線形代数学講義録（2025年度改訂版）

高木寛通（たかぎひろみち）

2025年6月17日

目 次

1　はじめに

この講義では**線形代数**という数学の一分野を勉強する．線形代数とは，**ベクトル空間**[*1]という集合の間の**線形写像**と呼ばれる写像を研究する学問である．

この講義の大きな目標は，線形写像を記述するために導入される**表現行列**（3.3 節，12 章，17 章参照）を通して，行列の重要性を学ぶこと，そして，**線形変換**という特別な線形写像に対して，**固有値と固有ベクトル**を求める方法を習得し，線形変換を「視覚的に」理解することである．さらに，発展的な目標として，固有値と固有ベクトルの理論を一般化した**ジョルダン標準形**の理論の修得がある．

教科書は指定せず，この講義ノートによって授業を行う．演習問題は講義ノートにあるものを解いておけば十分である．

1.1　講義ノートの概要

この講義ノートの概要を述べる．このノートは大きく分けて 5 部構成になっている．

第 I 部（3 章から 6 章まで）では，行列の様々な側面を学び，それが線形写像（の典型的なもの）の記述と表裏一体であることなどを見る．行列に慣れ親しむこともこの部分の目標である．

第 II 部（7 章から 13 章まで）は，抽象的な概念である**ベクトル空間と線形写像**の導入から始まる．この導入は，通常の講義よりも少し早目であると思うが，線形代数学の理念である「**ベクトル空間の間の線形写像を理解すること**」を 早めに理解してもらうためである．しかし，その後は，あまり抽象的になりすぎるのを避けるため，本格的な理論展開は第 III 部に回す．その代りに，第 II 部後半では，本講義の目標である「**表現行列**」と「**固有値問題**」について，あまり技術的困難を感じずに流れを理解してもらうことを目標としている．そのため，主に題材を，皆さんがすでに知っていると思われる，2×2 行列及び 2 次元のベクトル空間に限定して，ストーリー展開を一通り概観する．

第 III 部（14 章から 20 章まで）は，第 II 部の内容を一般化することを目的としている．この講義の核心部分である．14 章から 17 章までにおいて一般論を整備し（17 章が**表現行列**の一般論である），18–20 章で，本講義の主目標である**固有値問題**の解答を与えている．

第 IV 部（21 章，22 章）では，線形代数学の一つの究極の定理である**ジョルダン標準形**の存在定理（21 章）を証明し，さらに，しばしばジョルダン標準形の代用として有用となる線形写像の**ジョルダン分解**を考える（22 章）．

第 V 部（24 章から 26 章まで）では，ベクトル空間に内積を導入して考える．目標は,「内積の入ったベクトル空間の直交固有値問題」である．実は，13.2 節に少しその考え方が現れている．

さらに詳しい概要については各部の冒頭を参照のこと．

[*1] **線形空間**と呼ぶこともある．

1.2　参考文献

参考書をいくつか挙げておく.

本講義の主目標である固有値問題を中心にすえて書かれた教科書は，珍しいが二冊ある.**『線形代数と固有値問題』笠原皓司著 (現代数学社)** と**『固有値問題 30 講（数学 30 講シリーズ）』志賀浩二著（朝倉書店）**である. 前者は, 通常の教科書と考えてよい. ただし, 行列の一般事項の記述がやや少ない. 後者は, 教科書とは言い難いが, 線形代数のエッセンスを知るのによい. 最後は, ヒルベルト空間 (無限次元のベクトル空間) の説明に充てられており, 授業で扱う有限次元ベクトル空間との橋渡しをしてくれる好著である.

『線形代数・講義と演習』小林正典・寺尾宏明共著（培風館）は, 一回分が一講義に相当するように書かれているので読みやすい. 薄いが数学的にしっかりした本.

『線型代数（すうがくぶっくす２）草場公邦著（朝倉書店)』は，前期で説明する数列のなすベクトル空間の例が書いてある数少ない本である.

『線形代数学』中村郁著（数学書房）は，色々な応用（量子力学，マルコフ過程，CT スキャン，符号理論など）が書いてあって楽しく読める本である.

『線形代数講義』石井惠一著（日本評論社）はコンパクトであり，また，ベクトル空間を初めから扱っている珍しい本である．実は，以前，私もこの本と非常に似た順序で講義をしたことがあるので，理念的に好きな本である.

本格的なものとしては, **『線形代数学』佐竹一郎著（裳華房）**, **『理系のための線形代数の基礎』永田雅宜代表著者（紀伊国屋書店）**が定評ある教科書であり, 新しいものでは, **『線形代数の世界』斎藤毅著（東大出版会）**，**『線形代数学』足助太郎著（東大出版会）**がある．将来，線形代数を本格的に使う人は，このような教科書を一つ勉強しておくのが望ましい.

『線形代数１２章』難波誠著（日本評論社） 線形代数の各項目を例から説き起こして簡潔に説明してある．１２章は線形代数の面白い例が選んである.

『線形代数入門–大学理工系の代数・幾何』中岡稔・服部晶夫代表著者（紀伊国屋書店）

『キーポイント　線形代数』薩摩順吉・四ツ谷晶二著（岩波書店）

教科書というよりは，キーポイントというタイトルから分かる通り，副読本的なものである.

最後に量子論の教科書であるが, **『新版量子論の基礎』清水明著（サイエンス社）**を挙げておく．3 章に固有値問題を中心とした線形代数の解説がある．線形代数が他の分野と結びつく様子を知るのも有益であろう.

講義ノートの他に自分と相性が良いと思われる参考書を一つ持っておくことを推奨する（大学の図書館も積極的に利用するとよい．また，近所の図書館もかなり線形代数の教科書を所蔵している．蔵書検索してみるとよい）.

一年生の時に買った線形代数の教科書にジョルダン標準形の解説が書いてあるのであれば，それでもよい．また，上記以外にも，新しい線形代数の教科書が続々と出版されているので，書店，図書館などで調べてみるとよい.

1.3　講義ノートを読むにあたっての注意

命題や定理の証明については，分かりやすい説明を心掛けたが， 本来なら，各自で頭に入りやすいよう再構築した方がよい．

picture と書いてあるのは，図を描いて理解することが望ましい箇所であるが，図の再現はしていない．

随所に，線形代数の枠組みに捉われない付録や話題をさしはさみ， 線形代数の考え方を学ぶ動機づけとした． これらは時間の制約上，講義時間中には解説するのが難しいと思われるので，各自で（一部でも構わないので）是非読んでみてほしい．

⊛ を付けた練習問題や項目は， やや難しいと思われるものである．基本的に意欲的な人のみ目を通せばよい．

練習問題については， ヒントを書いたのもあればそうでないのもある．書いたものについては**各章末**にまとめてある．

ミスプリ，説明がおかしいと思うところ，説明が分かりにくいと思ったところ（説明の流れが分かりにくいところ等）などあれば遠慮なく指摘してください（口頭でもよいし，レポートに書いてくれてもよい）．漠然とではなく，具体的にお願いします． できれば，見つけるたびに指摘してくれると助かります．

1.4　講義について

講義中，基本的にはノートを取らなくてもよい． この講義ノートの配布はその為でもある．もちろん，手を動かさなくては頭が働かないと感じる人や，講義を理解しながらでもノートが取れるという人はノートを取った方がよいが，長年教えていて，講義中はノートを取るだけになってしまうという声が非常に多く，そう感じる人はきっぱりノートを取ることをあきらめた方がよい．きちんとしたノートを取る代わり，講義ノートに書き込みをしたり，走り書き程度のメモ集を作成しながら講義を聴いた方がよい．

南 4 号館のセミナー室を利用するなどして，グループで予習・復習するのをおススメします。どうか横のつながりを大切に。

2　線形代数を学ぶ動機

線形代数を学ぶ動機について，数学的にはおおらかに説明するのがこの章の目標である．すべてを完全に理解できる必要はない．

2.1　曲がったものを真っ直ぐなもので理解する

1 章でも触れたが，線形代数学の目標は線形写像というものを理解することである．

そもそも，写像とは何か，まずそれを定義しておこう． 一般に, V, W を集合とするとき, V の各要素（各元（げん）[*2]）に対して W の各元を定める規則が与えられているとき, その規則を V から W への**写像**と言う (picture). 実数に実数を対応させる規則は関数のことに他ならない[*3].

さらに，線形写像の典型例を述べる前に記号を一つ導入する． d 個の実数の組全体の集合を $\mathbb{R}^d$ で表す（実数全体の集合は $\mathbb{R}^1$ ではなく，単に $\mathbb{R}$ で表す）．すなわち，

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, \ldots, x_d) | x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}$$

とする[*4]．以下では $(x_1, \ldots, x_d)$ を $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ で表すことが多い． さて，線形写像の典型例とは, $f : \mathbb{R}^e \longrightarrow \mathbb{R}^d$ なる写像で 次の 2 条件 (1), (2) が満たされるもののことである：

(1) $\mathbb{R}^e$ の任意の 2 つの元 $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ に対して, $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$ が成立する．つまり，足し算を先にやって f で送っても， f で送った後に足し算しても結果は同じである．

(2) $\mathbb{R}^e$ の任意の元 $\boldsymbol{v}$ と任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $f(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が成立する．つまり，α 倍を先にやって f で送っても， f で送った後に α 倍しても結果は同じである．

条件を一つにまとめて書けば,

$(*)$ 任意の $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ と $s, t \in \mathbb{R}$ に対して， $f(s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2) = sf(\boldsymbol{v}_1) + tf(\boldsymbol{v}_2)$ が成立する

となる．

この条件から，例えば， 任意の $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ と $s, t, u \in \mathbb{R}$ に対して，$f(s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 + u\boldsymbol{v}_3) = sf(\boldsymbol{v}_1) + tf(\boldsymbol{v}_2) + uf(\boldsymbol{v}_3)$ なども成立する．

この条件の理解を深めるために，例として，$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ なる線形写像を考えよう． $\mathbb{R}^3$ は座標の入った空間（座標空間という）と見なせるので，この f は幾何学的に捉えることが出来る．条件 $(*)$ から次のような f の幾何学的性質が従う：

[*2] この講義では要素より元という事の方が多いので慣れてほしい．

[*3] この講義では，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と見ることもある．

[*4] $A := B$ は A を B で定義すると言う意味． $A =: B$ と書くこともあり，この場合は，B を A で定義すると言う意味.

- パラメーター表示された，原点を通る直線 $t\boldsymbol{v}$ $(t \in \mathbb{R})$ を f で移すと，やはり パラメーター表示された，原点を通る直線 $tf(\boldsymbol{v})$ $(t \in \mathbb{R})$ になる[*5](picture).

- パラメーター表示された，原点を通る平面 $s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$ $(s, t \in \mathbb{R})$ を f で移すと，やはりパラメーター表示された，原点を通る平面 $sf(\boldsymbol{v}_1) + tf(\boldsymbol{v}_2)$ $(s, t \in \mathbb{R})$ になる[*6](picture).

このように $(*)$ から「f によって，まっすぐなものがまっすぐなものに移る」ということが分かる[*7]．線形という名前もここから来ている．各自で，他の $\mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^d$ $(1 \leq d, e \leq 3)$ についても[*8]，このように幾何学的に考えてみるとよい．

e, d が大きい場合の $f : \mathbb{R}^e \longrightarrow \mathbb{R}^d$ については， このような幾何学的理解はできないので，論理的に話を進めてゆくほかないが，$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ のような幾何学的理解の「イメージ」を持っていると理解の助けになる．少なくとも抽象的な感じが和らぐであろう．

では線形写像を「どのように」理解するのか？　それを学ぶのが本講義の目的である．それについては，追々明らかにしてゆくことにして[*9]，この節では,「なぜ」線形写像を理解することが有益なのかを説明したい．上の例で見たように，線形写像は まっすぐなものをまっすぐなものに移す写像であった．そこで「なぜ」に対して，「まっすぐな写像を理解することが曲がった写像を理解するのに役立つから」 というのが一つの答えにあることを，一つの例を用いて以下説明しよう．

$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を（線形とは限らない）写像とする[*10]． $\mathbb{R}^2$ の座標を (s, t) とするとき，各 $\mathbb{R}^2$ の点 (s, t) の g による移り先である $\mathbb{R}^3$ の点を $g(s, t)$ によって表す．

写像 g を与えるという事は， 三つの 2 変数関数 $g_1(s, t)$, $g_2(s, t)$, $g_3(s, t)$ を与えることと言ってもよい：

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \overset{g}{\mapsto} (g_1(s, t), g_2(s, t), g_3(s, t)) \in \mathbb{R}^3.$$

[*11]これから，考察するのは， (s, t) がくまなく $\mathbb{R}^2$ を動くとき， その g による移り先たちが動く範囲（軌跡）である (picture)．これを写像 g の**像**という[*12]． (s, t) は 2 次元動くから， その移

[*5]ただし $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ のときは 一点に潰れる．

[*6]直線の場合の ように，潰れてしまう場合もある．

[*7]ただし，平行移動は除く．原点は原点に移らなくてはならない．

[*8]$p \leq q$ は $p \leqq q$ と同じ意味.

[*9]1 章や各部の冒頭の説明も参照の事.

[*10]本当は， $\mathbb{R}^2$ からの写像ではなく，$\mathbb{R}^2$ の部分集合（開集合と言う条件が付くが説明は略）からの写像にすべきだが，それについては例で触れる．

それは，さておき，$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ なる写像という設定そのものが，イメージしにくかったようです．本当は，この後，例を挙げるつもりだったのですが時間が足りなかったので飛ばしてしまいました．手っ取り早く例を挙げると，下敷きを一つ机の上に用意します．これを $\mathbb{R}^2$ と思います．下敷きをぐにゃっと曲げてください．すると，下敷きは「空間 $= \mathbb{R}^3$」に飛び出します．もともとの「下敷き $= \mathbb{R}^2$」の点に対応して，曲がった下敷きの点 $\in \mathbb{R}^3$ が対応しています．これが，$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ なる写像の例です．

[*11]集合の写像を表すのは $A \to B$ のように通常の矢印 $\to$ を用い， 写像による集合の元の対応を表すのには $a \mapsto b$ のように記号 $\mapsto$ を用いる．

[*12]これは写像にとって重要な概念であり，この講義でも頻繁に扱う． s, t が写像 g の像のパラメーター表示を与えていると見なせる．あるいは，もっと視点を，写像 g の像の方に移して,「写像 g の像の 地図が st 平面である」と考えると分かりやすいのではないだろうか？

り先たちも 2 次元的に動くと考えられる[*13]．そこで，写像 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の像の事を**曲面**という．

例えば，

$$(s,t)\mapsto(a_1s+a_2t, b_1s+b_2t, c_1s+c_2t)$$

を考える．これは空間ベクトルを用いて書くと分かりやすい．

$$\begin{pmatrix} a_1s+a_2t \\ b_1s+b_2t \\ c_1s+c_2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

となることに注意すると， $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ が ともに $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でなく 平行でもなければ， (s,t) が $\mathbb{R}^2$ をくまなく動くとき， その g による行先たちは $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ によって 張られる平面をくまなく動く (picture)． つまり，写像 g の像は s,t によってパラメーター表示された平面である[*14]． 実はこのような g は線形写像になっている（線形写像の定義に戻って各自確認してみよ）[*15]．

一般の $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は， まっすぐなものを曲げて移す．例えば，$\mathbb{R}^3$ において，関数 $z=h(x,y)$ なる 2 変数関数のグラフを考えよう．これは，写像 $(s,t)\mapsto(s,t,h(s,t))$ の像と見なせるから，曲面の例になっている． $h(x,y)$ の例は色々知っていると思うが，例えば $h(x,y)=x^2+y^2$ とすると，そのグラフは回転放物面である． 写像 $(s,t)\mapsto(s,t,s^2+t^2)$ によって， s 軸，t 軸は放物線に曲げられて移されていることが確認できる (picture)．

以下，写像 g の像を S で表す． この曲がった面 S の曲がり具合を数学にしたのは，大数学者ガウスであった． その考え方は，こうである．曲がったものを理解するために，それをまっすぐなもので近似する． しかし，その近似は，S の各点の近くでしか通用しない． そこで，点が S を動くとき，そのまっすぐな近似がどう変化するかを数量化して，S の曲がり具合を数量化しよう[*16]．ガウスの理論（曲面論）は，$z=x^2-y^2$ などの理解も含む（picture)． この曲面は、原点の近くにおいて， xz 平面で切ると下向きの放物線， yz 平面で切ると 上向きの放物線となっていて， 曲がり方の向きが異なっている． この曲面は，$z=$ (一定) で切断すると，双曲線が出てくることから，**一葉双曲面**と呼ばれる．

[*13]ただし，本当は g にいろいろ条件を付ける必要がある．その条件については 追々明らかにしてゆく．

[*14]別の言い方をすれば， $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ は平面に斜交座標系を与えている． これらは，12, 14 章で学ぶ，ベクトル空間の基底と呼ばれる，とても大切な概念の好例である．

[*15]なお，3 章ですぐ見るように， 行列の積により， $s\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ が成り立つ．

[*16]ここに書いたことは 1 変数関数 $g(x)$ のグラフについては，導関数を考えることに他ならない．

曲面 S のまっすぐな近似とは何かと言うと，それは S の各点における**接平面**のことである．それは，1 変数関数のグラフの接線の一般化であり，2 変数の微分法の考え方を使って定義される[*17]．まず，一般に，単独の 2 変数関数 $h(s,t)$ は，(s_0,t_0) の近くにおいて，1 次関数（まっすぐな関数）

$$h(s_0,t_0)+\frac{\partial h}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0)+\frac{\partial h}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0)$$

で近似できる[*18]．これを踏まえれば，写像 g は，(s_0,t_0) の近くにおいて，次のような写像で近似できる．**ただし，$g(s_0,t_0)$ を原点に選び直しておく．** $\Delta s=s-s_0,\ \Delta t=t-t_0$ とおくと，

$$(s,t)\mapsto\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s}(s_0,t_0)\Delta s+\frac{\partial g_1}{\partial t}(s_0,t_0)\Delta t\\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(s_0,t_0)\Delta s+\frac{\partial g_2}{\partial t}(s_0,t_0)\Delta t\\ \frac{\partial g_3}{\partial s}(s_0,t_0)\Delta s+\frac{\partial g_3}{\partial t}(s_0,t_0)\Delta t\end{pmatrix}=\Delta s\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_3}{\partial s}(s_0,t_0)\end{pmatrix}+\Delta t\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial t}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_3}{\partial t}(s_0,t_0).\end{pmatrix}\tag{2.1}$$

これは線形写像である！ 以下，

$$\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0):=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_3}{\partial s}(s_0,t_0)\end{pmatrix},\ \boldsymbol{g}_t(s_0,t_0):=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial t}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial g_3}{\partial t}(s_0,t_0)\end{pmatrix}$$

と表すことにする．線形写像 (2.1) の像である 平面 $g(s_0,t_0)+\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0)\Delta s+\boldsymbol{g}_t(s_0,t_0)\Delta t$ を S の 点 $g(s_0,t_0)$ における**接平面**と言う[*19]．以下，$\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0),\ \boldsymbol{g}_t(s_0,t_0)$ は $\boldsymbol{g}_s,\ \boldsymbol{g}_t$ と略記することもある．

例 **2.1.** 2 変数 $z=h(x,y)$ のグラフの場合，$g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^2\ni(s,t)\mapsto(s,t,h(s,t))$ なる写像だから，$\boldsymbol{g}_s=\begin{pmatrix}1\\0\\h_s\end{pmatrix},\boldsymbol{g}_t=\begin{pmatrix}0\\1\\h_t\end{pmatrix}$ である．

1. $h(x,y)=x^2+y^2$（回転放物面）の場合，$\boldsymbol{g}_s=\begin{pmatrix}1\\0\\2s\end{pmatrix},\boldsymbol{g}_t=\begin{pmatrix}0\\1\\2t\end{pmatrix}$.
2. $h(x,y)=x^2-y^2$（一葉双曲面）の場合，$\boldsymbol{g}_s=\begin{pmatrix}1\\0\\2s\end{pmatrix},\boldsymbol{g}_t=\begin{pmatrix}0\\1\\-2t\end{pmatrix}$.

[*17] これから述べることは，数学 I で近いうちに習うはずである．なお，このために，写像 g を定めている 2 変数関数 $g_1,\ g_2,\ g_3$，及び，以下出てくるすべての 2 変数関数に対して，$s,\ t$ に関して何度でも偏微分可能と言う条件を付けておく．

[*18] $h(s_0,t_0)$ が抜けていました．

[*19] これが本当に平面になるために，ベクトル $\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0),\ \boldsymbol{g}_t(s_0,t_0)$ がともに $\boldsymbol{o}$ でなく平行でもないと言う条件を付けておく必要がある．

3. $h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$（半球）の場合，$\boldsymbol{g}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-s}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \end{pmatrix}$. この例では，$(s,t)$ は $s^2+t^2 \leq 1$ に限定する．

また，$g\colon (s,t) \mapsto (\cos s, \sin s, t)$ の像（$0 \leq s \leq 2\pi$ に限定）は円柱の表面である (picture)．この場合，$\boldsymbol{g}_s = \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

空間ベクトル $\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0)$, $\boldsymbol{g}_t(s_0,t_0)$ は (s_0,t_0) が動けば変化する．これらから，曲面 S の性質を浮き彫りにする量を取り出そう．

一つは曲面 S の面積を求めることを可能にする量である[*20]．接平面による近似を使うと，点 $g(s_0,t_0)$ の近くにおいて，S は $g(s_0,t_0)$ を一つの頂点とし，$\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0)\Delta s$, $\boldsymbol{g}_t(s_0,t_0)\Delta t$ に対応する 2 辺を持つ平行四辺形で近似できる (picture)． ただし，Δs, Δt は十分小さいとする．この平行四辺形の面積 ΔS は[*21]，$\boldsymbol{g}_s$, $\boldsymbol{g}_t$ の成す角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とすると $\|\boldsymbol{g}_s\|\,\|\boldsymbol{g}_t\|\,\Delta s \Delta t \sin\theta$ である．ただし，$\|\boldsymbol{v}\|$ で空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さを表している． ここで，$\boldsymbol{g}_s$, $\boldsymbol{g}_t$ の内積の公式

$$\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{g}_t = \|\boldsymbol{g}_s\|\,\|\boldsymbol{g}_t\| \cos\theta$$

より，

$$\Delta S = \sqrt{(\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{g}_s)(\boldsymbol{g}_t \cdot \boldsymbol{g}_t) - (\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{g}_t)^2}\,\Delta s \Delta t$$

を得る． よって S の面積は

$$\iint \sqrt{(\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{g}_s)(\boldsymbol{g}_t \cdot \boldsymbol{g}_t) - (\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{g}_t)^2}\,ds dt$$

で与えられる[*22]．この面積の公式にとって重要な役割を果たしているのが，3 つの 2 変数関数

$$E(s,t) := \boldsymbol{g}_s(s,t) \cdot \boldsymbol{g}_s(s,t),\ F(s,t) := \boldsymbol{g}_s(s,t) \cdot \boldsymbol{g}_t(s,t),\ G(s,t) := \boldsymbol{g}_t(s,t) \cdot \boldsymbol{g}_t(s,t) \tag{2.2}$$

である． これらをまとめて，曲面 S の**第一基本量**と呼ぶ．

例 2.2. $z = h(x,y)$ のグラフの場合，$E = 1 + h_s^2$, $F = h_s h_t$, $G = 1 + h_t^2$ である．

1. $h(x,y) = x^2 + y^2$（回転放物面）の場合，$E = 1 + 4s^2$, $F = 4st$, $G = 1 + 4t^2$ である．
2. $h(x,y) = x^2 - y^2$（一葉双曲面）の場合，$E = 1 + 4s^2$, $F = -4st$, $G = 1 + 4t^2$ である．
3. $h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$（半球）の場合，$E = \frac{1-t^2}{1-s^2-t^2}$, $F = \frac{st}{1-s^2-t^2}$, $G = \frac{1-s^2}{1-s^2-t^2}$ である．

[*20] 面積を考える場合，(s,t) の動く範囲を有限の範囲にしなくてはならない．
[*21] 以下の説明は，空間ベクトルの外積を 習ったことがあれば，既知なはず．
[*22] これは 2 重積分と呼ばれるものである．冬学期に数学 I で学ぶ．

円柱の表面 $g\colon (s,t)\mapsto(\cos s,\sin s,t)$ の場合，　$E=1,F=0,G=1$ である．

　E,F,G を用いれば，面積は

$$\iint\sqrt{EG-F^2}dsdt$$

と書ける[*23]．

<u>例</u> **2.3.** $z=h(x,y)$ のグラフの場合，　$EG-F^2=1+h_s^2+h_t^2$ である．
　$h(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$（半球）の表面積を求めてみよう．$EG-F^2=\frac{1}{1-s^2-t^2}$ であるから，

$$\iint\sqrt{EG-F^2}dsdt=\iint_{s^2+t^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}dsdt.$$

これは，$(s,t)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $(0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi)$ と変数変換することで求められる．結果のみ記しておく[*24]．

$$\iint_{s^2+t^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}dsdt=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}d\theta=$$
$$2\pi\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr=[-2\pi\sqrt{1-r^2}]_0^1=2\pi.$$

　実は，第一基本量によって，曲面 S 上の曲線の長さも測ることが出来る[*25]ことが分かるが，その説明は 13.4 節に回す．

　$\boldsymbol{g}_s$, $\boldsymbol{g}_t$ から読み取れるもう一つの 量で，曲面の曲がり方と密接に関連しているものを定義しよう．これは，曲面が接平面からどれだけ離れているかを数量化したものである．曲面と接平面の離れ具合は，(s_0,t_0) の近くで接平面がどれだけ変化するかによって，測れるはずである．よって，　$\boldsymbol{g}_s$, $\boldsymbol{g}_t$ の s,t に関する偏微分

$$\boldsymbol{g}_{ss}(s_0,t_0),\ \boldsymbol{g}_{st}(s_0,t_0)=\boldsymbol{g}_{ts}(s_0,t_0),\ \boldsymbol{g}_{tt}(s_0,t_0)$$

が[*26]，接平面の法線ベクトル方向にどれだけ 傾いているかで測ることにする（picture）[*27]．そこで，S の各点 $g(s_0,t_0)$ における 接平面の法線ベクトルで長さが 1 のもの $\boldsymbol{n}(s_0,t_0)$ として，$\boldsymbol{g}_s(s_0,t_0)$ から $\boldsymbol{g}_t(s_0,t_0)$ へ 回転した時，右ねじが進む方向を向いているものを選んでおき，

$$L(s,t):=\boldsymbol{g}_{ss}(s,t)\cdot\boldsymbol{n}(s,t),\ M(s,t):=\boldsymbol{g}_{st}(s,t)\cdot\boldsymbol{n}(s,t),\ N(s,t):=\boldsymbol{g}_{tt}(s,t)\cdot\boldsymbol{n}(s,t) \tag{2.3}$$

と定める．　これらを曲面 S の **第二基本量**と呼ぶ．

[*23] 以下，このように E, F, G において，変数 (s,t) を省いて書くことも多いので注意．

[*24] 以下の計算では，重積分の変数変換の公式を用いている．　一変数の積分の変数変換では，変換関数の導関数を掛けなくてはならなかった ($\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$) が，重積分では，その一般化として，変換関数のヤコビ行列式（の絶対値）がかかる．詳しくは適当な参考書を参照のこと．

[*25] 第一基本量は，曲面 S 上の測量を可能にする量なのである．そして，逆に，測量によって，第一基本量を求めることが出来ることも分かる．13.4 節を参照の事．

[*26] 例えば $\boldsymbol{g}_{st}$ は $\boldsymbol{g}_s$ の t に関する偏微分．　今の条件下で $\boldsymbol{g}_{st}=\boldsymbol{g}_{ts}$ が成り立つことは数学 I で習う．

[*27] 加速度の 2 変数版．

例 **2.4.** 2 変数 $z = h(x, y)$ のグラフを考える．$\boldsymbol{g}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_s \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_t \end{pmatrix}$ から，$\boldsymbol{n}$ はこの外積（ベクトル積）で求められる;

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{g}_s \times \boldsymbol{g}_t}{\|\boldsymbol{g}_s \times \boldsymbol{g}_t\|} = \frac{1}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -h_s \\ -h_t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

また，$\boldsymbol{g}_{ss} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{ss} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{st} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{g}_{tt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{tt} \end{pmatrix}$ であるから，

$$L = \frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}, M = \frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}, N = \frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}$$

となる．

1. $h(x, y) = x^2 + y^2$（回転放物面）の場合，$L = \frac{2}{\sqrt{4s^2+4t^2+1}}$, $M = 0$, $N = \frac{2}{\sqrt{4s^2+4t^2+1}}$.
2. $h(x, y) = x^2 - y^2$（一葉双曲面）の場合，$L = \frac{2}{\sqrt{4s^2+4t^2+1}}$, $M = 0$, $N = \frac{-2}{\sqrt{4s^2+4t^2+1}}$.
3. $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$（半球）の場合，$L = \frac{t^2-1}{1-s^2-t^2}$, $M = \frac{-st}{1-s^2-t^2}$, $N = \frac{s^2-1}{1-s^2-t^2}$.

また，円柱の表面 $g\colon (s, t) \mapsto (\cos s, \sin s, t)$ の場合，$\boldsymbol{g}_{ss} = \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}_{st} = \boldsymbol{g}_{tt} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix}$ なので，$L = -1, M = N = 0$.

このあと，もう少し話を続けると，曲面のガウス曲率と言うものを定義できるのであるが，それは，13.4 節に回す．数学 I，II で色々学んだあと[*28]に読むとよい．線形代数の範囲を大分逸脱するが，その中で線形代数の考え方が極めて有効に使われているのを目の当たりにできる．

2.2 意外なところに線形性あり

この節の話は，9.3 節で本格的に考える．

[*28] 特に，数 I の多変数（2 変数）関数の合成関数の微分の話，極値の求め方，そして，数 II では，2×2 行列の固有値問題．

この節では，線形写像の条件が，前節冒頭で考えた状況以外でも現れることを見たい．実はそれは，皆さんがすでに知っている関数の微分に現れている．関数の微分とは，関数 $f(x)$ から導関数という別の関数 $f'(x)$ を求める操作である．この操作は，2.1 節の初めに見た条件と全く同じ条件を満たしている[*29].

