{n_u-1, n_u-1} E_t u_{n_u-1, t+1} &= (s_{22})_{n_u-1, n_u-1} u_{n_u-1, t} + r_{n_u-1 \cdot} z_t \\ \Leftrightarrow u_{n_u-1, t} &= -\frac{1}{(s_{22})_{n_u-1, n_u-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(t_{22})_{n_u-1, n_u-1}}{(s_{22})_{n_u-1, n_u-1}} \right)^k r_{n_u-1 \cdot} \Phi^k z_t, \end{aligned} \quad (44)$$

$$= r_{n_u-1 \cdot} [(t_{22})_{n_u-1, n_u-1} \Phi - (s_{22})_{n_u-1, n_u-1} I_{n_z}]^{-1} z_t, \quad (45)$$

where

$$r_{n_u-1 \cdot} = [(s_{22})_{n_u-1, n_u} m_{n_u \cdot} - (t_{22})_{n_u-1, n_u} m_{n_u \cdot} \Phi] + g_{n_u-1 \cdot}.$$

(45) は、

$$u_{n_u-1, t} = m_{n_u-1 \cdot} z_t,$$

where

$$m_{n_u-1 \cdot} = r_{n_u-1 \cdot} [(t_{22})_{n_u-1, n_u-1} \Phi - (s_{22})_{n_u-1, n_u-1} I_{n_z}]^{-1}$$

と書ける。

同様に下から順番に解いていくと、上から第  $i$  番目の方程式は、

$$u_{i, t} = m_{i \cdot} z_t, \quad (46)$$

where

$$m_{i \cdot} = r_i [(t_{22})_{ii} \Phi - (s_{22})_{ii} I_{n_z}]^{-1}, \quad (47)$$

$$r_i = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{n_u} [(s_{22})_{ij} m_{j \cdot} - (t_{22})_{ij} m_{j \cdot} \Phi] + g_{i \cdot} & i = 1, 2, \dots, n_u - 1, \\ g_{n_u \cdot}, & i = n_u. \end{cases} \quad (48)$$



以上から,  $i = n_u, n_u - 1, \dots, 1$  の順に  $m_{i\cdot}$  を計算し,

$$M = \begin{bmatrix} m_{1\cdot} \\ m_{2\cdot} \\ \vdots \\ m_{n_u\cdot} \end{bmatrix} \quad (49)$$

によって  $n_u \times n_u$  行列  $M$  を作れば,

$$u_t = Mz_t \quad (50)$$

となり,  $u_t$  を外生の確率変数  $z_t$  で表すことができる.

## 5 $s_t$ の決定

式 (37) の上から  $n_s$  本の連立方程式は,

$$T_{11}E_t s_{t+1} + T_{12}E_t u_{t+1} = S_{11}s_t + S_{12}u_t + (Q^H)_1.Cz_t$$

$T_{11}$  は逆行列を持つ<sup>7</sup>ので,

$$\begin{aligned} E_t s_{t+1} &= (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + (T_{11})^{-1}S_{12}u_t - (T_{11})^{-1}T_{12}E_t u_{t+1} + (T_{11})^{-1}(Q^H)_1.Cz_t \\ &= (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + (T_{11})^{-1}S_{12}Mz_t - (T_{11})^{-1}T_{12}M\Phi z_t + (T_{11})^{-1}(Q^H)_1.Cz_t \\ &= (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + [(T_{11})^{-1}S_{12}M - (T_{11})^{-1}T_{12}M\Phi + (T_{11})^{-1}(Q^H)_1.C]z_t \end{aligned} \quad (51)$$

$T_{11}^{-1}S_{11}$  の全ての固有値は 1 より小さいので,  $u_t$  を解いたときのように, この式を forward に解くことはできない. その代わり, 以下の解法を使う.

行列  $Z$  を以下のように partition する.

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} (n_k \times n_s) & (n_k \times n_u) \\ ((n - n_k) \times n_s) & ((n - n_k) \times n_u) \end{matrix}$

$x_t = Zy_t$  より,

$$k_t = Z_{11}s_t + Z_{12}u_t. \quad (52)$$

なので,

$$E_t k_{t+1} = Z_{11}E_t s_{t+1} + Z_{12}E_t u_{t+1}$$

となる. したがって, これらと Definition 1 より,

$$k_{t+1} - E_t k_{t+1} = Z_{11}(s_{t+1} - E_t s_{t+1}) + Z_{12}(u_{t+1} - E_t u_{t+1}) = \xi_{t+1} \quad (53)$$

<sup>7</sup>証明は以下の通り.  $i \in \{1, \dots, n_s\}$  に対して,  $|\lambda_i| = \left| \frac{s_{ii}}{t_{ii}} \right| < 1$ . したがって  $t_{ii} \neq 0$ . 更に,  $T_{11}$  の対角成分より右下の成分は全てゼロ. したがって,  $T_{11}$  の各行は一次独立であるので,  $T_{11}$  は full rank である.

