November 18, 2016,
February 16, 2018 revised.
荒戸 寛樹

線型動学的確率的一般均衡モデルの解法 (Incomplete. Please do not cite.)[1]

1 線型動学的確率的一般均衡モデルの状態空間表現

前節で設定したような、動学的な一般均衡モデルに確率的なショックを導入したモデルは一般に動学的確率的一般均衡モデル（Dynamic Stochastic General Equilibrium model, DSGE model）と呼ばれる。対数線型化した DSGE モデルは一般に以下のような線型の状態空間表現（Linear State Space Representation）と呼ばれる形で表現できる。

$$B \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G\epsilon_t \tag{1}$$

ただし、x_t は第 t 期における先決変数のベクトル $(n \times 1)$、y_t は第 t 期における操作変数のベクトル $(m \times 1)$、ϵ_t は第 t 期における平均ゼロの外生的確率ショック $(k \times 1)$、A, B はともに $((n+m) \times (n+m))$ 行列、G は $((n+m) \times k)$ 行列である。

モデルの解は、所与の x_0 に対して、全ての $t \geq 0$ においてこの状態空間表現を満たし、かつ発散しないような列 $\{x_t, y_t\}_{t=0}^{\infty}$ である。

例 1：Ramsey Model　Basic な新古典派成長モデル（Ramsey Model）は、

$$C_t^{-\sigma} = \beta C_{t+1}^{-\sigma}(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta) \tag{2}$$
$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + AK_t^{\alpha} - C_t \tag{3}$$

$$\exp(-\sigma c_t) = \beta \exp(-\sigma c_{t+1})\{\alpha A \exp[(\alpha-1)k_{t+1}] + 1 - \delta\} \tag{4}$$
$$\exp(k_{t+1}) = (1-\delta)\exp(k_t) + A\exp(\alpha k_t) - \exp(c_t) \tag{5}$$

と書ける。これを定常状態の周りで対数線型近似すると、

$$-\sigma\tilde{c}_t = -\sigma\tilde{c}_{t+1} + \beta\alpha A(\alpha-1)K^{\alpha-1}\tilde{k}_{t+1} \tag{6}$$
$$\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\tilde{k}_t + \alpha AK^{\alpha-1}\tilde{k}_t - \frac{C}{K}\tilde{c}_t \tag{7}$$

定常状態では、

$$1 = \beta(\alpha AK^{\alpha-1} + 1 - \delta) \tag{8}$$
$$\delta K = AK^{\alpha} - C \tag{9}$$

[1] McCandless (2008) Ch.6 “Hansen’s RBC Model” をベースに作成。

が成立するので、

$$\alpha A K^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{10}$$

$$\frac{C}{K} = AK^{\alpha-1} - \delta = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} - \delta = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} - 1 + (\alpha-1)\delta\right) \tag{11}$$

例 2：The Stochastic Robinson Crusoe Economy with Variable Labor

労働が可変的なロビンソン=クルーソー経済を対数線形化したモデルは、以下のように表される[2]。

$$\beta\bar{r}(1-\theta)\tilde{k}_{t+1} - \beta\bar{r}\rho\tilde{A}_t + E_t\tilde{c}_{t+1} - \beta\bar{r}(1-\theta)E_t\tilde{h}_{t+1} = \tilde{c}_t \tag{12}$$

$$\tilde{A}_t = -\theta\tilde{k}_t + \tilde{c}_t + \left(\theta + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}}\right)\tilde{h}_t \tag{13}$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \frac{\bar{y}}{\bar{k}}\tilde{A}_t = \frac{1}{\beta}\tilde{k}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t + \frac{\bar{y}}{\bar{k}}(1-\theta)\tilde{h}_t \tag{14}$$

$$\tilde{A}_t = \rho\tilde{A}_{t-1} + \sigma_\epsilon\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{15}$$

したがって、このモデルの状態空間表現は、

$$x_t = \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{A}_{t-1} \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{h}_t \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 1 & \theta + \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}} \\ \frac{1}{\beta} & 0 & -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} & \frac{\bar{y}}{\bar{k}}(1-\theta) \\ 0 & \rho & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta\bar{r}(1-\theta) & -\beta\bar{r}\rho & 1 & -\beta\bar{r}(1-\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\bar{y}}{\bar{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_\epsilon \end{bmatrix}. \tag{17}$$

となる。

練習問題 1：New Keynesian Model

以下の New Keynesian Model

$$\hat{y}_t = E_t\hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\pi_{t+1} - r_t^n) \tag{18}$$

$$\pi_t = \beta E_t\pi_{t+1} + \kappa\hat{y}_t \tag{19}$$

$$i_t = \rho + \theta_\pi\pi_t + \theta_y\hat{y}_t + \nu_t \tag{20}$$

$$r_t^n = \rho - \sigma(1-\rho_a)\psi_{ya}a_t + (1-\rho_z)z_t \tag{21}$$

$$\nu_t = \rho_\nu\nu_{t-1} + \sigma_\nu\epsilon_t^\nu \tag{22}$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \sigma_a\epsilon_t^a \tag{23}$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \sigma_z\epsilon_t^z \tag{24}$$