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ が成り立つ．つまり，足し算を先にやって微分しても，微分した後に足し算しても結果は同じである．

2. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ が成り立つ．つまり，先に α 倍して微分しても，微分した後に α 倍しても結果は同じである．

この見方の応用は，9.3 節で説明する．ここで触れておきたいのは，このような見方をするための前提の話である．まず，関数 $f(x)$ から導関数という別の関数 $f'(x)$ を求める操作を，2.1 節と同じように写像と見るためには，**どこからどこへの**写像なのかをはっきりさせなくてはならないということである．一番，広く考えると，V を微分可能な関数全体の集合，W を関数全体の集合[*30] とするとき，微分は，V から W への写像と見ることが出来る[*31]．このとき，微分すると言う写像を $D\colon V \to W$ で表すことにしよう．つまり，D によって $f(x) \in V$ は $f'(x) \in W$ に移る．このとき，上の性質を D を使って言い直してみると，

1. $D(f+g) = D(f)+D(g)$ が成り立つ．

2. $D(\alpha f) = \alpha D(f)$ が成り立つ，

となって，2.1 節冒頭と全く同じ条件になる．

さらに，このような条件を考える際に暗黙に使っていることに注目する．それは，V にも W にも「足し算と実数倍」という演算が定まっているということである．これはどんな集合にも定まっているわけではない．例えば，整数全体の集合には実数倍は定まらない．例えば，1 は整数だが，$\sqrt{2}\times 1$ は整数でないからである．また，2^n なる自然数全体には足し算が定まっていない．例えば，$2^0=1, 2^1=2$ に対して，$1+2=3$ は 2 のべきでないからである．このように,「足し算と実数倍」という演算が定まっているのは，実は，当たり前のことではない．しかし，また,「足し算と実数倍」という演算が定まっている集合はたくさんあり，そしてそれさえ定まっていると，そのような集合間の写像について 線形性という概念を定義することができるようになる．この応用は計り知れない.「世の中至る所線形性あり」という程になる．このような,「足し算と実数倍」という演算が定まっている集合のことを**ベクトル空間** という．これは，いわゆる矢印のベクトルの空間ではなくて（それも一つの例ではあるが），矢印の足し算–平行移動–と矢印の実数倍–比例–(picture) を抽象化した性質を持っているものと言う意味で，ベク

[*29] 以下は，事実としては，高校生の時に習っているはずである．正確には数学 I で，ε-δ 論法を用いて，証明される．

[*30] $V \subset W$ が成り立っている．

[*31] 導関数が存在しない関数 がたくさんあるから，W から W への写像と言うわけには行かない．ただ，目的によっては，考える集合を V, W をより小さく選ぶことがある．以下の説明と，9.3 節を参照の事．

トルという名前を持っている．この点を混乱しないでほしい[*32]．「平行移動」と「比例」という操作が許されている集合[*33]ということで，ベクトル空間は,「まっすぐな空間の抽象化」と言ってよい．

こうして振り返ってみると， 線形な（真っ直ぐな）写像 D を考えるためには， 真っ直ぐな空間 V と W が必要だったという事になる[*34]．

ベクトル空間については， 7 章で定義し，第 II 部で様々な例を見る． さらに，第 III 部では，より本格的にベクトル空間の理論を組み立ててゆく．

微分を線形写像と見るとどのような感じになるのかを少し見ておこう． 数学に限らず，科学や経済学において， （高階）微分を含んだ等式を満たす関数を求める問題（方程式）を考えることは常套手段である． これを**微分方程式**という． その中でも最も基本的なものが次の例である．$\alpha \in \mathbb{R}$ を定数とする．

$$f'(x) = \alpha f(x) \tag{2.4}$$

を満たす関数をすべて求めよ[*35]．

<u>例</u> **2.5.** この例は，力学系入門 Hirsch-Smale-Devaney 著（共立出版）1 章より取った．

ここでは変数を時間 t としておく方が分かりやすい． 時間 t における生物の個体数を表す関数を $f(t)$ とする． 個体数の変化率 $f'(t)$ は，個体数が少ない時には正で，かつ，個体数にほぼ比例し，ある程度個体数が増えると，負に転ずるとする． そのような個体数の変化のモデルとして， 微分方程式 $f'(t) = \alpha f(t)(1 - \frac{f(t)}{N})$ (ロジスティック方程式）がある．ただし，N はある正の定数である． この方程式は変数分離法と言う方法で簡単に解けるが， ここではそれには言及しない．ここで言いたいのは， $f(t)$ が十分小さい時は，$1 - \frac{f(t)}{N}$ は 1 で近似できるので， ロジスティック方程式は (2.4) で近似できるという事である．

この意味で， (2.4) は，他の微分方程式の近似として，基本的なものである． しかも，2.1 節の例と同様，曲がったものをまっすぐのなもので近似したことになっているということを，後で説明する．

(2.4) を満たす f の求め方はよく知られている[*36]．まず $e^{\alpha x}$ が条件を満たすことに注目する．$e^{\alpha x}$ が 0 になることはないので， $g(x) := f(x)/e^{\alpha x}$ とおくと，$f'(x) = g'(x)e^{\alpha x} + \alpha g e^{\alpha x} = \alpha f = \alpha g e^{\alpha x}$ であるから $g'(x)e^{\alpha x} = 0$ である． ところが $e^{\alpha x}$ が 0 になることはないので， $g'(x) = 0$ でなくてはならない．すなわち $g(x)$ は定数関数．これを c とおくと $f(x) = ce^{\alpha x}$ となる． こうして，(2.4) を満たすすべての関数を求めることができた．

[*32] ベクトル空間と呼ばずに，線形空間と呼ぶこともある． そちらの方が混乱は少ないようにも思うのだが，色々な教科書を見ると， ベクトル空間の方が多かったので，こう呼ぶことにする．

[*33] このような幾何的なイメージのためベクトル「集合」とは呼ばずベクトル「空間」というのだと思う．単なるばらばらの物の集まり（集合）ではなく，構造を持っているもの（今の場合，足し算と実数倍）を空間と呼ぶことが多い．

[*34] まっすぐな構造を 持った空間を考えるからこそ，その間のまっすぐな写像というのが定義できる．

[*35] もちろん， (2.4) において， 関数を微分しているから，f の条件として，微分可能を前提としておく必要がある．

[*36] 以下で説明する方法は，定数変化法と呼ばれる方法である．

しかし，これはまったくの解析（数学 I の内容) で，線形代数ではない． 線形代数の出る幕は,「問題の捉え方」にある． 先ほど，微分を写像と見たが，ここでは，Z を何度でも微分可能な関数（つまり，導関数があり，その導関数もあり， そのまた導関数もあり ⋯ となっている関数）すべてからなる集合としよう．すると，微分は $Z \to Z$ への写像を定める． 何度でも微分可能な関数の導関数もまた，何度でも微分可能だからである． これを $D\colon Z \to Z$ で表す. 定義域を狭めた利点は，D の定義域も値域も，Z という同じ集合になるということである． Z にも足し算と定数倍が定まっており，ベクトル空間になる．そして，D は線形写像になる． このような，定義域と値域が等しい線形写像のことを**線形変換**と呼び， この講義では，特に詳しく扱う.

さて，$f'(x) = \alpha f(x)$ を満たす関数を求める問題は， この設定で， 「写像 $D\colon V \to V$ によって α 倍される関数を求めよ」と捉え直すことが出来る[*37]．このように線形変換によって，自分自身の定数倍に移るものを求める問題を **固有値問題**といい，この講義の中心的な話題である. $f'(x) = \alpha f(x)$ なる関数を求める問題を 固有値問題と見ることの応用が，9.3 節にある.

さて，例 2.5 において， (2.4) が，曲がったものをまっすぐなもので近似していると言ったが, それは次のような意味においてである． (2.4) を満たす関数全体の集合を A としよう． これは, すでに求めたように，$ce^{\alpha t}$ なる関数全体であり，つまり， $e^{\alpha t}$ の実数倍全体である． このように A を完全に決定すれば明らかなことだが，そうするまでもなく，(2.4) の形を見れば， A に属する二つの関数の足し算もまた A に属する，かつ，A に属する関数の実数倍もまた A に属するという事が分かる． これは A に「足し算と実数倍」が定まっている，つまり A がベクトル空間であるということに他ならない[*38]．このように，(2.4) の解全体の集合（解空間と呼ぶ）として，まっすぐな空間が 現れる．それに対して，ロジスティック方程式の解全体の集合は，このような性質を満たさないので,「曲がっている」と考えるのである.

この意味でのまっすぐな微分方程式はもっと一般的に定義できる（例 3.3 を見よ）.

[*37] ただし， はじめ，D は微分可能な関数全体からの写像としていたのに， 今度は，何度でも微分可能な関数全体からの写像として定義域を狭めてしまったから，$f'(x) = \alpha f(x)$ を満たす関数のうち，何度でも微分可能な関数だけを求めていることになる．しかし，上で見たように，$f'(x) = \alpha f(x)$ を満たす関数は $ce^{\alpha t}$ であり，結局，何度でも微分できる関数である．よって，実は，定義域を狭めても同じ問題を考えていることになるのである.

[*38] これは，ベクトル空間のうちでも，部分ベクトル空間というものの例になっている.

第 I 部

行列，行列式，連立一次方程式 –線形写像との関係を見ながら行列に親しむ–

d 個の複素数の組全体の集合を $\mathbb{C}^d$ で表す（実数の場合は $\mathbb{R}^d$）．すなわち，

$$\mathbb{C}^d := \{(x_1, \ldots, x_d) | x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{C}\}$$

とする．以下では $(x_1, \ldots, x_d)$ を $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ で表す． これからは主に，2.1 節で考えた設定を $\mathbb{R}^d$ でなく $\mathbb{C}^d$ に対して考える[*39]．

一般に, V, W を集合とするとき, V の各要素（各元（げん）[*40]）に対して W の各元を定める規則が与えられているとき, その規則を V から W への**写像**と言う (picture). 実数に実数を対応させる規則は関数のことに他ならない[*41].

> $f : \mathbb{C}^e \longrightarrow \mathbb{C}^d$ を $\mathbb{C}^e$ から $\mathbb{C}^d$ への写像とする．f が**線形写像**であるとは, 次の 2 条件が満たされているということである：
>
> (1) $\mathbb{C}^e$ の任意の 2 つの元 $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ に対して, $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$ が成立する.
>
> (2) $\mathbb{C}^e$ の任意の元 $\boldsymbol{v}$ と任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が成立する[a].
>
> [a]**文系の人向け注:** $f : \mathbb{R}^e \longrightarrow \mathbb{R}^d$ が線形写像であると言うのも同様に定義する．ただし，α は実数とする．

この講義の目標はこの**線形写像（とその一般化）を理解するということ**である[*42]．第 I 部の非常に重要な結果として，複素数を縦横に整然と並べた**行列**というものが， 上記の線形写像と等価であることが示される（3.2, 3.3 節）．行列の方が線形写像よりも抽象的でないので扱いやすい．そこで，第 I 部では，線形写像との関連を意識しつつ，行列に親しむことを目標とする．

行列の別の側面も見る．一つは，行列から定まる**行列式**という量である．これは行列から平行四辺形や平行六面体の一般化の体積に相当するものを読み取ったものである[*43]．行列式は，そのような幾何学的な起源も一方でありながら，それにとどまらない重要な量である． もう一つの行列の側面は，**連立一次方程式解法**への応用である．この応用においては，線形写像と等価なものとしての行列と言う側面も顔を出し，行列式の重要な応用も現れる．

[*39] 複素数については，あまり知らないかもしれないが，通常の計算規則だけ知っていればほとんど事足りる．不安な人は， 24.5 節を見よ．**文系の人向け注:** 文系の講義では，逆に $\mathbb{R}^d$ のみ考える．

[*40] この講義では要素より元という方が多いので慣れてほしい．

[*41] この講義では，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と見ることもある．

[*42] 一般化は 7.2 節で与える．

[*43] この点はこの講義ではあまり強調しない．

5.2 節では，連立方程式の解全体の集合が，第 II, III 部で展開される線形代数の一般論の動機付けになっていることも見る．

3　行列演算の一般事項と線形写像

3.1　基本的定義

$l \times m$ **行列**とは

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}$$

という形に実数または複素数を並べたもののことである．$A = (a_{ij})_{1 \le i \le l, 1 \le j \le m}$ と表すこともあり，しばしば i, j の範囲を省略して $A = (a_{ij})$ と書くこともある． a_{ij} のことを A の (i, j) **成分**と言う．(l, m) を行列の**サイズ**と言う．$l = m$ のときは l のこともサイズと言う． すべての成分が実数である $l \times m$ 行列全体の集合を $M_{l,m}(\mathbb{R})$ と書き， 成分に複素数を許した $l \times m$ 行列全体の集合を $M_{l,m}(\mathbb{C})$ と書く[*44]．**以下では， $M_{l,m}(\mathbb{R})$ を扱うのも $M_{l,m}(\mathbb{C})$ を扱うのもほとんど変わりがないので，応用範囲の広い $M_{l,m}(\mathbb{C})$ を主に扱う．何も断りがないときは $M_{l,m}(\mathbb{C})$ について考えていると認識してほしい．ただし，直感的理解に都合が良い時などには $M_{l,m}(\mathbb{R})$ を扱う**[*45].

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{lj} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ, A の i **行**, j **列**と言う[*46].

数ベクトルは行列の特別な場合である．$l = 1$ のとき, つまり $1 \times m$ 行列のことを **長さ m の横ベクトル**, $m = 1$ のとき, つまり $l \times 1$ 行列のことを **長さ l の縦ベクトル**と言う．長さ l の縦ベクトルを $\mathbb{C}^l$ の元と同一視することが多い．横ベクトルの意味については，ずっと後であるが，例 8.3 に説明がある． 縦ベクトルは, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}_i$ などと表し, 横ベクトルは, ${}^t\boldsymbol{a}$, ${}^t\boldsymbol{b}$, ${}^t\boldsymbol{a}_i$ などと表す.

[*44]すぐに，行列と連立一次方程式の 関係を述べる．複素数を係数にもつ連立一次方程式を考えることも当然あるので， 複素数を成分に持つ行列は自然に出てくる．

[*45]**文系向け注：** 文系向け講義では $M_{l,m}(\mathbb{R})$ のみ考える．以下のこの章の説明で，$M_{l,m}(\mathbb{C})$ を $M_{l,m}(\mathbb{R})$ に，複素数を実数に読み替えること．

[*46]横幅の大きい行列を書くときは，左右に隣あっている成分を離して書いた方がよい．例えば，大げさに書けば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

ではなく

$$\begin{pmatrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \\ 2 & \quad 4 & \quad 6 & \quad 6 \end{pmatrix}$$

のように． 例えば，この例の $(1, 1)$ 成分と $(1, 2)$ 成分がくっつきすぎると， 12 に見えてしまう事があって紛らわしい．

ここで, ^{t} は行列の転置 (transpose) を取ると言う操作を表しているが, これについては改めて触れる（13.2 節）.

行列には演算を考えることが出来る． それは数の演算と対比して考えると理解しやすい[*47]. この演算が，行列を単なる数の羅列でない有用なものにしている． 行列どうしの**和**, **差**は, **サイズの同じ行列に対してのみ定義され**, それは, 各成分どうしの和, 差によって定まる. 行列の**(複素) 定数倍 (あるいはスカラー倍)** とは, 各成分を複素数倍するということである.

行列どうしの**積**は次のように定義する[*48]. A は上の通り $l \times m$ 行列とし,

$$B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

とする. ここで, A **の列の数と** B **の行の数が等しい**ことに注意. このとき

$$AB := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1i}b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{1i}b_{in} \end{pmatrix} \in M_{l,n}(\mathbb{C}).$$

つまり AB は (p, q) 成分が

$$\sum_{i=1}^{m} a_{pi}b_{iq} = a_{p1}b_{1q} + \cdots + a_{pm}b_{mq}$$

である行列である.

注意 1. ここで和をとっているのは i についてであって p, q ではないということを きちんと認識しておくこと. これに限らず, 和をとっているときは何について和をとっているのかを常に意識すること.

例 3.1.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2.$$

次の例は，以外に戸惑うのではないかと思う.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

積の定義はとても奇妙に見えるかもしれないが，次の二例がその 有用性を示している． さらに 3.5 節では，それが線形写像と行列を対応させると自然でさえあることが分かる.

[*47] 数を 1×1 行列と見れば，数の演算の一般化になっている.

[*48] これは，今，定義した複素数を掛ける積とは別物である.

例 3.2 (**行列積の効用 1**)**.** 式の数が l 個, 未知数の数が m 個の連立一次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{l1}x_1 + \cdots + a_{lm}x_m &= b_l \end{aligned} \tag{3.1}$$

が

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{lm} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix}$$

を用いて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表示できる[*49].

これによって, **連立一次方程式の解法が行列の研究に帰着される (5 章)**. 連立方程式にも関わらず，あたかも一つの方程式のように書けてしまうというのが利点の一つである.

例 3.3 (**行列積の効用 2**)**.** 2.2 節で考えた微分方程式 (2.4) の一般化として， 連立微分方程式というものがある． そのうち，最も基本的な例として,「微分可能な m 個の関数 $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ で 次の条件を満たすものを求めよ」というものを考える[*50].

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1m}x_m(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2m}x_m(t) \\ &\cdots\cdots \\ x_m'(t) &= a_{m1}x_1(t) + \cdots + a_{mm}x_m(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし，a_{ij} はすべて実数とする． これを**定数係数の斉次型線形連立微分方程式**という． これも，例 3.2 と同様,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$$

[*49] A の成分がすべて実数であるときは， $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ のうち，すべての成分が実数であるものだけを求める場合と，複素数を成分に含むものも求める場合がある．それは状況による.

[*50] 例 3.2 と違い， 関数の数と方程式の数が等しい（ともに m）のは，以下で出てくる行列 A が正方行列になるようにしているためである.

と置き,
$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_m'(t) \end{pmatrix}$$
と書くことにすると[*51],
$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$
と表示できる. このように, 連立の微分方程式なのにも関わらず, あたかも一つの微分方程式のように書いておくと, 形式的に, 微分方程式 (2.4) との類似が見出される. そして, 無茶に見えるかもしれないが「(2.4) の解を表すのに $e^{\alpha t}$ なる指数関数が出てきたから, $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の解を表すのに e^{tA} なる行列の指数関数が出てくるのでは ないか」と妄想することが出来る. 実はこれは妄想ではない. $m \times m$ 行列 D に対して, 指数関数の行列版 e^D が定義できるのである. e^D も $m \times m$ 行列である. そして, $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の解は, (2.4) の解とまったく形式的に類似して, $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$ と書くことが出来る事が分かる. ここで $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$ は任意のベクトルであり, $e^{tA}\boldsymbol{c}$ は, 行列 e^{tA} とベクトル $\boldsymbol{c}$ の積である.

こうして, **(3.2) の解法が, やはり, 行列の研究に帰着される**. 13.3 節で, $m = 2$ の場合を説明してあるので, 興味がある人は是非読んでもらいたい[*52]. そこでは, 微分方程式と言う解析的な問題にもかかわらず, 線形代数は, もはや,「良い見方を与える」という脇役的な 振る舞いでなく, 主役と言ってよい活躍をする.

練習問題 3.1. 次の, 行列の和, スカラー倍と積の関係式を示せ:
(1) $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.
(2) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.
ただし, A, B, C は行列で, 積が定義されるようなサイズを持っているとする. a は複素数である.

行列積については, 練習問題 3.1 の性質に加え, さらに 結合法則が成り立つが, それは 3.4 節で扱う（命題 3.4）.

さて, $l \times m$ 行列 A, $m \times n$ 行列 B に対して, 行列積 AB の次のような有用な見方を与える[*53]. AB の (p, q) 成分を見ると, A の p 行目, B の q 列目しか関係しない. よって, AB の q 列目は, B の q 列目（と A）, AB の p 行目は, A の p 行目（と B）から決まる. これに注目すれば 次が成り立つことが分かる（**各自必ず確かめてみること**):

[*51] $\boldsymbol{x}'(t)$ については, ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を t で微分したものと言う気分.
[*52] **文系向け注**：文系向け講義では シラバスに入っているので説明する.
[*53] もちろん, 上で述べた行列積の定義は万能であるのだが, すべてをむき出しにするよりも, 一つの側面をクローズアップした方が, 物事を的確に捉えられることがよくある.

命題 3.1. (1) $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ (ここで $\boldsymbol{b}_q$ は B の q 列目である) のように表示しておくと,

$$AB = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & \dots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}.$$

ここで $A\boldsymbol{b}_q$ は A と縦ベクトル $\boldsymbol{b}_q$ の積.

(2) $A = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_l \end{pmatrix}$ (ここで ${}^t\boldsymbol{a}_p$ は A の p 行目である) のように表示しておくと,

$$AB = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 B \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_l B \end{pmatrix}.$$

ここで ${}^t\boldsymbol{a}_p B$ は横ベクトル ${}^t\boldsymbol{a}_p$ と B の積.

ここで，これからこの講義を通して頻繁に利用する（簡単だが）重要なことを述べる． それは，行列とベクトルの積を，次のように理解しておくことが大切だということである.

命題 3.2. (1)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{l1} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{lm} \end{pmatrix}.$$

同じことだが, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ と書くことにすれば,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m \boldsymbol{a}_m.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix} =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix} + \cdots + x_l \begin{pmatrix} a_{l1} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}.$$

行列積の定義に戻れば簡単に確かめられるので, **各自必ず納得すること.**

3.2 行列で定まる $\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^l$ なる写像

線形写像の定義は第 I 部冒頭で述べた通りとする.

命題 3.3. $l \times m$ 行列 $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}$ に対して $f_A\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^l$ なる写像を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \overset{f_A}{\longmapsto} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

で定める．つまり， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ に対して， $f_A(\boldsymbol{x}) := A\boldsymbol{x}$ と定める． $f_A\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ は線形写像である．

これは，練習問題 3.1 を使うことでもチェックできるが， 命題 3.2 を使うことで見通しよく示せる[*54]．

証明. 線形写像の条件 (1) をチェックする． $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ を任意に取ると，

$$\begin{aligned} f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right) &= f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{\text{命題 3.2}}{=} (x_1 + y_1)\,\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_m + y_m)\,\boldsymbol{a}_m \\ &= (x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m) + (y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{a}_m) \\ &\overset{\text{命題 3.2}}{=} f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) + f_A\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

となって，チェックできた．

線形写像の条件 (2) $f_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f_A(\boldsymbol{x})$ についても同様に示せる．**各自で必ず確認すること**． □

命題 3.3 の証明により以下の事が分かる． **これは非常に重要であるので良く頭に入れておくこと．**

[*54] 命題 3.4 の証明と考え方はほぼ同じ．以下のような証明方法を取る一つの理由は， この命題の逆にあたる定理 3.1 の証明のヒントを示唆するからである．

注意 2. (1) 命題 3.2 (1) を f_A を使って言い直すと， $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ に対して $f_A(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m$ となる．写像 f_A による $\boldsymbol{x}$ の移り先の理解の仕方としてはこの方が良い．

(2) $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ で第 i 成分が 1, 他の成分がすべて 0 となる $\mathbb{C}^m$ の元を表す．これを**基本ベクトル**という．(1) より，$f_A(\boldsymbol{e}_i) = A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$ である．つまり，**行列 A は $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ の f_A による行き先を並べてできる行列として復元できる**．この見方が，定理 3.1 の証明のアイデアを与える．

この注意を踏まえて次の問題を解いてみるとよい．これは 2015 年度の講義時に出題したレポート問題である．

例題

A を 2×3 行列とし，$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ で定まる線形写像とする．

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

となる時,
(1)$f_A(\boldsymbol{e}_1), f_A(\boldsymbol{e}_2), f_A(\boldsymbol{e}_3)$ を求めよ．
(2)A を求めよ．

解．(1) 命題 3.3 で示した f_A の線形性を用いる．

$$f_A(\boldsymbol{e}_1) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\boldsymbol{e}_3) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\boldsymbol{e}_2) = f_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= f_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) - f_A\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) - f_A\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

(2) 注意 3.2(2) を参考にする.

$$A = (\ f_A(\boldsymbol{e}_1)\ \ f_A(\boldsymbol{e}_2)\ \ f_A(\boldsymbol{e}_3)\ ) = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

□

練習問題 **3.2.** $f_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $f_A\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ となる A を求めよ.

写像 $f_A\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ を考える一つの動機は，連立一次方程式との関連である． それを述べるために一つ定義を与える[*55]．f_A に対して，

$$\mathrm{Ker}\, f_A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m \mid f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$$

とおき, これを f_A の**核**と言う．A で定まる連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解全体の集合は，まさに f_A の核に他ならない．このように，連立一次方程式を線形写像 f_A と結びつけて考えることの有用性を 16.4 節で見る．

写像 f_A と連立一次方程式との関連をもう一つ述べるために，定義を与える．

$$\mathrm{Im}\, f_A := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^l \mid \text{ ある } \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m \text{ が存在して } \boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) \text{ が成り立つ.}\}$$

とおき, これを f_A の**像**という．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ なる連立一次方程式は， $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ の場合，解を持たないこともある． $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つという事は，ある $\boldsymbol{x}$ が存在して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が成り立つと言い直すことが出来る． $A\boldsymbol{x} = f_A(\boldsymbol{x})$ であるから，これはある $\boldsymbol{x}$ が存在して $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ ということ，つまり， $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ f_A$ という事に他ならない．このように $\mathrm{Im}\ f_A$ に注目することで，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための使いやすい必要十分条件を 導くことが出来る （16.4 節参照）.

核や像は後により一般的状況で定義されるが，このように連立一次方程式と関連させて 頭に入れておくと理解しやすいだろう.

例 **3.4.** ここでは，ここでは $\mathbb{C}^m$ ではなく $\mathbb{R}^m$ で考えるので注意.

線形写像の像の例として，直線や平面のパラメーター表示を挙げる．より幾何的な線形写像のイメージを持てる一助となればよい． 2.1 節も参照の事.

[*55] より一般的な定義を 8.5 節で与える．そこには図も書いてあるので参照のこと．

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R} \ni t \mapsto (at, bt)$ で定める． 行列積を使うと，これは $f\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} t$ と書けるから，f は 2×1 行列 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を左から掛ける写像であり線形である． $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} t = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に注意すると [*56]， f の像は，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ であれば， $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとし，原点を通る直線に他ならない．$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ でも同様の例が考えられる．

2. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2 \ni (s,t) \mapsto (a_1 s + b_1 t, a_2 s + b_2 t, a_3 s + b_3 t) \in \mathbb{R}^3$ で定める．$g\colon (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ であるから，g は 3×2 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ を左から掛ける写像であり線形である． $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に注意すると（命題 3.2）， g の像は， $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ がどちらも $\boldsymbol{o}$ でなく，かつ，互いに平行でなければ， これらによって張られる原点を通る平面に他ならない．

例 3.5. 対応する複素の場合， $f_A\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^l$ で視覚的に「見える」ものはほとんどない．見える例として，$a \in \mathbb{C}$ (1×1 行列）によって定まる $f_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を考えよう．これは単なる a 倍写像だが，視覚的には面白い． 24.5 節の複素平面の説明を参照せよ．それによれば，a を $a = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ と 極表示すると，a 倍写像は，複素平面における r 倍と θ 回転の合成である．

練習問題 3.3. 次は，ある線形写像の核と見なせる．どのような線形写像をとればよいか？

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + 3y + z = 0,\ x + y + 3z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

[*56] $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} t$ は 2×1 行列 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と 1×1 行列 t の積である． これは，結果的に，ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の t 倍 $t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に等しい．もとは別々に定義されたものだが 計算の結果一致するということである．

3.3 $\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^l$ なる線形写像はいつでも行列で書ける

少し驚いてほしいところなのだが，実は命題 3.3 の逆が成立する．よって，命題 3.3 と定理 3.1 を合わせると，行列と線形写像は等価であることが分かる．

定理 3.1. $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^l$ を線形写像とする． このとき，ある $l \times m$ 行列 $A \in M_{l,m}(\mathbb{C})$ があって $f = f_A$ となる．つまり，すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立する．

注意 2 を参考にすると，以下の証明が自然に見えてくるはずである． 命題 3.2 も効果的に使われる．

証明. $\boldsymbol{a}_1 := f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \boldsymbol{a}_m := f(\boldsymbol{e}_m)$ と定める． $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ を $\mathbb{C}^m$ の任意のベクトルとする． $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{e}_m$ に注目して f の 線形性を使うと， $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_e\boldsymbol{e}_m) = \cdots = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_e\boldsymbol{a}_m = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ となる． ここで，最後の等号を導くのに命題 3.2 を使った. よって，$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_m)$ とおけばよい. □

注意 3. 注意 2 の繰り返しであるが， A は $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ の f による行き先を並べてできる行列に他ならない．この見方は後に線形写像の基底に関する表現行列を考える際に一般化される（12，17 章参照）. それは（一般化された）線形写像を理解する起点 となる（だからこそ，この一般化を一つの大きな目標においている）.

注意 4. $\boldsymbol{o}$ をゼロベクトルとする． 定理3.1 により，線形写像 $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^l$ に対して，$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ が成り立つことが直ちに分かる（$A\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ だから）. これは，以下で説明するように， 定理 3.1 を用いなくても線形性からも直接示せる．実際，線形性より $f(\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}) = f(\boldsymbol{o}) + f(\boldsymbol{o})$ であるが, $\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ であるから，$f(\boldsymbol{o}) = f(\boldsymbol{o}) + f(\boldsymbol{o})$ を得る． 両辺から， $f(\boldsymbol{o})$ を引けば， $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ を得る．

練習問題 3.4. $\boldsymbol{a}$ を $\mathbb{R}^2$ の元とするとき， $\boldsymbol{v} \longmapsto (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{a}$ によって定まる写像 $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は, 線形であることを示せ． ただし，内積の性質は使ってよい[*57]． また, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおくとき, そ

[*57] 高校では，内積を，横ベクトルに対して， $(a \quad b)\cdot(c \quad d) := ac + bd$ であると習ったと思うが，これからは

の行列を求めよ.

例 3.6 (平面の 1 点を中心とする回転)**.** ここでは平面の一点を固定し, それを原点とするような直交座標系を考えることで 平面を $\mathbb{R}^2$ と同一視する. $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{v} \longmapsto (\boldsymbol{v}\text{ を原点を中心に反時計まわりに角度 }\theta\text{ だけ回転したベクトル})$$

(picture) で定める. まず, これが線形写像であることを確かめる. これは幾何的に確かめられる（線形写像の性質 (1) は, 回転によって平行四辺形が合同な平行四辺形に移るということを言っている事が分かる）. 線形性をチェックすると, 回転によって $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が何に移るかが分かれば, 対応する行列が求まる. 結果はよく知られているように, 座標で書くと

$$R_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

となる[*58].

練習問題 3.5. 原点を通る直線 l を考える (picture). $S_l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{v} \longmapsto (\boldsymbol{v}\text{ を }l\text{ について対称移動したベクトル})$$

で定める.

(1) l の長さ 1 の方向ベクトル（の一つ）を $\boldsymbol{u}$ とするとき, S_l を $\boldsymbol{u}$ を使って表せ.

(2) (1) を用いて, S_l が線形写像であることを示せ. 写像 S_l のことを l に関する**鏡映**と言う.

(3) さらに, S_l について, $\boldsymbol{u}$ と x 軸の正の方向とのなす角を $\frac{\theta}{2}$ とするとき S_l に対応する行列を θ で表せ.

練習問題 3.6. ⊛ $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ なる写像が次を満たすとする.

- [(ア)] f はすべてのベクトルの長さを変えない.
- [(イ)] f は任意の 2 つのベクトルの角度を変えない.

このとき f は線形写像であることを示せ. また, それは回転か鏡映に限られる ことを示せ.

主に縦ベクトルに対して内積を考える. つまり, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} := ac+bd$ と定義する. ここで, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ の間にある $\cdot$ が記号上, 大切. これがなくて $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ と書いてしまうと, 行列 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ の 積を考えていると見えてしまうが, このような積は 行列のサイズから言って定義されない.

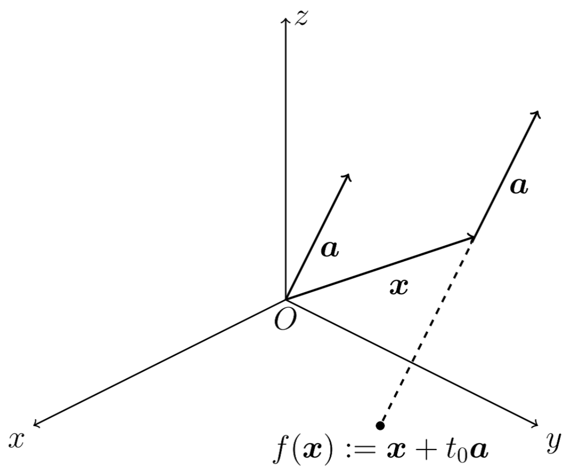
[*58] これは, 加法定理を用いることで一気に求めることも可能である.

練習問題 3.7. ⊛ 複素数は実部と虚部という二つの実数の組で決まる． よって複素数全体は $\mathbb{R}^2$ と同一視できる（複素平面，24.5 節を参照）．このとき $\mathbb{C}^m$ は $\mathbb{R}^{2m}$ と同一視できる． $f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ を複素線形写像とする．これを $\mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2l}$ なる写像と見るとき， これは実線形写像であることを示せ．

$a \in \mathbb{C}$ に対して $f_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ なる実線形写像と見た時，対応する 2×2 行列を求めよ．

以下で与える例は， $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ なる線形写像の典型的なものである．

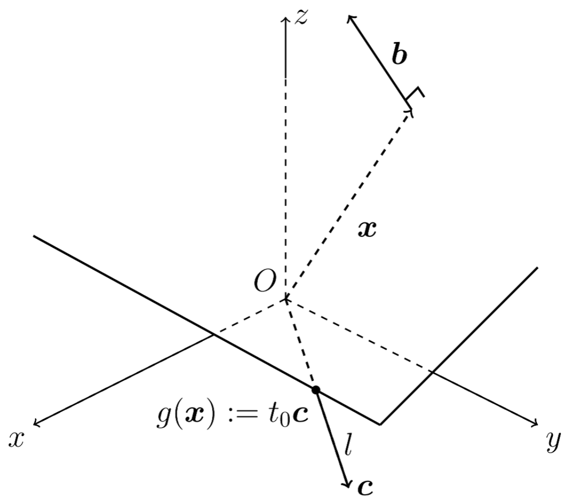
例 3.7. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ を z 座標が 0 でない空間ベクトルとするとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して， $\boldsymbol{x}$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{a}$ の直線と xy 平面の交点を対応させる写像を f とする（交点は唯一つに決まることに注意）． つまり， $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}$ なるベクトルで z 座標が 0 のもの $\boldsymbol{x} + t_0\boldsymbol{a}$ が $f(\boldsymbol{x})$ である．



xy 平面を $\mathbb{R}^2$ と見なす． $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像であることを示す． $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ を取る． $f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_1 + t_1\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_2 + t_2\boldsymbol{a}$ と書いて，これらを足すと， $f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + (t_1 + t_2)\boldsymbol{a}$ が成り立つが，右辺は， $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{a}$ の直線上の点を表し， z 座標が 0 であることから，$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ に一致する． よって $f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ が成り立つ． $f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$ は各自チェックせよ．

この写像の核と像は幾何的に容易に分かる．核は，原点を通る方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ の直線上の点である． 像は，$\mathbb{R}^2$，つまり xy 平面全体に一致する．なぜなら，xy 平面の任意の点を取ると，それは f でそれ自身に移るからである．

例 3.8. $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$， $\boldsymbol{c}$ を xy 平面内のベクトルとする．それぞれ $\boldsymbol{o}$ ではないとし，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は直交していないとする． 原点を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{c}$ の直線を l とする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して， $\boldsymbol{x}$ を通り法線ベクトルが $\boldsymbol{b}$ の平面と l の交点を対応させる写像を g とする（$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は直交していないので交点は唯一つ定まる）． つまり，平面 $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}) = 0$ ($\boldsymbol{z}$ は平面の式を表す変数ベクトル) と l の交点が $g(\boldsymbol{x})$ である．



$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像であることが，上の例と同様にチェックできる．

この写像の像が l であるのは上の例と同様にチェックできる． 核は平面 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=0$ の上の点に他ならない．

練習問題 3.8. 例 3.7, 3.8 で定めた線形写像 $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ に対応する行列を， ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の座標で表せ[*59].

