November 18, 2016,
April 12, 2019 revised.
荒戸 寛樹

線型確率的動学一般均衡モデルの合理的期待均衡解の求め方 (Incomplete. Please do not cite.)

線型の確率的動学一般均衡モデルの合理的期待均衡解を求める際の解法を簡単に紹介する.[1]

1 線型動学的確率的一般均衡モデルの行列表現

動学的な一般均衡モデルに確率的な外生ショックを導入したモデルは動学的確率的一般均衡モデル（Dynamic Stochastic General Equilibrium models, DSGE models）と呼ばれる．対数線型化した離散時間 DSGE モデルの多くは以下のような線型差分方程式システムとして表現できる[2].

$$\underset{(n\times n)}{B}\ \underset{(n\times 1)}{E_t x_{t+1}} = \underset{(n\times n)}{A}\ \underset{(n\times 1)}{x_t} + \underset{(n\times n_z)}{C}\ \underset{(n_z\times 1)}{z_t} \tag{1}$$

ただし、x_t は第 t 期に観測される内生変数のベクトル、z_t は外生的に変化する確率変数のベクトルである.

ここで，内生変数 x_t を後ろ向き変数 (backward-looking variables) とそうでない変数に分ける．後ろ向き変数の定義は以下の通り.

Definition 1: Backward-looking variables

確率過程 $\mathbf{k}$ が後ろ向きであるとは，以下の 2 つを満たすことを言う.

1. 予測誤差の確率過程 $\boldsymbol{\xi}$ を，$\xi_{t+1} \equiv k_{t+1} - E_t k_{t+1}$ と定義すると，予測誤差は外生的な martingale difference process である，つまり，$\boldsymbol{\xi}$ は外生であり，かつ $E_t\xi_{t+1} = 0$ である.
2. k_0 は外生的に与えられる変数である.

モデルを式 (1) の形に表現する際，内生変数ベクトル x_t の中の変数は，上に後ろ向き変数を並べるものとする．つまり，x_t は下のように後ろ向き変数のベクトル k_t とそれ以外の内生変数ベクトル d_t に分けられる.

$$x_t = \begin{bmatrix} k_t \\ d_t \end{bmatrix} \tag{2}$$

後ろ向き変数の数を n_k とする．つまり，k_t は $(n_k \times 1)$ の列ベクトル，d_t は $((n - n_k) \times 1)$ の列ベクトルである.

[1] ここでの議論は主に Klein (2000) に沿っている．ただし，Klein (2000) とは記法や行列の命名などが大きく異なっていることに注意しなさい．線型の確率的動学モデルの合理的期待均衡を求める手法については Klein (2000) の他にも多数開発されている．例えば Blanchard and Kahn (1989), Uhlig (1999), Sims (2002) 等．それぞれに長所と短所があるので，興味があれば参照されたい．また，二次近似して解く方法は Schmitt-Grohe and Uribe (2004), Kim et al. (2008) 等を参照．非線型なモデルも含めた確率的動学一般均衡モデルの数値解法に関する包括的な教科書は，中級レベルだと McCandless (2008)，より進んだものを求める場合は Heer and Maussner (2009) である.

[2] Sims (2002) は連続時間線型モデルについても解法を提案しているので必要に応じて参照すること.

1.1 Example 1: A Stochastic Neoclassical Growth Model with an AR(1) productivity shock

Basic な新古典派成長モデル（Ramsey Model）に定常な AR(1) 過程に従う生産性ショックを導入したモデルは、対数線形近似すると

$$
\begin{aligned}
[1-\beta(1-\delta)](1-\alpha)\tilde{k}_{t+1} \quad +\sigma E_t\tilde{c}_{t+1} \quad &= \quad \sigma\tilde{c}_t \quad +[1-\beta(1-\delta)]\rho\tilde{a}_t &(3)\\
\tilde{k}_{t+1} \quad &= \quad \frac{1}{\beta}\tilde{k}_t \quad -\frac{1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta}{\alpha\beta}\tilde{c}_t \quad +\frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta}\tilde{a}_t &(4)
\end{aligned}
$$

with

$$\tilde{a}_t = \rho\tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon\varepsilon_t.$$

と書くことができる．ここで，$\tilde{k}_0$ は外生的に与えられ，かつ ($E_t\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_{t+1}$ であるから，) 予測誤差は $\xi^k_{t+1} = 0$．よって $\boldsymbol{\xi}^k$ は exogenous martingale difference sequence である．したがって，$\tilde{\boldsymbol{k}}$ は後ろ向き変数．よって，

$$
\begin{aligned}
&k_t = \begin{bmatrix}\tilde{k}_t\end{bmatrix}, d_t = \begin{bmatrix}\tilde{c}_t\end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix}\tilde{a}_t\end{bmatrix}, \xi_{t+1} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix},\\
&B = \begin{bmatrix}[1-\beta(1-\delta)](1-\alpha) & \sigma\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix}0 & \sigma\\ \frac{1}{\beta} & -\frac{1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta}{\alpha\beta}\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}[1-\beta(1-\delta)]\rho\\ \frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta}\end{bmatrix}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

1.2 Example 2 : A Simple Real Business Cycle Model

例 1 に弾力的労働供給を加えると、シンプルな RBC モデルとなる．

$$
\begin{aligned}
\bar{K}\tilde{k}_{t+1} &= (1-\delta)\bar{K}\tilde{k}_t + \bar{Y}\tilde{y}_t - \bar{C}\tilde{c}_t &(6)\\
0 &= \alpha\tilde{k}_t - \alpha\tilde{y}_t - (1-\alpha)\tilde{c}_t + \tilde{a}_t &(7)\\
0 &= \tilde{k}_t - \tilde{y}_t + \tilde{r}_t &(8)\\
E_t\tilde{c}_{t+1} - \beta\bar{R}E_t\tilde{r}_{t+1} &= \tilde{c}_t &(9)
\end{aligned}
$$

with

$$\tilde{a}_t = \rho\tilde{a}_{t-1} + \sigma_\varepsilon\varepsilon_t$$

と書ける．ここで，1.1 節と同様に，$\tilde{\boldsymbol{k}}$ は後ろ向き変数．よって，

$$
\begin{aligned}
&k_t = \begin{bmatrix}\tilde{k}_t\end{bmatrix}, d_t = \begin{bmatrix}\tilde{y}_t\\ \tilde{c}_t\\ \tilde{r}_t\end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix}\tilde{a}_t\end{bmatrix}, \xi_{t+1} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix},\\
&B = \begin{bmatrix}\bar{K} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\beta\bar{R}\end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix}(1-\delta)\bar{K} & \bar{Y} & -\bar{C} & 0\\ \alpha & -\alpha & -(1-\alpha) & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