### 5.1 Case 1: $n_s = n_k$ かつ $Z_{11}$ の逆行列が存在する場合

$Z_{11}$  が逆行列を持つので、式 (53) から、

$$\begin{aligned} E_t s_{t+1} &= s_{t+1} + (Z_{11})^{-1} Z_{12} (u_{t+1} - E_t u_{t+1}) - (Z_{11})^{-1} \xi_{t+1} \\ &= s_{t+1} + (Z_{11})^{-1} Z_{12} M (\Phi z_t + \varepsilon_{t+1} - \Phi z_t) - (Z_{11})^{-1} \xi_{t+1} \\ &= s_{t+1} + (Z_{11})^{-1} Z_{12} M \varepsilon_{t+1} - (Z_{11})^{-1} \xi_{t+1} \end{aligned} \quad (54)$$

を得る。この式を式 (51) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= (T_{11})^{-1} S_{11} s_t + (T_{11})^{-1} [S_{12} M - T_{12} M \Phi + (Q^H)_1 C] z_t \\ &\quad - (Z_{11})^{-1} Z_{12} M \varepsilon_{t+1} + (Z_{11})^{-1} \xi_{t+1} \end{aligned} \quad (55)$$

この式の中で  $z_t, \varepsilon_t, \xi_{t+1}$  は外生なので、もし  $s_0$  が与えられれば、 $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$  を全て求められる。

最後に、 $s_0$  を求める。式 (52) から  $k_0 = Z_{11} s_0 + Z_{12} u_0$ 。したがって、

$$\begin{aligned} s_0 &= (Z_{11})^{-1} [k_0 - Z_{12} u_0] \\ &= (Z_{11})^{-1} [k_0 - Z_{12} M z_0] \quad (\because (50)). \end{aligned} \quad (56)$$

以上で、外生変数の確率過程に対して  $y_t$  の確率過程がただ一つに定まる。

### 5.2 Case 2: $n_s < n_k$ の場合

(50) から、 $u_0$  について  $n_u$  本の条件

$$u_0 = M z_0 \quad (57)$$

があり、(52) から、 $s_0$  について  $n_k$  本の条件

$$Z_{11} s_0 = Z_{12} u_0 - k_0 = Z_{12} M z_0 - k_0 \quad (58)$$

がある。したがって、 $y_0$  について  $n_s + n_k > n$  本の条件が存在し、これらは互いに独立なので、すべての条件を満たす  $y_0$  は存在しない。したがって  $x_0$  も存在しない。

### 5.3 Case 3: $n_s > n_k$ の場合

(50) から、 $u_0$  について  $n_u$  本の条件

$$u_0 = M z_0 \quad (59)$$

があり、(52) から、 $s_0$  について  $n_k$  本の条件

$$Z_{11} s_0 = Z_{12} u_0 - k_0 = Z_{12} M z_0 - k_0 \quad (60)$$

がある。したがって、 $y_0$  について  $n_s + n_k < n$  本の条件しか存在しないため、すべての条件を満たす  $y_0$  は無数に存在する。したがって  $x_0$  も無数に存在する。

## 6 $x_t$ の均衡動学を求める

### 6.1 $d_t$ の均衡動学

以下は,  $n_s = n_k$  かつ  $Z_{11}$  が逆行列を持つ場合を考える. (50) から,

$$\begin{aligned} u_t &= Mz_t, \\ \Leftrightarrow (Z^H)_{21}k_t + (Z^H)_{22}d_t &= Mz_t \quad (\cdot (33)) \end{aligned} \quad (61)$$

ここで,  $Z$  はユニタリ行列であるから,

$$ZZ^H = \begin{bmatrix} Z_{11}(Z^H)_{11} + Z_{12}(Z^H)_{21} & Z_{11}(Z^H)_{12} + Z_{12}(Z^H)_{22} \\ Z_{21}(Z^H)_{11} + Z_{22}(Z^H)_{21} & Z_{21}(Z^H)_{12} + Z_{22}(Z^H)_{22} \end{bmatrix} = I$$