3.4 行列積の結合法則

命題 3.1, 3.2 の応用として, 次の**行列積の結合法則**を示す[*60]:

命題 3.4. A を $n_1 \times n_2$ 行列, B を $n_2 \times n_3$ 行列, C を $n_3 \times n_4$ 行列とするとき

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立つ[a].

[a]行列積が定義できるようにサイズが設定されていることに注意.

証明. まず, C が縦ベクトル $\boldsymbol{c}$ の場合を考える.

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_3} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_{n_3} \end{pmatrix}$$

[*59] 逆に，求めた行列から， 例 3.7, 3.8 の幾何的記述が復元できるようであればよい．

[*60] もちろん，行列積の定義だけからも証明できる．

として命題 3.2 (1) を適用すると,

$$Bc = c_1 b_1 + \cdots + c_{n_3} b_{n_3}$$

となるので,

$$A(Bc) = A(c_1 b_1 + \cdots + c_{n_3} b_{n_3}) \overset{\text{練習問題??}}{=}$$
$$c_1 A\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{n_3} A\mathbf{b}_{n_3} \overset{\text{命題 3.2 (1)}}{=} \begin{pmatrix} Ab_1 & \ldots & Ab_{n_3} \end{pmatrix} c \overset{\text{命題 3.1 (1)}}{=} (AB)c.$$

よってこの場合は正しい. 一般の場合はこれを使って次のように示される:

$C = (c_1 \ldots c_{n_4})$ とおけば,

$$(AB)C = (AB)(c_1 \ldots c_{n_4}) \overset{\text{命題 3.1 (1)}}{=} ((AB)c_1 \ldots (AB)c_{n_4}) \overset{\text{今示したこと}}{=}$$
$$(A(Bc_1) \ldots A(Bc_{n_4})) \overset{\text{命題 3.1 (1)}}{=} A(Bc_1 \ldots Bc_{n_4}) \overset{\text{命題 3.1 (1)}}{=} A(BC)$$

□

練習問題 3.9. $n \times n$ 行列 A, B に対して, $[A, B] := AB - BA$ とおく（リーブラケットという）. A, B, C を $n \times n$ 行列とするとき,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$$

が成り立つことを示せ. この式を**ヤコビの恒等式**という[*61].

練習問題 3.10. a_i $(1 \leq i \leq n)$, b_j $(1 \leq j \leq n)$ を複素数とする時, (i, j) 成分が $a_i b_j$ であるような行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

に対応する線形写像 $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ はどのような線形写像か説明せよ. また, A から定まる連立一次方程式 $Ax = o$ の解を求めよ.

練習問題 3.11. $V = \mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ とする. $a \in V$ を長さ 1 のベクトルとして, 行列 $2a\,{}^t a - E$ で 定まる線形写像 $V \to V$ はどのような写像か説明せよ[*62]. ただし, ${}^t a$ は a を横ベクトルと見なしたものである.

行列 $-2a\,{}^t a + E$ ではどうか？

[*61] 背景や先の話を知りたい人は, 名著「リー環のはなし　佐竹一郎著（日本評論社)」を読んでみるとよい. ただし, 本講義の内容程度は 予備知識として仮定されている.

[*62] $n \times n$ 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ ((i, i) 成分が 1, 他の成分が 0) を**単位行列**と言い, E や E_n で表す.

3.5　線形写像の合成と行列積は等価

3.2 節と 3.3 節により線形写像と行列の対応が分かった．それと行列積の結合法則を踏まえると行列積は線形写像の合成に対応していることが次のように分かる*63．$f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$, $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を二つの線形写像とする．定理 3.1 により，f, g はそれぞれ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y}$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$) と行列を用いて書ける．ここで $A \in M_{l,m}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ である．

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{g} \mathbb{C}^m \xrightarrow{f} \mathbb{C}^l$$

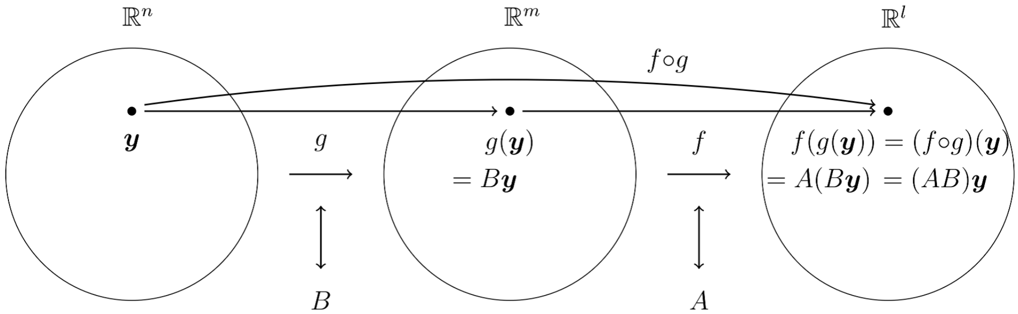
という合成を考える．これは記号 $f \circ g$ で表す．

命題 3.5. $f \circ g$ も線形写像であり，対応する行列は AB である．

証明.

$$f \circ g(\boldsymbol{y}) = f(g(\boldsymbol{y})) = f(B\boldsymbol{y}) = A(B\boldsymbol{y}).$$

ここで，行列積の結合法則（命題 3.4）より $A(B\boldsymbol{y}) = (AB)\boldsymbol{y}$ である．これは，まさに，$f \circ g$ も線形写像であり，対応する行列が AB であることを言っている．



□

3.6　行列積のブロック計算法

行列積の定義から行列をブロックに分けて計算することができることが分かる．これによって著しく計算の手間が省ける場合がある．

例 3.9. A, B を次のように置く:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ \hline M & N & P & Q & R \\ F & G & H & I & J \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

*63 写像の合成というのは極めて自然な考え方であるから，この対応により，行列積も自然な定義であると言える．

さらに,

$$
A_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} c & d & e \\ h & i & j \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} M & N \\ F & G \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ H & I & J \end{pmatrix},
$$

$$
B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

と置くと,

$$
A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right), B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right), AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right)
$$

となっていることが確かめられる（**各自必ず納得すること**）.

こうして計算すると, あたかも A が A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} を成分とする行列, B が B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} を成分とする行列 とみて, 行列積を計算しているように思える. この見方は, 例えば $A_{21} = O$ かつ $B_{21} = O$ のとき, $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = O$ となって, 特に有効である.

一番一般的な場合を述べる． 行列 A, B が次のように分割できたとしよう:

$$
A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{A_{11}}^{m_1} & \overbrace{A_{12}}^{m_2} & \cdots & \overbrace{A_{1k}}^{m_k} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nk} \end{array}\right), \qquad B = \begin{array}{l} m_1 \{ \\ m_2 \{ \\ \\ m_k \{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & \cdots & \cdots & B_{1l} \\ \hline B_{21} & & & B_{2l} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline B_{k1} & \cdots & \cdots & B_{kl} \end{array}\right).
$$

ただし, 行列 $A_{1j}, A_{2j} \ldots, A_{nj}$ の横幅 (列の数) はすべて同じ m_j であり, 行列 $B_{i1}, B_{i2} \ldots, B_{il}$ の縦幅 (行の数) はすべて同じ m_i であるとする. このとき, AB は

$$
AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1l} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nl} \end{array}\right), \qquad C_{ij} = \sum_{r=1}^{k} A_{ir}B_{rj}
$$

と計算できる. これを証明するのは，記号が煩雑であるものの，決して難しくはない． しかし，上の例の場合を理解しておけば十分である.

<u>**練習問題**</u> **3.12.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき， ブロック計算法を用いて，AB を計算せよ（自分でどのようにブロック分けするかを考えよ）.

問題のヒント・答.

練習問題 3.10 のヒント： A を縦ベクトルと横ベクトルの積で表してみよ.

4　行列式

4.1　行列式の性質と計算

前章と話題はガラッと変わる．

この節では $n \times n$ 行列の基本的な量である行列式の定義と計算方法を学ぶ．行列式を扱う時は, $n \times n$ 行列を $(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ のようにベクトルを並べたものと理解しておくのが良い（あるいは, あとで定理 4.3 で見るように $\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と横ベクトルを並べたものと見ても良い）．

定理 4.1 (行列式の存在定理).
任意の $n \times n$ 複素行列 A に対して A の**行列式** $\det A$ という複素数を割り当てることが出来て，様々な行列の行列式どうしが，行列の演算に関する次の 3 つの性質で関係しあっている．

(1) **（多重線形性）**
各 i $(1 \leq i \leq n)$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \alpha\boldsymbol{a}_i \overset{i}{+} \beta\boldsymbol{b}_i \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\right) =$$
$$\alpha\det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \overset{i}{\boldsymbol{a}_i} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\right) + \beta\det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_i \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\right).$$

(2) **（交代性）**
$$\det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \overset{i}{\boldsymbol{a}_i} \ \cdots \ \overset{j}{\boldsymbol{a}_j} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\right) = -\det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \overset{i}{\boldsymbol{a}_j} \ \cdots \ \overset{j}{\boldsymbol{a}_i} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\right).$$

(3) **（規格化条件）**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n) \text{ に対して，} \det A = 1.$$

本講義では, この定理の証明はしない． ここではむしろ性質 (1)〜(3) を繰り返し使用することでいろいろな行列式を計算できるようになることを目標とする．定義に興味がある人は, 適当な教科書を参照してほしい．なお, 4.2 節に, 行列式の定義に必要な置換の基本事項についてまとめておいた．通常の線形代数とは少し違ったスタイルで書かれている（群論を意識した形）．

定理 4.1 の条件は，そのままではなく次のような形で使われることが多い．

系 4.1.

(1) ある列を定数倍すると行列式も同じ定数倍される． $\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ d\boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = d\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$.

(2) ある列が他の列の定数倍となっている行列の行列式は 0 である． $\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots\ d\boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = 0$. 例えば, ある列が $\boldsymbol{o}$ ならば行列式は 0.

(3) ある列に他の列の定数倍を足しても行列の行列式は変わらない. $\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i + \lambda\boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$.

これらは, 定理 4.1 から簡単に導くことができる．(1) は定理 4.1 (1) の特別な場合である．(2) は定理 4.1 (2) から従う．(3) は (2) と定理 4.1 (1) から従う（詳しくは講義で説明する）.

行列式の計算においては, これらを繰り返し用いることで, より簡単な行列の行列式の計算に帰着させるのが常である.

例 4.1. (1) 2×2 行列の行列式は既知だが，定理 4.1(1)〜(3) のみから計算できる.

(2) $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{系}\,\mathbf{??}(1)}{=} 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{系}\,\mathbf{??}(3)}{=} 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{定理}\,\mathbf{??}(3)}{=} 2.$

練習問題 4.1. 定理 4.1(1)∼(3) を使って 3×3 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を計算せよ． 得られた公式は**サラスの式**と呼ばれる.

例 4.1 (1), 練習問題 4.1 の一般化として次が得られる.

練習問題 4.2. ⊛ この問題では，4.2 節の内容（定義 4.1 など）を既知とする.

定理 4.1(1)∼(3) を使って，$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ の行列式が， 次のように A の成分を用いて表されることを示せ：

$$\sum_{\alpha\in S_n} \operatorname{sign}\alpha\, a_{1\alpha(1)}\cdots a_{n\alpha(n)}. \tag{4.1}$$

ここで， 4.2 節で定義しているように， α は置換，$\operatorname{sign}\alpha$ は置換に対する符号である.

注意 5. 通常の教科書では，まず， 練習問題 4.2 で得られた行列式の公式[*64]によって行列式を定義し，それが定理 4.1(1)∼(3) を満たすことを示している．これが標準的な定理 4.1 の証明方

[*64] あるいは等価な式 $\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sign}\alpha\, a_{\alpha(1)1}\cdots a_{\alpha(n)n}$.

法である[*65]．しかし，この公式を使って行列式を計算するのは，一般に大変であるので，この講義ではあまり表に出さないことにした[*66]．

次の行列式の性質は行列式の計算をそのサイズについて帰納的に行うことを保証する．

定理 4.2 (**ブロック分割と行列式**). $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) = \det A \det B$, ただし, A と B は正方行列である．

定理 4.2 の証明はここでは略すが，練習問題 4.4 の後に書いておいた．後に学ぶ掃き出し法を使って証明することもできる (練習問題 6.9).

次の特別な場合をよく使う．

系 4.2. $\det\left(\begin{array}{c|c} a & {}^t\boldsymbol{c} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) = a \det B$, ただし, $a \in \mathbb{C}$, ${}^t\boldsymbol{c}$ は横ベクトル, B は正方行列である．

例 4.2. $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 2\,(3 \times 6 - 2 \times 5) = 16.$

定理 4.1 では，行列式を，正方行列の列の視点から見ていたが，次の定理によって，行の視点から見て計算することができるようになる．

定理 4.3 (**行列式の転置不変性**). $n \times n$ 行列 A に対して，$\det A = \det {}^tA$.

転置をとると列が行となるので，上記の定理 4.1(1)〜(3)，系 4.1，定理 4.2，系 4.2 の行バージョンが得られる．

この定理は，練習問題 4.2 で得られる行列式の公式から得られるが，証明を略す．

練習問題 4.3 (**各自で必ずやること**). それらを書き下せ．よく頭に入れておくこと.

実は, このように行を中心に見る方が, この後 5 章で学ぶ掃き出し法 (こちらは行を中心に見ることが多いので) と相性が良い．

定理 4.1(1)〜(3), 系 4.1(1)〜(3), 系 4.2，定理 4.3 を総動員して得られる次の定理は，系 4.2 よりも一般的な行列式の帰納的計算を可能にする．

[*65] 練習問題 4.2 では，行列式が 定理 4.1(1)~(3) を満たす**ならば**，(4.1) に一致するということを示しているだけで（つまり，定理 4.1(1)~(3) を満たす行列式の存在ありきで議論しているだけで），逆に (4.1) が定理 4.1(1)~(3) を満たすことを示すのは別問題である．

[*66] この公式が無用であると言っているわけではない．実際，理論的には重要で， 定理 4.3 の証明（本講義では略す），20.2 節のケーリー・ハミルトンの定理の証明などで重要な役割を果たす．

次の定理では，記号を大幅に変更したのでよく注意して読んでください．5 月 19 日の説明がやりにくかったからです．その際，うまくできなかった (1) の証明を書きました．また，行列の転置を定義していませんでした．定義 13.5 に書いてありますので見てください．以上，ご不便お詫びいたします．

定理 4.4 (**行列式の余因子展開**).
$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，その i 行と j 列を除いて得られる行列を A_{ij} とし，$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ のことを (i,j) **余因子**という[a].

(1) 各 i に対して，

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + \cdots + a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in}$$

が成立する．

(2) 各 j に対して，

$$\det A = a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j} + \cdots + a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j} \det A_{nj}$$

が成立する．

[a]記号的には面倒だが，この方が誤解を生じないと思う．

証明. (2) の証明は講義で説明する． ここでは，(2) が証明できたとして，(2) と定理 4.3 を使って (1) を証明する． ${}^tA$ の (k,i) 成分を a'_{ki} で表しておく．転置の定義により，$a'_{ki} = a_{ik}$ に注意．また，${}^tA$ の k 行と i 列を除いて得られる行列は，A_{ik} の転置行列 ${}^t(A_{ik})$ に他ならないことに注意する．従って，${}^tA$ の (k,i) 余因子は $(-1)^{k+i} \det {}^t(A_{ik})$ である．
さて，以上の準備の下，A の転置行列 ${}^tA$ の i 列目に (2) を適用すると，

$$\det {}^tA = a'_{1i}(-1)^{1+i} \det {}^t(A_{i1}) + \cdots + a'_{ki}(-1)^{k+i} \det {}^t(A_{ik}) + \cdots + a'_{ni}(-1)^{n+i} \det {}^t(A_{in}) = a_{i1}(-1)^{1+i} \det {}^t(A_{i1}) + \cdots + a_{ik}(-1)^{k+i} \det {}^t(A_{ik}) + \cdots + a_{in}(-1)^{n+i} \det {}^t(A_{in})$$

となる． ここで，定理 4.3 を使えば (1) が得られる． □

注意 6.
1. 定理 4.4 (2) の $j = 1$ の場合[*67]を，系 4.2 の行列に適用すれば，系 4.2 の結果が得られる．ただし，定理 4.4 の証明で 系 4.2 を使っているので，これは，系 4.2 の別証明と言うわけではない．
2. この定理を少し発展させれば，$\det A \neq 0$ の時の A **の逆行列の公式**を得ることができる．適当な教科書を参照のこと．ここでは結果のみ記しておく．$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し

[*67]5 月 20 日の講義では勘違いしていましたが，(1) でなくて (2) で大丈夫でした．ただし，(1) の $i = 1$ の場合から導くことも出来ます．

て，$\widetilde{A}$ を (i,j) 成分が $(-1)^{j+i}\det A_{ji}$ となる $n\times n$ 行列とする (i と j がひっくり返っていることに注意). これを A の**余因子行列**と呼ぶ. このとき，$A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(\det A)E$ が成り立つことが示される． 従って，$\det A\neq 0$ のとき，$\frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ が A の逆行列である.

この公式を用いて，逆行列を計算するのは実用的ではない．後に，掃出し法による 逆行列の求め方を学ぶ（6.2 節）.

しかし，余因子行列には理論的な応用がある（20.2 節の ケーリー・ハミルトンの定理の証明を参照）.

この章の行列式の扱いはやや飛ばし気味であったが， このあとにも行列式を学ぶ機会がしばしばある． 特に **6.5 節**が重要である.

練習問題 4.4. 次の行列の行列式を計算せよ，あるいは等式を示せ. (1) $\begin{pmatrix}3&1&5\\3&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&bc&b+c\\1&ca&c+a\\1&ab&a+b\end{pmatrix}$

(注:サラスの公式を使ってしまうと因数分解できない）(3) $\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\0&2&-1&-1\\2&-3&2&4\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}x&a&b&c&d\\a&x&b&c&d\\a&b&x&c&d\\a&b&c&x&d\\a&b&c&d&x\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}2&-1&3&1&5\\1&1&0&3&8\\3&-1&1&4&2\\0&0&0&2&3\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$

(6) $\det\begin{pmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\&&&\ddots&&\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}+x\end{pmatrix}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$[*68] (7) $\det\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}=\det(A+B)\det(A-B)$. ここで A と B は同じサイズの正方行列.

(8) $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$ を使って $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ.

行列式の定義についての補足 ⊛

行列式は，$n\times n$ 行列全体の集合 $M_{n,n}(\mathbb{C})$ から $\mathbb{C}$ への写像（関数）と見なすことが出来る. 定理 4.1 をこの立場で述べれば,「 関数 $M_{n,n}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ であって， 行列の演算に関して次の 3 つ

[*68] 考えている行列を $xE-A$ と書くとき, A を多項式 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ の同伴行列と言う.

の性質 (1)–(3) を満たすものが存在する（三つの性質は定理と同じなので，ここでは繰り返さない)」となる．練習問題 4.2 から，3つの性質 (1)–(3) を満たすような関数 $M_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ は，唯一つしかないということが分かる．

この考え方を少し一般化しておくと有用である．関数 $g\colon M_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ で，定理 4.1 の性質 (1), (2) のみを満たすものを考える．すると，練習問題 4.2 と同様の考え方によって，$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ に対して

$$g(A) = g(E) \sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sign} \alpha \, a_{1\alpha(1)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

が分かる．練習問題 4.2 により $\det A = \sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sign} \alpha \, a_{1\alpha(1)} \cdots a_{n\alpha(n)}$ であるから，

$$g(A) = g(E) \det A$$

が分かったことになる．

これを使うと，２つの行列式の性質を証明することが出来る．

１つは，定理 4.2 である．定理における正方行列 A のサイズを l とする．B, C を定まった行列，A を変化する行列と考える点がポイントである．$g\colon M_{l,l}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を $A \in M_{l,l}(\mathbb{C})$ に対して，$g(A) = \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ なる関数とする．すると，行列式の性質により，この関数が 定理 4.1 の性質 (1), (2) を満たすことが分かる．よって，$g(A) = g(E) \det A = \det \begin{pmatrix} E & C \\ O & B \end{pmatrix} \det A$ を得る．ここで，系 4.1 を繰り返し用いることで，$\det \begin{pmatrix} E & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & O \\ O & B \end{pmatrix}$ が成立する（左辺の行列の 最初の l 列は基本ベクトルであることに注意．よって，これを定数倍して，残りの列から足し引きすれば，C の部分をゼロにすることができる）．次に，B（サイズを m とする）を変化する行列と見て，$h\colon M_{m,m}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ なる関数を，$h(B) = \det \begin{pmatrix} E & O \\ O & B \end{pmatrix}$ で定義する．すると，これも 定理 4.1 の性質 (1), (2) を満たすことが分かるので，$h(B) = h(E) \det B = \det \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} \det B = \det B$ が成り立つ（最後の等式は $\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$ が単位行列だから）．$g(A) = h(B) \det A$ より，以上から，$g(A) = \det A \det B$ が示された．

もう１つの行列式の性質の証明は練習問題としておく．

練習問題 4.5. $n \times n$ 行列 A, B に対して，$\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つことを示せ．

これは，6.5 節で別証明を与える．

難しめの問題集 $\circledast$

練習問題 4.6. 次の行列の行列式を計算せよ. 但し考えている行列は n 次正方行列で $A=(a_{ij})$ と表す.[*69]

(a) $a_{ij}=a^{|i-j|}$. ここで, a はある数, $|i-j|$ は $i-j$ の絶対値である.

(b) $a_{ij}=\frac{1}{x_i+y_j}$ $(x_i+x_j\neq 0)$.

(c) m を自然数とするとき, $a_{ij}=\binom{m+i}{j}$. ただし, $\binom{m+i}{j}$ は $m+i<j$ のときは 0 とする.

(d) b_i $(i\in\mathbb{Z})$ を $i-j$ が n で割り切れるとき $b_i=b_j$ を満たす数として, $a_{ij}:=b_{i-j}$.

練習問題 4.7. A を階数が 1 の正方行列とする. $\det(A+I)={}^tA+1$ を示せ.

練習問題 4.8. A を（複素）交代行列とする, すなわち, $A=(a_{ij})$ $(1\leq i,j\leq n)$ が $a_{ji}=-a_{ij}$ を満たすとする.

(i) n が奇数ならば $\det A=0$ を示せ.

(ii) n が偶数ならば A のすべての成分に同じ数を足しても行列式は変わらないことを示せ.

(iii) n が偶数であり, $i<j$ ならば常に $a_{ij}=1$ を満たすとき, $\det A$ を求めよ.

練習問題 4.9. $A=(a_{ij})$ を $2m$ 次交代行列とする.

(i) B を $(i-2,j-2)$ 成分 $(1\leq i-2,j-2\leq 2m-2)$ が $(a_{12}a_{ij}-a_{1i}a_{2j}+a_{2i}a_{1j})$ である $2m-2$ 次交代行列とする. $\det A=(a_{12})^{4-2m}\det B$ を示せ.

(ii) $\det A$ は次で与えられる A の成分の多項式（**パッフィアン**と呼ばれる[*70]) の二乗になっていることを示せ:

$$\frac{1}{2^m m!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\varepsilon(i_1,i_2,\ldots,i_n)a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}\cdots a_{i_{2m-1}i_{2m}}.$$

ただし, $i_1,i_2,\ldots,i_n$ は $1,2,\ldots,n$ のすべての順列を動き, $\varepsilon(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ は $i_1,i_2,\ldots,i_n$ を偶数回の並べ替えで $1,2,\ldots,n$ にできるとき 1 であり, $i_1,i_2,\ldots,i_n$ を奇数回の並べ替えで $1,2,\ldots,n$ にできるとき -1 であるとする.

練習問題 4.10. A, B を n 次正方行列とする. $A+\lambda B$ が $n+1$ 個の異なる λ について べき零であるとき, A, B ともにべき零であることを示せ.

[*69] n が小さい場合で予想してみれば手がかりが得られるはず.

[*70] パッフィアンと，ソリトン方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式の関係が， **直接法によるソリトンの数理 広田良吾著（岩波書店）**で詳しく論じられている.

練習問題 4.11. $A=(a_{ij})$ を n 次正方行列, A_{ij} を A の (i,j) 余因子とする.

(i) $1 \leq p < n$ に対して,

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix} = \det A^{p-1} \det \begin{pmatrix} a_{p+1\,p+1} & \dots & a_{p+1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n\,p+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

(ii) A が正則でないとき A の余因子行列は階数は 1 以下であることを示せ.

練習問題 4.12. A を $n \times m$ 行列, B を $m \times n$ 行列とし, $n \leq m$ とする.

$$\det AB = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots k_n \leq m} A_{k_1 \dots k_n} B^{k_1 \dots k_n}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $A_{k_1 \dots k_n}$ は A の $k_1, \dots, k_n$ 列を並べて得られる正方行列の 行列式, $B^{k_1 \dots k_n}$ は B の $k_1, \dots, k_n$ 行を並べて得られる正方行列の 行列式である.

練習問題 4.13. V を n 次正方行列全体のなすベクトル空間, $\phi\colon V \to V$ を線形変換とする. すべての $A \in V$ に対して $\det A = \det \phi(A)$ となるとき ϕ は単射であることを示せ.

練習問題 4.14.

$$\det \begin{pmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{pmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3 .$$

$$\det \begin{pmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = 2\,(bc+ca+ab)^3 .$$

4.2 付録：置換について

X を任意の集合とする. ここでは, 集合 $\{1,\dots,n\}$(1 から n までの自然数全体) のみ念頭においておけば十分である. X の**置換**とは X から X への全単射のことである. X の置換全体を S_X と書く. 2 つの置換 $f : X \to X$, $g : X \to X$ があると, その合成 $f \circ g : X \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} X$ が定義される. この合成を積と見なすことで X の置換全体 S_X は群をなす.[*71] 特に $X = \{1,2,\dots,n\}$ のとき, S_X を S_n と書いて, 次数 n の**対称群**という. $1 \leqq k \leqq n$ なる k に対し, その行き先が i_k となるような S_n の元を $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{smallmatrix}\right)$ で表す. S_n の元の数は $1,\dots,n$ の並べ替えの数に等しいから $n!$ である.

[*71] 群については, 意識しなくても読めるようにはなっているが, せっかくなので理解しておいてほしい.

<u>例</u> **4.3.** 例えば, 次数 3 の対称群 S_3 は次の 6 個の元からなる.

$$S_3 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)\}.$$

二つの元の合成は (関数の合成を表す $\circ$ を省略して)

$$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$$

などの様に表す. この例から分かるように, この積は (行列の積と同様) 可換ではない.

多くの線形代数の教科書では, 置換を表すためにこの記法のみ用いているが, これから導入する記法の方が簡明で本質をついている.

置換の新記法

ある置換が与えられたとする.

まず 1 つの左かっこを書く：(

次にこの置換で動かされる最小の数 i_1 を書く：$(i_1$

次に i_1 の移り先 i_2 を書く：$(i_1 i_2$

以下これを続ける. $i_1, i_2, \ldots$ に現れる数の可能性は n 通りしかないので, ある i_k があって, i_k の移り先が i_1 となる. このとき, i_k を最後に右かっこで閉じて $(i_1 \ \cdots \ i_k)$ と書く.

さらに, ここまでで動かされない整数で最小のものをとり, 同じことをする. 以下これを繰り返す.

<u>例</u> **4.4.** $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&4&3&6&1&2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&5\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}2&4&6\end{smallmatrix}\right)$ となる (3 は動かないので書かない).

<u>**練習問題**</u> **4.15.** $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&8&9&3&6&2&7&5&4\end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&6&7&3&5&4&2\end{smallmatrix}\right)$ を新記法で表せ.

各々の $\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_k\end{smallmatrix}\right)$ を長さ k の**巡回置換**, あるいは k-**サイクル**ともいう. これは a_1 を a_2 に, a_2 を a_3 に, ..., a_k を a_1 に移し, 他は動かさないような置換である. 2-サイクル $\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2\end{smallmatrix}\right)$ のことを**互換**という (つまり a_1 と a_2 の入れ替え).

<u>**定理**</u> **4.5.** S_n のすべての元は, 互換の積でかける.

<u>証明</u>. 置換の新記法の導入から明らかなように, S_n の各元は巡回置換の積でかける. よって巡回置換 $\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_k\end{smallmatrix}\right)$ が互換の積でかけることを示せばよい. これは,

$$\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_k\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a_1&a_k\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_{k-1}\end{smallmatrix}\right)\cdots\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2\end{smallmatrix}\right)$$

であるから良い (右辺の互換の合成で, $a_1, a_2, \ldots$ の行き先を順次確認することで, この等式を確かめてみよ). □

例 **4.5.** $(1\ 5)(2\ 4\ 6) = (1\ 5)(2\ 6)(2\ 4)$ である.

練習問題 4.16. 1. [(a)] S_n のすべての元は $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ の積でかけることを示せ.

2. [(b)] S_n のすべての元は $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n{-}1\ n)$ の積でかけることを示せ.

3. [(c)] S_n のすべての元は $(1\ 2)$ と $(1\ 2\ \cdots\ n)$ の積でかけることを示せ.
(ヒントはこの章の最後にある.)

行列式の定義で重要となるのが次である.

定理 4.6. S_n の元 α を互換の積で書くとき, それが偶数個の積であるか奇数個の積であるかどうかは, 互換の積としての表し方によらない.

証明. $x_1, \ldots, x_n$ を変数として, **差積**と呼ばれるそれらの多項式 $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, \ldots, x_n) &:= \Pi_{1 \leqq i < j \leqq n}(x_i - x_j) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)\cdots(x_{n-1} - x_n).\end{aligned}$$

$\alpha \in S_n$ に対して, $\alpha\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ を

$$\alpha\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \Delta(x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(n)})$$

で定める. これを Δ に α を**作用させる**ということにする. $x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(n)}$ は $x_1, \ldots, x_n$ を並べ替えただけであるから,

$$\alpha\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \pm\Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つ. α が互換 β_i の積で

$$\alpha = \beta_1 \cdots \beta_k \tag{4.2}$$

と書けたとする (定理 4.5). このとき,

$$\alpha\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \beta_1(\beta_2 \cdots (\beta_k\Delta(x_1, \ldots, x_n)))$$

である. 互換を1回作用させると差積は -1 倍される. よって, $\alpha\Delta(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^k\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ である. 左辺は, (4.2) という互換の積による表示には無関係に α のみで決まり, 右辺は $(-1)^k$ である. よって k の偶奇は α のみによって決まる. □

例 **4.6.** $n = 3$ とする. $\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ である. $\alpha = (1\ 3\ 2)$ のとき,

$$\alpha\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) = \Delta(x_1, x_2, x_3)$$

である. よって α は偶数個の置換の積でかける. 例えば,

$$\alpha = (1\ 2)(1\ 3) = (2\ 3)(1\ 2) = (2\ 3)(2\ 3)(2\ 3)(1\ 2)$$

などと色々な表し方ができるが, いずれも偶数個の置換の積である.