where,

$$\bar{R} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{11}$$

$$\left(\frac{\bar{K}}{\bar{Y}} = \frac{\alpha}{R}\right)$$

$$\left(\frac{\bar{C}}{\bar{Y}} = 1 - \delta \cdot \left(\frac{\bar{K}}{\bar{Y}}\right)\right)$$

$$\bar{H} = \frac{1-\alpha}{\psi \cdot \left(\frac{\bar{C}}{\bar{Y}}\right)} \tag{12}$$

$$\left(\frac{\bar{K}}{\bar{H}} = \left[A \cdot \left(\frac{\bar{K}}{\bar{Y}}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$\bar{K} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{H}}\right) \cdot \bar{H} \tag{13}$$

$$\bar{Y} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{Y}}\right)^{-1} \cdot \bar{K} \tag{14}$$

$$\bar{C} = \left(\frac{\bar{C}}{\bar{Y}}\right) \cdot \bar{Y} \tag{15}$$

練習問題 1：New Keynesian Model

以下の New Keynesian Model

$$\hat{y}_t = E_t\hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\pi_{t+1} - r_t^n) \tag{16}$$

$$\pi_t = \beta E_t\pi_{t+1} + \kappa\hat{y}_t \tag{17}$$

$$i_t = \rho + \theta_\pi\pi_t + \theta_y\hat{y}_t + \nu_t \tag{18}$$

$$r_t^n = \rho - \sigma(1-\rho_a)\psi_{ya}a_t + (1-\rho_z)z_t \tag{19}$$

$$\nu_t = \rho_\nu\nu_{t-1} + \sigma_\nu\epsilon_t^\nu \tag{20}$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \sigma_a\epsilon_t^a \tag{21}$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \sigma_z\epsilon_t^z \tag{22}$$

を式 (1) の形式で表現しなさい．ただし，$\varepsilon_t^\nu, \varepsilon_t^a, \varepsilon_t^z$ はそれぞれ平均ゼロで $i.i.d$ の確率変数である．

Answer:

$\hat{\nu}_t, \hat{a}_t, \hat{z}_t$ は外生の確率変数なので，この 3 つが z_t ベクトルを構成する．また，後ろ向き変数はない．その他の内生変数 $\hat{y}_t, i_t - \rho, \pi_t, r_t^n - \rho$ が d_t ベクトルを構成する.[3]

$$E_t\hat{y}_{t+1} + \frac{1}{\sigma}E_t\pi_{t+1} = \hat{y}_t + \frac{1}{\sigma}(i_t - \rho) - \frac{1}{\sigma}(r_t^n - \rho) \tag{23}$$

$$\beta E_t\pi_{t+1} = -\kappa\hat{y}_t + \pi_t \tag{24}$$

$$0 = -(i_t - \rho) + \theta_\pi\pi_t + \theta_y\hat{y}_t + \hat{\nu}_t \tag{25}$$

$$0 = (r_t^n - \rho) + \sigma(1-\rho_a)\psi_{ya}\hat{a}_t - (1-\rho_z)\hat{z}_t \tag{26}$$

$$\hat{\nu}_t = \rho_\nu\hat{\nu}_{t-1} + \sigma_\nu\epsilon_t^\nu \tag{27}$$

$$\hat{a}_t = \rho_a\hat{a}_{t-1} + \sigma_a\epsilon_t^a \tag{28}$$

[3]定常状態では $i_t = \rho, r_t^n = \rho$ になるので，定常状態でゼロになる変数 $i_t - \rho, r_t^n - \rho$ を d_t ベクトルに入れる．

$$\hat{z}_t = \rho_z \hat{z}_{t-1} + \sigma_z \epsilon_t^z \tag{29}$$

と書き直せるので，

$$x_t = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_t \\ i_t - \rho \\ \pi_t \\ r_t^n - \rho \end{bmatrix}, \quad z_t = \begin{bmatrix} \hat{\nu}_t \\ \hat{a}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} & 0 & -\frac{1}{\sigma} \\ -\kappa & 0 & 1 & 0 \\ \theta_y & -1 & \theta_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1-\rho_a)\psi_{ya} & -(1-\rho_z) \end{bmatrix} \tag{31}$$

となる．また，外生ショックの確率過程は 3 つまとめて，

$$z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \rho_a & 0 \\ 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix}}_{\equiv \Phi} z_{t-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\equiv \Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_t^\nu \\ \varepsilon_t^a \\ \varepsilon_t^z \end{bmatrix}}_{\equiv \varepsilon_t} \tag{32}$$

のように，既知の VAR(1) 過程に書き直すことができる．

2 「線型動学モデルの解」とは何か

線型の動学モデルを式 (1) のように書き表せたとする．では，このモデルの解とは何かを定義する．

Definition 1: Solving a Model

線型の動学モデル (1) を解くとは，そのモデルを満たすような状態空間表現

$$k_{t+1} = \underset{(n_k \times n_k)}{K} k_t + \underset{(n_k \times n_z)}{L} z_t + \underset{(n_k \times n_k)}{\Xi} \xi_{t+1}$$
$$d_t = \underset{((n-n_k)\times n_k)}{J} k_t + \underset{((n-n_k)\times n_z)}{N} z_t$$

の係数行列 J, K, L, N, Ξ を求めることである．

この状態空間表現が満たされれば，k_0 を所与として，外生変数 z_t, ξ_{t+1} に対して内生変数の動きを完全に補足することができる．例えば，ある期に z_t が外生的に変化した場合の内生変数の動学的な反応（Impulse response）や，z_t とξ_{t+1} の外生的な確率過程に対する内生変数のモーメントなどが計算できる．

3 一般化 Schur 分解 （QZ 分解）

モデルを式 (1) の形式で書くことができたとする．次のステップは，(1) 内の行列の組 B, A を一般化 Schur 分解（QZ 分解とも呼ばれる）することである．一般化 Schur 分解に入る前に，以下のようにペンシルと一

般化固有値を定義する．

Definition 2: Matrix Pencil

複素数を定義域に持つ複素数行列値関数 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ をペンシルと呼ぶ．
特に，2 つの複素数正方行列 B, A に対して，ペンシル $P(z)=Bz-A$ を，ペンシル (B, A) と書くことにする．