を状態空間表現しなさい。

[2]導出は Appendix A を参照

Answer:

$$E_t\hat{y}_{t+1} + \frac{1}{\sigma}E_t\pi_{t+1} = \hat{y}_t + \frac{1}{\sigma}(i_t - \rho) - \frac{1}{\sigma}(r_t^n - \rho) \tag{25}$$
$$\beta E_t\pi_{t+1} = -\kappa y_t + \pi_t \tag{26}$$
$$\nu_t = (i_t - \rho) - \theta_\pi \pi_t - \theta_y \hat{y}_t \tag{27}$$
$$-\sigma(1-\rho_a)\psi_{ya}a_t + (1-\rho_z)z_t = (r_t^n - \rho) \tag{28}$$
$$\nu_t = \rho_\nu \nu_{t-1} + \sigma_\nu \epsilon_t^\nu \tag{29}$$
$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \sigma_a \epsilon_t^a \tag{30}$$
$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \sigma_z \epsilon_t^z \tag{31}$$

と書き直せるので、状態空間表現は、

$$x_t = \begin{bmatrix} \nu_{t-1} \\ a_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_t \\ i_t - \rho \\ \pi_t \\ r_t^n - \rho \end{bmatrix}, \quad \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t^\nu \\ \epsilon_t^a \\ \epsilon_t^z \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma(1-\rho_a)\psi_{ya} & 1-\rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sigma} & 0 & -\frac{1}{\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_y & 1 & -\theta_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{33}$$

となる。

2 一般化 Schur 分解を用いた解法

線型 DSGE モデルを「解く」とは、モデルの状態空間表現（(1) 式）を、適当な行列 C, D, H, J によって

$$y_t = Hx_t + J\epsilon_t \tag{34}$$
$$x_{t+1} = Cx_t + D\epsilon_t \tag{35}$$

と表現し直すことである。ただし、C の固有値は絶対値が 1 より小さくなくてはならない。行列 H, J, C, D を求められれば、所与の x_0 とショックの流列 $\{\epsilon_t\}$ から内生変数の列 $\{x_{t+1}, y_t\}$ を $t = 0$ から順に求めることができる。

モデルを解く際には、行列 A, B を一般化 Schur 分解する方法がよく使われる[3]。一般化 Schur 分解は以下のように定義される。

[3]詳細は Klein (2000) を参照。

定理：一般化 Schur 分解 (Generalized Schur decomposition)

任意の 2 つの正方行列 A, B に対して、以下の 1〜4 を満たす行列の組 (S, T, Q, Z) が存在する。

1. A, B は以下のように分解可能。

$$A = QSZ' \tag{36}$$

$$B = QTZ' \tag{37}$$

2. Q と Z は直交行列、つまり、　$QQ' = Q'Q = I, ZZ' = Z'Z = I.$

3. S と T は上三角行列。

4. このシステムの第 i 固有値 λ_i は S の第 i 対角成分 s_{ii} と T の第 i 対角成分 t_{ii} を使って $\lambda_i = \frac{s_{ii}}{t_{ii}}$ で求められる。

一般化 Schur 分解は一般に複数存在するが、以下では一般化 Schur 分解は結果として得られる固有値の絶対値が小さい順に上から並ぶように S, T, Q, Z を定めるとする。[4]

一般化 Schur 分解の結果、状態空間表現 (1) は

$$QTZ' \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = QSZ' \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G\epsilon_t \tag{38}$$

と書くことができる。両辺左側から Q' をかけると、

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} \\ Q'_{21} & Q'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \epsilon_t \tag{39}$$

発散する固有値は下の行にある[5]ので、モデルが定常状態に収束するためには、

$$S_{22}Z'_{21}x_t + S_{22}Z'_{22}y_t + [Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2]\epsilon_t = 0 \tag{40}$$

したがって、操作変数についての解は

$$\begin{aligned} y_t &= -(Z'_{22})^{-1}Z'_{21}x_t - (Z'_{22})^{-1}S_{22}^{-1}[Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2]\epsilon_t \\ &\equiv -Nx_t - L\epsilon_t \end{aligned} \tag{41}$$

となる。

次に先決変数についての解を求める。(41) 式より、

$$E_t y_{t+1} = -Nx_{t+1} \tag{42}$$

これを状態空間表現 (1) に代入すると、

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} x_{t+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} G_1 - A_{12}L \\ G_2 - A_{22}L \end{bmatrix} \epsilon_t \tag{43}$$

上部の発散しない部分に注目すると、

$$[B_{11} - B_{12}N]x_{t+1} = [A_{11} - A_{12}N]x_t + [G_1 - A_{12}L]\epsilon_t \tag{44}$$

[4] この順序を指定した一般化 Schur 分解は、`R` では `geigen` パッケージにある `gqz` 関数で簡単に計算が可能である。

[5] 証明は行わないが、モデルが鞍点安定を示すことは、発散する固有値が操作変数の数と等しいことと同値である。今は、この条件は満たされていると仮定する。

つまり、先決変数についての解は

$$x_{t+1} = [B_{11} - B_{12}N]^{-1}[A_{11} - A_{12}N]x_t + [B_{11} - B_{12}N]^{-1}[G_1 - A_{12}L]\epsilon_t \tag{45}$$

$$\equiv Cx_t + D\epsilon_t \tag{46}$$

となり、これでモデルが解けた。

参考文献

McCandless, G. (2008) *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.

Klein, P. (2000) "Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, pp. 1405–23.