定義 4.1. $\alpha \in S_n$ に対し, $\mathrm{sign}\,\alpha$ を,

$$\mathrm{sign}\,\alpha = \begin{cases} +1 & \alpha \text{ が偶数個の互換の積のとき}, \\ -1 & \alpha \text{ が奇数個の互換の積のとき} \end{cases}$$

で定める. これを α の**符号**という. $\mathrm{sign}\,\alpha = 1$ のとき α は**偶置換**, $\mathrm{sign}\,\alpha = -1$ のとき α は**奇置換**という.

注意 7. 定理の証明より, $\mathrm{sign}\,(\alpha\beta) = \mathrm{sign}\,\alpha \cdot \mathrm{sign}\,\beta$ が分かる.

4.3 話題：行列式の応用–終結式と判別式–

この節では, 高次の連立方程式に行列式を応用する. 主に

酒井文雄著　平面代数曲線（数学のかんどころ１２，共立出版）

からの抜粋である. 興味を持った人は是非原著を読んでみてほしい[*72].
なお, この章では, 行列 A の行列式を $|A|$ で表す.

4.3.1 終結式（一変数の場合）

K を体 [*73]とし, K を係数, x を変数にもつ 1 変数多項式全体を $K[x]$ で表す.

[*72] そして, 代数幾何学に興味を持ってくれるとなおうれしい.
[*73] $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ など. 4.3.2 節では違う体を考えることで思わぬ応用があることを見る.

定義 4.2. K 上の定数でない二つの多項式を考える.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (n \geq 1, a_0 \neq 0)$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m \quad (m \geq 1, b_0 \neq 0)$$

次の行列式を f と g の**終結式 (resultant)** と呼ぶ.

$$\mathrm{Res}(f,g) := \left.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\}\mathrm{m} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\}\mathrm{n} \end{matrix}\right.$$

練習問題 4.17. $\mathrm{Res}(a_0x^2+a_1x+a_2, b_0x^2+b_1x+b_2) = (a_0b_2-a_2b_0)^2+(a_0b_1-a_1b_0)(a_2b_1-a_1b_2)$ を示せ.

定理 4.7 (共通因子の存在判定). $\mathrm{Res}(f,g) = 0 \iff f$ と g に定数でない共通因子が存在する.

補題 4.1. 次は同値.

(1) f, g に定数でない共通因子が存在する.

(2) $Af + Bg = 0$ となる多項式 $A, B \in K[x]$ で, $AB \neq 0, \deg(A) < m, \deg(B) < n$ を満たすものが存在する.

補題 4.1 **の証明**. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. f, g の定数でない共通因子を q とし, $f = Bq$, $g = -Aq$ と書けば, $Af + Bg = 0$ となって A, B が条件を満たす.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す.

$$f = f_1 \cdots f_r,\ g = g_1 \cdots g_s,$$
$$A = A_1 \cdots A_t,\ B = B_1 \cdots B_u$$

を既約分解とすると, $Af + Bg = 0$ より 各 f_i は B_j, g_k のどれかの定数倍である. ここで, $\deg(B) < n$ だから, すべての f_i が B_j のどれかの定数倍であるとすると,

$$\deg f = \deg f_1 + \cdots + \deg f_r \leq \deg B_1 + \cdots + \deg B_u = \deg B < n$$

となって矛盾である．よって， 組 (i,k) が存在して, f_i は g_k の定数倍でなければならない． $\square$

定理 4.7 **の証明**. 補題 4.1 を用いる．そのため，$A(x) = c_0x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}, B(x) = d_0x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}$ とおいて, A, B を未知とする方程式 $Af + Bg = 0$ を考えると，これは，その 0 次，⋯，$m+n-1$ 次の係数を書き下すことで，連立一次方程式

$$\begin{aligned} a_0c_0 + b_0d_0 &= 0 \\ a_0c_1 + a_1c_0 + b_0d_1 + b_1d_0 &= 0 \\ &\vdots \\ a_nc_{m-1} + b_md_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

と同値であることが分かる．これは，行列を用いると

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & b_1 & \ddots & \\ & \vdots & \ddots & a_0 & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & & & a_1 & b_m & & & b_1 \\ & a_n & & \vdots & & b_m & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ d_0 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

で表される．左辺の行列を $S_{f,g}$ で表せば, $\mathrm{Res}(f,g) = \det({}^tS_{f,g}) = \det(S_{f,g})$ である．したがって, 条件 $\mathrm{Res}(f,g) = 0$ は, 上記の連立一次方程式に自明でない解が存在することと同値である．つまり, $Af + Bg = 0$ となる $(A,B) \neq (0,0)$ が存在することを意味する．いま, $f \neq 0, g \neq 0$ であるので, A, B のどちらかが 0 でなければ, 他方も 0 ではない．補題 4.1 により, 条件 $\mathrm{Res}(f,g) = 0$ は f, g に定数でない共通因子が存在することと同値である． $\square$

次は終結式の重要な性質である．行列式の性質の面白い応用として得られる．

定理 4.8 (終結式の消去性). 等式 $\mathrm{Res}(f,g) = Af + Bg$ を満たす多項式 $A, B \in K[x], \deg(A) < m, \deg(B) < n$ が存在する．

消去性と言ったのは，この定理によって，定数 $\mathrm{Res}(f,g)$ を， f, g の多項式係数の一次結合を作ることで f, g から変数 x を消去したものと見なせるからである．

証明. $\mathrm{Res}(f,g)$ を定義する行列式の第 i 列に $(1 \leq i < n+m)$, x^{n+m-i} をかけたものを全て第

$n+m$ 列に加えれば,

$$
\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & & x^{m-1}f \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & x^{m-2}f \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & f \\
b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & x^{n-1}g \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & x^{n-2}g \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
 & & & b_0 & b_1 & \cdots & g
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \mathrm{m} \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \mathrm{n}
\end{array}
$$

となる．第 $n+m$ 列に関する展開により, 右辺は $Af+Bg$ の形になる．簡単にわかるように, $\deg(A)<m, \deg(B)<n$ である． □

注意 8. 多項式環の言葉で言えば， $\mathrm{Res}(f,g) \in (f,g) \cap K[x]$ が成り立っている（(f,g) は f, g で生成されるイデアルのこと）.

4.3.2 終結式（多変数の場合）

K を係数, x, y を変数とする 2 変数多項式全体を $K[x,y]$ で表す．今度は，2 変数多項式 $f, g \in K[x,y]$ を考察する．f, g を変数 y の多項式と見て,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= a_0(x)y^n + \cdots + a_n(x) \quad (a_0(x) \neq 0) \\
g(x,y) &= b_0(x)y^m + \cdots + b_m(x) \quad (b_0(x) \neq 0)
\end{aligned}
$$

と表す．ここで, $n \geq 1, m \geq 1$ を仮定する (つまり, f, g ともに x のみの多項式ではないとする). このとき, 係数 $a_i(x), b_j(x)$ を用いて, 定義 4.2 と同様に， 変数 y に関する終結式 $\mathrm{Res}(f,g;y) \in K[x]$ を定義することができる．このとき，$\mathrm{Res}(f,g;y)$ を用いて，f, g に変数 y を含む共通因子があるかどうかを考える.

$K(x)$ で, K を係数, x を変数とする有理式全体を表す．以下，$K(x)$ も体であること（0 でない $f(x) \in K(x)$ が逆元 $\frac{1}{f(x)}$ を持つということ）が大切であることに注意する．この体 $K(x)$ に対して，4.3.1 節の内容を適用する.

補題 4.2. 次は同値.

(1) $K[x,y]$ において, f, g に y を含む共通因子が存在する.

(2) $K(x)[y]$ において, f, g に y を含む共通因子が存在する.

証明. $K[x,y] \subset K(x)[y]$ により，(1) $\Rightarrow$ (2) は自明である．そこで, (2) $\Rightarrow$ (1) を証明する. $\eta \in K(x)[y]$ を f,g の y を含む共通因子とし, $f = \eta\varphi, g = \eta\psi$ となる $\varphi, \psi \in K(x)[y]$ の存在を仮定する．このとき, η, φ, ψ の係数 ($K(x)$ の元) の分母の積を，それぞれ a,b,c とすれば, $\tilde{\eta} = a\eta, \tilde{\varphi} = b\varphi, \tilde{\psi} = c\psi \in K[x,y]$ となる．さらに, 等式 $abf = \tilde{\eta}\tilde{\varphi}$, および $acg = \tilde{\eta}\tilde{\psi}$ が成立する．いま, $\tilde{\eta}$ の y を含む既約因子の一つを p とすれば, $ab, ac \in K[x]$ より, p は f,g の共通因子である. □

定理 4.9. (1) （$K[x]$ の元として）$\mathrm{Res}(f,g;y) = 0 \iff f$ と g に変数 y を含む共通因子が存在する.

(2) 等式 $\mathrm{Res}(f,g;y) = Af + Bg$ を満たす多項式 $A, B \in K[x,y], \deg_y(A) < m, \deg_y(B) < n$ が存在する．ここで，$\deg_y$ は y についての次数を 表す.

(1) $\mathrm{Res}(f,g;y)$ は $K[x,y] = K[x][y]$ でも $K(x)[y]$ でも定義は同じである． $K(x)$ が体であるので，定理 4.7 が適用でき, $\mathrm{Res}(f,g;y) = 0$ となる必要十分条件は $K(x)[y]$ において, f と g に変数 y を含む共通因子が存在することである．補題 4.2 により, これは，$K[x,y]$ において, f,g に変数 y を含む共通因子が存在することと同値である.

(2) 定理 4.8 の証明と同様にして, 多項式 A, B の存在を示すことができる.

練習問題 4.18. 終結式を用いることで，円 $x^2 + y^2 = 1$ と楕円 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ の交点を求めよ.

ここで大きな一般化をする． 体 K 上の r 変数多項式環 $K[x_1, \ldots, x_r]$ や, 整数環 $\mathbb{Z}$ 上の r 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ などは一意分解整域である. 定理 4.9 と本質的に同じ証明により, 一意分解整域 R 上の多項式 $f, g \in R[x]$ の x に関する終結式についても, 同様の結果が成立する.

定理 4.10. 一意分解整域 R 上の定数でない多項式 f,g についても, 条件 $\mathrm{Res}(f,g) = 0$ は f,g が R の元ではない共通因子を持つ必要十分条件である.

この定理によって終結式の応用範囲が広がる． 以下，この定理の応用をいろいろ見ていく.

命題 4.1. $F, G \in K[x_1, \ldots, x_k]$ をそれぞれ, n, m 次の同次多項式（$n, m \geq 1$) とするとき, $F(1,0,\ldots,0) \neq 0, G(1,0,\ldots,0) \neq 0$ ならば, $\mathrm{Res}(F,G;x_1) \in K[x_2, \ldots, x_k]$ は 0 または mn 次同次多項式である.

証明. $R(x_2, \ldots, x_k) = \mathrm{Res}(F,G;x_1)$ とおくとき， $R(tx_2, \ldots, tx_k) = t^{mn}R(x_2, \ldots, x_k)$ を示せばよい．変数 x_1 について整理して,

$$F = a_0x_1^n + \cdots + a_n, G = b_0x_1^m + \cdots + b_m \quad (a_i, b_j \in K[x_2, \ldots, x_k])$$

と表しておく．このとき, 係数 a_i, b_j はそれぞれ i, j 次の同次多項式である．仮定から, $a_0 b_0 \neq 0$ である．したがって,

$$R(tx_2,\dots,tx_k)=\left|\begin{matrix} a_0 & ta_1 & \cdots & & t^n a_n & & & \\ & a_0 & ta_1 & \cdots & & t^n a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & ta_1 & \cdots & & t^n a_n \\ b_0 & tb_1 & \cdots & & t^m b_m & & & \\ & b_0 & tb_1 & \cdots & & t^m b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & tb_1 & \cdots & & t^m b_m \end{matrix}\right| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\text{m} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\text{n} \end{matrix}$$

となる．これについて，第 i 行を t^{i-1} 倍し $(2 \leq i \leq m)$, $m+j$ 行を t^{j-1} 倍すると $(2 \leq j \leq n)$, 第 i 列は t^{i-1} で割り切れる．整理して, 等式

$$t^{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}} R(tx_2,\dots,tx_k) = t^{\frac{(n+m-1)(n+m)}{2}} R(x_2,\dots,x_k)$$

を得る．あとは，両辺を $t^{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}}$ で割ればよい． □

4.3.3 終結式の解による表示

変数 $s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_m$ を考え,

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-s_i)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=\prod_{j=1}^{m}(x-t_j)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$$

とおく（多項式の根を変数と思うということ）．このとき, $a_i, b_j \in \mathbb{Z}[s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_m]$ である．$f(x), g(x)$ は $x, s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_m$ のそれぞれ n, m 次同次多項式と見なせることに注意する．

次の命題によって，f, g が共通解を持つことと終結式の関係がはっきりする．

命題 4.2. 上記の仮定の下で, 等式

$$\mathrm{Res}(f,g)=\prod_{i,j}(s_i-t_j)=\prod_{i=1}^{n}g(s_i)=(-1)^{mn}\prod_{j=1}^{m}f(t_j)$$

が成立する．

証明. まず, $\mathrm{Res}(f,g) \in \mathbb{Z}[s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_m]$ に注意しておく. 各 i,j について, f の s_i に t_j を代入すれば, f,g は共通因子を持ち, $\mathrm{Res}(f,g)=0$ となる (定理 4.10).[*74] したがって, $\mathrm{Res}(f,g)$ は $s_i - t_j$ を因子に持つ. よって, $\prod_{i,j}(s_i-t_j) | \mathrm{Res}(f,g)$ が成立する. 両辺の次数が mn で一致するので (命題 4.1), $\mathrm{Res}(f,g) = c\prod_{i,j}(s_i-t_j)$ となる定数 c が存在する. 両辺における $(t_1\ldots t_m)^n = (-1)^{mn}b_m^n$ の係数を比較して, $c=1$ がわかる. □

系 4.3. n,m 次の多項式 $f,g\in K[x]$ が K の拡大体 L（$K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ならば $L=\mathbb{C}$ でよい）で, 根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, 根 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ をそれぞれ持つとすれば, 次の等式が成立する. ただし，a_0, b_0 は f,g の最高次の係数である.

$$\mathrm{Res}(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j).$$

証明. f/a_0 と g/b_0 に命題 4.2 を適用すれば, 次のようになる.

$$\mathrm{Res}(f,g) = a_0^m b_0^n \mathrm{Res}(f/a_0, g/b_0) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j).$$

□

4.3.4 判別式

多項式 $f(x) = a_0x^n + \cdots + a_n \in K[x] \quad (a_0 \neq 0)$ が K の拡大体 L で, 重複を許して, 根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を持つとする. このとき, 値

$$\mathrm{Disc}(f) = a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$$

を f の**判別式 (discriminant)** という. f が重解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{Disc}(f) = 0$ に注意する.

命題 4.3. 体 K の標数が 0 の場合には, 次の等式が成立する.

$$\mathrm{Res}(f,f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_0 \mathrm{Disc}(f).$$

証明. K の標数が 0 なので， f' は最高次の係数が $na_0 \neq 0$ の $n-1$ 次式であることに注意する. あとは，$f'(\alpha_i) = a_0\prod_{j\neq i}(\alpha_i - \alpha_j)$ に注意して，系 4.3 を用ればよい. □

[*74] 正確に言うと，f の s_i に t_j を代入して得られる式と g に関する終結式が 0 になる． ところが，この終結式は $\mathrm{Res}(f,g)$ の s_i に t_j を代入したものに他ならない.

例 **4.7.** $f(x)=ax^2+bx+c$ の場合, $\mathrm{Res}(f,f')=-a\mathrm{Disc}(f)$ で, $\mathrm{Res}(f,f')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=-a(b^2-4ac)$ だから, $\mathrm{Disc}(f)=b^2-4ac$ であり，お馴染みの 2 次方程式の判別式が得られる.

例 **4.8.** 3 次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ については, $\mathrm{Disc}(f)=-(27a^2d^2+4ac^3+4b^3d-b^2c^2-18abcd)$ である. 例えば，$a=1$，$b=0$ ならば， $\mathrm{Disc}(f)=-(27d^2+4c^3)$ となる.

証明. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ の根を ξ,η とする. 命題 4.3 と系 4.3 により, $\mathrm{Disc}(f)=-27a^2f(\xi)f(\eta)$ である. ここで,

$$\begin{aligned} f(\xi)f(\eta) &= a^2(\xi\eta)^3+b^2(\xi\eta)^2+c^2(\xi\eta)+d^2 \\ &\quad+ab(\xi\eta)^2(\xi+\eta)+ac(\xi\eta)(\xi^2+\eta^2)+ad(\xi^3+\eta^3) \\ &\quad+bc(\xi\eta)(\xi+\eta)+bd(\xi^2+\eta^2)+cd(\xi\eta) \end{aligned}$$

は ξ と η の対称多項式だから, 関係式 $\xi+\eta=-2b/(3a),\xi\eta=c/(3a)$ を代入すれば, 計算が完了する. □

練習問題 4.19. $\mathrm{Res}(f,f')$ を計算することでこれを示せ.

練習問題 4.20. 実 3 次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ について次を示せ.

(i) $\mathrm{Disc}(f)>0 \Leftrightarrow$ 3 実根

(ii) $\mathrm{Disc}(f)<0 \Leftrightarrow$ 実根と共役な 2 複素根

(iii) $\mathrm{Disc}(f)=0, b^2=3ac \Leftrightarrow$ 実 3 重根

(iv) $\mathrm{Disc}(f)=0, b^2\neq 3ac \Leftrightarrow$ 実 2 重根と 1 実根

練習問題 4.21. 実 3 次多項式 $f(x)=x^3-3x+t$ の場合に解の状態を調べよ.

4.3.5 終結式の応用–パラメーター表示された曲線の定義方程式–

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ を定数でない有理式として， パラメーター表示された曲線

$$\Gamma := \{(x,y)=(\varphi(t),\psi(t)) \mid t\in K\}\subset K^2$$

を考える． ただし，$K=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である.[*75] $K=\mathbb{R}$ の場合，t を消去して，Γ の定義方程式 $g(x,y)=0$ を求める問題を高校時代にやったと思う.[*76] この節では，終結式を用いて，この定義方程式を求める.[*77]

[*75] 通常よく考えるのは $K=\mathbb{R}$ の場合だが， $K=\mathbb{C}$ の場合は代数幾何学でよく研究されている（この場合は本当は曲面が得られるのだが，複素代数曲線と呼ぶ）. その利点は，固有値の存在（系 18.1) と同様，代数学の基本定理が成り立つことである. 以下の定理 4.11 を参照のこと.

[*76] 正確に言えば，$g(x,y)=0$ の一部分がパラメーター表示されている.

[*77] ただし，終結式を用いて求められる方程式は，$g(x,y)$ そのものではなく，一般に $g(x,y)^r$ $(r\geq 1)$ と言う形のものである. この点については酒井文雄氏の教科書を参照.

$\varphi(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$, $\psi(t) = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}$ と，それぞれ互いに素な多項式の商として表わしておき，多項式

$$\begin{aligned} p(t,x) &= \varphi_1(t) - x\varphi_2(t) \\ q(t,y) &= \psi_1(t) - y\psi_2(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

を定める． これらを変数 t の多項式と見るとき，それぞれの次数を $n := \deg_t p(t,x)$, $m := \deg_t q(t,y)$ とする．$\varphi(t)$, $\psi(t)$ は定数ではないので，$m, n > 0$ である． また，$p(t,x)$ の各項の係数は，x の一次以下の多項式であることに注意すると， $\deg_t p(t,a) < n$ となる $a \in K$ は高々一つしかない.[*78] これは $q(t,y)$ についても同様である．

さて，終結式を用いて，

$$f(x,y) := \mathrm{Res}(p(t,x), q(t,y); t) \in K[x,y]$$

なる多項式を定め， この零点集合を $C := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ とする．

定理 4.11. $\Gamma \subset C$ が成り立つ． $K = \mathbb{C}$ の場合は，さらに， $\Gamma = C$，または， 一点 $P_0 \in C$ が存在して， $\Gamma = C \setminus \{P_0\}$ が成立する．

証明. (a,b) を Γ の任意の点とする． 定義により，ある $c \in K$ が存在して $a = \varphi(c)$, $b = \psi(c)$ となっているので， $t - c$ は $p(t,a)$, $q(t,b)$ の共通因子になっている． 従って，定理 4.7 より， $\mathrm{Res}(p(t,a), q(t,b)) = 0$ が成立する． ここで注意しなければならないのは，一般に $\mathrm{Res}(p(t,a), q(t,b))$ は $\mathrm{Res}(p(t,x), q(t,y); t)$ に $x = a$, $y = b$ を代入したもの $f(a,b)$ とは異なるということである．それは $\deg_t p(t,a) < n$，あるいは $\deg_t q(t,b) < m$ かもしれず，$\mathrm{Res}(p(t,a), q(t,b))$ はあくまで，それらの次数に関して定義されているものだからである． まず，$\deg_t p(t,a) < n$ かつ $\deg_t q(t,b) < m$ の場合は，$\mathrm{Res}(p(t,x), q(t,y); t)$ の定義により，明らかに $f(a,b) = 0$ が成り立っている． $\deg_t p(t,a) = n$ の場合を考える．$p(t,x)$ の n 次の係数を $\alpha(x)$, $k := \deg_t q(t,b)$ とおく ($k \leq m$)． すると，$f(a,b) = \mathrm{Res}(p(t,x), q(t,y); t)|_{x=a,y=b} = \alpha(a)^{m-k}\mathrm{Res}(p(t,a), q(t,b))$ が成り立つ．従って，この場合でも，$\mathrm{Res}(p(t,a), q(t,b)) = 0$ から $f(a,b) = 0$ が従う． $\deg_t q(t,b) = m$ の場合も同様である．以上から，$\Gamma \subset C$ が証明できた．

以下，$K = \mathbb{C}$ とする． 今度は (a,b) を C の任意の点，つまり $f(a,b) = 0$ とする． $\deg_t p(t,a) = n$ または $\deg_t q(t,b) = m$ ならば，上の議論により，$\mathrm{Res}(p(t,a), q(t,b)) = 0$ が成り立つ． よって，$p(t,a)$, $q(t,b)$ は共通因子を持つ． $K = \mathbb{C}$ としているので，代数学の基本定理により，$t - c$ なる一次の共通因子を持つ． つまり，$a = \varphi(c)$, $b = \psi(c)$ となり，$(a,b) \in \Gamma$ が成り立つ．次に，$\deg_t p(t,a) < n$ かつ $\deg_t q(t,b) < m$ の場合を考える． 証明の前半で，$p(t,x)$ の n 次の係数を $\alpha(x)$ と置いたが，さらに $q(t,y)$ の m 次の係数を $\beta(y)$ と置く． a, b はそれぞれ $\alpha(x) = 0$, $\beta(y) = 0$ の解であるから， このような (a,b) はあっても唯一つである． この (a,b) に対して，

[*78] $\varphi_2(t)$ が n 次の項を含めば，$p(t,x)$ の n 次の係数は x の一次式となるので，その根が a である．$\varphi_2(t)$ が n 次の項を含まなければ， $\varphi_1(t)$ が n 次の項を含み，$p(t,x)$ の n 次の係数はゼロでない定数になるので， a は存在しない.

$p(t,a)=0$ と $q(t,b)=0$ が共通解を持てば，$(a,b)\in\Gamma$ であり，そうでなければ $(a,b)\notin\Gamma$ である． $\square$

練習問題 4.22. 以下の場合に，$f(x,y)$ を求めよ． $K=\mathbb{C}$ の場合， また $\Gamma=C$ が成り立つかどうか調べよ．

$$(1)\ \varphi(t)=\frac{t(t+1)}{2},\psi(t)=\frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$$

$$(2)\ \varphi(t)=\frac{3(t^2+1)(t^2+4)}{5t^4+16t^3-2t-14},\psi(t)=\frac{3(t^2+4)(t^2+2t+2)}{5t^4+16t^3-2t-14}$$

問題のヒント・答．練習問題 4.4：(1) 16 (2) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (3) 0　系 4.1 の行バージョンを使う．第 3 行に第 1 行の -1 倍を足して，その結果が第 4 行と同じなので，行列式は 0 である．(4) 全ての列を足すとどうなる？ $(x+a+b+c+d)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. (5) -45 定理 4.2 を使うと，問題の式は $\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ に等しい．(6) 1 列目で余因子展開すれば，求める行列式は

$$x\det\begin{pmatrix}x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+x\end{pmatrix}+a_0\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{pmatrix}(-1)^{n+1}$$

と変形される． 第二項について，系 4.2 を繰り返し用いれば,（下半三角行列（対角線より上にある成分がすべてゼロである正方行列）の行列式は対角成分の積に等しいことが分かり），

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{pmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

よって求める行列式は

$$x\det\begin{pmatrix}x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+x\end{pmatrix}+a_0$$

と変形される． 再び 1 列目で余因子展開すれば、

$$x(x\det\begin{pmatrix}x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+x\end{pmatrix}+a_1\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{pmatrix}(-1)^n)+a_0=$$

$$x^2\det\begin{pmatrix}x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+x\end{pmatrix}+a_1x+a_0。$$

この余因子展開を繰り返していくと， 求める行列式は $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ となり，等式が示される． (7) 定理 4.2 に帰着させるには？ (8) 巡回行列式というものの特別な場合

練習問題 4.16 のヒント

(1) $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k{-}1 & k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k{-}1 & k \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}^{-(k-1)}$ を計算せよ.

5　連立一次方程式解法の一般論–掃出し法–

この章で，行列を用いた連立一次方程式の解法の一般論を学ぶ．その過程で行列の階数という量を定義し，それが連立一次方程式の解法の鍵を握っていることを明らかにする．

階数は，連立方程式を通じて，様々な捉え方ができる大変興味深い量であることが後に分かる（16 章）．そこでは，この章における，連立方程式を解くという実用的な話が，行列の階数の様々な捉え方という理論的な話と一体となり深められる．

5.1　掃き出し法，行列の階数，連立一次方程式

連立一次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$ は,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくことで $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書けるのであった.

行列 A に掃き出し法 (以下で説明する行列の基本変形の繰り返し) を適用することで, この方程式をより簡単な形 (A がより簡単な行列に置き換わる) にして, この方程式を解きやすくできる（行列を持ち出すことの恩恵）． 掃出し法とは，連立一次方程式の消去法による解法を行列の変形の言葉で言い直したものである．これによってこの方程式がどのくらい解を持つかも判定できるようになる.

掃出し法とは，次のように定義される行列の基本変形という操作の繰り返しである.

定義 5.1 (行列の基本変形). 行列に対する次の三つの操作を行に関する**行列の基本変形**という:

(1) ある行を $\lambda(\neq 0)$ 倍する.

例えば, 「1 行目を 4 倍する」というのを ①$\times$ 4」で表すことにする.

(2) ある二つの行を入れ替える.

例えば, 「1 行目と 2 行目を入れ替える」というのを「① $\leftrightarrow$ ②」で表すことにする.

(3) ある行に別の行の μ 倍を足す ($\mu = 0$ でもよい).

例えば,「3 行目に 2 行目の 3 倍を足す」というのを「③ $+$ 3②」で表すことにする.

1. (1)~(3) は全て後戻りできる操作である. なぜなら (1) に対してはその行を $\frac{1}{\lambda}$ 倍すれば元に戻り, (2) に対しては, 入れ替えた行をまた入れ替えれば元に戻り, (3) に対しては, 足した行を次に $-\mu$ 倍して足せば元に戻るからである.

   (a) 列に関する基本変形も同様に定義する. **各自, 必ず書き下してみること.**

定義 5.2.
次の形の行列を**階段行列**と呼ぶ:

$$()\tag{5.1}$$

言葉で説明すると次のようになる. 行列の各行の 0 でない一番左の成分をその行の**先頭の成分**ということにする. 階段行列というのは, 下の行になるほど先頭の成分が右へずれていく行列で, さらに先頭の成分はすべて 1, 先頭の成分の上下の成分はすべて 0 となっているものに他ならない. (この説明から階段行列の図を各自復元してみよ.)
$j_1, j_2, \cdots$ は先頭の成分のある列に左から順につけた番号, $j'_1, j'_2, \cdots$ はそれ以外の列に左からつけた番号である.

練習問題 5.1. 階段行列の具体的な例を自分で考えよ.

注意 9. 下の定理の証明を踏まえると, 階段行列の定義としては, 少しくどい言い方にはなるが, 次のような言い替えの方がよい:
階段行列とは次のような行列である（図 (5.1) を見ながら読むとよい）.

- 行列を左の列から見ていくと, しばらく $\boldsymbol{o}$ が並んだあと $\boldsymbol{e}_1$ が現れるか, いきなり $\boldsymbol{e}_1$ が現れるかのいずれか（図の j_1 列目）.
- $\boldsymbol{e}_1$ の右を見ていくと, しばらく 2 行目以下に $\boldsymbol{o}$ が並んだあと $\boldsymbol{e}_2$ が現れるか, いきなり $\boldsymbol{e}_2$ が現れるかのいずれか（図の j_2 列目）.
- $\boldsymbol{e}_2$ の右を見ていくと, しばらく 3 行目以下に $\boldsymbol{o}$ が並んだあと $\boldsymbol{e}_3$ が現れるか, いきなり $\boldsymbol{e}_3$ が現れるかのいずれか（図の j_3 列目）.
- このような状態が, ある自然数 r に対して $\boldsymbol{e}_r$ が現れるまで続く. そして, $\boldsymbol{e}_r$ が右端であるか, あるいは $\boldsymbol{e}_r$ の右側にあるすべての列の $r+1$ 行目以下がすべて $\boldsymbol{o}$ であるかのいずれか.

定理 5.1.
任意の行列は行基本変形の繰り返しで階段行列にできる.

この定理の証明は原理的には簡単である. 講義中に例を使って説明する.

この定理の証明法を**掃き出し法**または**ガウスの消去法**という．**掃き出す**という操作は，連立一次方程式の解法で変数を消去することに対応する． 正確には，定理 5.1 の証明において定義する．

定義 5.3.
行列 A に対して, A を階段行列に変形したときの先頭の成分の数のこと（つまり，(5.1) の r のこと）を A の**階数 (ランク)** とよび $\mathrm{rk}A$ で表す.

実を言えば, 行列を基本変形して階段行列にするための方法はいろいろあるので, その方法が違っても先頭の成分の数が変わらないことを言っておかなければ, 階数が定義できたとはいえない．この問題は, 階数の意味を考え直すことで後に解決される（ 例 14.3）．

練習問題 5.2. 次の行列の階数はいくつか?[*79]

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} i & 1-i & 3 & -i \\ 1+i & i & -i & 20i \\ 1-i & -2+3i & -6-i & 2+i \\ 2+i & -1+3i & -3-2i & 4-i \end{pmatrix}$$

練習問題 5.3. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$ の階数を $a, b, c \in \mathbb{C}$ の値に応じて求めよ.

定理 5.1 を連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くことに応用する. 定理 5.1 を行列 $(A|\boldsymbol{b})$(A と $\boldsymbol{b}$ を並べた行列) に適用する. **ここで大切なことは**, $(A|\boldsymbol{b})$ に行に関する基本変形を施していって $(A'|\boldsymbol{b}')$ となったとき,

$$\boldsymbol{x} \text{ が } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ を満たすことと } \boldsymbol{x} \text{ が } A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' \text{ を満たすことと同値である}$$

ということである．なぜなら, 基本変形 (1) の $(A|\boldsymbol{b})$ のある行を $\lambda(\neq 0)$ 倍するという操作は, 連立方程式にとってはある行を λ 倍することであり, 方程式の意味は変わらない[*80]．また, 基本変形 (2) の $(A|\boldsymbol{b})$ のある二つの行を入れ替えると言うのは, 連立方程式にとっては 2 つの式を入れ替えるということであり, やはり方程式の意味は変わらない．そして, 基本変形 (3) の $(A|\boldsymbol{b})$ のある行に別の行の μ 倍を足すというのは, 連立方程式にとっては次のような変形である.

[*79] 階数を求めるためだけならば, 階段行列まで持っていく必要はない. 例えば，先頭の成分を 1 にしなくてよいし, また, 先頭の成分の上を 0 にしなくてもよい.
連立方程式への応用を見て初めて上の形の階段行列の有用性が分かる.

[*80] 方程式を解くときは, 主に係数が無駄に公約数を持つときの簡約のために行われる.

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i & & (a_{i1}+\mu a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in}+\mu a_{jn})x_n = b_i + \mu b_j \\
\vdots & \circlearrowright \mu \text{ 倍を足す} \rightsquigarrow & \vdots \\
a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j & & a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

これから，やはり方程式の解が変わらないことが分かる[*81].