Definition 3: Generalized Eigenvalues

P をペンシルとする．このペンシル P の一般化固有値の集合 $\lambda(P)$ は，以下のように定義される．

$$\lambda(P)\equiv\{z\in\mathbb{C}:|P(z)|=0\}.$$

つまり，一般化固有値 $\lambda\in\lambda(P)$ は，行列 $P(\lambda)$ の行列式をゼロにする複素数である．
特に，ペンシル (B, A) の一般化固有値の集合を $\lambda(B, A)$ と書く．つまり，

$$\lambda(B, A)\equiv\{z\in\mathbb{C}:|Bz-A|=0\}.$$

$\lambda\in\lambda(B, A)$ に対して，ゼロでないベクトル $x\in\mathbb{C}^n$ が存在して，$Ax=\lambda Bx$ を満たす．この事実が，$\lambda\in\lambda(B, A)$ が一般化固有値と呼ばれる所以である．

次に，ペンシルの正則性（regularity）を定義する．

Definition 4: Regular Matrix Pencil

P をペンシルとする．ペンシル P が正則 (regular) であるとは，$|P(z)|\neq 0$ となるような $z\in\mathbb{C}$ が存在することを言う．つまり，P が正則であるとは，$\lambda(P)\neq\mathbb{C}$ であることを言う．

以下では，モデル (1) 内の行列 B, A から作られるペンシル (B, A) は正則であると仮定する[4]．

Assumption 1: Regularity

モデル (1) の行列 B, A から作られるペンシル (B, A) は正則である．つまり，

$$\exists z\in\mathbb{C}\text{ such that }|Bz-A|\neq 0.$$

Assumption 1 が満たされていれば，A や B が逆行列を持たなくても問題はない．これが，一般化 Schur 分解を使う方法の大きな利点である．以上を踏まえて，一般化 Schur 分解は，以下のような定理にまとめられる．

[4]動学的一般均衡モデルにおいて，ほぼ一般的にこの仮定が満たされる．

Theorem 1：Complex Generalized Schur Decomposition

A と B はともに $n \times n$ の複素数行列であり，ペンシル (B, A) は regular である（つまり，$\exists z \in \mathbb{C}$ such that $|Bz - A| \neq 0$.）とする．この時，複素数からなる $n \times n$ 行列 Q, Z, S, T が存在して，以下が成り立つ．

1. $Q^{\mathrm{H}}AZ = S$ は上三角行列 (an upper triangular matrix) である[a].
2. $Q^{\mathrm{H}}BZ = T$ は上三角行列 (an upper triangular matrix).
3. Q と Z はユニタリー行列，つまり，$QQ^{\mathrm{H}} = Q^{\mathrm{H}}Q = I, ZZ^{\mathrm{H}} = Z^{\mathrm{H}}Z = I$ である．
4. 全ての $i(= 1, 2, \cdots n)$ に対して，s_{ii} と t_{ii} が同時にゼロになることはない[b].
5. ペンシル (B, A) の第 i 一般化固有値 $\lambda_i \in \lambda(B, A)$ は S の第 i 対角成分 s_{ii} と T の第 i 対角成分 t_{ii} を使って $\lambda_i = \frac{s_{ii}}{t_{ii}}$ で求められる．($t_{ii} = 0$ のときは，$\lambda_i = \infty$ と書くことにする.）
6. ペア $(s_{ii}, t_{ii})(i = 1, 2, \cdots, n)$ の順番は任意に入れ替えられ，Q, Z, S, T はそのペア順番に依存して決まる．

Proof: Golub and van Loan (2012) を参照．

[a] ここで，X^{H} は X のエルミート共軛行列 (Hermitian conjugate matrix)，つまり X の転置および各成分の複素共軛をとった行列である．
[b] x_{ij} によって，任意の行列 X の (i, j) 成分を表すものとする

Theorem 1.6 より，一般化 Schur 分解は一般に複数存在する．以下では一般化 Schur 分解は結果として得られる一般化固有値の絶対値が小さい順に上から並ぶように S, T, Q, Z を定めるとする．[5]

一般化 Schur 分解によって、$A = QSZ^{\mathrm{H}}, B = QTZ^{\mathrm{H}}$ と分解できるので，式 (1) は

$$QTZ^{\mathrm{H}}E_t x_{t+1} = QSZ^{\mathrm{H}}x_t + Cz_t$$

と書ける．両辺に左から Q^{H} を掛けて，$Q^{\mathrm{H}}Q = I$ を使うと

$$TZ^{\mathrm{H}}E_t x_{t+1} = SZ^{\mathrm{H}}x_t + Q^{\mathrm{H}}Cz_t \tag{33}$$

ここで，補助的な変数として

$$y_t \equiv Z^{\mathrm{H}}x_t \tag{34}$$

と定義すると，式 (33) は

$$TE_t y_{t+1} = Sy_t + Q^{\mathrm{H}}Cz_t \tag{35}$$

と書き直すことができる．

4 解の安定性の確認（stable な一般化固有値の数と後ろ向き変数の数の比較）

式 (1) を式 (35) に書き直したら，一般化固有値の絶対値を確認する．全部で n 個ある一般化固有値 $\lambda_i = \frac{s_{ii}}{t_{ii}}$ のうち，絶対値が 1 より小さいものを「stable な一般化固有値」，絶対値が 1 より大きいものを「unstable

[5] この順序を指定した一般化 Schur 分解は、R では `geigen` パッケージにある `gqz` 関数で簡単に計算が可能である．

な一般化固有値」と呼ぶことにする[6]．また，stable な一般化固有値の数を n_s で表すことにする．このとき，以下の定理が得られる[7]．

Theorem 2: Stability

行列 Z_{11} を，行列 Z の左上 $n_k \times n_s$ 部分を取り出した行列とする．この時，

1. $n_s = n_k$ かつ Z_{11} が逆行列を持つならば，stable な合理的期待均衡解は unique に定まる．(Saddle path stable)
2. $n_s < n_k$ ならば，stable な合理的期待均衡解は存在しない．(No solution)
3. $n_s > n_k$ ならば，stable な合理的期待均衡解は無数に存在する．(Indeterminacy)

以下の説明は，解の求め方であるとともに，Theorem 2 の証明でもある．

n 個の補助変数からなるベクトル y_t のうち，上から n_s 個の変数からなるベクトルを s_t，残り $n_u(= n - n_s)$ 個の変数からなるベクトルを u_t と書く．つまり，y_t を以下のように partition する．

$$\underset{(n\times 1)}{y_t} = \begin{bmatrix} \underset{(n_s\times 1)}{s_t} \\ \underset{(n_u\times 1)}{u_t} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