したがって, 右上ブロックに注目すると,  $Z_{11}(Z^H)_{12} + Z_{12}(Z^H)_{22} = 0$ . よって,

$$(Z^H)_{12} = -(Z_{11})^{-1}Z_{12}(Z^H)_{22}. \quad (62)$$

これを右下ブロックの  $Z_{21}(Z^H)_{12} + Z_{22}(Z^H)_{22} = I_u$  に代入すると,

$$\begin{aligned} -Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}(Z^H)_{22} + Z_{22}(Z^H)_{22} &= I_u \\ \Leftrightarrow [-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12} + Z_{22}](Z^H)_{22} &= I_u \end{aligned} \quad (63)$$

(61) の両辺に  $-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12} + Z_{22}$  を左から掛けて, (63) を使うと,

$$[-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}(Z^H)_{21} + Z_{22}(Z^H)_{21}]k_t - d_t = [-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12} + Z_{22}]Mz_t \quad (64)$$

ここで, (62) の左上ブロックより  $Z_{12}(Z^H)_{21} = I_{n_s} - Z_{11}(Z^H)_{11}$ , 左下ブロックより  $Z_{22}(Z^H)_{21} = -Z_{21}(Z^H)_{11}$ . これらを代入すると  $k_t$  の係数行列が整理されて,

$$-Z_{21}(Z_{11})^{-1}k_t + d_t = [-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12} + Z_{22}]Mz_t \quad (65)$$

以上から,  $d_t$  の均衡動学は以下のように書ける.

$$d_t = Jk_t + Nz_t, \quad (66)$$

where

$$J = Z_{21}(Z_{11})^{-1}, \quad (67)$$

$$N = [Z_{22} - Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}]M. \quad (68)$$

### 6.2 $k_t$ の均衡動学

(33) より,

$$\begin{aligned} s_t &= (Z^H)_{11}k_t + (Z^H)_{12}d_t \\ &= [(Z^H)_{11} + (Z^H)_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_t + (Z^H)_{12}Nz_t. \end{aligned}$$

同様に,

$$s_{t+1} = [(Z^H)_{11} + (Z^H)_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_{t+1} + (Z^H)_{12}N[\Phi z_t + \varepsilon_{t+1}].$$

この2本の式を (55) および (56) にそれぞれ代入する.

$$\begin{aligned} [(Z^H)_{11} + (Z^H)_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_{t+1} &= (T_{11})^{-1}S_{11}[(Z^H)_{11} + (Z^H)_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_t \\ &\quad + \{(T_{11})^{-1}S_{11}(Z^H)_{12}N + (T_{11})^{-1}[S_{12}M - T_{12}M\Phi + (Q^H)_1.C] - (Z^H)_{12}N\Phi\}z_t \\ &\quad - [(Z_{11})^{-1}Z_{12}M + (Z^H)_{12}N]\varepsilon_{t+1} + (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$[(Z^H)_{11} + (Z^H)_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_0 = (Z_{11})^{-1}[k_0 - Z_{12}Mz_0] - (Z^H)_{12}Nz_0. \quad (70)$$

式 (70) は  $k_0$  と  $z_0$  に関する恒等式である. したがって,

$$(Z^H)_{11} + (Z^H)_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1} = (Z_{11})^{-1}, \quad (71)$$

$$-(Z_{11})^{-1}Z_{12}M - (Z^H)_{12}N = 0 \quad (72)$$

式 (73) にこの2本の式を代入すると,

$$\begin{aligned} \underbrace{(Z_{11})^{-1}k_{t+1}}_{\because (71)} &= (T_{11})^{-1}S_{11}\underbrace{(Z_{11})^{-1}k_t}_{\because (71)} \\ &\quad + \{-(T_{11})^{-1}S_{11}\underbrace{(Z_{11})^{-1}Z_{12}M}_{\because (72)} + (T_{11})^{-1}S_{12}M - (T_{11})^{-1}T_{12}M\Phi + (T_{11})^{-1}(Q^H)_1.C + \underbrace{(Z_{11})^{-1}Z_{12}M\Phi}_{\because (72)}\}z_t \\ &\quad - [(Z_{11})^{-1}Z_{12}M - \underbrace{(Z_{11})^{-1}Z_{12}M}_{\because (72)}]\varepsilon_{t+1} + (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1}. \end{aligned}$$

両辺に  $Z_{11}$  を左から掛けると,

$$k_{t+1} = Kk_t + Lz_t + \xi_{t+1} \quad (73)$$

where

$$K = Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1} \quad (74)$$

$$L = -Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1}Z_{12}M + Z_{11}(T_{11})^{-1}[S_{12}M - T_{12}M\Phi + (Q^H)_1.C] + Z_{12}M\Phi \quad (75)$$

これで,  $k_0$  を given として,  $\{k_{t+1}\}$  を求められる.