よって $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに, $(A|\boldsymbol{b})$ を変形して得られる階段行列に対応する連立一次方程式を解けばよい. $(A|\boldsymbol{b})$ に定理 5.1 を適用すると以下の行列が得られる:

$$
(\,). \tag{5.2}
$$

ただし, $j_1, j_2, \cdots, j_r$ は先頭の成分のある列に左から順につけた番号, $j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-r}$ はそれ以外の列に左からつけた番号である[*82]. また, d_{r+1} は 0 か 1 である (最後の列に先頭の成分があるかないかの違い)[*83]. 一番右の列を除いた行列はまさに A を変形して得られる階段行列である. よって rk$(A|\boldsymbol{b})$=rk$A$ または rk$A$+1 が成り立っている. r=rkA に注意.

対応する連立一次方程式は，各 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列， $j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-r}$ 列が，変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$, $x_{j'_1}, x_{j'_2}, \cdots, x_{j'_{n-r}}$ に対応することに注意すると，

$$
\begin{array}{rcl}
x_{j_1} + \displaystyle\sum_{l=1}^{n-r} c_{1l} x_{j'_l} & = & d_1 \\
& \vdots & \\
x_{j_r} + \displaystyle\sum_{l=1}^{n-r} c_{rl} x_{j'_l} & = & d_r \\
0 & = & d_{r+1}
\end{array} \tag{5.3}
$$

である. この方程式の大切な特徴は, i **番目** $(1 \le i \le r)$ **の式に出てくる** $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ **は** x_{j_i} **ただ一つ**ということである. それに注目すると, この方程式の解は次のようにして求まる.

[*81] このように連立方程式の立場から見てみると，A だけでなく A と $\boldsymbol{b}$ のくっつけた行列を考える方が良い事が納得できるであろう．それは，方程式の変形において，式の左辺と右辺が同じ変化を受けるからである．

[*82] まず先頭の成分のある列（ただし一番右の列は除く）に左から $j_1, \ldots, j_r$ と名前を付ける．その後で，残った列に左から，$j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-r}$ と名前を付ける．

[*83] $d_{r+1} = 1$ のときは $d_1 = \cdots = d_r = 0$ である．

場合 1． $d_{r+1} = 1$ のとき ($\Leftrightarrow$ rk$(A|\boldsymbol{b})$=rk$A$+1)
このときは (**??**) の一番下の式が 0=1 となり, これは成立しないので解はない.
場合 2． $d_{r+1} = 0$ のとき ($\Leftrightarrow$ rk$(A|\boldsymbol{b})$=rk$A$)
この連立一次方程式 (**??**) は $x_{j'_1}, \ldots, x_{j'_{n-r}}$ から $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ を決める式とみることができる. よって $x_{j'_1}, \ldots, x_{j'_{n-r}}$ を自由に与えて, (**??**) が成立するよう $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ を決めれば, それは全ての解を与える (一般に不定解). 解は，$x_{j'_1}, \ldots, x_{j'_{n-r}}$ をパラメーターとして次のように表示できる．ただし，便宜上，以下のベクトルは，上から $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ が並び，次に $x_{j'_1}, \ldots, x_{j'_{n-r}}$ が並んでいるようにした：

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \\ x_{j'_1} \\ \vdots \\ x_{j'_{n-r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \sum_{l=1}^{n-r} c_{1l} x_{j'_l} \\ \vdots \\ d_r - \sum_{l=1}^{n-r} c_{rl} x_{j'_l} \\ x_{j'_1} \\ \vdots \\ x_{j'_{n-r}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{d} + x_{j'_1} \boldsymbol{c}_1 + \cdots + x_{j'_{n-r}} \boldsymbol{c}_{n-r}, \tag{5.4}$$

ただし，ここで，

$$\boldsymbol{d} := \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$k = 1, \ldots, n-r$ に対して，

$$\boldsymbol{c}_k = \begin{pmatrix} -c_{1k} \\ \vdots \\ -c_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と置いた（}x_{j'_1}, \ldots, x_{j'_{n-r}} \text{ の部分は } k \text{ 番目が 1 で他は 0).} \tag{5.5}$$

以上が良く理解できないと思ったら，以下の練習問題で具体的に理解することから 始めてみるとよい．章末の解答も参照のこと．

練習問題 5.4. 次の連立一次方程式を掃き出し法で解け.

$$
(1)\begin{cases} 6x+15y+4z=26 \\ 9x+5y+6z=25 \\ 3x+5y+2z=11 \end{cases}
\quad
(2)\begin{cases} 2x+y+3z+4u=1 \\ 3x-y+2z+5u=2 \\ x+3y+4z+3u=0 \\ 4x-3y+z+6u=3 \end{cases}
\quad
(3)\begin{cases} x-2y+az=3 \\ -x+3y+(a-1)z=-5 \\ 2x-y+(a-10)z=0 \end{cases}
$$

重要な場合として, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ の場合, つまり $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ を考える. これを**斉次型連立一次方程式**という. これは必ず $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ なる解を持つ (これを**自明な解**という). それ以外の解を持つ条件は場合 2 を見れば分かる. つまり, パラメーター $x_{j'_1},\cdots x_{j'_{n-r}}$ の部分（不定部分）があればよい. すなわち $n-r>0 \Leftrightarrow \mathrm{rk}A<n$. この事実を定理としてまとめておく.

定理 5.2. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ が自明でない解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{rk}A<n$.

練習問題 5.5. ⊛ $V:=\{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f \mid a,b,\ldots,f\in\mathbb{R}\}$ は実 6 次元ベクトル空間である. このことを利用して, $\mathbb{R}^2$ の 5 点を与えれば, その 5 点を通る 二次曲線が存在することを示せ.

5.2 連立一次方程式の解全体の集合の構造

この節の内容は，今後の理論展開の動機づけを，連立一次方程式の解全体の 集合を例に取って与えようとするもので，非常に大事である．よく頭に入れておいてほしい．

ここでは，連立一次方程式の解 (5.4) の公式を， 例 3.4 で考察した直線や平面のパラメーター表示の一般化と見てみよう．このような幾何学的なイメージを しやすくするためにも，解全体の集合のことを **解空間**と呼ぶことにする．(5.4) は，解空間をパラメーター表示することで，その構造を明らかにする公式と見ることが出来る． このことを，きちんと述べるために言葉を用意しておくと，議論を進めやすくなる．

定義 5.4. $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ に対して, $p_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+p_m\boldsymbol{v}_m$ $(p_1,\ldots,p_m\in\mathbb{C})$ という形の元を $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ の**一次結合**という.
これは，単なるベクトルの足し算ではない． 係数の自由度を許した足し算のことである．単なる足し算と混同しないように注意.

この定義によれば，(5.4) は，連立一次方程式の解空間が， $\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_{n-r}$ の一次結合に $\boldsymbol{d}$ を足した元全体であるという事を言っている[*84].

さらに大切な事は，この解の一次結合表示（パラメーター表示）には無駄がない，すなわち，一つの（任意の）解 $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{d}+a_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+a_{n-r}\boldsymbol{c}_{n-r}$ と言う形に表示したとすると，係数 $a_1,\ldots,a_{n-r}$ は $\boldsymbol{x}$ の成分 $x_{j'_1},\ldots,x_{j'_{n-r}}$ を見れば，(5.4) から分かるように，$a_1=x_{j'_1},\ldots,a_{n-r}=x_{j'_{n-r}}$ と一通りに決まってしまう.

[*84] $\boldsymbol{d}$ については係数の自由度を許していないので，一次結合ではなくただの和であることに注意.

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$の場合（斉次型）に改めて述べておくと，この場合，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$であるから，**連立一次方程式の解空間は，$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ の一次結合として無駄なく表示できる元全体の集合である** と言うことが出来る．$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ は解空間の**（斜交）座標表示**を与えていると見てもよい．$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ は解空間の骨組みのようなものである．

斉次型連立一次方程式の解空間は，第 II 部で定義する**部分ベクトル空間**の良い例，また，$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ は，III 部で定義するベクトル空間の**基底**の良い例になっている．また，パラメーターの数 $n-r$ は III 部で定義するベクトル空間の広がり具合を表す**次元**という量の良い例になっている．

以後の抽象的な議論にとまどったら，この例に立ち返ってみるとよい．

問題のヒント・答.

練習問題 5.2: 答 (1) 3 (2) 3 (3) 3

(2) の行基本変形について詳しく書いておく.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(詳しく述べると，まず第 3 行を 1/3 倍にし，第 1 行に第 4 行を足してから 1/4 倍にして，第 4 行に第 2 行を足してから 1/2 倍に，第 5 行に第 2 行を足してから 1/3 倍にして，第 6 行に第 2 行の -4 倍を足す)．さらに，3 行目以下から 1 行目を引くと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり， また， 3 行目に 2 行目を足して、3 行目を 2 で割ると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる． よって階数は 3 である． （※さらに階段行列にするには，2 行目を 1 行目から引き，3 行目を 1 行目に足し 2 行目から引く．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる． ）

練習問題 5.3: 答　$a=b=c$ なら rk=1 a,b,c のうち 2 つが等しいなら rk=2 a,b,c が全て異なるなら rk=3

練習問題 5.4: 答 (1) $x=\frac{7-2t}{3}, y=\frac{4}{5}, z=t(t\in\mathbb{C})$

練習問題 5.4 の上の枠囲み部分に従って，この解答を説明しておく．先頭の成分に対応する変数が，この場合，x, y であり，それ以外の変数が z である．枠囲み部分に合わせて書けば，x, y が x_{j_1}, x_{j_2}, z が $x_{j'_1}$ である．(??) に対応する式は，$x+\frac{2}{3}z=\frac{7}{3}$, $y=\frac{4}{5}$ である． これを，「z を自由に与えて x, y を決める式」と見れば，上の解答が得られる． ただし，上の解答では，z をパラメーターと見ているので，雰囲気が出るように t で書き直してある．

(2), (3) についても各自このように解釈してみよ．

(2) $x=\frac{3-5s-9t}{5}, y=\frac{-1-5s-2t}{5}, z=s, u=t(s,t\in\mathbb{C})$

(3) この方程式を表す行列を次のように行基本変形してゆく．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 3 \\ -1 & 3 & a-1 & -5 \\ 2 & -1 & a-10 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{2 行目, 3 行目に 1 行目の 1 倍、-2 倍を足す}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2a-1 & -2 \\ 0 & 3 & -a-10 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{3 行目から 2 行目の 3 倍を引く}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5a-2 & -1 \\ 0 & 1 & 2a-1 & -2 \\ 0 & 0 & -7a-7 & 0 \end{array}\right)$$

最後の行列を B とする． $a=-1$ の時

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x=7t-1 \\ y=3t-2 \quad (t\in\mathbb{C}) \\ z=t \end{cases}$$

が解． $a\neq -1$ の時

$$B \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

練習問題 5.5: ヒント 与えられた 5 点で, $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ を満たすようなゼロでない $(a,b,\dots,f)\in\mathbb{R}^6$ が求まることを示せばよい. それに対応する二次曲線が求めるもの.

6　掃き出し法の別の見方

この章では, （行に関する）基本変形の別の見方 (定理 6.1) を与え，それを色々な問題に応用する. 素朴な掃出し法というテクニックが深まりを見せるところである.

定理 6.1. 行に関する基本変形は次の 3 つの正方行列を**左から**掛けることで与えられる.

1. i 行を $\lambda\,(\neq 0)$ 倍する $= \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \lambda {}^t\boldsymbol{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ を左から掛ける.

2. i 行と j 行を入れ替える $= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ $=$( ) を左から掛ける.

3. i 行に j 行の μ 倍を足す $= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \mu & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ $=$( ) を左から掛ける.

3 つの行列のことを**基本行列**と呼ぶ.

証明は, A を任意の $n \times m$ 行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と表すとき, ${}^t\boldsymbol{e}_i A = {}^t\boldsymbol{a}_i$ に注意すればよい (命題 3.2 (2) の特別な場合).

6.1　正則行列への応用

正方行列に対して，正則という概念を定義する.

定義 6.1.
$n \times n$ 行列 A が**正則行列**であるとは，$n \times n$ 行列 B で $AB = BA = E$ を満たすものが存在するということ．ここで E は $n \times n$ 単位行列であり，E_n で表すこともある.

練習問題 6.1. 正則行列の積は正則行列であることを示せ.

この定義は少し弱めることができる.

命題 6.1.
$n \times n$ 行列 A について，A が正則である $\iff$ $n \times n$ 行列 B, B' で $AB = B'A = E$ となるものが存在する.
この時，結果的に $B = B'$ となる.

証明. 証明はクイズ的である. A が正則であれば, B, B' として 定義 6.1 の B を取ればよい. 逆に $AB = B'A = E$ を仮定する. $B = B'$ を示せばよい. これは次のように一行で済む.

$$B = EB = (B'A)B = B'(AB) = B'E = B'.$$

□

定義 6.2. この命題より $AB = BA = E$ となる B は存在すれば唯一つであることも分かる (証明を考えてみよ). B のことを A の**逆行列**と呼ぶ.

注意 10. 3.5 節で説明した行列積と線形写像の合成の 対応により， $AB = BA = E$ という条件は，$f_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ と $f_B \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ に関する条件 $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A = \mathrm{id}$ と同値である.

一般に，集合の写像 $f, g \colon V \to V$ が $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ を満たすとき，f と g は互いに**逆写像**であると言う.

f_A の逆写像に対応する行列 B が逆行列と言うわけである.

基本行列は正則である． なぜなら, それぞれに対して, (1) i 行を λ^{-1} 倍する, (2) i 行と j 行を入れ替える, (3) i 行に j 行の $(-\mu)$ 倍を足す, ことに対応する 基本行列が逆行列となるからである.

次の定理は正則行列の定義の仮定が弱められることを示す（命題 6.1 を使って示すが，それよりずっと弱められる）. 以下で繰り返し用いられる重要な結果である.

定理 6.2. $n \times n$ 行列 A に対して，$n \times n$ 行列 B で $AB = E$ を満たすものが存在すれば，$\mathrm{rk}\, A = n$ であり，A は正則である．また B は A の逆行列である.

証明. A に対して PA が階段行列となるような基本行列の積 P を取る（定理 5.1 と 6.1 による）. このとき
$$PABP^{-1} = PEP^{-1} = E$$
となっている. これは, $A' = PA$, $B' = BP^{-1}$ とおくと, $A'B' = E$ となる.

背理法で考える. $\mathrm{rk}\, A < n$, つまり, PA の階段の数が PA の行の数 n より少ないとしよう. $r := \mathrm{rk}\, A$ とおく. すると, A' の $r+1$ 行目以下の成分はすべて 0 である. よって, $A'B'$ を計算してみれば分かるように, $A'B'$ の $r+1$ 行目以下の成分もすべて 0 である. これは, $A'B' = E$ に矛盾する. よって $\mathrm{rk}\, A = n$ が分かった.

PA の階段が n 個あるので, (5.1) において, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が現れる. よって, A の列の数も n であることから, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 以外の列（$j_1', j_2', \ldots$ の列）があってはならない. これは $A' = PA = E$ が成り立つということに他ならない. こうして $AB = E$ と $PA = E$ を得たから, 命題 6.1 より $B = P$ で, B は A の逆行列である[*85]. □

練習問題 6.2. $A\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ なる写像を $f(x) \mapsto xf(x)$ で定め, $B\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ なる写像を $f(x) \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ で定める. これらは線形変換である. このとき, $B \circ A$ は恒等写像であるが, $A \circ B$ はそうではないことを示せ.[*86]

定理 6.2 とその証明によって次の二つの重要なことも分かる.

系 6.1 (階数による正則性判定). $n \times n$ 行列 A に対して, A が正則 $\iff$ $\mathrm{rk}\, A = n$.

証明. $\Rightarrow$ は 定理 6.2 より直ちに分かる. $\Leftarrow$ については, $\mathrm{rk}\, A = n$ ならば, 定理 6.2 の証明の最後の段落から分かるように, そこで取った基本行列の積 P は, $PA = E$ を満たす. よって, 定理 6.2 における A を P, B を A と見れば, 定理 6.2 により, A は P の逆行列と分かる. よって, P も A も正則である. □

系 6.2. 正則行列は基本行列の積で表される.

証明. 定理 6.2 の証明で取った基本行列の積 P を $P = P_1 \cdots P_m$ ($P_1, \ldots, P_m$ は基本行列) と表すと, $PA = E$ となり, よって $A = P_m^{-1} \cdots P_1^{-1}$ となって A は基本行列 $P_m^{-1}, \ldots, P_1^{-1}$ の積で書けている. □

[*85] 最後の段落は, $\mathrm{rk}\, A = n$ という仮定だけから $PA = E$ が従うことを示している. この部分が 以下で使われる.
[*86] この問題は 定理 6.2 を無限次元ベクトル空間の線形写像に拡張 することができないことを示している.

6.2　逆行列の計算法

定理 6.3.
A を $n \times n$ 行列とする． 行列 $(A \mid E_n)$ を行基本変形の繰り返しで A の部分を単位行列にすることが可能ならば，A は正則行列であり, E_n の部分に現れる $n \times n$ 行列が A の逆行列である.

証明. P を基本行列の積とすると

$$P\,(A \mid E_n) = (PA \mid P) \tag{6.1}$$

である. $PA = E$ となれば, 定理 6.2 より P は A の逆行列. よって確かに (6.1) の右辺の右半分に A の逆行列が現れる. □

注意 11. この定理の証明には, 行基本変形が基本行列を左から掛けることに対応しているという ことが必要であるのだが, 一旦, 証明してしまえば, 実際に逆行列を求める際には, 基本行列の積 P を計算する必要はない（以下の練習問題を解いてみれば分かる）.

練習問題 6.3. 次の行列の逆行列を求めよ.　(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 3 & 5 & -6 \\ 7 & 12 & -14 \end{pmatrix}$

練習問題 6.4. 練習問題 17.3 を利用して $\int e^x dx$, $\int xe^x dx$, $\int x^2 e^x dx$, を求めよ.[*87]

注意 12 (検算のすすめ). 逆行列の計算をしたら, 元の行列と掛けてみて単位行列になることをチェックすること.

6.3　列に関する基本変形

行列式の応用を考える時は，行列式の諸性質がもともとは列に関するものであるので， 列に関する基本変形の方が使い勝手がよい.

列に関する基本変形はどう捉えられるかというと，単に 定理 6.1 に出てくる基本行列を右から掛ければよい. それぞれ (1) i 列を $\lambda\,(\neq 0)$ 倍する, (2) i 列と j 列を入れ替える, (3) i 列に j 列

[*87] 積分は微分の逆（ただし，積分の際の積分定数は省いて考える）であるから表現行列の 逆行列を求めればよい.

の μ 倍を足す, ことになる事が分かる[*88]．この時は

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & 0 \\
 & \ddots & & & \\
 & & \lambda & & \\
 & & & \ddots & \\
0 & & & & 1
\end{pmatrix}
= \left(\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \lambda \boldsymbol{e}_i \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n \right),
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & 0 \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & 1 & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
= (\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \overset{i}{\boldsymbol{e}_j} \ \cdots \ \overset{j}{\boldsymbol{e}_i} \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n),
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & 0 \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \mu & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
= (\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \overset{i}{\boldsymbol{e}_i + \mu \boldsymbol{e}_j} \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n)
$$

と見ておく方が良い.

注意 13. 行に関する基本変形と区別するため， 例えば,「3 列目の 4 倍を 2 行目に足す」というのを「しかくに＋４しかくさん」と書くとよい.

行に関する基本変形と同様に次を示すことができる.

[*88] 以下のことに注意すれば，定理 6.1 の証明と同様に示すことが出来る．あるいは，定理 6.1 の証明の転置を取ればよい.

定理 6.4. 任意の行列は列に関する基本変形の繰り返しによって次の形にできる：

$$
\begin{pmatrix}
0 & & & \\
\vdots & & & \\
0 & & & 0 \\
1 & 0 & & \\
* & \vdots & & \\
\vdots & & & \\
* & 0 & & \\
0 & 1 & & \\
* & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \\
* & & & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

念のためこれも言葉で説明しておく． 行列の各列の 0 でない一番上の成分をその列の先頭の成分ということにする． この行列は，右の列になる程先頭の成分が下にずれていく行列で，さらに先頭の成分は全て 1，また先頭の成分の左右は全て 0 となっているものである． (5.1) の転置を取った形である．

以下，6.4, 6.5 節では列に関する基本変形の応用を与える．

6.4 階数標準形

命題 6.2. 任意の行列 A は**行と列**の基本変形によって $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ という形にできる．これを行列 A の**階数標準形**という．

証明. 定理 5.1 により， A は行基本変形を繰り返すことで，階段行列

$$A' := \begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \cdots \end{pmatrix}$$

に 変形できる．ここで A' の $r+1$ 行目以下のすべての成分は 0 であることに注意する．

ここで，次に A' に列基本変形を行う． 列の交換を繰り返すことで， A' は

$$A'' := \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \cdots \end{pmatrix}$$

という形にできる（初めの r 列が $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$）． ここで，$A''$ の $r+1$ 行目以下のすべての成分もやはり 0 である．最後に， $\boldsymbol{e}_r$ の右の列から， $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の定数倍を引くことで，$\boldsymbol{e}_r$ の右側にある r 行目までの成分をすべて 0 にすることができる． $r+1$ 行目以下の成分がすべて 0 という性質はやはり保たれる．よって，得られた行列は，命題 6.2 に書かれた通りの行列である． □

注意 14. 命題 6.2 に出てくる E_r の r が階数になっているので, 階数標準形という名前がついている.

次の系は, 定理 6.1 と 6.3 節冒頭の内容を使って，命題 6.2 を言い直したものである.

系 6.3. 任意の行列 A に対して，ある正則行列 $P,\ Q$ があって $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とできる.

練習問題 6.5. A を正則でない $n \times n$ 行列とする時，ある O でない $n \times n$ 行列 B があって $AB = O$ となることを示せ.

6.5 行列式への応用

定理 6.5 (行列式の積公式). $A,\ B$ を $n \times n$ 行列とする時，$\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つ.

この定理の証明はいくつかのステップに分れている．まず次の少し弱い形の命題を示す.

命題 6.3. $A,\ B$ を $n \times n$ 行列，B を**正則行列**とする時，$\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つ.

証明. 系 6.2 により, 正則行列 B は基本行列の積で表される; $B = P_1 \cdots P_m$.

一般に, C を $n \times n$ 行列, P を基本行列とするとき, $\det CP = \det C \det P$ が分かる．なぜならば, P を右から掛けるのは, C の列基本変形であり, 行列式の基本性質 (定理 4.1) によって, その基本変形で行列式がどう変わるのかが分かるからである．例えば, P を右から掛けると i 列目が λ 倍されるのならば（(１）のタイプの列基本変形）, 定理 4.1 より $\det CP = \lambda \det C$ が確認できる．他方， $\det P = \lambda$ も確認できるから, 確かに $\det CP = \det C \det P$ が成り立っている.

これを繰り返し用いれば,

$$
\begin{aligned}
&\det AB = \det AP_1 \cdots P_m = \det(AP_1 \cdots P_{m-1})P_m = \det AP_1 \cdots P_{m-1} \det P_m \overset{\text{繰り返し}}{=} \\
&\cdots = \det A \det P_1 \det P_2 \cdots \det P_{m-1} \det P_m = \det A \det(P_1P_2) \cdots \det P_{m-1} \det P_m \overset{\text{繰り返し}}{=} \\
&\qquad \cdots = \det A \det(P_1P_2 \cdots P_m) = \det A \det B.
\end{aligned}
$$

□

次にこの命題から行列式による正則行列の特徴付けを出しておく．これは，定理 6.5 の証明にも使われるが，これ自身とても重要な結果である．

定理 6.6 (行列式による正則性判定). $n \times n$ 行列 A に対して，A が正則 $\iff \det A \neq 0$.

証明. まず A が正則とする. 系 6.2 により, 正則行列 A は基本行列の積で表される. 基本行列が正則であることにより, 命題 6.3 を繰り返し使って, A の行列式が基本行列の行列式の積であることが分かる. 基本行列の行列式は 0 でないことが, 直接計算で確かめられるから, $\det A$ も 0 でない.

次に，「$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ が正則」の対偶として，A が正則でないとして $\det A = 0$ を示す[*89]. A が正則でなければ, 定理 6.2 により，列基本変形によって, A を 定理 6.4 の形の階段行列 T にするとき ($AS = T$ と書く. S は基本行列の積), 第 n 列は $\boldsymbol{o}$ である. なぜなら，もし，第 n 列が $\boldsymbol{o}$ でなければ，定理 6.2 の証明と同じ考え方で，T は単位行列にならなくてはならない. すると $AS = E$ だから，定理 6.2 により A は正則となってしまって仮定に反する．よって，T の第 n 列は $\boldsymbol{o}$ であるから，系 4.1 により，$\det T = 0$. 他方, 命題 6.3 より, $\det T = \det A \det S$. $\det S \neq 0$ であるから $\det A = 0$ を得る. □

定理 6.5 の証明の完結

命題 6.3 と定理 6.6 を使って定理 6.5 を示すことができる．B が正則のときは命題 6.3 に他ならない. よって, B が正則でない時を考えればよい. 定理 6.6 より $\det B = 0$ である. また, AB も正則でない. なぜならば, もし AB が正則ならば, C を AB の逆行列とすると, $CAB = E$ となって, 定理 6.2 により, CA は B の逆行列となってしまう. これは, B が正則でないと言う仮定に反する. よって定理 6.6 を AB に適用して, $\det AB = 0$ である. $\det AB = 0 = \det A \det B$ により, B が正則でない時ときにも証明ができた. □

練習問題 6.6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ を使って $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$ を示せ.

練習問題 6.7. $\det \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ を示せ.

練習問題 6.8. A, B, C, D を $n \times n$ 行列とするとき，$2n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} AB & AD \\ CB & CD \end{pmatrix}$ の行列式は 0 であることを示せ.

練習問題 6.9. ⊛ 定理 6.5 の証明に倣って, 4 章の定理 4.2 を示せ.

[*89]「$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ が正則」は，注意 6 によれば直接証明できる．

6.6　連立一次方程式への応用

系 6.1 と定理 6.6 をまとめておこう．

行列の正則性判定法
$n \times n$ 行列 A に対して，A が正則 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rk}\, A = n$ $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

この応用を二つ与える．

まず，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で A が $n \times n$ 正則行列であるものを考える． この時, この方程式は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ という唯一つの解をもつ．この解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ は逆行列の公式を用いれば書き下すことができるが，それを用いずに, 行列式の性質をうまく使うことで, 次のような公式を得る．

定理 6.7 (クラメルの公式).
$A = (\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ が $n \times n$ 正則行列の時，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次のように書ける：

$$x_i = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{b}}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)}{\det A} \quad (i = 1, \ldots,\ n)\,.$$

ここで $(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ は A の i 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である．

証明．$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ に注意して, 多重線形性 (定理 4.1(1)) を使い, $\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{b}}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ を展開すればよい．ここで，A が正則であるから $\det A \neq 0$ が成り立つことに注意（定理 6.6 による）． □

次に，（正則とは限らない）$n \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ によって定まる斉次型連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を考える．

次の定理は，定理 5.2，系 6.1，定理 6.6 より直ちに従う．

定理 6.8.　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ なる解を持つ $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

この定理は，この講義の最大の目標「固有値問題」を解く鍵である（10 章，18.1 節）．

難しめの練習問題集 $\circledast$

練習問題 6.10. a を正の実数, b を a と異なる実数とするとき, $\min\{ai-b, aj-b\}$ を (i,j) 成分とする n 次正方行列を A とする. A の逆行列を求めよ.

ただし, $\min\{p,q\}$ で p と q のうち小さい方を表す. 例えば $\min\{1,2\}=1$.

練習問題 6.11. A を逆行列を持つ正方行列とする. 次は同値であることを示せ：

(i)

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\, A$$

(ii) $D = CA^{-1}B$.

練習問題 6.12. A, B, C を与えられた行列, X を未知の行列とするとき $C = AXB$ なる方程式を考える。 ここでそれぞれのサイズはこの方程式が意味を持つような数であるとする。 この方程式が解を持つための必要十分条件は次のいずれかであることを示せ（つまり次の二つの条件は同値な条件になる）

(i) ある行列 P, Q が存在して $C = AP$, $C = QB$ が成り立つ.

(ii) $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}(A\ C)$ かつ $\mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$.

練習問題 6.13. $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列で $a_{ij} = x_i + y_j$ (x_i, y_j はある数) とする. $\mathrm{rk}\, A \leq 2$ を示せ.

練習問題 6.14. A, B を積 AB が定義できる行列とし, A の列の数 (B の行の数でもある) を n とする. このとき

$$\mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B \leq \mathrm{rk}\, AB + n$$

を示せ.

練習問題 6.15. A, B を奇数 $2m+1$ 次の正方行列とし, $AB = O$ が成立するとする. このとき $A + {}^tA$ または $B + {}^tB$ のいずれかは 階数が $2m$ 以下を示せ.

問題のヒント・答.

問題 6.3：(1) $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

問題 6.7：左の行列を A とする．${}^tAA$ を計算する．

第 II 部

ベクトル空間と線形写像の導入，二大目標「表現行列と固有値問題」の概観

数学全般において，第 I 部冒頭で定義した線形写像 $\mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ と類似した対象（例えば，2.2 節で見た微分）に遭遇することがしばしばある．しかし，類似しているだけで，$\mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ とは別物である．これらを $\mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ と同様に扱えるような枠組みを，一般的に定義しておくと便利である．その枠組みと言うのが，第 II 部前半において定義する**ベクトル空間**と**（一般化された）線形写像**である．特にベクトル空間の定義は抽象的で少々面食らうかもしれないが，8 章に例をたくさん与えてあるので，慣れていってほしい．特に，部分ベクトル空間という概念を理解することが大切である．皆さんの頑張りに期待したい．線形写像の定義は，ベクトル空間の定義が済んでしまえば，第 I 部冒頭で与えた $\mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ の場合の定義と形式的に 全く同じである．そもそも第 I 部冒頭の定義がすでに抽象的であった．それを具体化したのが，$\mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ なる線形写像はいつでも行列で捉えられるという 3.3 節の結果であったが，一般化された線形写像も同様に行列で理解できるということを，第 III 部の 17 章で見る．

第 II 部の後半においては，主に 2×2 行列を用いて理解できる話に限定して，この講義の大まかな流れを一通り説明する． 特に**固有値問題**については，ジョルダン標準形も含めて，詳細に述べてある．固有値問題の一つの応用が， 2 次曲線の方程式を座標変換で単純化する問題で (13.2 節)， 例年面白いという感想が聞けるところである．また，12 章で，線形写像の**表現行列**という概念を導入し，線形写像と言うのは一般化されてもなお行列と等価であるということを，2×2 行列の場合に見る．上で触れた第 III 部の 17 章は，この章の一般化である．

7　ベクトル空間と線形写像の定義

この講義の主役たちを定義するのがこの章の目標である.

7.1　ベクトル空間の定義

次の定義を理解するためには，$\mathbb{C}^n$ や 5.2 節で考察した斉次型連立一次方程式の解空間を念頭に置いておくとよい．というのは，それらにおいて，あまり意識せずに使っていた性質を抽出したのが次の定義に他ならないからである.

定義 7.1 (**ベクトル空間**のおおらかな定義)**.** 空でない集合 V が次の条件を満たすとき，**ベクトル空間**あるいは**線形空間**という.

(1) V に足し算と複素数倍（スカラー倍ともいう）が“計算する際に不都合が生じないよう”定まっている.

(2) $\boldsymbol{o}$ という V の特別な元が存在し，V のどの元に足しても変わらない, つまり $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ が成り立つ[a].

(3) 各 V の元 $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}$ に足すと $\boldsymbol{o}$ になる元が存在する, つまり, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ なる $\boldsymbol{v}'$ が存在する.

[a]ベクトル空間の元については，通常，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{o}$ のような太字体を用いて，数（スカラー）などと区別する.

これはもちろん正確な定義ではない．正確な定義は 7.3 節を参照のこと．この講義ではベクトル空間の例をたくさん挙げることで正確な定義の代わりとする[*90]．また，いくつかの場面で，計算する際に不都合が生じないというのはどういうことかを説明するので，その都度納得していって欲しい.

本当は, スカラー倍が複素数倍であることを明確にするため, **複素**ベクトル空間と言う．スカラー倍を実数に限定したものは**実ベクトル空間**と言う[*91]．集合と言わず空間と言う理由は, ベクトル空間の由来となる平面ベクトルや空間ベクトルの集合と同様に幾何的なイメージを持たせるためである[*92].