行列 S, T, Q^{H} もそれに合わせて partition する．S と T は上三角行列であることに注意すると，

$$S = \begin{bmatrix} \underset{(n_s\times n_s)}{S_{11}} & \underset{(n_s\times n_u)}{S_{12}} \\ \underset{(n_u\times n_s)}{0} & \underset{(n_u\times n_u)}{S_{22}} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \underset{(n_s\times n_s)}{T_{11}} & \underset{(n_s\times n_u)}{T_{12}} \\ \underset{(n_u\times n_s)}{0} & \underset{(n_u\times n_u)}{T_{22}} \end{bmatrix}, Q^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \underset{(n_s\times n)}{(Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}} \\ \underset{(n_u\times n)}{(Q^{\mathrm{H}})_{2\cdot}} \end{bmatrix} \tag{37}$$

と書ける．これを使って (35) を書き直すと，

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t s_{t+1} \\ E_t u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot} \\ (Q^{\mathrm{H}})_{2\cdot} \end{bmatrix} C z_t \tag{38}$$

5 u_t の決定

S と T がともに上三角行列であることから，(38) の下 n_u 行には s_t および $E_t s_{t+1}$ が現れず，u_t および $E_t u_{t+1}$ は以下の式を満たす事がわかる．

$$T_{22} E_t u_{t+1} = S_{22} u_t + (Q^{\mathrm{H}})_{2\cdot} C z_t. \tag{39}$$

[6]絶対値がちょうど 1 である一般化固有値はないと仮定する．もしこれが存在すると，解くのは非常に難しくなる．

[7]Theorem 2 のように，stable な固有値の数と後ろ向き変数（または先決変数）の数を比較して解の安定性を判別するための定理は Blanchard-Kahn Theorem と呼ばれる．

上の式は n_u 本の連立方程式になっている．S_{22} と T_{22} も上三角行列であることに気をつけると，(39) の上から数えて第 i 番目の方程式は以下の形式になっている．

$$(t_{22})_{ii}E_t u_{i,t+1} + \sum_{j=i+1}^{n_u}(t_{22})_{ij}E_t u_{j,t+1} = (s_{22})_{ii}u_{i,t} + \sum_{j=i+1}^{n_u}(s_{22})_{ij}u_{j,t} + g_{i\cdot}z_t, \qquad \text{for } i = 1, 2, \cdots, n_u - 1, \tag{40}$$

$$(t_{22})_{ii}E_t u_{i,t+1} = (s_{22})_{ii}u_{i,t} + g_{i\cdot}z_t, \qquad \text{for } i = n_u. \tag{41}$$

ここで，$u_{i,t}$ はベクトル u_t の第 i 成分，$g_{i\cdot}$ は行列 $(Q^{\mathrm{H}})_{2\cdot}C$ の第 i 行を表す．

(40), (41) の方程式は，下から順に解いていくことができる．一番下にある（上から数えると第 n_u 番目の）方程式は，(41) を使って

$$(t_{22})_{n_u,n_u}E_t u_{n_u,t+1} = (s_{22})_{n_u,n_u}u_{n_u,t} + g_{n_u,\cdot}z_t.$$
$$\Leftrightarrow u_{n_u,t} = \frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}}E_t u_{n_u,t+1} - \frac{1}{(s_{22})_{n_u,n_u}}g_{n_u\cdot}z_t.$$

となる．u_t に対応する一般化固有値は unstable なので，$|(t_{22})_{n_u,n_u}/(s_{22})_{n_u,n_u}| < 1$．よって上の式は forward に解くことができて，

$$\Leftrightarrow u_{n_u,t} = -\frac{1}{(s_{22})_{n_u,n_u}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}}\right)^k g_{n_u\cdot}E_t z_{t+k}. \tag{42}$$

となる．ここで外生の確率変数ベクトル z_t は VAR 過程に従い，自己相関行列 Φ を持つ場合はより明示的に解ける．

Assumption 2: VAR exogenous shock process

確率過程 $\boldsymbol{z}$ は，係数行列 Φ を持つ VAR(1) 過程に従う．[a] つまり，$E_t z_{t+k} = \Phi^k z_t$．

[a] 任意の VAR(p) 過程は VAR(1) 過程に書き直すことができるので，ショックが有限次の VAR 過程に従う限り，この仮定は満たされる．

Assumption 2 が成立する場合は，(42) は，

$$\begin{aligned} u_{n_u,t} &= -\frac{1}{(s_{22})_{n_u,n_u}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}}\right)^k g_{n_u\cdot}\Phi^k z_t. \\ &= g_{n_u\cdot}[(t_{22})_{n_u,n_u}\Phi - (s_{22})_{n_u,n_u}I_{n_z}]^{-1}z_t \\ &= m_{n_u\cdot}z_t, \end{aligned} \tag{43}$$

where

$$m_{n_u\cdot} \equiv g_{n_u\cdot}[(t_{22})_{n_u,n_u}\Phi - (s_{22})_{n_u,n_u}I_{n_z}]^{-1} \tag{44}$$

となる（最後の式変形は Appendix B を参照）．

次に，一段上（上から第 (n_u-1) 番目）の方程式を書き下すと，(40) 式から，

$$\begin{aligned}&(t_{22})_{n_u-1,n_u-1}E_t u_{n_u-1,t+1}+(t_{22})_{n_u-1,n_u}E_t u_{n_u,t+1}\\&\quad=(s_{22})_{n_u-1,n_u-1}u_{n_u-1,t}+(s_{22})_{n_u-1,n_u}u_{n_u,t}+g_{n_u-1\cdot}z_t\end{aligned}$$

となるが，(43) 式と Assumption 2 から，$u_{n_u,t}=m_{n_u\cdot}z_t, E_t u_{n_u,t+1}=m_{n_u\cdot}\Phi z_t$ であるから，

$$\begin{aligned}(t_{22})_{n_u-1,n_u-1}E_t u_{n_u-1,t+1}&=(s_{22})_{n_u-1,n_u-1}u_{n_u-1,t}+r_{n_u-1}z_t\\\Leftrightarrow u_{n_u-1,t}&=-\frac{1}{(s_{22})_{n_u-1,n_u-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t_{22})_{n_u-1,n_u-1}}{(s_{22})_{n_u-1,n_u-1}}\right)^k r_{n_u-1}\Phi^k z_t, &(45)\\&=r_{n_u-1}[(t_{22})_{n_u-1,n_u-1}\Phi-(s_{22})_{n_u-1,n_u-1}I_{n_z}]^{-1}z_t, &(46)\end{aligned}$$

where

$$r_{n_u-1}=[(s_{22})_{n_u-1,n_u}m_{n_u\cdot}-(t_{22})_{n_u-1,n_u}m_{n_u\cdot}\Phi]+g_{n_u-1\cdot}$$