## 7 Algorithm

以上から, 確率的動学一般均衡モデル

$$BE_t x_{t+1} = Ax_t + Cz_t \quad (1)$$

$$x_t = \begin{bmatrix} k_t \\ d_t \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$z_t = \Phi z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\xi_{t+1} = k_{t+1} - E_t k_{t+1} \text{ は外生, } E_t \xi_{t+1} = 0$$

$$k_0, z_{-1} \text{ given}$$

の合理的期待均衡解を状態空間表現

$$k_{t+1} = Kk_t + Lz_t + \xi_{t+1} \quad (73)$$

$$d_t = Jk_t + Nz_t \quad (66)$$

で表すためのアルゴリズムは以下の通りである。

#### Algorithm

1.  $A = QSZ^H, B = QTZ^H$  に QZ 分解。ただし、一般化固有値  $\lambda_i$  が小さい順に上から並ぶように行う。
2. 後ろ向き変数の数  $n_k$  と stable な一般化固有値 ( $\lambda_i$  such that  $|\lambda_i| < 1$ ) の数  $n_s$  が同じであることを確かめる。
  - (a)  $n_s = n_k$ : 解が unique に定まるので、Step 3 に進む。
  - (b)  $n_s < n_k$ : 解は存在しない。終了。
  - (c)  $n_s > n_k$ : 解は無数に存在する。終了するか、期待に関する何らかの外生な確率過程（いわゆる”sunspot shock”）を加えてやり直す。

3.  $G = (Q^H)_2 C$  を計算。

4. 以下の要領で  $M$  の第  $i$  行ベクトル  $m_i$  を求める。

$n_z$  は  $z_t$  ベクトルの長さ、また、 $n_u = n - n_s$  とする。  $i = n_u, \dots, 1$  に対して、以下を繰り返し計算。

$$m_i = r_i [(t_{22})_{ii} \Phi - (s_{22})_{ii} I_{n_z}]^{-1}, \quad (47)$$

$$r_i = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{n_u} [(s_{22})_{ij} m_j - (t_{22})_{ij} m_j \Phi] + g_i & i = 1, 2, \dots, n_u - 1, \\ g_{n_u}, & i = n_u. \end{cases} \quad (48)$$

5.  $m_i$  を並べて、以下の通り  $M$  を作る。

$$M = \begin{bmatrix} m_{1.} \\ \vdots \\ m_{n_u.} \end{bmatrix}$$

6.  $J, N, K, L$  を以下の通り計算。

$$J = Z_{21}(Z_{11})^{-1}, \quad (67)$$

$$N = [Z_{22} - Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}]M. \quad (68)$$

$$K = Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1} \quad (74)$$

$$L = -Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1}Z_{12}M + Z_{11}(T_{11})^{-1}[S_{12}M - T_{12}M\Phi + (Q^H)_1 C] + Z_{12}M\Phi \quad (75)$$

## 8 R code

あらかじめ `geigen` パッケージをインストールしておくこと.

### 8.1 Calculate transition and policy functions

まず  $H, J, C, D$  を計算する関数 `calc_t_p` を書き、`calc.trans.policy.R` として保存しておく.

```
calc.trans.policy.R
library(geigen)

## calc_t_p

## 線型モデル
##  $B * [x_{t+1}; E_t y_{t+1}] = A * [x_t; y_t] + G * [\epsilon_t]$ 
## から状態空間表現
##  $y_t = H * x_t + J * \epsilon_t$ 
##  $x_{t+1} = C * x_t + D * \epsilon_t$ 
## を求める.

calc_t_p <- function(A, B) {
  ## QZ decomposition
  dec <- gqz(A, B, 'S')
}
```

### 8.2 Impulse Response

## 9 Appendix

### A Derivations of Linear Models

#### A.1 A Stochastic Growth Model

確率的な生産性ショックの入った Ramsey Model は下のように定式化される.