このような，いきなり大きな枠組みを定めることで話が始まる数学は初めて経験するものかもしれない． しかし，このおかげで， 皆さんがすでに知っている対象を「足し算とスカラー

[*90]正確な定義は抽象的でとっつきにくいように 思うかもしれないが，足し算や掛け算についての常識的な性質を公理化したに過ぎない．一度は目を通しておいてもらいたい.
[*91]ちなみに量子力学は, 実世界を記述するものであるにも関わらず, 複素ベクトル空間を舞台にして構築されている.
[*92]実ベクトル空間の場合，このような幾何的イメージが特に有用である.

倍が定まっている集合」という統一的な視点で捉え直すことができるようになるのである．詳しくは 8 章を参照のこと．

上で，ベクトル空間を理解するのに $\mathbb{C}^n$ や斉次型連立一次方程式を念頭に置くとよいと言った．確かに，これらの例が，ベクトル空間の定義の条件は満たしているということは受け入れやすい事実であろう．ところが，ベクトル空間の定義の方はもっとつかみどころがない印象を与えるのはなぜだろう？　その一つの原因は，上で定義したベクトル空間には，$\mathbb{C}^n$ や解空間と違って，座標表示を与える‘骨組み’（基底）が与えられていないからである．しかし，実は一般のベクトル空間にも，このような骨組みはある．それが上の定義から出発することで証明できるのである[*93]．骨組みも大切だから，定義に入れておいた方が実感が湧いてよいと思うかも知れないが，それは後から証明できることだから定義には入れない．これは数学における基本的な姿勢である．無駄なものを定義に入れないことで定義を普遍的なものにし，その結果，応用範囲が広がることを目論むのである[*94]．

注意 15. ここで与えた定義は正確なものでないので，ここで書くのはちょっとはばかられるが，大学の数学では高校の数学より定義がたくさん出てきてそれを大事にするということを強調しておきたい．だから，どの定義もしっかり頭に叩き込んでほしい（試験にも定義を聞く問題を出すことが多い．上の定義は聞かないけれど）．一番よいのは，定義を**丸暗記するのではなく，自分の頭にもっともなじむ形で表現などを言い直し頭に定着させること**である．定着させるためには，定義をしっかり意識しながら問題を解き，自分の定義の理解が正しいのかを常に検証していくのがよい．

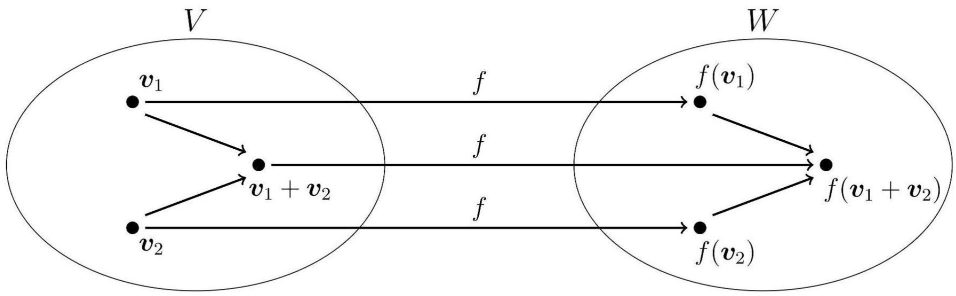
7.2　線形写像の定義

第 I 部冒頭で与えた線形写像の定義を任意のベクトル空間に一般化したのが次である．

[*93] この講義では証明はしない．注意 32 参照．
[*94]「無駄なものを入れない段階でなにが分かるのかをはっきりさせるため」というのが一つの目的である．

定義 7.2 (線形写像). V と W を 2 つの（複素）ベクトル空間とする．$f : V \longrightarrow W$ を V から W への写像とする．f が **（複素）線形写像**であるとは, 次の 2 条件が満たされているということ：

(1) V の任意の 2 つの元 $\boldsymbol{v}_1$と $\boldsymbol{v}_2$ に対して，$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$ が成立する．



(2) V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ と任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $f(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が成立する．

実ベクトル空間の線形写像を定義する際は，(2) において実数倍のみ考える．

この講義の目標を一言で言うならば,「**線形写像をよく理解すること**」である．そのために，第 I 部で整備した**行列**と**連立一次方程式**の話が中心的な役割を果たすことも見ていく．より詳しい目標設定は 9.1 節を参照のこと．

線形写像の例は，第 I 部で $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ の場合の例をいくつか与えた（この機会に復習しておくとよい）．それ以外の例については，9.2, 9.3 節を 参照のこと．

再度強調しておくが，**以下では，特に断らない限り複素ベクトル空間と複素線形写像を考える．複素を省くことが多い．**

7.3 付録：ベクトル空間の正確な定義

定義 **7.3.** 空でない集合 V について V の元同士の足し算, および複素数倍 ($\mathbb{C}$ の元と V の元との積) が定まっていて, 次の 8 条件を満たすとき, V は ($\mathbb{C}$ 上の) **ベクトル空間**であるという:

(a) **足し算に関する条件：**

(I) (**結合法則**) 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ に対し, $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$ が成立する.

(II) (**交換法則**) 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ が成立する.

(III) (**$\boldsymbol{o}$ の存在**) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ が任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し成立するような特別な元 $\boldsymbol{o} \in V$ が存在する.

(IV) (**逆元の存在**) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ となるような $\boldsymbol{v}' \in V$ が存在する.

(b) **足し算と実数倍に関する条件：**

(I) (**実数倍の分配法則**) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対し, $(\lambda + \mu)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}$ が成立する.

(II) (**足し算の分配法則**) 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $\lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \lambda\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2$ が成立する.

(III) (**実数倍の結合法則**) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対し, $\lambda(\mu\boldsymbol{v}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{v}$ が成立する.

(IV) (**1 倍の意味付け**) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ が成立する.

(a) の 4 条件は V が足し算について**可換群**であることを述べている.[*95]

以上, 随分たくさんの条件が盛り込まれているように思うかもしれないが, すべて自然な条件である. それに最小限に抑えてある. 実際, 次の命題によって, 他のいくつかの自然な条件はこれらの条件から導ける事が分かる.

[*95] あまり本題と関係はないが, 群論の教科書として, アームストロング著「対称性からの群論入門」(シュプリンガー社) を勧める. 具体例を重視した良い本である.

命題 7.1. V をベクトル空間とする．このとき, 以下が成立する．

(1) ベクトル空間の公理 (a) (III) における $\boldsymbol{o}$ は唯一である．また, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ が成立し, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\lambda\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ が成立する．

(2) $\boldsymbol{v} \in V$ とする． このときベクトル空間の公理 (a) (IV) における $\boldsymbol{v}'$ は一意的であり, $\boldsymbol{v}' = (-1)\boldsymbol{v}$ である．

証明. まず一意性をそれぞれ示す．$\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}' \in V$ がともに (a) (III) の性質をもつとする． このとき, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ とすれば $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}$ が成立する．一方で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}'$ とすれば $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}'$ が成立する．よって $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}'$ である．これで $\boldsymbol{o}$ の一意性が示された．次に, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \in V$ がともに (a) (IV) の性質をもつと仮定する．このとき, (a) (I) および (a) (III) から,

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'' + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}''$$

が成立する．よって一意性が示された．

以下, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して一意的に定まる $\boldsymbol{v}'$ を $-\boldsymbol{v}$ と書くことにする．

次に, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を示す．公理 (b) (IV), (I) を用いると

$$\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v} = (1 + 0)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

が示される．両辺に $-\boldsymbol{v}$ を足すことでそれぞれ,

$$\begin{aligned}(-\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}) &= ((-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}) + 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} + 0\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v},\\ (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o}\end{aligned}$$

となり, $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を得る．

次に, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\lambda\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ を示す．公理 (a) (III) より $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ であるから, (a) (IV) により

$$\lambda\boldsymbol{o} = \lambda(\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}) = \lambda\boldsymbol{o} + \lambda\boldsymbol{o}$$

となる．よって両辺に $-(\lambda\boldsymbol{o})$ を加えることで, $\boldsymbol{o} = \lambda\boldsymbol{o}$ を得る．

最後に $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$ となることを示す．公理 (b) (IV), (I) により,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} &= (1 + (-1))\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o},\\ (-1)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} &= ((-1) + 1)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\end{aligned}$$

が成立する．よって $(-1)\boldsymbol{v}$ は公理 (a) (IV) の $\boldsymbol{v}'$ の性質を満たす．先に示した一意性から $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$ である． □

定義 7.4. V をベクトル空間とする.

(1) ベクトル空間の公理 (a) (III) における $\boldsymbol{o}$ を**零ベクトル**あるいは**零元**とよぶ. 零ベクトルは記号 $\boldsymbol{o}$ を用いて表すことも多い.

(2) $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, (a) (IV) における $\boldsymbol{v}'$ を $-\boldsymbol{v}$ で表し, (加法に関する) $\boldsymbol{v}$ の**逆元**と呼ぶ.

8　ベクトル空間の例

8.1 節から 8.3 節までにおいては，ベクトル空間の定義の雛形である例を説明する．これらの例の性質を抽象化して得られたのがベクトル空間の公理である．8.4 節の例は一般的な例で，例えば連立一次方程式を考えれば自然に出てくるが，これを 8.1 節 ∼8.3 節の例の仲間であると見なすには，ベクトル空間の公理が必要である．8.6 節以降では，目新しい（はずの）例を与える．

こうした例をすべて統一的に扱えるようになるというのが，**ベクトル空間の公理の意義（抽象化の意義）**である．

ベクトル空間は，その定義からすると，ベクトル集合とでも言った方がよさそうなものだ．にもかかわらず，空間と言っているのは，たとえ目に見えなくとも空間的なイメージを持ちながら調べたいからである．ずっと先であるが，14 章において，ベクトル空間の空間的広がりを表す量（パラメーターの数）と言うべき，**次元**というものを定義する（例は 5.2 節ですでに出てきている）．以下の例について，空間的なイメージを持ってもらいたいので，次元についても（証明抜きで）触れていく．次元についての少し詳しい説明は命題 8.2 の後にある．

8.1　平面ベクトルの集合（実ベクトル空間）

平面ベクトルとは，平面の矢印のことであるが，ただし，始点を重ねたとき終点が一致する矢印は同じものと考える．

足し算は, $\boldsymbol{v}_1$ 平行移動したあと, $\boldsymbol{v}_2$ 平行移動するのを $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ として定義 (picture). $\boldsymbol{v}_2$ のあと $\boldsymbol{v}_1$ でも結果は同じ, つまり, $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1$ が確認できる (平行四辺形の性質). これが，定義 7.1 (1) でいうところの、計算に不都合がないということの一端.

定数倍については, α 倍したあと β 倍すると, $\beta\alpha$ 倍される：$\beta(\alpha\boldsymbol{v})=(\beta\alpha)\boldsymbol{v}$ (picture). これも計算に不都合なしの一端.

このように平面ベクトル全体の集合は，上の意味でベクトル空間となっている [*96]. これはイメージ通り，２次元のベクトル空間になっている．

全く同様に, 空間ベクトル全体の集合もベクトル空間となっていることは各自納得せよ.

8.2　2 個の実数の組の集合（実ベクトル空間）

$\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ と書かれるもの. これは平面に座標を入れたとき, 各点（あるいは, ベクトル）の xy 座標の組を要素とする集合 (picture). この意味で $\mathbb{R}^2$ と平面は同一視できる.[*97] しかし, 平面への座標の入れ方は無数にある.

例 **8.1.** (picture)（原点が違う）　（方向が違う）

[*96] ベクトル空間の名前の由来となっている．ここで混乱をしないよう**強調したい**のは, ベクトル空間と言った時はあくまで定義 7.1 の通りの抽象的なものであって, このような幾何的な意味があるとは限らないということ．混乱を避けるために線形空間という呼び方の方がよいかもしれない.

[*97] デカルトにさかのぼる.

よって $\mathbb{R}^2$ と平面の同一視は, あくまでも平面に座標を入れた上の話. ともかく, この同一視によって平面ベクトルの足し算は $\mathbb{R}^2$ の足し算に翻訳できる (picture). 以下, $\mathbb{R}^2$ の元は (x, y) ではなく $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$(**数ベクトル**という) と書く. こう書くと $\mathbb{R}^2$ の足し算と実数倍は平面との同一視を決めて初めて定義されるものに見えるかもしれないがそうではない. 平面との同一視とは独立に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

と定義できている. こうして $\mathbb{R}^2$ はベクトル空間となる.

以下, 記号として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で表す. これを $\mathbb{R}^2$ の**基本ベクトル**と呼ぶ.

これも，平面ベクトルの集合と同様，２次元のベクトル空間になっている.

8.3 m 個の実数の組の集合（実ベクトル空間）

全く同様に, 3 個の数の組全体の集合 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ もベクトル空間となる. そしてこれは，空間に座標を入れることで空間ベクトル全体の集合と同一視できる.

もっと一般に， m 個の数の組全体の集合 $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) | x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\}$ もベクトル空間となる. これは今後，最もよく考えるベクトル空間である.

練習問題 8.1. これを定義 7.3 に従って確認せよ（こういう問題を一度は自分でやってみてほしい）.

$\mathbb{R}^m$ の元は $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ で表す.

記号 8.1.

$\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ で第 i 成分が 1, 他の成分がすべて 0 となる $\mathbb{R}^m$ の元を 表す. これを**基本ベクトル**という.

また, $\boldsymbol{o}$ ですべての成分が 0 である $\mathbb{R}^m$ の元を表す.

$\mathbb{R}^m$ は m 次元のベクトル空間になっている． $m \geq 4$ では空間的な対応物はないが, 例えば,第 I 部で見たように，m 個の変数を持つ連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{lm}x_m = b_l \end{cases} \tag{8.1}$$

を考えるとき自然に出てくる. 実際,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix}$$

おくと, この方程式は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表現できるのだった. このように行列 A と $\boldsymbol{x}$ の積が 定義されているからである[*98].

同様に, m 個の複素数の組全体の集合 $\mathbb{C}^m=\{(x_1,\dots,x_m)|x_1,\dots,x_m\in\mathbb{C}\}$ は, 複素ベクトル空間となる.

注意 16. 行列の集合 $M_{l,m}(\mathbb{C})$ についても, 3.1 節で定義した 和とスカラー倍によってベクトル空間になる. つまり, 和とスカラー倍は定義 7.3 の性質を満たす（確認してみよ）.

$l=1$ のとき, この和とスカラー倍は, ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ の和とスカラー倍と同じである.

8.4 部分ベクトル空間

8.3 節までは, 主に実ベクトル空間を考えたが, この節の話は, 実でも複素でも通用する. 主に複素の場合を意識して説明する.

5 章で 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考えた（A は $l\times m$ 行列, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^m, \boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^l$）. ここでは特に斉次型 $(\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o})$ の場合に限定して考えよう. その解の公式 (5.4) は解全体の集合（解空間と呼ぶのだった）の構造を記述しているものと見なせる ということを述べた（5.2 節）. ここでは, 解空間 W が（一般には）$\mathbb{C}^m$ ではない新しいタイプのベクトル空間になっていることを示す[*99]. まず, ゼロベクトル $\boldsymbol{o}$ は方程式の解であるから, W は空集合ではない. さらに, $b_1=\cdots=b_l=0$ として, 連立一次方程式を見れば容易に分かる通り, W は次の二つの性質を持つ：

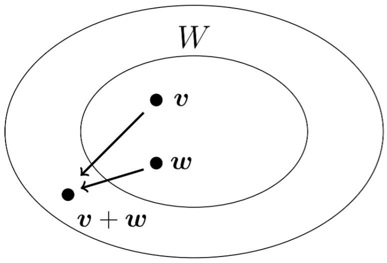
(a) $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ がともに解ならば, それらの和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_m+y_m \end{pmatrix}$ もまた解である（W は和で閉じているという）. なぜなら, 練習問題 3.1 を用いると, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$, $A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}$ により, $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{o}$ となるからである.

(b) $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ が解ならば, その複素数倍（α 倍とする）$\alpha\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}$ もまた解である

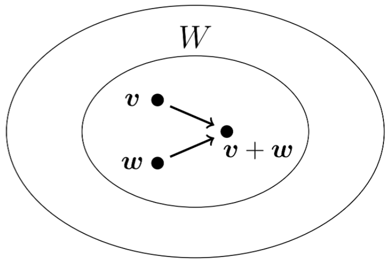
[*98] また相対論では, 空間座標だけでなく時間を含めた 4 個の数で表現できる 空間を考える.
[*99] ただし, ここでは, 5.2 節でみた W の骨組みについては考慮しない.

（W は定数倍で閉じているという）．なぜなら，練習問題 3.1 を用いると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ により，$A(\alpha\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ となるからである．

この二つの性質がなぜ重要なのかといえば，これによって，W に和と定数倍が定まるからである．混乱しないでもらいたいのは，W は $\mathbb{C}^m$ に含まれており，$\mathbb{C}^m$ においては前節において和と定数倍を定めたのだった．しかし，W については (a), (b) によって初めて和と定数倍が定まったと言え



W で和が定義されない



W で和が定義される

る ということである．

さらに，(a) と (b) によって W はそれ以上の性質を持つ．W は (a), (b) によって定まる和と定数倍によってベクトル空間になるのである．これはベクトル空間の定義に戻れば容易に確かめることが出来る[*100]．

この話を一般化することで部分ベクトル空間の概念に至る．

定義 8.1 (部分ベクトル空間). 上の例のように，ベクトル空間 V の**空でない部分集合** W であって，

- [(a)] $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W$ ならば $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W$ （W **は和について閉じている**という）
- [(b)] $\boldsymbol{v} \in W, \alpha \in \mathbb{C}$ ならば $\alpha\boldsymbol{v} \in W$ （W **は複素数倍について閉じている**という）

を満たすものを V の**部分ベクトル空間**という．

命題 8.1. 部分ベクトル空間はベクトル空間である．

上の例でも触れたように，部分ベクトル空間がベクトル空間になるということの証明 にはベクトル空間の正確な定義が必要である[*101]．ここでは，ベクトル空間のおおらかな定義 7.1 の (2), (3) に対応して，次のみチェックしておく．W を部分ベクトル空間とする．

[*100] 実際，(a), (b) さえチェックすれば，すでに $\mathbb{C}^m$ がベクトル空間になることはチェックしてあるので（練習問題 8.1），何も確認することは残っていない．それを納得せよ．

[*101] 気になる人はベクトル空間の定義に戻ってチェックせよ．

- $\boldsymbol{o} \in W$ である．実際，W は空でないので，ある元 $\boldsymbol{v}$ を含む．部分ベクトル空間の条件 (b) より, $0\boldsymbol{v} \in W$. 命題 7.1 (1) より $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. よって，$\boldsymbol{o} \in W$ が分かった．
- $\boldsymbol{w} \in W$ ならば，$\boldsymbol{w}$ の V における逆元 $-\boldsymbol{w}$ も W に属す．実際，命題 7.1(2) で見たように，$-\boldsymbol{w} = (-1)\boldsymbol{w}$ であるから，部分ベクトル空間の条件 (b) より，$(-1)\boldsymbol{w} \in W$ である．

与えられた部分集合が部分ベクトル空間になるかどうかのチェックは，上の定義に基づいて (a), (b) をチェックすればよいので容易である．

練習問題 8.2. 次の部分集合 W は部分ベクトル空間であるか？理由をつけて答えよ．(0) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ (1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x - y = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ (2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid xy = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

練習問題 8.3. ⊛ 次を示せ：

「$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $W \neq \{\boldsymbol{o}\}$ が $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間となる $\Longleftrightarrow$ ある実数 a と b を用いて $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid ax - by = 0 \right\}$ と書ける.」[*102]

次の問題は抽象的だがそれほど難しくない．このような問題を通して，抽象的な考え方に慣れていってほしい．

練習問題 8.4. V をベクトル空間, V_1, $V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする．このとき

$$V_1 + V_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 | \boldsymbol{v}_1 \in V_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}$$

とおくと, これは部分ベクトル空間になることを示せ．これを V_1 **と** V_2 **の和**と呼ぶ.

3 つ以上の部分ベクトル空間の和も同様に定義され, 部分ベクトル空間となることが示される.

$V_1 + V_2$ と $V_1 \cup V_2$ は一般に異なるので注意.

練習問題 8.5. V をベクトル空間, V_1, $V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする．このとき $V_1 \cap V_2$ が部分ベクトル空間になることを示せ．[*103]

練習問題 8.6. ⊛ V をベクトル空間, V_1, $V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする．このとき, $V_1 \cup V_2$ が部分ベクトル空間であることと, $V_1 \subset V_2$, または $V_1 \supset V_2$ であることは同値であることを示せ.

練習問題 8.7. ⊛ V をベクトル空間, V_1, $V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間で V と一致しないものとする．$V \neq V_1 \cup V_2$ を示せ.

部分ベクトル空間という概念によって,（例えば，$\mathbb{C}^m$ から出発して）たくさんのベクトル空間の例を構成することができる．ある条件を課して作るので個性的なものが多い．以下，そのような例を見てみることにする．

[*102] $a = b = 0$ のときは $W = \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき, W は原点を通る直線を表す.

[*103] V_1, V_2 は部分ベクトル空間なので，上で注意したように，$\boldsymbol{o} \in V_1$, $\boldsymbol{o} \in V_2$ である．従って $V_1 \cap V_2$ は $\boldsymbol{o}$ を含むので空でない.

8.5　線形写像から決まる部分ベクトル空間–核と像–

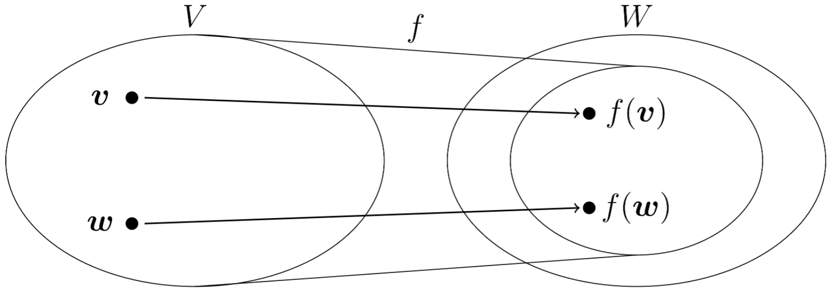
線形写像から自然に定まる部分ベクトル空間が 2 つある．特別な例は 3.2 節で見た．これらは線形写像の個性を映し出している．

V, W をベクトル空間, $f : V \longrightarrow W$ を線形写像とする．

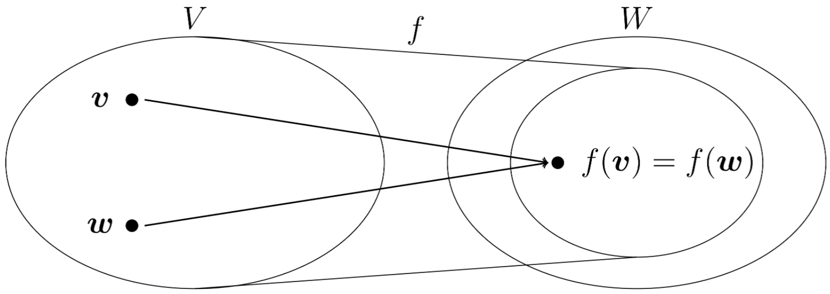
$\mathrm{Ker}\, f := \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\}$ とおき, これを f の**核**という．

練習問題 8.8. $\mathrm{Ker}\, f$ が V の部分ベクトル空間であることを示せ.[*104]

f が**単射**[*105]であるとは，V のどんな異なる 2 元も f によって W の異なる 2 元に移るということである．



単射　$\left(\begin{array}{rl} & \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w} \Rightarrow f(\boldsymbol{v}) \neq f(\boldsymbol{w}) \\ \text{対偶：} & f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w}) \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \end{array}\right)$



単射でない　$\left(\begin{array}{l} \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w}\ ,\ f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w}) \text{ となる} \\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ が存在する} \end{array}\right)$

線形写像の単射性は核を用いて判定できる．

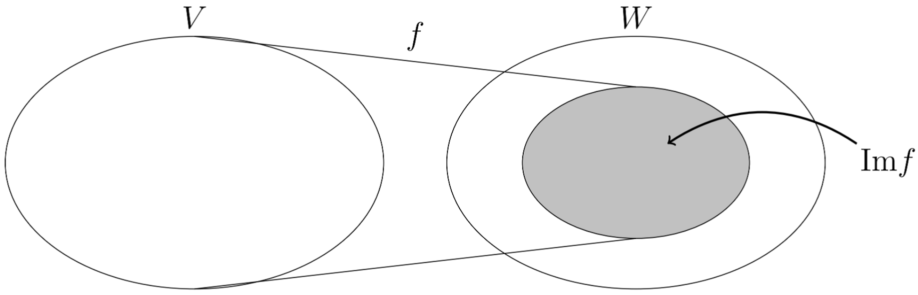
練習問題 8.9. f が単射 $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ [*106]を示せ．

[*104] $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ は認めてもよい．これは次のように示せる．$\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ であるから, $f(\boldsymbol{o}) = f(\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}) = f(\boldsymbol{o}) + f(\boldsymbol{o})$. よって, $-f(\boldsymbol{o})$ を両辺に足して, $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ を得る．

[*105] これは，線形写像に限らず，集合の写像に対して定義される概念である．『集合と論理』の講義ノートも参照のこと．

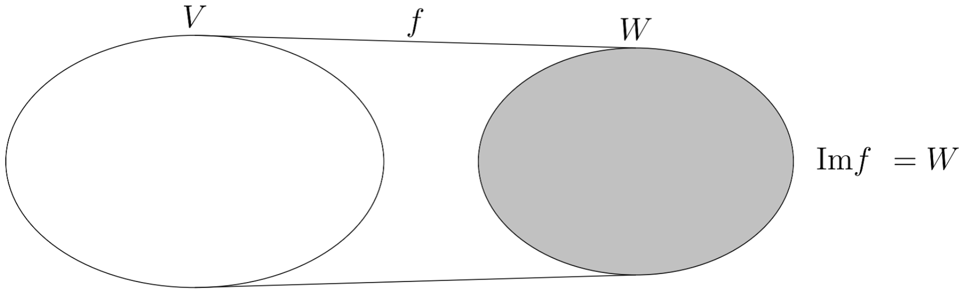
[*106] $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ というのは，言い換えると，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ ということである．

$\mathrm{Im}\, f := \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\}$ とおき[*107], これを f の**像**[*108]という．$\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ と書くことも出来る．



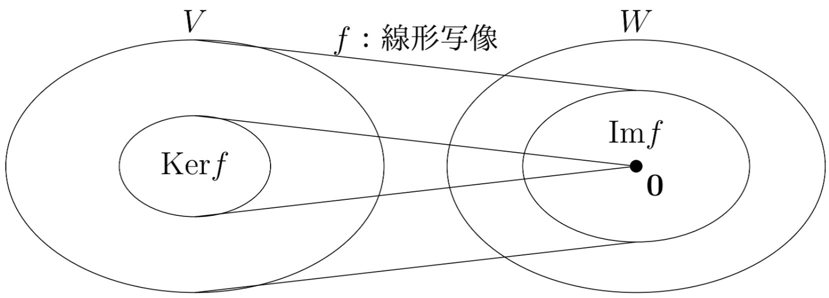
練習問題 8.10. $\mathrm{Im}\, f$ が W の部分ベクトル空間であることを示せ.

f が**全射**[*109]であるとは，W のすべての元が，f による V の元の移り先であるということ，つまり，$\mathrm{Im}\, f = W$ ということである．



全射

核と像の広がり具合（次元）の足し算が全体の広がり具合になっている（正確には，練習問題 16.2 を参照のこと）．



dim Imf+dim Ker$f$ =dim V

核と像は連立一次方程式と密接に関係していることを見た（3.2 節）．16.4 節でさらにこの関係を追及する．

[*107] $\exists \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ は「ある $\boldsymbol{v} \in V$ が存在して $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ が成り立つ」と読む.
[*108] これも，集合の写像に対して定義される概念である.
[*109] これも，集合の写像に対して定義される概念である.

8.6　実数列の集合

ここは直感的イメージを強調するため実数列で考える． 実際は複素数列で考えても大差はない． 各実数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を 1 つの元[*110]とする集合を V で表す (picture). この集合には $\mathbb{R}^2$ と類似の和と実数倍が次のように定義できる [*111].

- $\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}$.
  例えば, $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} + \{1, 1, 1, 1, 1, \cdots\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$.

- $\alpha \{a_n\} := \{\alpha a_n\}$.
  例えば, $3 \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \cdots\}$.

混乱しないようにしてほしいのは, これらの定義の左辺は, 右辺のように定義をしない限り, まったく意味のない記号であること．このような定義の必要性を納得してほしい．

これらの和と実数倍によって， V は実ベクトル空間になる．そのチェックをするには，ベクトル空間の公理（定義 7.3）に立ち返る必要がある（気になる人は自分で確認してみること）が, $\mathbb{R}^m$ の場合のチェック（練習問題 8.1）とほぼ同じである[*112].

さて，大学受験生の頃，数列の問題「与えられた漸化式を満たす数列を求めよ」をやったことがあるかもしれない．ここでは，定数 c_1, c_0 に対して 漸化式 $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_0 a_n$（これを**三項間線形漸化式**という）を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える．これについては，線形代数を使って, すべて求めることができる [*113].

これから述べる考え方は，連立一次方程式の解法のアイデアとよく似ている． 5.2 節で述べたように，連立一次方程式を解くというのは，その解全体の集合（解空間）の構造を決定すること（骨組みによる解空間の斜交座標表示）に他ならないのであった． 上の漸化式についても同様に考える．そこで，漸化式を満たす数列全体の集合

$$W := \{\{a_n\} \mid \forall_{n=0,1,\ldots}, a_n \in \mathbb{R},\ \text{かつ}\ a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_0 a_n\} \tag{8.2}$$

を調べて，その構造を決定する．なぜ線形代数でこの集合を調べられる理由は W が V において部分ベクトル空間になるからである．これを確認するのを練習問題としておく．

<u>**練習問題**</u> **8.11.** W は V において部分ベクトル空間であることを示せ.

ついでに，数列の他の部分集合が部分ベクトル空間になるかどうかを確認するのを 練習問題として出しておく．

---

*110 以下, $n = 0, 1, \cdots$ は省く．

*111 定義できるという言い方に抵抗があるかもしれない. 例えば数列 $\{a_n + b_n\}$ を $\{a_n\} + \{b_n\}$ と捉え直すことだと思ってみてはどうか？

*112 こう書くと，V と $\mathbb{R}^m$ の印象は変わらないが, 数列の項が無限個あるということでゆくゆく扱いが異なってくる．ベクトル空間には次元というその広がり具合を表す大切な量が定義されるが, $\mathbb{R}^m$ が m 次元のベクトル空間というものになっているのに対し, V は無限次元のベクトル空間になっている. そのため, 例えば $V \to V$ なる線形写像を研究するのに, 行列が使えないなどの不都合が生じる (3.3 節と比較せよ). また，無限次元と有限次元の違いを端的に 表す例としては，練習問題 6.2 を参照せよ．

*113 線形代数の中では一つの例に過ぎないが, 目新しさはあると思う．

練習問題 8.12. 以下の数列のなす集合は V において部分ベクトル空間か？

(1) $\{\{a_n\} \mid a_{n+1} = a_n + 1\}$.

(2) 収束する数列の集合.

(3) 有限個の項を除いて 0 となる数列の集合.

5.2 節と同様に W の構造を記述したのが次の命題である.

命題 8.2. W において次のような 2 つの定まった元をとる：
$\{a_n\}$:　ただし, $a_0 = 1, a_1 = 0$ を満たす.
$\{b_n\}$:　ただし, $b_0 = 0, b_1 = 1$ を満たす.
すると, 任意の元 $\{d_n\}$ は, $\{d_n\} = d_0\{a_n\} + d_1\{b_n\}$ と書ける.
さらに，$\{d_n\}$ を $\{a_n\}$ の定数倍と $\{b_n\}$ の定数倍の和として書く方法は 一通りしかない，すなわち，$\{d_n\} = \alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\}$ ならば, $\alpha = d_0$, $\beta = d_1$ に限る.

証明. **この考え方は以下でも頻繁に用いられるのでよく理解しておくこと.** 練習問題8.11でチェックしたように，$d_0\{a_n\}$ も $d_1\{b_n\}$ も W に入っており，さらに, $d_0\{a_n\} + d_1\{b_n\} = \{d_0a_n + d_1b_n\}$ も W に入っている．$\{d_n\}$ のはじめの 2 項は d_0, d_1 であるが，それは $d_0\{a_n\} + d_1\{b_n\}$ についても同じである．3 項間漸化式を満たす数列は, はじめの 2 項を決めてしまえば決まってしまうので，同じ初めの 2 項をもつ W の元は一致する．ゆえに $\{d_n\} = d_0\{a_n\} + d_1\{b_n\}$.