(46) は，

$$u_{n_u-1,t}=m_{n_u-1\cdot}z_t,$$

where

$$m_{n_u-1\cdot}=r_{n_u-1}[(t_{22})_{n_u-1,n_u-1}\Phi-(s_{22})_{n_u-1,n_u-1}I_{n_z}]^{-1}$$

と書ける．

同様に下から順番に解いていくと，上から第 i 番目の方程式は，

$$u_{i,t}=m_{i\cdot}z_t, \tag{47}$$

where

$$m_{i\cdot}=r_i[(t_{22})_{ii}\Phi-(s_{22})_{ii}I_{n_z}]^{-1}, \tag{48}$$

$$r_i=\begin{cases}\sum_{j=i+1}^{n_u}[(s_{22})_{ij}m_{j\cdot}-(t_{22})_{ij}m_{j\cdot}\Phi]+g_{i\cdot} & i=1,2,\cdots,n_u-1,\\ g_{n_u\cdot}, & i=n_u.\end{cases} \tag{49}$$

以上から，$i=n_u,n_u-1,\cdots,1$ の順に $m_{i\cdot}$ を計算し，

$$M=\begin{bmatrix}m_{1\cdot}\\m_{2\cdot}\\\vdots\\m_{n_u\cdot}\end{bmatrix} \tag{50}$$

によって $n_u\times n_u$ 行列 M を作れば，

$$u_t=Mz_t \tag{51}$$

となり，u_t を外生の確率変数 z_t で表すことができる．

6 s_t の決定

式 (38) の上から n_s 本の連立方程式は，

$$T_{11}E_t s_{t+1} + T_{12}E_t u_{t+1} = S_{11}s_t + S_{12}u_t + (Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}Cz_t$$

T_{11} は逆行列を持つ[8]ので，

$$\begin{aligned}E_t s_{t+1} &= (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + (T_{11})^{-1}S_{12}u_t - (T_{11})^{-1}T_{12}E_t u_{t+1} + (T_{11})^{-1}(Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}Cz_t \\ &= (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + (T_{11})^{-1}S_{12}Mz_t - (T_{11})^{-1}T_{12}M\Phi z_t + (T_{11})^{-1}(Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}Cz_t \\ &= (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + [(T_{11})^{-1}S_{12}M - (T_{11})^{-1}T_{12}M\Phi + (T_{11})^{-1}(Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}C]z_t \end{aligned} \tag{52}$$

$T_{11}^{-1}S_{11}$ の全ての固有値は 1 より小さいので，u_t を解いたときのように，この式を forward に解くことはできない．その代わり，以下の解法を使う．

行列 Z を以下のように partition する．

$$Z = \begin{bmatrix} \underset{(n_k\times n_s)}{Z_{11}} & \underset{(n_k\times n_u)}{Z_{12}} \\ \underset{((n-n_k)\times n_s)}{Z_{21}} & \underset{((n-n_k)\times n_u)}{Z_{22}} \end{bmatrix}$$

$x_t = Zy_t$ より，

$$k_t = Z_{11}s_t + Z_{12}u_t. \tag{53}$$

なので，

$$E_t k_{t+1} = Z_{11}E_t s_{t+1} + Z_{12}E_t u_{t+1}$$

となる．したがって，これらと Definition 1 より，

$$k_{t+1} - E_t k_{t+1} = Z_{11}(s_{t+1} - E_t s_{t+1}) + Z_{12}(u_{t+1} - E_t u_{t+1}) = \xi_{t+1} \tag{54}$$

6.1 Case 1: $n_s = n_k$ かつ Z_{11} の逆行列が存在する場合

Z_{11} が逆行列を持つので，式 (54) から，

$$\begin{aligned}E_t s_{t+1} &= s_{t+1} + (Z_{11})^{-1}Z_{12}(u_{t+1} - E_t u_{t+1}) - (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1} \\ &= s_{t+1} + (Z_{11})^{-1}Z_{12}M(\Phi z_t + \varepsilon_{t+1} - \Phi z_t) - (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1} \\ &= s_{t+1} + (Z_{11})^{-1}Z_{12}M\varepsilon_{t+1} - (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1}\end{aligned} \tag{55}$$

を得る．この式を式 (52) に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}s_{t+1} = {} & (T_{11})^{-1}S_{11}s_t + (T_{11})^{-1}[S_{12}M - T_{12}M\Phi + (Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}C]z_t \\ & - (Z_{11})^{-1}Z_{12}M\varepsilon_{t+1} + (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1}\end{aligned} \tag{56}$$

[8] 証明は以下の通り．$i \in \{1, \cdots, n_s\}$ に対して，$|\lambda_i| = |\frac{s_{ii}}{t_{ii}}| < 1$. したがって $t_{ii} \neq 0$. 更に，T_{11} の対角成分より右下の成分は全てゼロ．したがって，T_{11} の各行は一次独立であるので，T_{11} は full rank である．

この式の中で $z_t, \varepsilon_t, \xi_{t+1}$ は外生なので，もし s_0 が与えられれば，$\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ を全て求められる．

最後に，s_0 を求める．式 (53) から $k_0 = Z_{11}s_0 + Z_{12}u_0$．したがって，

$$
\begin{aligned}
s_0 &= (Z_{11})^{-1}[k_0 - Z_{12}u_0] \\
&= (Z_{11})^{-1}[k_0 - Z_{12}Mz_0] \qquad (\because (51)).
\end{aligned} \tag{57}
$$

以上で，外生変数の確率過程に対して y_t の確率過程がただ一つに定まる．

6.2 Case 2: $n_s < n_k$ の場合

(51) から，u_0 について n_u 本の条件

$$u_0 = Mz_0 \tag{58}$$

があり，(53) から，s_0 について n_k 本の条件

$$Z_{11}s_0 = Z_{12}u_0 - k_0 = Z_{12}Mz_0 - k_0 \tag{59}$$

がある．したがって，y_0 について $n_s + n_k > n$ 本の条件が存在し，これらは互いに独立なので，すべての条件を満たす y_0 は存在しない．したがって x_0 も存在しない．