$$\begin{aligned} \max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \\ \text{s.t. } C_t + K_t - (1-\delta)K_{t-1} \leq A_t K_{t-1}^\alpha \end{aligned}$$

最適化の一階条件は

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma} &= \beta E_t \{ C_{t+1}^{-\sigma} (\alpha A_{t+1} K_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) \} \\ K_t &= (1 - \delta) K_{t-1} + A_t K_{t-1}^\alpha - C_t \end{aligned}$$

と書ける。生産性ショックの対数は AR(1) 過程に従うと仮定する ( $\frac{A_t}{A} = \left(\frac{A_{t-1}}{A}\right)^\rho \exp(\epsilon_t)$ )。また、均衡では横断性条件  $\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \beta^T C_{t+T}^{-\sigma} K_{t+T} = 0$  が成立する。このモデルを定常状態の周りで対数線型近似すると、

$$\begin{aligned} -\sigma \tilde{c}_t &= -\sigma \tilde{E}_t c_{t+1} + \beta \alpha A (\alpha - 1) K^{\alpha-1} \tilde{k}_t + \beta \alpha A K^{\alpha-1} E_t \tilde{a}_{t+1} \\ \tilde{k}_t &= (1 - \delta) \tilde{k}_{t-1} + \alpha A K^{\alpha-1} \tilde{k}_{t-1} - \frac{C}{K} \tilde{c}_t + A K^{\alpha-1} \tilde{a}_t \end{aligned}$$

ただし、小文字は対応する大文字の変数の対数であり、チルダ ( $\tilde{\cdot}$ ) 付きの変数は、対応する変数の定常状態からの乖離を表す。

定常状態では

$$\begin{aligned} 1 &= \beta (\alpha A K^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ \delta K &= A K^\alpha - C \end{aligned}$$

が成立し、また、 $\tilde{a}_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$  なので、

$$\begin{aligned} \alpha A K^{\alpha-1} &= \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \\ \frac{C}{K} &= A K^{\alpha-1} - \delta = \frac{1 - \beta + (1 - \alpha) \beta \delta}{\alpha \beta} \\ E_t \tilde{a}_{t+1} &= \rho a_t \end{aligned}$$

また、横断性条件  $\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \beta^T C_{t+T}^{-\sigma} K_{t+T} = 0$  は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_s (\beta^{-1})^{-t} (-\sigma \tilde{c}_t + \tilde{k}_t) = 0$$

と線形近似される。以上より、このモデルは

$$\sigma \tilde{c}_t - [1 - \beta(1 - \delta)] (1 - \alpha) \tilde{k}_t - \sigma E_t \tilde{c}_{t+1} = -[1 - \beta(1 - \delta)] \rho \tilde{a}_t \quad (??)$$

$$\frac{1 - \beta + (1 - \alpha) \beta \delta}{\alpha \beta} \tilde{c}_t + \tilde{k}_t = \frac{1}{\beta} \tilde{k}_{t-1} + \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha \beta} \tilde{a}_t \quad (??)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_s (\beta^{-1})^{-t} (-\sigma \tilde{c}_t + \tilde{k}_t) = 0 \quad (??)$$

となる。

## A.2 A Simple RBC Model

$$\begin{aligned}
& \max_{\{C_t, K_{t+1}, H_t, I_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln C_t - \psi H_t] \\
& \text{s.t. } C_t + I_t = Y_t \\
& \quad Y_t = A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \\
& \quad K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \\
& \quad K_0 \text{ given}
\end{aligned}$$

where  $H_t$  represents labor supply. The other notations are the same as in A.1. Assume that log of TFP follows AR(1) process:

$$\frac{A_t}{A} = \left( \frac{A_{t-1}}{A} \right)^\rho \exp(\sigma_\varepsilon \varepsilon_t), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

that is,  $\tilde{a}_t = \rho \tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t$ . We also assume that  $|\rho| < 1$  so that  $\tilde{a}_t$  is stationary.