‘さらに’ のあとは当たり前に思えるかもしれないが，確認しておく必要がある事実である．$\{d_n\} = \alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\}$ と書けるとする．すると，右辺の数列の初めの項は α，次の項は β であるから，　左辺と見比べて，$\alpha = d_0$，$\beta = d_1$ となる． □

注意 17. 命題8.2 は，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が W の基底（骨組み）になるということである (基底については，12，14 章を 参照).

命題8.2 は，5.2 節と同様，一般にベクトル空間をどう理解してよいのかの典型的な考え方を示している．それは“$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ という骨組みを取りさえすれば” W と $\mathbb{R}^2$ は非常に似たものに見える（座標が入った空間と見なせる）ということを言っているのである[*114]．$\mathbb{R}^2$ と比較することで少し詳しく述べてみよう.

$\mathbb{R}^2$ の 2 つの元 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる．$\mathbb{R}^2$ の任意の元 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける．つまり, これは ($\mathbb{R}^2$ と平面を同一視して考えれば)，$\mathbb{R}^2$ のどの点にも $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向という 2 方向への動きを繰り返せば到達できるということである．W についても, それを

[*114] この考え方は，14 章で一般化されて，それ以降の議論の 礎になる．次元も骨組みを使って定義される.

（集合というより）空間的に考えるならば, 命題 8.2 の前半は, $\{a_n\}$ ‘ 方向 ’ と $\{b_n\}$ ‘ 方向’ の 2 方向への動きを繰り返せばどの点 (数列) にも到達できるということを言っている.

‘方向’ という言い方には違和感があるかもしれない. そこで，5.2 節と同様，次の言葉を用意しておくと便利である.

定義 8.2 (**一次結合**). W において, $p\{a_n\}+q\{b_n\}$ $(p,q\in\mathbb{R})$ という形の元を $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の**一次結合**という.
より一般に, 任意のベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ に対して, $p_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+p_m\boldsymbol{v}_m$ $(p_1,\ldots,p_m\in\mathbb{R})$ という形の元を $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ の **一次結合**という.

前にも注意したが，これは，単なるベクトルの足し算ではなく，**係数の自由度を許した**足し算のことである.

命題 8.2 は, W の元はすべて $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一次結合であることを言っている. ここまでが, 命題 8.2 の前半（‘さらに’ の前まで）に対応している.

命題 8.2 の後半は， $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一次結合としての書き方に無駄がないということを言っている．仮に，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に加えて，$\{e_n\}$ なる数列（ただし $e_0=1, e_1=1$ とする）を考えるとする．確かに，すべての W に属する数列は，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{e_n\}$ の一次結合として書ける（$\{e_n\}$ の係数を 0 とすればよいから命題 8.2 より従う）． しかし，その書き方は一通りではない． 例えば， $\{e_n\}$ は $0\cdot\{a_n\}+0\cdot\{b_n\}+1\cdot\{e_n\}$ とも書けるし，$1\cdot\{a_n\}+1\cdot\{b_n\}+0\cdot\{e_n\}$ とも書ける． このように，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{e_n\}$ による一次結合としての表示には無駄があるので，W の広がり具合（次元）は 3 であるとは考えない．$\mathbb{R}^2$ においても, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\boldsymbol{e}_1+\beta\boldsymbol{e}_2$ ならば, $\alpha=x$, $\beta=y$ に限ることに注意する.

実を言うと，命題 8.2 で取った $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は， W のすべての元をその一次結合で一通りに表せるという骨組みの役割は果たしているが， 一般には数列として分かりやすいものではない（分かりやすいのは最初の二項だけである）． よって，命題 8.2 は W の構造決定問題の解答としては不十分である．しかし，分かりやすい他の骨組みが存在するのである！　これについて, 9.2 節で考える（固有値問題の帰結）.

実数列全体のベクトル空間 V が平面や $\mathbb{R}^2$ の比べ非常に大きな広がりを持っているということを納得したい人は次の問題を考えてみてほしい.

練習問題 8.13. ⊛ V の有限個の元 (数列) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ をどう選んでも (m も自由に選んでよい), $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{v}_m$ とは書けない元が存在することを示せ.[*115]

つまり, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ という有限個の ‘ 方向 ’ をどう V の中に選んでも, V のすべての点に到達しつくすことはできないのである.

[*115] 例えば, $\boldsymbol{v}_1=\{1,0,0,\cdots\}$, $\boldsymbol{v}_2=\{0,1,0,0,\cdots\}$, $\cdots$ ではダメ

8.7　$d+1$ 項間線形漸化式を満たす数列の集合

$c_0, \dots,\ c_{d-1} \in \mathbb{R}$ を定数として,

$$W_d := \{\{a_n\} \mid \text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_n \in \mathbb{R},\ \text{かつ } a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_0 a_n\}$$

とすると, これは，練習問題 8.11 と同様，V の部分ベクトル空間になる.

この広がり具合（次元）について， 命題 8.2 と同様のことが言える（練習問題 14.1 参照）.

<u>練習問題</u> **8.14.** 上で $d=3$ の場合を考える． W_3 の 2 つの元 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をどうとっても, その一次結合として表すことのできない W_3 の元が存在することを示せ.

8.8　関数の集合

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \cos x, \sin x, e^x, \cdots$ など, 実数 x に別の実数を対応させる規則を定めるものを関数 (1 変数関数) という． $f(x), g(x), \cdots$ などと表すこともあった. ここでは, 関数を写像と見て $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ なる記号も使う. 関数全体の集合には， 例えば，e^x と x^2 の和は，$e^x + x^2$, e^x の 2 倍は $2e^x$ など， 足し算と実数倍が定まっている．小難しく言うと次のようになる：

- 関数 f, g に対して, $f+g$ という関数は, x での値が $f(x)+g(x)$ に一致するもの，つまり，$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ がすべての x に対して成立するものとして定義.

- 関数 f と実数 α に対して, αf という関数は, x での値が $\alpha f(x)$ に一致するもの，つまり，$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$ がすべての x に対して成立するものとして定義.

こうして関数全体の集合 V も実ベクトル空間となることが分かる.

<u>練習問題</u> **8.15.** ⊛ 数列全体の集合と同様, 関数全体のベクトル空間も無限次元であることを示せ (問題 8.13 と同様に定式化せよ). [*116]

ここで，部分ベクトル空間の練習問題を出しておく.

<u>練習問題</u> **8.16.** 関数全体の実ベクトル空間 V の次の部分集合は V の部分ベクトル空間であるか？ 理由をつけて答えよ.

(ア) 多項式で定義できる関数全体 $\{a_n x^n + \cdots + a_0 | a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$. (イ) 次数が m 以下の多項式全体. (ウ) 次数が m の多項式全体. (エ) $\{a\cos x + b\sin x|\ a, b \in \mathbb{R}\}$. (オ) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 S に対して， S のすべての点で 0 となる関数全体. (カ) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 S で， 少なくとも二つの点を含むものを考えるとき, S の少なくとも一点で 0 となる関数全体. (キ) $f(x) \to 0\ (x \to \infty)$ となる関数全体.[*117]

[*116] 例えば, (次数を限定しない）多項式のなす部分ベクトル空間を考えてみよ.
[*117] 微分積分の知識を使う.

8.9 双対ベクトル空間

ここでは，今までとは違って，複素ベクトル空間ではなく実ベクトル空間を主に考える．

関数の概念は，一般の集合に拡張できる． S を集合とするとき，S から $\mathbb{R}$ への写像のことを関数という[*118]．S **を定義域とする関数**，S **上の関数**などということもある． S 上の関数全体の集合を考えると，8.8 節と同様に，関数同士の足し算，関数の実数倍を定義することが出来る．そして，これによって S 上の関数全体の集合は実ベクトル空間になる．

V を実ベクトル空間とするときは，V と相性のよい関数のみ考えるのがよい．それは，$V \to \mathbb{R}$ なる線形写像 (線形な関数ということもある) である．線形関数 $V \to \mathbb{R}$ 全体の集合を V^* で表す[*119]．

例 **8.2.** V として $\mathbb{R}$ を取る．$\mathbb{R}$ にも和，実数倍（これは $\mathbb{R}$ の掛け算に他ならないが，ここでは実数倍と見ておく）があって，これによってベクトル空間になっている．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ なる線形写像は，定数 $a \in \mathbb{R}$ を用いて，$\mathbb{R} \ni x \mapsto ax \in \mathbb{R}$ と書けることが分かる．実際，$a := f(1)$ とおくと， 線形性より $f(x) = xf(1) = ax$ となる[*120]．よって，R 上の線形関数全体のベクトル空間 $\mathbb{R}^*$ は $f(x) = ax$ なる関数全体である．

例 **8.3.** 定理 3.1 で，$d = 1$ の場合はまさに $\mathbb{R}^e$ 上の線形関数を考えていることになる． 定理 3.1 により，$\mathbb{R}^e$ 上の線形関数は $1 \times e$ 行列，すなわち e 次元横ベクトルを（行列として）左から掛けることで与えられる．よって， $\mathbb{R}^e$ 上の線形関数全体のベクトル空間 $(\mathbb{R}^e)^*$ は，e 次元横ベクトル全体のベクトル空間であると言ってもよい．

このように，横ベクトルと縦ベクトルは区別しておくと便利なのである．

以下の練習問題によって， V^* は，V 上の（線形とは限らない）関数全体のベクトル空間の中で， 部分ベクトル空間になることが分かる．これを V の**双対ベクトル空間**という．

練習問題 **8.17.** $f_1, f_2\colon V \to \mathbb{R}$ を二つの線形関数とするとき， $f_1 + f_2\colon V \to \mathbb{R}$ も線形関数であることを示せ．

$f\colon V \to \mathbb{R}$ を線形関数，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，$\alpha f\colon V \to \mathbb{R}$ も線形関数であることを示せ．

双対ベクトル空間は， 関数のなすベクトル空間の特別なものであるが， ベクトル空間 V が与えられると自然に定まるものである． これは，ジョルダン標準形の存在定理の証明で重要な役割を果たす（21 章参照）．

慣習：ベクトル空間の元のことを**ベクトル**という．違和感があるかもしれないが, 例えば, 関数全体の集合の場合でも， それをベクトル空間と考えている時は, その元（関数）をベクトルという．
この点，混乱しないようによく注意してほしい．

[*118] 複素数に値を持つ関数にあまり抵抗がなければ，この節の話を複素ベクトル空間で考えてもなんら問題ない．
[*119] V が複素ベクトル空間であるときは， $V \to \mathbb{C}$ なる線形写像全体の集合を V^* で表す
[*120] この証明は 定理 3.1 の証明をこの場合になぞったものに他ならない．

問題のヒント・答.

練習問題 8.12(2), (3) の解答

(2) 部分ベクトル空間である．収束する数列全体の集合を W_3 とする．

$\mathbf{0} \in W_3$ なので $W_3 \neq \emptyset$. $\mathbf{a} = (a_n), \mathbf{b} = (b_n) \in W_3$ とする．$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がそれぞれ a, b に収束するとき, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n)$ は $a + b$ に収束するので, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_3$. また, $k \in \mathbf{R}, \mathbf{a} = (a_n) \in W_3$ が a に収束するとき, $k\mathbf{a} = (ka_n)$ は ka に収束するので, $k\mathbf{a} \in W_3$. 以上により W_3 は部分ベクトル空間である．

(3) 部分ベクトル空間である．$\mathbf{a} = (a_n) \in V$ のとき, $S_{\mathbf{a}} := \{n \in \mathbf{N} | a_n \neq 0\}$ とおく．

$W_1 := \{\mathbf{a} = (a_n) \in V |$ 有限個の n を除いて, $a_n = 0\}$ とおく．

$\mathbf{a} \in V$ のとき, $\mathbf{a} \in W_1 \iff S_{\mathbf{a}}$ は有限集合 である．

$\mathbf{0} = (0) \in W_1$ より $W_1 \neq \emptyset$ である．

$\mathbf{a} = (a_n), \mathbf{b} = (b_n) \in W_1$ のとき, $\mathbf{c} = (c_n) := \mathbf{a} + \mathbf{b}$ とすると, $c_n = a_n + b_n \neq 0 \Rightarrow (a_n \neq 0$ または $b_n \neq 0)$ だから, $S_{\mathbf{c}} \subset S_{\mathbf{a}} \cup S_{\mathbf{b}}$ である．$S_{\mathbf{a}}$ と $S_{\mathbf{b}}$ は有限集合だから, $S_{\mathbf{c}}$ も有限集合であり, $\mathbf{c} \in W_1$ である．

$k \in \mathbf{R}, \mathbf{a} = (a_n) \in W_1$ とする．$k\mathbf{a} = (ka_n)$ で, $ka_n \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0$ だから, $S_{k\mathbf{a}} \subset S_{\mathbf{a}}$ なので $S_{k\mathbf{a}}$ は有限集合．よって $k\mathbf{a} \in W_1$ である．よって, W_1 は部分ベクトル空間である．

9　固有値問題入門

9.1　一つの目標

ここで，この講義の目標である線形写像を理解するということについてより詳しく述べておく．この章では，目標を狭く設定してある．任意の線形写像を考えるのではなく，ベクトル空間 V に対して $f\colon V \to V$ なる線形写像（つまり，写像の定義域と値域が同じ）を考える[*121]．以後，このような線形写像を（V **の）線形変換**と呼ぶ．この章で説明するのは**線形変換の固有値問題**についてである．それを，V が実ベクトル空間の場合，特に，$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ なる線形変換に対して説明する．実ベクトル空間に限定して説明することで，複素ベクトル空間を考える動機付けについても言及する．

f は実 2×2 行列 A を用いて $f = f_A$ と書けるのであった (3.3 節)．これで，f が線形であると言う抽象的な捉え方よりも，随分具体的になったとも言えるが，A の成分 $a,\ b,\ c,\ d$ の様子によって f がよく分かる場合とそうでない場合がある．

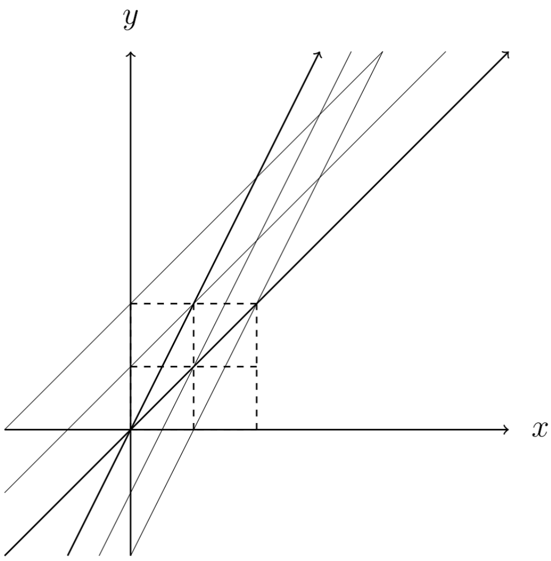
1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ であれば，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$ であるので確かに分かりやすい (f は $\boldsymbol{e}_1$ 方向へ 2 倍, $\boldsymbol{e}_2$ 方向へ 3 倍する写像である).

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ はどうか？ $B\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ となっている．

   しかし，次のように理解した方がはるかによい．B については次が成立していることが分かる:
   $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{は 2 倍され,}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\text{は 3 倍される}\right)$. すると，

$$B\left\{p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = 2p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

[*121] **文系向けの注**：V としては $\mathbb{R}^n$ を想定して読めばよい．線形写像の定義は I 部冒頭を参照のこと．



(9.1) の意味を理解するために定義と命題を用意する[*122].

定義 9.1. $\mathbb{R}^2$ の二つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が**互いに定数倍ではない**とは (「互いに」は「定数倍でない」に係る)， $\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{v}_2$ の定数倍でなく（つまり $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$ となる定数 k が存在しない)，$\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{v}_1$ の定数倍でもないということである．
例えば，この時，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ はどちらも $\boldsymbol{o}$ ではない．なぜなら，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{v}_1 = 0 \cdot \boldsymbol{v}_2$ となって，$\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{v}_2$ の定数倍になってしまうからである．

命題 9.1. $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が互いに定数倍でなければ, どんなベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ も**唯一通りに** $p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2$ という形（つまり一次結合として）**書ける**.

証明. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $A = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．

$$\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2 \text{ と書ける} \iff A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ が成り立つ}$$

に注意する (命題 3.2 (1))．こうして，問題は連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解くことに帰着する． よく知られているように,

$$\boldsymbol{v}_1 \text{ と } \boldsymbol{v}_2 \text{ が互いに定数倍でない} \iff \det A \neq 0$$

[*122] この命題は以下で繰り返し用いられる**重要**ものである．これは，複素数の範囲でも成立することに注意．**以後，断りなしに使う**．また，基底の話へとつながっていく．

が成り立つ（容易に確認できるので忘れた人はチェックせよ）．これは，定理 6.6 より， A が逆行列を持つこととも同値である．よって，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が互いに定数倍でなければ， 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はただ 1 つの解 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を持つ. □

注意 18. $\mathbb{R}^2$ だから 2 つのベクトルで済むのであって, $\mathbb{R}^3$ なら 3 ついる．さらにその条件は命題 9.1 のように単純でない．14 章では, 結局, 命題 9.1 の結論を使ってその条件の一般化を定義している.

命題 9.1 は, **互いに定数倍でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を持ってくるとそれによって (斜交) 座標が定まるということを言っている (p, q が座標).**

(2) の B に話を戻そう．$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は確かに互いに定数倍でないので斜交座標を定める．この座標の言葉で言うと，式 (9.1) は B によって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 座標が 2 倍, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 座標が 3 倍されるということに他ならない.

このように f に対して，f が拡大 (又は縮小) となる二つの方向 (ベクトル) が見つかれば,[*123] (2) の f は (1) とほぼ同様に理解できる.

問題は

> **固有値問題.** (a) f が拡大・縮小となるような方向 (ベクトル) がとりあえず一つでも見つかるか？ ただし, 互いに定数倍である 2 つの方向 (ベクトル) は本質的に同じものと考える.
>
> (b) そのような方向をどのように見つけることができるのか？
>
> (c) このような方向はどのくらい見つかるか？

この固有値問題の $f\colon V \to V$ への一般化に解答を与えるのが この講義の目標である.

まず (a) に関して, 一般的な設定の下で, 基本的な言葉を定義しておく.

[*123] 正確に言えば, 互いに定数倍でない二つの方向 (ベクトル).

定義 9.2. V を実ベクトル空間, $f\colon V \to V$ を線形変換とする．f に対して，次の条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を**固有ベクトル**という．

(1) $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$.

(2) $f(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ の定数倍になる． つまり，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ があって[a]，$f(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v}$ [b]． α のことを $\boldsymbol{v}$ に対する f の**固有値**という．

$n \times n$ 実行列 A で定まる $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の場合は, A の固有値, 固有ベクトルということが多い.

[a]もし V が複素ベクトル空間ならば $\alpha \in \mathbb{C}$ としなくてはならない.

[b]α は 0 でもよいことに注意．**毎年，固有ベクトルは $\boldsymbol{o}$ でない というのを，固有値が 0 でないと誤解する人が必ずいる**．意味を考えればこのような誤解は生じないはずである.

次の例から分かる通り, (a) の答えは一般に No である.

例 9.1.
例 3.6 の R_θ については， 図形的に明らかなように, $\theta = 0$, π を除いて, 固有ベクトルを持たない.
$\theta = 0$ なら，R_0 はどのベクトルも動かさないので， $\boldsymbol{o}$でないすべてのベクトルが固有ベクトル.
$\theta = \pi$ なら，R_π はどのベクトルも (-1) 倍するので， $\boldsymbol{o}$でないすべてのベクトルが固有ベクトル.

練習問題 9.1. 問題 3.5 の S_l について，固有値と固有ベクトルを幾何的に求めよ.

しかし, **複素数の範囲までスカラーを拡張すれば**, (a) の答えが肯定的であることが分かる (10.3 節, 10.4 節, より一般には系 18.1)．これが**複素ベクトル空間を考える一つの大きな動機**である．

固有値問題 (b) に関しては, まず, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について, すぐに一般的解答を与える (10.1 節)． 10.1 節での考え方は，実は $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ でも通用する．実は，定理 6.8 を踏まえれば，$f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ でも通用するのだが，それは 18.1 節に回すことにする．

任意の線形変換 $f\colon V \to V$ について解答が与えられるのは, 18.2 節である．これは，結局，$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ の場合に帰着することで解決される． 14 章でベクトル空間の基底の概念を導入し，それによって，17 章で 線形変換を行列で記述することが可能となる．その恩恵である．

固有値問題 (c) に関しては, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合, **理想的なのは, 定数倍の違いを除いて 2 つの固有ベクトルが見つかることだが**, 次の例で見るように， 1 つしかない場合もある.

例 9.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ については, 複素数までスカラーを拡張しても 固有ベクトルは，定数倍を除いて $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 つしかないことが分かる（例 10.2 を見よ）．詳しくは 10.2 節で調べる.

10 章で，$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合を一般的に扱う前に，次の 2 節で 少し目新しい例を見ておくことにする． これは線形変換の良い例も提供する．

9.2 数列のなすベクトル空間のある線形変換

8.6 節で考えた数列のなすベクトル空間 V, W を考える．ただし，ここでは，前節の流れを引き継いで，**実数列**に限定する． この例は後で繰り返し出てくるのでよく理解しておくこと．

まず $T\colon V \to V$ なる写像を次のように定義:

$$T(\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}) = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

(つまり左にずらす)[*124]．

ここからは問題を解いてもらいながら，説明をすすめていく[*125]．以下，記号は 8.6 節のものも自由に使うので参照せよ．

練習問題 9.2. T は線形変換であることを示せ．

練習問題 9.3. T の固有ベクトルとは何か？

練習問題 9.4. T は W の元を W にうつすことを示せ．

よって，T は W から W への線形変換を定めている．

練習問題 9.5. $T : W \longrightarrow W$ の固有ベクトルとは何か？

以上の考察は漸化式を満たす数列をすべて求めるのに役立つ．[*126]

練習問題 9.6. $c_1 = 3,\ c_0 = -2$ のとき，漸化式を満たす数列を全て求めよ．

前にのべたように，W は 2 次元的な広がりをもっていた．よってこの問題のように 互いに定数倍でない等比数列が見つかれば，すべての W の元を表すことができる．これは $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ のときの f_A とよく似ている．
$c_0,\ c_1$ の値によってはこれは不可能なこともある．

例 9.3. $c_1 = 2,\ c_0 = -1$ について，$t^2 - 2t + 1 = 0 \rightsquigarrow (t-1)^2 = 0$ (重解)．

このようなときでも漸化式の解をすべて求めることはできる (問題 10.3)．

[*124] 以下では用いないが，次のような見方も 漸化式を解くのに有効である． T を二回合成した写像を T^2 と書く．すると，(8.2) で定めた W は $T^2 - c_1 T - c_0 \mathrm{id}$ なる線形写像の核である．ここで id は恒等写像である．

[*125] 以下，体験学習を行ってみたくて，このような構成にしてみたのだが，結局，時間があまりないので 私が講義で説明する．

[*126] 受験テクニックとしては知っているであろう．

9.3 関数のなすベクトル空間の線形変換

V を関数のなす実ベクトル空間とする．$V_0 \subset V$ を何度でも微分できる関数[*127]全体のなす部分集合とする．写像 $D\colon V_0 \to V_0$ を $f \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ で定める（$f \in V_0$ ならば $\frac{df}{dx} \in V_0$ に注意．これによって D が定まる）．V_0 は V の部分ベクトル空間である．実際，まず，V_0 は定数関数など含むので $V_0 \neq \emptyset$ である．ここで，微分積分学による次の事実に注意する．

[(a)]

1. f, g が微分可能ならば $f+g$ もそうであり，$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$ が成り立つ．
2. f が微分可能ならば，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して αf もそうであり，$\frac{d(\alpha f)}{dx} = \alpha\frac{df}{dx}$ が成り立つ．

これらを繰り返し使うと，f, g が何度でも微分可能ならば $f+g$ もそうである，つまり，f, $g \in V_0$ ならば $f+g \in V_0$ となること，また，f が何度でも微分可能ならば，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して αf もそうである，つまり，$f \in V_0$ ならば $\alpha f \in V_0$ となることが分かる．よって V_0 は V の部分ベクトル空間であることが分かった．さらに，(a), (b) より

$$
\begin{gathered}
f,\, g \in V_0 \text{ に対して } D(f+g) = D(f) + D(g), \\
f \in V_0,\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して } D(\alpha f) = \alpha D(f)
\end{gathered}
\tag{9.2}
$$

が成り立つ．よって D は線形変換である．

練習問題 9.7. $D : V_0 \longrightarrow V_0$ の固有ベクトルとは何か？

さて $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ を定数とするとき, 次のような条件を満たす何度でも微分可能な関数 f を求める問題を考える：

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = c_1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + c_0 f. \tag{9.3}$$

このような，関数の（高階）微分を含んだ等式を 満たす関数を求める問題を**微分方程式**というのだった[*128]．この微分方程式と連立微分方程式 (3.3) の関連は 13.3 節の定理 13.1 の後の説明を見よ．

例 9.4. バネの単振動の運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 x$ $(k > 0)$ と書ける．ただし m はバネにつけたおもりの質量，t は時刻，x はバネの自然長からの距離である．(9.3) において，f を x，x を t と読み替えると，$c_1 = 0,\ c_0 = -\frac{k^2}{m}$ の場合になる．

例 9.5. 上記の例で，おもりに，重量と速さに比例する摩擦力が働くとすると，運動方程式は，$m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\mu m \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k^2 x$ $(k > 0)$ と書ける．ただし，$\mu > 0$ は定数である．この場合は，$c_1 = -\mu$, $c_0 = -\frac{k^2}{m}$ の場合になる．

[*127] $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ e^{\alpha x},\ \cos\alpha x,\ \sin\beta x,$ などなど．

[*128] 実は，(9.3) は，二回微分可能な関数に対しても意味を持つが，そのように考えても，(9.3) を満たす関数を求めてみると，結局，何回でも微分可能である事が分かる．例として，練習問題 9.9 の解答を参照の事．

$$W=\left\{f(x)\in V_0 \mid \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=c_1\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+c_0 f\right\}$$

とおく． 5.2 節，8.6 節と同様，微分方程式を解くというのを， W の構造決定問題と捉える．ここで，(9.2) により W は V_0 の部分ベクトル空間であることが分かる．こうして， 線形代数の助けを借りて W の構造を決定することが出来る[*129]．

この W は三項間線形漸化式を満たす数列全体のベクトル空間とよく似ている． D が T の役割を果たす[*130]． 練習問題 9.4 と同様, D は W の元を W にうつすので，$W \longrightarrow W$ なる線形変換を定める．これも D で表す.

練習問題 9.8. $D : W \longrightarrow W$ の固有ベクトルとは何か？

練習問題 9.9. ⊛ $c_1 = 3,\ c_0 = -2$ のとき，W を求めよ．

[*129] 13.3 節の定理 13.1 は，W の構造の別の決定法を与える．線形代数が違った活躍をする．

[*130] これは偶然ではない．実は，（ある範囲で）テイラー展開できるような関数 $f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$ の場合, その係数を並べてできる数列 $\{f(a), f'(a), \frac{1}{2!}f^{(2)}(a), \frac{1}{3!}f^{(3)}(a), \ldots,\}$ の D による変化が T を施すことと等しい.

三項間線形漸化式を満たす数列のなす部分ベクトル空間は T を用いると

$$\{\{a_n\} \mid T^2(\{a_n\}) = c_1 T(\{a_n\}) + c_0\{a_n\}\}$$

と書くことが出来る事にも注意しておく.

この章の問題の略解

練習問題 9.3 固有ベクトルの定義に戻ると $\{a_n\} \neq \{0,0,0,\cdots\}$ であって，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ があって $T(\{a_n\}) = \alpha(\{a_n\})$ となるものが固有ベクトル．$T(\{a_n\}) = \{a_1, a_2, \cdots\} = \{\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \cdots\}$，つまりすべての n について $a_{n+1} = \alpha a_n$ が成立している．これは $\{a_n\}$ が $\{0\}$ でなく，公比 α の等比数列であるということである．

なお，α は任意の実数であったから，固有値は任意の実数ということになる．

練習問題 9.4 $\{a_n\} \in W$ とし，$T(\{a_n\}) = \{b_n\}$ とおく．$b_n = a_{n+1}$ に他ならない．$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \rightsquigarrow a_{n+3} = c_1 a_{n+2} + c_0 a_{n+1} \rightsquigarrow b_{n+2} = c_1 b_{n+1} + c_0 b_n$ である．

練習問題 9.5 $\{a_n\}$ を求める固有ベクトルとする．練習問題 9.3 により，$\{a_n\}$ は $\{0\}$ でない等比数列である：$\{a_n\} = \{a_0, \alpha a_0, \alpha^2 a_0, \cdots\}$ $(a_0 \neq 0)$．さらに漸化式を満たすので，$\alpha^{n+2} a_0 = c_1 \alpha^{n+1} a_0 + c_0 \alpha^n a_0 \rightsquigarrow \alpha^2 = c_1 \alpha + c_0$．よって，$\alpha$ は $t^2 - c_1 t - c_0 = 0$ なる 2 次方程式の解[*131]．

練習問題 9.6 前問により，$t^2-3t+2=0$ の解 $t = 1,\ 2$ に対して，$\{1,1,1,\cdots\}$ と $\{1,2,2^2,2^3,\cdots\}$ は漸化式の解．あとは，命題 8.2 の考え方によって，すべての解は，この二つの一次結合であることが分かる（初めの 2 項が一致するように一次結合を選べばよい．命題 9.1 も参照）．

練習問題 9.7 ある $\alpha \in \mathbb{R}$ があって $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \alpha f$ となる f である．このような関数の求め方は，2.2 節で説明した．答えは $f(x) = ce^{\alpha x}$ となる．

練習問題 9.8 α に条件が付く．$f = ce^{\alpha x}$ $(c \neq 0)$ であって，さらに $c\alpha^2 e^{\alpha x} = c_1 c\alpha e^{\alpha x} + c_0 c e^{\alpha x}$ を満たすもの．$\alpha^2 = c_1\alpha + c_0$ より，α は $t^2 - c_1 t - c_0 = 0$ の解．

練習問題 9.9 答えは $ae^x + be^{2x}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と書ける関数全体からなるベクトル空間. 以下の証明では，解析と線形代数が交錯して興味深い．

$f \in W$ を任意の元とする[*132]．$p = f(0)$, $q = f'(0)$ とおく． すると，a, b をうまく調節すれば，$g(x) = ae^x + be^{2x}$ についても，$p = g(0)$, $q = g'(0)$ となるようにできる (命題 9.1)．W が部分ベクトル空間なので，$g(x) \in W$ でもある．$f(x) = g(x)$ を示せばよい． $h(x) := f(x) - g(x)$ とおくと，$h(x) \in W$ であり，$h(0) = h'(0) = 0$ である．$i(x)$ を $\alpha e^x + \beta e^{2x}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$ なる関数とする（証明において補助的な役割を果たす関数である）．ここで，$h(x)$ と $i(x)$ に対して，

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} h(x) & i(x) \\ h'(x) & i'(x) \end{pmatrix}$$

とおく（これは，h と i の**ロンスキー行列式**と呼ばれるものである．W の任意の二つの元についても同様に定義される．これを考えるというのも線形代数の応用である）．積の微分法を使うと，

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} h'(x) & i'(x) \\ h'(x) & i'(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} h(x) & i(x) \\ h''(x) & i''(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h(x) & i(x) \\ h''(x) & i''(x) \end{pmatrix}$$

[*131] このように固有ベクトルより先に固有値が決まるのは，一般的なこと．下記の $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合を参照せよ．
[*132] 実は，f は微分方程式を満たす 2 回微分可能な関数で十分．

となるが，$h''(x) = c_1 h'(x) + c_0 h(x)$, $i''(x) = c_1 i'(x) + c_0 i(x)$ を代入すると，

$$\det \begin{pmatrix} h(x) & i(x) \\ c_1 h'(x) + c_0 h(x) & c_1 i'(x) + c_0 i(x) \end{pmatrix} = c_1 \det \begin{pmatrix} h(x) & i(x) \\ h'(x) & i'(x) \end{pmatrix} = c_1 W(x)$$

を得る． すなわち，$W'(x) = c_1 W(x)$ が成り立つ． よって，$W(x) = ce^{c_1 x}$ となる（$c \in \mathbb{R}$)．ところが， $W(0) = \det \begin{pmatrix} h(0) & i(0) \\ h'(0) & i'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & i(0) \\ 0 & i'(0) \end{pmatrix} = 0$ であるから， $c = 0$ でなくてはならず，よって $W(x) = 0$（関数として）である． $i(x)$ は決して 0 にならないので，$j(x) = \frac{h(x)}{i(x)}$ は意味を持ち，その微分は,

$$j'(x) = \frac{h'(x)i(x) - h(x)i'(x)}{i^2(x)} = -\frac{W(x)}{i^2(x)} = 0$$

であるから， $j(x)$ は定数関数である．すなわち，$h(x)$ は $i(x)$ の定数倍であるが， $h(0) = 0$, $i(0) \neq 0$ なので，$h(x) = 0$（関数として）でなくてはならない.