6.3 Case 3: $n_s > n_k$ の場合

(51) から，u_0 について n_u 本の条件

$$u_0 = Mz_0 \tag{60}$$

があり，(53) から，s_0 について n_k 本の条件

$$Z_{11}s_0 = Z_{12}u_0 - k_0 = Z_{12}Mz_0 - k_0 \tag{61}$$

がある．したがって，y_0 について $n_s + n_k < n$ 本の条件しか存在しないため，すべての条件を満たす y_0 は無数に存在する．したがって x_0 も無数に存在する．

7 x_t の均衡動学を求める

7.1 d_t の均衡動学

以下は，$n_s = n_k$ かつ Z_{11} が逆行列を持つ場合を考える．(51) から，

$$
\begin{aligned}
& u_t = Mz_t, \\
\Leftrightarrow \quad & (Z^{\mathrm{H}})_{21}k_t + (Z^{\mathrm{H}})_{22}d_t = Mz_t \qquad (\because (34))
\end{aligned} \tag{62}
$$

ここで，Z はユニタリー行列であるから，

$$
ZZ^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} Z_{11}(Z^{\mathrm{H}})_{11} + Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{21} & Z_{11}(Z^{\mathrm{H}})_{12} + Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{22} \\ Z_{21}(Z^{\mathrm{H}})_{11} + Z_{22}(Z^{\mathrm{H}})_{21} & Z_{21}(Z^{\mathrm{H}})_{12} + Z_{22}(Z^{\mathrm{H}})_{22} \end{bmatrix} = I
$$

したがって，右上ブロックに注目すると，$Z_{11}(Z^{\mathrm{H}})_{12}+Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{22}=0$．よって，

$$(Z^{\mathrm{H}})_{12}=-(Z_{11})^{-1}Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{22}. \tag{63}$$

これを右下ブロックの $Z_{21}(Z^{\mathrm{H}})_{12}+Z_{22}(Z^{\mathrm{H}})_{22}=I_u$ に代入すると，

$$\begin{aligned}&-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{22}+Z_{22}(Z^{\mathrm{H}})_{22}=I_u\\ \Leftrightarrow\quad &[-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}+Z_{22}](Z^{\mathrm{H}})_{22}=I_u \end{aligned}\tag{64}$$

(62) の両辺に $-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}+Z_{22}$ を左から掛けて，(64) を使うと，

$$[-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{21}+Z_{22}(Z^{\mathrm{H}})_{21}]k_t-d_t=[-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}+Z_{22}]Mz_t \tag{65}$$

ここで，(63) の左上ブロックより $Z_{12}(Z^{\mathrm{H}})_{21}=I_{n_s}-Z_{11}(Z^{\mathrm{H}})_{11}$，左下ブロックより $Z_{22}(Z^{\mathrm{H}})_{21}=-Z_{21}(Z^{\mathrm{H}})_{11}$．これらを代入すると k_t の係数行列が整理されて，

$$-Z_{21}(Z_{11})^{-1}k_t+d_t=[-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}+Z_{22}]Mz_t \tag{66}$$

以上から，d_t の均衡動学は以下のように書ける．

$$d_t=Jk_t+Nz_t, \tag{67}$$

where

$$J=Z_{21}(Z_{11})^{-1}, \tag{68}$$

$$N=[Z_{22}-Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}]M. \tag{69}$$

7.2 k_t の均衡動学

(34) より，

$$\begin{aligned}s_t&=(Z^{\mathrm{H}})_{11}k_t+(Z^{\mathrm{H}})_{12}d_t\\&=[(Z^{\mathrm{H}})_{11}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_t+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Nz_t.\end{aligned}$$

同様に，

$$s_{t+1}=[(Z^{\mathrm{H}})_{11}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_{t+1}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}N[\Phi z_t+\varepsilon_{t+1}].$$

この 2 本の式を (56) および (57) にそれぞれ代入する．

$$\begin{aligned}[(Z^{\mathrm{H}})_{11}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_{t+1}&=(T_{11})^{-1}S_{11}[(Z^{\mathrm{H}})_{11}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_t\\&\quad+\{(T_{11})^{-1}S_{11}(Z^{\mathrm{H}})_{12}N+(T_{11})^{-1}[S_{12}M-T_{12}M\Phi+(Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}C]-(Z^{\mathrm{H}})_{12}N\Phi\}z_t\\&\quad-[(Z_{11})^{-1}Z_{12}M+(Z^{\mathrm{H}})_{12}N]\varepsilon_{t+1}+(Z_{11})^{-1}\xi_{t+1}, \end{aligned}\tag{70}$$

$$[(Z^{\mathrm{H}})_{11}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}]k_0=(Z_{11})^{-1}[k_0-Z_{12}Mz_0]-(Z^{\mathrm{H}})_{12}Nz_0. \tag{71}$$

式 (71) は k_0 と z_0 に関する恒等式である．したがって，

$$(Z^{\mathrm{H}})_{11}+(Z^{\mathrm{H}})_{12}Z_{21}(Z_{11})^{-1}=(Z_{11})^{-1}, \tag{72}$$

$$-(Z_{11})^{-1}Z_{12}M-(Z^{\mathrm{H}})_{12}N=0 \tag{73}$$

式 (74) にこの 2 本の式を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(Z_{11})^{-1}}_{\because(72)} k_{t+1} = (T_{11})^{-1}S_{11}\underbrace{(Z_{11})^{-1}}_{\because(72)} k_t \\
&+ \{-(T_{11})^{-1}S_{11}\underbrace{(Z_{11})^{-1}Z_{12}M}_{\because(73)} + (T_{11})^{-1}S_{12}M - (T_{11})^{-1}T_{12}M\Phi + (T_{11})^{-1}(Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}C \underbrace{+(Z_{11})^{-1}Z_{12}M}_{\because(73)}\Phi\}z_t \\
&- [(Z_{11})^{-1}Z_{12}M \underbrace{-(Z_{11})^{-1}Z_{12}M}_{\because(73)}]\varepsilon_{t+1} + (Z_{11})^{-1}\xi_{t+1}.
\end{aligned}
$$

両辺に Z_{11} を左から掛けると，

$$k_{t+1} = Kk_t + Lz_t + \xi_{t+1} \tag{74}$$

where

$$K = Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1} \tag{75}$$

$$L = -Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1}Z_{12}M + Z_{11}(T_{11})^{-1}[S_{12}M - T_{12}M\Phi + (Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}C] + Z_{12}M\Phi \tag{76}$$