### Lagrangian

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \ln C_t - \psi H_t + \Lambda_t [(1 - \delta)K_t + A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} - C_t - K_{t+1}] \right\}$$

### First-Order Conditions

$$\begin{aligned}
C_t^{-1} &= \beta E_t \left\{ C_{t+1}^{-1} (\alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} H_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta) \right\} \\
\frac{\psi C_t}{1 - H_t} &= (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha H_t^{-\alpha} \\
K_{t+1} &= (1 - \delta)K_t + A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} - C_t \\
\lim_{T \rightarrow \infty} E_t [\beta^T C_{t+T}^{-1} K_{t+T+1}] &= 0
\end{aligned}$$

here we define the rental rate of capital  $R_t$  as  $R_t \equiv \alpha A_t K_t^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha}$ . The first-order conditions are rewritten as:

$$\begin{aligned}
C_t^{-1} &= \beta E_t \left\{ C_{t+1}^{-1} (R_{t+1} + 1 - \delta) \right\} \\
\psi C_t &= (1 - \alpha) \frac{Y_t}{H_t} \\
K_{t+1} &= (1 - \delta)K_t + Y_t - C_t \\
R_t &= \alpha \frac{Y_t}{K_t} \\
Y_t &= A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \\
\lim_{T \rightarrow \infty} E_t [\beta^T C_{t+T}^{-1} K_{t+T+1}] &= 0
\end{aligned}$$



## Steady State

$$\begin{aligned}
1 &= \beta(R + 1 - \delta) \\
\psi C &= (1 - \alpha) \frac{Y}{H} \\
\delta K &= Y - C \\
R &= \alpha \frac{Y}{K} \\
Y &= AK^\alpha H^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

## Log-Linearized model

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_t &= \tilde{y}_t - \tilde{c}_t \\
K\tilde{k}_{t+1} &= (1 - \delta)K\tilde{k}_t + Y\tilde{y}_t - C\tilde{c}_t \\
\tilde{a}_t &= \rho\tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t \\
0 &= \tilde{y}_t - \tilde{a}_t - \alpha\tilde{k}_t - (1 - \alpha)\tilde{h}_t \\
0 &= \tilde{y}_t - \tilde{k}_t - \tilde{r}_t \\
E_t\tilde{c}_{t+1} - \beta RE_t\tilde{r}_{t+1} &= \tilde{c}_t
\end{aligned} \tag{76}$$

(76) を使って  $\tilde{h}_t$  を消去して<sup>8</sup>整理すると,

$$K\tilde{k}_{t+1} = (1 - \delta)K\tilde{k}_t + Y\tilde{y}_t - C\tilde{c}_t \tag{6}$$

$$\tilde{a}_t = \rho\tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t \tag{10}$$

$$-\tilde{a}_t = \alpha\tilde{k}_t - \alpha\tilde{y}_t - (1 - \alpha)\tilde{c}_t \tag{7}$$

$$0 = \tilde{k}_t - \tilde{y}_t + \tilde{r}_t \tag{8}$$

$$E_t\tilde{c}_{t+1} - \beta RE_t\tilde{r}_{t+1} = \tilde{c}_t \tag{9}$$

## 2 行列の割引無限和

(42) の導出について補足する.

$$\begin{aligned}
u_{n-n_s, t} &= -\frac{1}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(t_{22})_{n-n_s, n-n_s}}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} \right)^k g_{n-n_s, \cdot} \Phi^k z_t \\
&= -\frac{1}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} g_{n-n_s, \cdot} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(t_{22})_{n-n_s, n-n_s}}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} \cdot \Phi \right)^k \right] z_t
\end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>消去しないで進めても良い. 今回消去したのは, McCandless (2008) の 6.8 節に従った.

ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(t_{22})_{n-n_s, n-n_s}}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} \cdot \Phi \right)^k &= \left[ I_{n_z} - \frac{(t_{22})_{n-n_s, n-n_s}}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} \cdot \Phi \right]^{-1} \\
&= - \left[ \frac{(t_{22})_{n-n_s, n-n_s}}{(s_{22})_{n-n_s, n-n_s}} \cdot \Phi - I_{n_z} \right]^{-1} \\
&= -(s_{22})_{n-n_s, n-n_s} [(t_{22})_{n-n_s, n-n_s} \Phi - (s_{22})_{n-n_s, n-n_s} I_{n_z}]^{-1}
\end{aligned}$$

であるから,

$$u_{n-n_s, t} = g_{n-n_s, \cdot} [(t_{22})_{n-n_s, n-n_s} \Phi - (s_{22})_{n-n_s, n-n_s} I_{n_z}]^{-1} z_t.$$

## 参考文献

- Golub, G. H., and C. F. van Loan (2012) *Matrix Computations*, 4th ed., John Hopkins University Press.
- Klein, P. (2000) “Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, pp. 1405–23.
- McCandless, G. (2008) *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.
- Sims, C. (2002) “Solving Linear Rational Expectations Models,” *Computational Economics*, 20, pp. 1–20