これで，k_0 を given として，$\{k_{t+1}\}$ を求められる．

8 Algorithm

以上から，確率的動学一般均衡モデル

$$
\begin{aligned}
BE_t x_{t+1} &= Ax_t + Cz_t && (1)\\
x_t &= \begin{bmatrix} k_t \\ d_t \end{bmatrix} && (2)\\
z_t &= \Phi z_{t-1} + \varepsilon_t \\
\xi_{t+1} &= k_{t+1} - E_t k_{t+1} \text{ は外生,} \quad E_t\xi_{t+1} = 0 \\
&k_0, z_{-1} \text{ given}
\end{aligned}
$$

の合理的期待均衡解を状態空間表現

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= Kk_t + Lz_t + \xi_{t+1} && (74)\\
d_t &= Jk_t + Nz_t && (67)
\end{aligned}
$$

で表すためのアルゴリズムは以下の通りである．

Algorithm

1. $A = QSZ^{\mathrm{H}}, B = QTZ^{\mathrm{H}}$ に QZ 分解．ただし，一般化固有値 λ_i が小さい順に上から並ぶように行う．

2. 後ろ向き変数の数 n_k と stable な一般化固有値 (λ_i such that $|\lambda_i| < 1$) の数 n_s が同じであることを確かめる．

   (a) $n_s = n_k$: 解が unique に定まるので，Step 3 に進む．

   (b) $n_s < n_k$: 解は存在しない．終了．

   (c) $n_s > n_k$: 解は無数に存在する．終了するか，期待に関する何らかの外生な確率過程（いわゆる"sunspot shock"）を加えてやり直す．

3. $G = (Q^{\mathrm{H}})_{2\cdot}C$ を計算．

4. 以下の要領で M の第 i 行ベクトル $m_{i\cdot}$ を求める．

   n_z は z_t ベクトルの長さ，また，$n_u = n - n_s$ とする．$i = n_u, \cdots, 1$ に対して，以下を繰り返し計算．

$$m_{i\cdot} = r_i[(t_{22})_{ii}\Phi - (s_{22})_{ii}I_{n_z}]^{-1}, \tag{48}$$

$$r_i = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{n_u}[(s_{22})_{ij}m_{j\cdot} - (t_{22})_{ij}m_{j\cdot}\Phi] + g_{i\cdot} & i = 1, 2, \cdots, n_u - 1, \\ g_{n_u\cdot}, & i = n_u. \end{cases} \tag{49}$$

5. $m_{i\cdot}$ を並べて，以下の通り M を作る．

$$M = \begin{bmatrix} m_{1\cdot} \\ \vdots \\ m_{n_u\cdot} \end{bmatrix}$$

6. J, N, K, L を以下の通り計算．

$$J = Z_{21}(Z_{11})^{-1}, \tag{68}$$

$$N = [Z_{22} - Z_{21}(Z_{11})^{-1}Z_{12}]M. \tag{69}$$

$$K = Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1} \tag{75}$$

$$L = -Z_{11}(T_{11})^{-1}S_{11}(Z_{11})^{-1}Z_{12}M + Z_{11}(T_{11})^{-1}[S_{12}M - T_{12}M\Phi + (Q^{\mathrm{H}})_{1\cdot}C] + Z_{12}M\Phi \tag{76}$$

9 Appendix

A Derivations of Linear Models

A.1 A Stochastic Growth Model

確率的な生産性ショックの入った Ramsey Model は下のように定式化される．

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$$
$$\text{s.t. } C_t + K_t - (1-\delta)K_{t-1} \leq A_t K_{t-1}^{\alpha}$$

最適化の一階条件は

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t \left\{ C_{t+1}^{-\sigma}(\alpha A_{t+1} K_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) \right\}$$
$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + A_t K_{t-1}^{\alpha} - C_t$$

と書ける．生産性ショックの対数は AR(1) 過程に従うと仮定する ($\frac{A_t}{A} = \left(\frac{A_{t-1}}{A}\right)^{\rho} \exp(\epsilon_t)$)．また、均衡では横断性条件 $\lim_{T\to\infty} E_t \beta^T C_{t+T}^{-\sigma} K_{t+T} = 0$ が成立する。このモデルを定常状態の周りで対数線型近似すると、

$$-\sigma \tilde{c}_t = -\sigma \tilde{E}_t c_{t+1} + \beta\alpha A(\alpha-1)K^{\alpha-1}\tilde{k}_t + \beta\alpha A K^{\alpha-1} E_t \tilde{a}_{t+1}$$
$$\tilde{k}_t = (1-\delta)\tilde{k}_{t-1} + \alpha A K^{\alpha-1}\tilde{k}_{t-1} - \frac{C}{K}\tilde{c}_t + AK^{\alpha-1}\tilde{a}_t$$

ただし、小文字は対応する大文字の変数の対数であり、チルダ (˜) 付きの変数は、対応する変数の定常状態からの乖離を表す．

定常状態では

$$1 = \beta(\alpha A K^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$
$$\delta K = AK^{\alpha} - C$$

が成立し、また、$\tilde{a}_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$ なので、

$$\alpha A K^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta$$
$$\frac{C}{K} = AK^{\alpha-1} - \delta = \frac{1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta}{\alpha\beta}$$
$$E_t \tilde{a}_{t+1} = \rho a_t$$

また、横断性条件 $\lim_{T\to\infty} E_t \beta^T C_{t+T}^{-\sigma} K_{t+T} = 0$ は、

$$\lim_{t\to\infty} E_s(\beta^{-1})^{-t}(-\sigma\tilde{c}_t + \tilde{k}_t) = 0$$

と線形近似される．以上より、このモデルは

$$\sigma\tilde{c}_t - [1-\beta(1-\delta)](1-\alpha)\tilde{k}_t - \sigma E_t \tilde{c}_{t+1} = -[1-\beta(1-\delta)]\rho\tilde{a}_t \quad (\mathbf{??})$$
$$\frac{1-\beta+(1-\alpha)\beta\delta}{\alpha\beta}\tilde{c}_t + \tilde{k}_t = \frac{1}{\beta}\tilde{k}_{t-1} + \frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta}\tilde{a}_t \quad (\mathbf{??})$$
$$\lim_{t\to\infty} E_s(\beta^{-1})^{-t}(-\sigma\tilde{c}_t + \tilde{k}_t) = 0 \quad (\mathbf{??})$$

となる。

A.2 A Simple RBC Model

$$\begin{aligned}\max_{\{C_t,K_{t+1},H_t,I_t\}} \; & E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\ln C_t-\psi H_t]\\ \text{s.t. } & C_t+I_t=Y_t\\ & Y_t=A_tK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha}\\ & K_{t+1}=(1-\delta)K_t+I_t\\ & K_0 \text{ given}\end{aligned}$$

where H_t represents labor supply. The other notations are the same as in A.1. Assume that log of TFP follows AR(1) process:

$$\frac{A_t}{A}=\left(\frac{A_{t-1}}{A}\right)^{\rho}\exp(\sigma_\varepsilon\varepsilon_t), \qquad \varepsilon_t\sim\mathcal{N}(0,1).$$

that is, $\tilde{a}_t=\rho\tilde{a}_{t-1}+\sigma_\varepsilon\varepsilon_t$. We also assume that $|\rho|<1$ so that $\tilde{a}_t$ is stationary.

Lagrangian

$$\mathcal{L}=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{\ln C_t-\psi H_t+\Lambda_t\left[(1-\delta)K_t+A_tK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha}-C_t-K_{t+1}\right]\right\}$$

First-Order Conditions

$$\begin{aligned}C_t^{-1}&=\beta E_t\left\{C_{t+1}^{-1}\left(\alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}H_{t+1}^{1-\alpha}+1-\delta\right)\right\}\\ \frac{\psi C_t}{1-H_t}&=(1-\alpha)A_tK_t^{\alpha}H_t^{-\alpha}\\ K_{t+1}&=(1-\delta)K_t+A_tK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha}-C_t\\ \lim_{T\to\infty}E_t[\beta^TC_{t+T}^{-1}K_{t+T+1}]&=0\end{aligned}$$

here we define production Y_t as $Y_t\equiv A_tK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha}$ and the rental rate of capital R_t as $R_t\equiv\alpha A_tK_t^{\alpha-1}H_t^{1-\alpha}=\alpha\frac{Y_t}{K_t}$. The first-order conditions are rewritten as:

$$\begin{aligned}C_t^{-1}&=\beta E_t\left\{C_{t+1}^{-1}\left(R_{t+1}+1-\delta\right)\right\}\\ \psi C_t&=(1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t}\\ K_{t+1}&=(1-\delta)K_t+Y_t-C_t\\ R_t&=\alpha\frac{Y_t}{K_t}\\ Y_t&=A_tK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha}\\ \lim_{T\to\infty}E_t[\beta^TC_{t+T}^{-1}K_{t+T+1}]&=0\end{aligned}$$

Steady State

$$\begin{aligned}
1 &= \beta(\bar{R} + 1 - \delta) \\
\psi \bar{C} &= (1-\alpha)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}} \\
\delta \bar{K} &= \bar{Y} - \bar{C} \\
\bar{R} &= \alpha \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} \\
\bar{Y} &= \bar{A}\bar{K}^{\alpha}\bar{H}^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Log-Linearized model

$$\tilde{h}_t = \tilde{y}_t - \tilde{c}_t \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{K}\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\bar{K}\tilde{k}_t + \bar{Y}\tilde{y}_t - \bar{C}\tilde{c}_t \\
&0 = \tilde{y}_t - \tilde{a}_t - \alpha\tilde{k}_t - (1-\alpha)\tilde{h}_t \\
&0 = \tilde{y}_t - \tilde{k}_t - \tilde{r}_t \\
&E_t\tilde{c}_{t+1} - \beta\bar{R}E_t\tilde{r}_{t+1} = \tilde{c}_t
\end{aligned}$$

(77) を使って $\tilde{h}_t$ を消去して[9]整理すると，

$$\bar{K}\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\bar{K}\tilde{k}_t + \bar{Y}\tilde{y}_t - \bar{C}\tilde{c}_t \tag{6}$$

$$-\tilde{a}_t = \alpha\tilde{k}_t - \alpha\tilde{y}_t - (1-\alpha)\tilde{c}_t \tag{7}$$

$$0 = \tilde{k}_t - \tilde{y}_t + \tilde{r}_t \tag{8}$$

$$E_t\tilde{c}_{t+1} - \beta\bar{R}E_t\tilde{r}_{t+1} = \tilde{c}_t \tag{9}$$

B　行列の割引無限和

(43) の導出について補足する．

$$\begin{aligned}
u_{n_u,t} &= -\frac{1}{(s_{22})_{n_u,n_u}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}} \right)^k g_{n_u \cdot} \Phi^k z_t \\
&= -\frac{1}{(s_{22})_{n_u,n_u}} g_{n_u \cdot} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}} \cdot \Phi \right)^k \right] z_t
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}} \cdot \Phi \right)^k &= \left[I_{n_z} - \frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}} \cdot \Phi \right]^{-1} \\
&= -\left[\frac{(t_{22})_{n_u,n_u}}{(s_{22})_{n_u,n_u}} \cdot \Phi - I_{n_z} \right]^{-1} \\
&= -(s_{22})_{n_u,n_u} \left[(t_{22})_{n_u,n_u}\Phi - (s_{22})_{n_u,n_u} I_{n_z} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

[9] 消去しないで進めても良い．今回消去したのは，McCandless (2008) の 6.8 節に従った．

であるから，

$$u_{n_u,t} = g_{n_u\cdot}[(t_{22})_{n_u,n_u}\Phi - (s_{22})_{n_u,n_u}I_{n_z}]^{-1}z_t.$$

参考文献

Blanchard, O., and C. Kahn (1989) "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations," *Econometrica*, 48(5), pp. 1305–11.

Golub, G. H., and C. F. van Loan (2012) *Matrix Computations*, 4th ed., John Hopkins University Press.

Heer, B., and A. Maussner (2009) *Dynamic General Equilibrium Modeling*, 2nd ed., Splinger.

Kim, J., S. Kim, E. Schaumburg and C. A. Sims (2008) "Calculating and Using Second-Order Accurate Solutions of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(11), pp. 3397–3414.

Klein, P. (2000) "Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, pp. 1405–23.

McCandless, G. (2008) *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.

Schmitt-Grohe, S., and M. Uribe (2004) "Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, pp. 755–775.

Sims, C. (2002) "Solving Linear Rational Expectations Models," *Computational Economics,* 20, pp. 1-20.

Uhlig, H. (1999) "A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easiliy," in R. Marimon and A. Scott eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies,* Oxford University Press.