より本格的な議論は,
微分方程式講義　金子晃著（サイエンス社）の 4.1 節を見よ.

10　線形変換 $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の固有ベクトル

10.1　求め方

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が成立するのだった (9.1 節).

このような $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ はどのようにして見つけられるのか？ つまり，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ があって $f_B(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v}$ となるベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ を見つけたい．ここで $\boldsymbol{v}$ も未知だが，α も未知であることに注意する．そこで次のように問題を少し変えてみる:

$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる α と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ[*133].

さらにこれを次のように考え直す:

$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在するような α を求めよ.

先に倍率を決めてしまおうという発想の転換である．これを具体的に書き下してみると，

$\begin{cases} x + y = \alpha x \\ -2x + 4y = \alpha y \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\alpha)x + y = 0 \\ -2x + (4-\alpha)y = 0 \end{cases}$ となる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在するような α を求めよ,

となる.

こうして固有ベクトルと固有値を求める問題は**連立一次方程式を解く問題**となった． これには定理 6.8 が適用できることに注意する． よって，上の問題の α の条件は

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 \\ 2 & \alpha-4 \end{pmatrix} = (\alpha-1)(\alpha-4) + 2 = 0$$

であることが分かる． よって $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$ を解いて $\alpha = 2,\ 3$ を得る.

次に，各 α について解 (x, y) を求めればそれが固有ベクトル を与える.

注意 19.

例えば，$\alpha = 2$ に対して $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ も $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ も $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ も解であるが，これらは互いに定数倍であり，どれも本質的に同じもの． $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ と答えればよい．ここで $t \neq 0$ **という条件を忘れないようにすること**.

[*133] ここで $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という固有ベクトルの条件が極めて大事になってくる.

一般の A についての固有値と固有ベクトルの求め方

(1) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $(x,y)\neq(0,0)$ なる解をもつような α を求める.

$$\begin{cases} ax+ & by & =\alpha x \\ cx+ & dy & =\alpha y\end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha-a)\,x+ & -by & =0 \\ -cx+ & (\alpha-d)\,y & =0\end{cases} \iff (\alpha E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\text{ より,}$$

α は $(\alpha-a)(\alpha-d)-bc=0$, つまり $\underline{\det(\alpha E-A)=\alpha^2-(a+d)\,\alpha+ad-bc=0}$の解である.

これを A の**固有方程式**と言う. また, 多項式 $\det(tE-A)=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$ を A の**固有多項式**と言い, $\Phi_A(t)$ で表す. なお, 係数に出てくる $a+d$ は A の**トレース**と呼ばれる大事な量である. $\operatorname{tr}A$ で表す.

(2) 求まった α に対して $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ なる連立一次方程式を解き $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を求める.

注意 20. 固有方程式の実解に対しては，必ず 1 つは固有ベクトルが見つかることに注意. 固有値を求めた後，固有ベクトルを求める計算をして，「固有ベクトルが存在しない」という結論を出す間違いが非常に多い. そのような結論が出たら必ず検算すること. そのままではほとんど点が与えられないので注意.

練習問題 10.1. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ について，固有値と固有ベクトルを求めよ.

例 10.1.
$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $(0<\theta<2\pi,\ \theta\neq\pi)$ について，このとき固有ベクトルが存在しないことはすでに見た (図形的に明らかな理由). A の固有方程式の立場からこれを見てみよう. $\Phi_A(t)=t^2-2\cos\theta\cdot t+1=0\rightsquigarrow t=\cos\theta\pm i\sin\theta$. $\theta\neq 0,\ 2\pi,\ \pi$ により $\sin\theta\neq 0$. つまり t は実数ではない. このように「二次方程式に実数解がないから固有ベクトルとがない」と代数的に結論付けることもできるのである.

固有値問題 (c) について, いつでも, 互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルが 見つかるとは限らない. これは A の固有方程式の解の様子による.

例 10.2. 例 9.2 で調べ残していたことが決着する. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ について，$\alpha^2-2\alpha+1=0\rightsquigarrow$ $\alpha=1$ (重解) で解は 1 つしかない. 固有ベクトルも $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の定数倍しかないことが分かる.

注意 21. $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ の場合の固有値と固有ベクトルの求め方 は上の方法がそのまま通用する．早く知りたい人は，この時点で，18.1 章を読んでみるとよい．

注意 22. 多少繰り返しになるが，誤解を招きやすいので以下の事に注意を促しておく． 上で「固有ベクトルがない」とか「互いに定数倍でない二つの固有ベクトルが見つからない」という言い方をしたが, これは 2×2 行列 A によって定まる写像 $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対してであって, 同じ A によって定まる $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考えると, 固有ベクトルは少なくとも一つは存在することが分かる. その点については次節をよく読んで理解してほしい.

10.2 固有方程式と固有ベクトルの様子

この節では固有方程式と固有ベクトルの様子の関係を考察する.

1) $\Phi_A(t) = 0$ **が相異なる 2 つの実解** α, β **を持つ場合.**

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ が見つかる. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ は，A による拡大率が異なるので，互いに定数倍でない. よってこのときは互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルが見つかり， それらによって定まる斜交座標系（命題 9.1）を用いると f_A がよりよく理解できる． これはとても有用であるので，命題という形で述べておく.

命題 10.1. $\Phi_A(t) = 0$ が相異なる 2 つの実解を持てば, 互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルがある.

次のレポート問題は， ここの説明とは一見無関係なように見えて，実は大いに関係がある.

レポート問題

ある土地での天気は雨か晴れしかなく, 雨の日の次の日も雨になる確率は 0.1, 晴れの日の次の日も晴れる確率は 0.8 であるという. 長い年月を経たときのこの土地の雨の確率は，いくつに近づくでしょうか？

方針 ある日を基準にして, その日から n 日後に雨がふる確率を p_n, 晴れる確率を q_n とする. p_{n+1}, q_{n+1} を p_n, q_n の 1 次式で表してみよ. すると, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ なる行列表示が出来る. これを利用して, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ の極限を求めれば良い. $p_n + q_n = 1$ にも注意せよ.

解. 雨の日の次の日に雨になる確率は 0.1 であり, 晴れの日の次の日に雨になる確率は $1 - 0.8 =$

0.2 なので, $p_{n+1} = 0.1p_n + 0.2q_n$ である. 同様に, $q_{n+1} = 0.9p_n + 0.8q_n$ となる. 即ち $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ である.

$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 \end{pmatrix}$ とおく. $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ である.

この計算に A **の固有値, 固有ベクトルが役に立つ**. A の固有多項式は $\det(tE - A) = \det \begin{pmatrix} t - 0.1 & -0.2 \\ -0.9 & t - 0.8 \end{pmatrix} = t^2 - 0.9t - 0.1 = (t-1)(t+0.1) = 0$ より, A の固有値は $1, -0.1$ である.

固有値 1 に対する固有ベクトルは, $(E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.9 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ではない解より, $t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} (t \neq 0)$ である.

固有値 -0.1 に対する固有ベクトルは, $(-0.1E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.2 \\ -0.9 & -0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ではない解より, $t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t \neq 0)$ である.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は互いに定数倍でないので, $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在する（命題 9.1）. $\cdots$ ①

すると,

$$
\begin{aligned}
A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = aA^n \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + bA^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad &= aA^{n-1} \cdot A \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} && + bA^{n-1} \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= aA^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} && + bA^{n-1}(-0.1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= aA^{n-2} \cdot A \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} && + b(-0.1)A^{n-2} \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= aA^{n-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} && + b(-0.1)^2 A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
= \cdots \quad &= a \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} && + (-0.1)^n b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ とすると $(-0.1)^n b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \to a \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} (n \to \infty)$.

よって, $a \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ を求めれば良い．これを求めるのがややトリッキーである． ① を列ごとに足すと, b が打ち消し合って $p_0 + q_0 = (2+9)a + (1-1)b = 11a$ となる．ここで $p_0 + q_0 = 1$ に注意して, $a = \dfrac{1}{11}$. 従って, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \to \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} (n \to \infty)$.

つまり, n 日後に雨が降る確率 p_n は $\dfrac{2}{11}$ に近づく. □

類題

ある人は, 夕食として和食を食べた次の日, 和食を食べる確率は $\dfrac{1}{2}$ であり, 洋食を食べた次の日, 洋食を食べる確率は $\dfrac{1}{3}$ である．長い年月を経ると, 和食を食べる確率はいくつに近づくでしょうか？
$\left(\text{答え} : \dfrac{4}{7} \right)$

2) $\Phi_A(t) = 0$ が重解 α を持つ場合.

このとき，まず $\alpha \in \mathbb{R}$ であることに注意する．よって, 少なくとも 1 つ $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ がある．つまり, 少なくとも 1 つ固有ベクトルが存在するが, これと定数倍でない, もう一つの固有ベクトルが 見つかるときとそうでないとき両方あり得る.

2-1) $\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ で $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{pmatrix}$ の定数倍でないものがある場合 (picture).

このとき任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成立する.

$\because$ 命題 9.1より任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の一次結合なので. //

特に $A\boldsymbol{e}_1 = \alpha \boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2 = \alpha \boldsymbol{e}_2$ より $A = \alpha E$ である (このような行列を**スカラー行列**という).
この場合，A はかなり特殊であることが分かった.

2-2) $\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ を満たす固有ベクトルがすべて $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{pmatrix}$ の定数倍である場合.

このときは f_A をどのようにとらえたらよいのか？ ウォーミングアップとして次の問題を考えよう．

練習問題 10.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のときの固有値 α, 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めよ．固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を一つ選んでおく[*134]．このとき $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boldsymbol{u}$ となる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ を求めよ (picture).

これを 2-2) の場合に一般化すると， $A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ が見つかることが分かる．ここでは，これを証明せず，次章において 注意 24 で説明する．

このとき， $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で定まる斜交座標系 を考えると，

$$A\left(p\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha p\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + q\left(\alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = (\alpha p + q)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha q\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となって，座標 p, q は $\alpha p + q$, αq へと変化する．

これは行列を使って記述できるが，詳しくは， 表現行列の章（12 章）で説明する．さらにこの議論は，ジョルダン標準形の話へとつながってゆく（13.1 節）．

数列の場合において，類似の考え方には 次のような応用がある[*135].

練習問題 10.3. 8.6 節の漸化式を満たす数列の問題で, $c_1 = 2, c_0 = -1$ のとき $\{1, 1, 1, \cdots\}$ は 1 つの T の固有ベクトルである.[*136] このとき $T(\{a_n\}) = \{a_n\} + \{1, 1, 1, \cdots\}$ となる数列を (1 つ) 求めよ．これを利用して, 漸化式を満たす数列をすべて求めよ.[*137]

練習問題 10.4. ⊛ この問題を $t^2 = c_1 t + c_0$ が重解を持つときに一般化せよ．

練習問題 10.5. ⊛ 9.3 節の微分方程式の問題で $c_1 = -2, c_0 = -1$ のとき同様の問題を考えよ[*138]．

レポート問題

a を実数とする時, 行列 $A = \begin{pmatrix} a+7 & 2 \\ -2a-6 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

[*134] 定数倍を除き一つに決まる．

[*135] 練習問題 9.6 にしろ，この問題にしろ， その解き方というのは，T という特別な線形写像を持ち出す点は唐突に思えるかもしれない．しかし，それを通して漸化式を満たす数列の空間 W を見てやると， その固有ベクトルや それに近いものを求めると言う標準的な考え方により，漸化式の特別な解が求まり，さらに，それらを用いて，すべての漸化式の解が求まるのである．

[*136] これは以前に説明したやり方で求められる．

[*137] 練習問題 10.2 と同じ趣旨の問題であることを納得せよ．

[*138] 例 9.5 の特別な場合と思える．

解. $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ とする. A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}\det(tE-A)&=\det\begin{pmatrix}t-(a+7)&-2\\2a+6&t\end{pmatrix}\\&=t\{t-(a+7)\}+2(2a+6)\\&=t^2-(a+7)t+4(a+3)\\&=(t-4)\{t-(a+3)\}\end{aligned}$$

である. よって A の固有値は, $4, a+3$.

注: $4=a+3 \iff a=1$ より, A の固有値の個数は, $\begin{cases}4, a+3 & \text{の 2 個} \quad (a\neq 1\text{ の場合})\\ 4 & \text{の 1 個} \quad (a=1\text{ の場合})\end{cases}$ である.

固有値 4 の固有ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は, $(4E-A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ なる解である.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-(a+3)&-2\\2a+6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{cases}-(a+3)x-2y=0\\2(a+3)x+4y=0\end{cases}\\&\iff (a+3)x+2y=0\\&\iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\a+3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって, 固有値 4 に対する固有ベクトルは, $t\begin{pmatrix}-2\\a+3\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$.$\cdots$①

固有値 $(a+3)$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は, $\{(a+3)E-A\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ なる解である.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-4&-2\\2a+6&a+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{cases}-4x-2y=0\\2(a+3)x+(a+3)y=0\end{cases}\\&\iff 2x+y=0\\&\iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって, 固有値 $(a+3)$ に対する固有ベクトルは, $t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$. □

注: $a=1$ の時, ① は $t\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$ となり, $\left\{t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}, t\neq 0\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}, t\neq 0\right\}$ となっている. よってこの時, 固有値 4 $(=a+3)$ の固有ベクトルは低数倍を除いて 1 つの方向しか無い.

<u>練習問題</u> 10.6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $(a, b, d \in \mathbb{R})$(このような行列を**実対称行列**と呼ぶ) については, いつでも 2 つの定数倍でない固有ベクトルが存在することを示せ. また, スカラー行列でない実対称行列に対して, 定数倍でない 2 つの固有ベクトルは互いに直交することを示せ.

実対称行列のこの性質は, 2 次曲線の標準形を求める問題に応用される (13.2 節).

<u>練習問題</u> 10.7. $\circledast$
次の東大入試（2009 年理系）の問題を上の 1), 2-1), 2-2) の場合分けを使って解け.

実 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (1), (2) を満たすとする.

- [(1)]A の 1 つの固有値 s は 1 より大きく，その固有ベクトルは $\begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$ $(e \in \mathbb{R})$ の形.
- [(2)]$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, $x_n \longrightarrow 0, y_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$.

このとき $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ.

<u>練習問題</u> 10.8. $\circledast$ A を実 2×2 行列とする. $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{v}_0 \neq \boldsymbol{o}$ に対して, ある 2 より大きい整数 m が存在して, $A^m \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0$ かつ $0 < i < m$ に対して $A^i \boldsymbol{v}_0 \neq \boldsymbol{v}_0$ が成り立つと仮定する. このとき, $A^m = E$ を示せ.

3) $\Phi_A(t) = 0$ が実解をもたないとき.
このときは線形変換の拡大縮小の方向を求めるという幾何的問題としてはどうしようもない. しかし実は 1) の場合と (代数的な観点から言えば) 本質的に変わらないことが分かる. 結論から言えば, **複素数の範囲まで広げれば**，つまり，$f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の代わりに，同じ行列 A を複素ベクトルに同じように左から掛けて得られる $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考えれば，二つの互いに定数倍でない固有ベクトルを持つ.

10.3 線形変換 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の固有値問題

線形変換 $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の固有値・固有ベクトルの求め方は, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合とまったく同様である. 以下の練習問題を解いて納得してほしい.

<u>練習問題</u> 10.9. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

練習問題 10.10. $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}$ $(a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C})$ なる形の行列を**エルミート行列**という[*139]．エルミート行列の固有値は実数であることを示せ．また，互いに定数倍でない二つの固有ベクトルが存在することを示せ．

$\mathbb{C}^2$ の任意の二つのベクトル $\boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} := z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}$ とおく[*140]．スカラー行列でないエルミート行列に対して，$\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ を互いに定数倍でない固有ベクトルとすると，$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ が成り立つ事を示せ．

例 10.3 (数列). 9.2 節の設定で，$c_1 = 0, c_0 = -1$ のときを考えてみる[*141]． W の代わりに，数列の項として複素数まで許した $W_{\mathbb{C}} := \{\{a_n\} \mid$ すべての $n \geq 0$ に対して，$a_n \in \mathbb{C}, a_{n+2} = -a_n\}$ を考える．$T\colon W_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ は同様に定義される． $t^2 = -1$ の解は $\pm i$ である (特に，実数ではないが 2 つの相異なる解を持つ)．すると，$T(\{a_n\}) = i\{a_n\}$ なる実数列はないが，**複素数にまで範囲を広げれば**，公比 i の等比数列 $\{1, i, i^2, \cdots\}$ が漸化式を満たす．同様に，$T(\{a_n\}) = -i\{a_n\}$ も $\{1, (-i), (-i)^2, \cdots\}$ が漸化式を満たす．ここで $\{a_n\}$ を任意の漸化式を満たす実数列とすると，命題 8.2，練習問題 9.6 と同様にして，$\{a_n\} = \dfrac{a_0 - ia_1}{2}\{i^n\} + \dfrac{a_0 + ia_1}{2}\{(-i)^n\}$ が分かる[*142]．

実は，ここでの議論は複素数列としても何ら変わりはないことに注意する．

練習問題 10.11. 漸化式 $a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n$ を満たす複素数列をすべて求めよ．

例 10.4 (微分方程式). ⊛ 微分方程式のときは少し高級な話である．同様に $c_1 = 0, c_0 = -1$ の場合を考える[*143]．この場合，関数として，複素数に値を持つ関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を考える必要がある．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して， $f(x)$ が微分可能であるとは，$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ と書くとき（$f_1(x)$ は実部，$f_2(x)$ は虚部）， $f_1(x)$, $f_2(x)$ が微分可能であることと定義する． そして， 9.3 節の W の代わりに，何度でも微分できる関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 全体の中で， $W_{\mathbb{C}} := \{f \mid \frac{d^2f}{dx} = -f\}$ を考える．D は同じく微分によって定まる線形写像である． $D\colon W_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ の固有ベクトルは $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \pm if$ なる関数である．練習問題 9.7 から類推して， $e^{\pm ix}$ なる複素べきの指数関数があれば，その定数倍が解となると考えられる．これは正当化できる．実際， $\cos x \pm i \sin x$ がこの複素べきの指数関数 の役割を果たす（例 24.3 に少し説明を書いてある）．これらのことが分からなくても， $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \pm if$ なる関数が， $f = a(\cos x \pm i \sin x)$ （a は複素定数）に限られることが練習問題 9.7 と同様に示される． さらに， 練習問題 9.9 と同様にして，$W_{\mathbb{C}}$ の元は， $A(\cos x + i \sin x) + B(\cos x - i \sin x)$ $(A, B \in \mathbb{C})$ と書ける．別の書き方をすれば $C \cos x + D \sin x$ $(C, D \in \mathbb{C})$ と表示される．この

[*139] これは量子力学などで重要な自己共役作用素に対応する行列である．

[*140] これは複素ベクトル空間のエルミート内積と呼ばれるものの特別な場合である．24 章以降で詳しく扱う．

[*141] これは問題としてはあまりよくない．なぜなら答えが $\{\alpha, \beta, -\alpha, -\beta, \alpha, \beta, \ldots\}$ と簡単に分かるから．簡単に分かるものを難しく表現していることになるが， 複素数まで範囲を広げることで， 練習問題 9.6 と同様の考え方ができると言う点を納得してもらいたい．

[*142] やさしいものを難しく表現しているだけだが，一つの式で表示できるという利点はある．

[*143] 例 9.4 の特別な場合と思える．

うち，$C, D \in \mathbb{R}$ となるものを取れば，$\frac{d^2 f}{dx} = -f$ を満たす実関数がすべて求められたことになる[*144].

このように, 複素数の範囲まで広げることで, c_0, c_1 の値に応じて解いていた微分方程式を（指数関数解と言う視点で）統一的に解くことが出来るという利点がある.

こうして，ベクトル空間に出てくる量を複素数にまで広げて考える有用性がみてとれる.

10.4 $\Phi_A(t) = 0$ が実解を持たないときの $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ について (続き)

この節は, 10.2 節の場合 3) の議論の続きである.

A を**実** 2×2 行列とする．A に対して $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 (\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x})$ を考えることができる．これも f_A で表すことにする．これは $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の拡張と考えることができる．$\mathbb{C}$ は 2 次元なので $\mathbb{C}^2$ は 4 次元, よって $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は目で見えるものではない.

さて $\Phi_A(x) = 0$ が実解を持たない場合の考察を続けよう．その２つの複素数解を α, β $(\alpha \neq \beta)$ とすると, 固有多項式は実係数を持つから $\beta = \overline{\alpha}$ である．ここで $\overline{\alpha}$ は複素数 α の複素共役と呼ばれるもので，$\alpha = p + iq$ (p は実部，q は虚部）とするとき，$\overline{\alpha} = p - iq$ である．$\Phi_A(x) = 0$ が２つの実解をもつときとまったく同様にして, $A\boldsymbol{v}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2 = \overline{\alpha}\boldsymbol{v}_2$ となる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{o}$ (実は $\boldsymbol{v}_2 = \overline{\boldsymbol{v}_1}$ ととれる) が見つかる (問　確認せよ)．ただし, $\boldsymbol{v}_1$ も $\boldsymbol{v}_2$ も $\mathbb{R}^2$ の元ではなく $\mathbb{C}^2$ の元である．$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は互いに定数倍ではない[*145]．こうして $\Phi_A(x) = 0$ が 2 つの実解をもつときと同様に, 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトルが見つかる．すると命題 9.1 とまったく同様にして, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ による複素斜交座標が定まって, それにより f_A: $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を簡明に記述することができる.

注意 23. この幾何的な意味について少し考えてみる[*146]．$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は目で見えるものではないのでなかなか想像がしにくいが次のようになる (picture): $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を複素 x 平面と複素 y 平面に投影してみると, 拡大＋回転となっている．それを別の切り口実 xy 平面で切ったのが $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. なかなか想像しがたいが, 背後に回転がからんでいることは分かる（回転との関係は，練習問題 12.5 でも扱う．むしろそちらをよく理解してほしい）.

10.5 固有方程式と固有ベクトルの様子のまとめ

10.2 節，10.4 節で分かったことをまとめておく.

[*144] この解自体は物理で習ったことがあるかもしれない.
[*145] ここで定数倍ではないというのは複素数倍でないということ.
[*146] あまり深入りしない方がよい. むしろ，実数倍との類似で複素定数倍と考えておいた方がよい.

A が実 2×2 行列のとき.
$f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の固有ベクトルについて以下のいずれかが成り立つ.

- $\Phi_A(t) = 0$ が相異なる二つの実解を持てば, 互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルがある（10.2 節 1), 命題 10.1).
- $\Phi_A(t) = 0$ が重解を持てば, A はスカラー行列であるか, すべての固有ベクトルはすべて互いに定数倍である. 後者の場合, α を固有値, $\boldsymbol{u}$ を一つの固有ベクトルとすると, $A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ となるベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して, f_A の理解の助けとなる（10.2 節 2)).
- $\Phi_A(t) = 0$ が相異なる二つの実でない解を持てば, 実の世界では固有値も固有ベクトルも存在しないが, 複素ベクトル空間の線形変換 $f_A \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考えると, 互いに (複素) 定数倍でない 2 つの固有ベクトルがある (10.4 節).

A が複素 2×2 行列のとき, $f_A \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ について全く同様に 次が分かる. 場合分けは実の場合よりもすっきりする.

A が複素 2×2 行列のとき.
$f_A \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の固有ベクトルについて以下のいずれかが成り立つ.

- $\Phi_A(t) = 0$ が相異なる二つの解を持てば, 互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルがある.
- $\Phi_A(t) = 0$ が重解（ここでは実解とは限らない）を持てば, A はスカラー行列であるか, すべての固有ベクトルはすべて互いに定数倍である. 後者の場合, α を固有値, $\boldsymbol{u}$ を一つの固有ベクトルとすると, $A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ となるベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して, f_A の理解の助けとなる.

11　ケーリー・ハミルトンの定理と最小多項式（2×2行列の場合）

この章では行列を代数的にあつかう有用性を示す． $f_A:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ が 2 つの定数倍でない固有ベクトルを持つか持たないかということを問題にしてきた．これは行列 A の言葉で代数的に判定することができた（固有方程式の解の様子）． しかし，$\Phi_A(t)$ が重根を持つときは完全に $\Phi_A(t)$ の言葉で述べきれていない．これについては A の最小多項式を導入するとすっきりする．

11.1　ケーリー・ハミルトンの定理

その前に重要なケーリー・ハミルトンの定理を示しておく．一般に多項式 $f(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$ と $n\times n$ 行列 A に対して, $f(A):=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E$ と定義する．

定理 11.1 (ケーリー・ハミルトンの定理). $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$, つまり $\Phi_A(A)=O$ が成立する．

証明．直接計算で簡単に示せることはよく知っているであろう．ここでは違う証明を書いておく[*147]．

まず，$f_A:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ が互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルを持つときを考える．$A\boldsymbol{v}_1=\alpha\boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{v}_2=\beta\boldsymbol{v}_2$ とする．（$\alpha=\beta$ でもよい．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は互いに（複素）定数倍でない）．$\Phi_A(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ より

$$\Phi_A(A)=(A-\alpha E)(A-\beta E)=(A-\beta E)(A-\alpha E).$$

よって

$$(A-\alpha E)(A-\beta E)\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{o},\quad (A-\beta E)(A-\alpha E)\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{o}.$$

すべてのベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の一次結合で書けるから (命題 9.1), 結局, $(A-\alpha E)(A-\beta E)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$. ゆえに $(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$.

次に $f_A:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ のすべての固有ベクトルが互いに定数倍であるときを考える．このとき $\Phi_A(t)=0$ は重解をもつ． ポイントは, このとき 2×2 行列 A_x で, 各成分が x の連続関数になっており,[*148] $A_x\longrightarrow A\ (x\longrightarrow0)$, かつ, $x\neq0$ ならば $\Phi_{A_x}(t)=0$ が 相異なる 2 つの解を持つものが存在することである．ただし, $|x|$ は十分に小さいとしてよい．このような A_x はいくらでも取れる． 一例を挙げる． $f_A:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ のすべての固有ベクトルが互いに定数倍であると仮定しているので， $b\neq0$ または $c\neq0$ である．どちらの場合も同様なので，ここでは $b\neq0$ とす

[*147] 2×2 行列についてはまどろっこしく見えるかもしれないが，この方がなぜこの定理が成り立つのかという根拠は 分かりやすいはずである．また, あとで $n\times n$ 行列に一般化したときも通用する．

[*148] 複素平面上の連続関数 ということ．多変数の連続関数を参照のこと．

る． このとき， $A_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c+x & d \end{pmatrix}$ とおくと， $\Phi_{A_x}(t) = t^2 - (a+d)\,t + \{ad - b\,(c+x)\}$ なので，判別式は $(a+d)^2 - 4\{ad - b\,(c+x)\} = 4bx$ であり，$x \neq 0$ ならば 0 でない． 従って，このような A_x $(x \neq 0)$ に対しては, 上記の通り, $\Phi_{A_x}(A_x) = 0$ が成立している．具体的に書けば, ${A_x}^2 - (a+d)\,A_x + \{ad - b\,(c+x)\}\,E = O$ である．ここで, $x \to 0$ により この式の左辺は, A_x の各成分が x について連続であるので, $A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,E$ に収束するが, $x \neq 0$ で左辺はずっと O であるので, 収束先も O, すなわち, $A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,E = O$ が成立する． □

極限的考え方の応用として次を出しておく.

練習問題 11.1. ⊛ A, B を 2×2 行列とするとき $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$ を示せ.[*149]

注意 24 (重要). ケーリー・ハミルトンの定理によって， 10.2 節 2-2) のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の 見つけ方を与えることが出来る．まず，$(A - \alpha E)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ なる $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を任意に選ぶ．このような $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ はちゃんと存在する．実際, (2-2) の場合，$A - \alpha E \neq O$ であることに注意すると，$(A-\alpha E)\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{o}$，または $(A-\alpha E)\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{o}$ であるから，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ のいずれかを選べばよい. 次に $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (A-\alpha E)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ とおく．すると， ケーリー・ハミルトンの定理により, $(A-\alpha E)^2 = O$ であるから， $(A-\alpha E)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$，つまり， $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルになる.

11.2 最小多項式

ケーリー・ハミルトンの定理より A を固有多項式と言う 2 次式に代入すると O(零行列) となる．これにより次で定義されるような多項式が存在することが分かる.

定義 11.1 (最小多項式). A に対して，次を満たす多項式 $m_A(t)$ を**最小多項式**という.

(1) $m_A(t) \not\equiv 0$ であり, そ の最高次の係数は 1.

(2) $m_A(A) = O$.

(3) $m_A(t)$ は (1)，(2) を満たすものの中で最小次数.

[*149] ヒント:P : 正則 $\Longrightarrow \Phi_{P^{-1}AP} = \Phi_A$ に注．実は，2×2 行列である必要はない.

命題 11.1.
多項式 $f(t)$ が $f(A)=O$ を満たせば，$f(t)$ は $m_A(t)$ で割り切れる．特に $m_A(t)$ は $\Phi_A(t)$ の約数（よって，$m_A(t)$ は 1 次式又は 2 次式）．

証明. $f(t)=m_A(t)\,q(t)+r(t)$ ($q(t)$ は商，$r(t)$ は余り）とする．
$O=f(A)=\underbrace{m_A(A)\,q(A)}_{=O}+r(A)$ より $r(A)=0$．$\deg r(t)<\deg m_A(t)$ より $m_A(t)$ の定義から $r(t)\equiv 0$. □

練習問題 11.2. $a\in\mathbb{C}$ に対して, $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 又は $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の最小多項式を求めよ.

練習問題 11.3. ⊛ A, B を 2×2 行列とするとき， $m_{AB}=m_{BA}$ は成り立つか？

次の結果は，2×2 行列の話の中では，高級である[*150]．最小多項式が，f_A に対して 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトルが見つかるかという問題と密接に関係していることを言っている．

定理 11.2. f_A に対して， 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトルが存在することと，最小多項式 $m_A(t)$ が重根を持たないことは同値である.

証明. $\Phi_A(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ とおく．10.2 節で見た通り，A に対して

$$\begin{aligned} &f_A\text{の 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトルが存在} \\ \Longleftrightarrow &(*)\ \alpha\neq\beta,\ \text{又は } A \text{ はスカラー行列.} \end{aligned}$$

以下，条件 $(*)$ と $m_A(t)$ は重解を持たないことの同値性を示せばよい.
まず条件 $(*)$ を仮定する.

- $\alpha\neq\beta$ のとき $m_A(t)=\Phi_A(t)$ を示す.
  そうでないとしたら $m_A(t)=t-\alpha$, 又は $t-\beta$ である．これは $A=\alpha E$ 又はβE を意味し，従って $\Phi_A(t)=(t-\alpha)^2$ または $(t-\beta)^2$ となって矛盾.
  よって，特に $m_A(t)$ は重根を持たない.
- $A=\alpha E$ のとき．$m_A(t)=t-\alpha$ なので，$m_A(t)$ はやはり重根を持たない.

[*150] ただ，証明は今までやったことを踏まえると難しくはない.

逆に $m_A(t)$ が重根を持たないと仮定する．$(*)$ を導くためには，$\alpha=\beta$ と仮定して，$A=\alpha E$ を示せばよい．$\alpha=\beta$ ならば, $m_A(t)$ は $(t-\alpha)^2$ を割り切り，重解を持たないので，$m_A(t)=t-\alpha$ となって，確かに $A=\alpha E$ を得る． □

以下，最小多項式の可能性をまとめておく．

まとめ.

(1)	$\alpha\neq\beta$	のとき，	$m_A(t)=$	$(t-\alpha)(t-\beta)$.
(2)	$A=\alpha E$	のとき，	$m_A(t)=$	$t-\alpha$.
(3)	$\alpha=\beta,\ A\neq\alpha E$	のとき，	$m_A(t)=$	$(t-\alpha)^2$.

10.5 節のまとめと比較して， 条件が最小多項式という完全に代数的なものに置き換わった点が著しい．この定理は $n\times n$ 行列に一般化される（定理 20.2）．

練習問題 11.4.
A を 2×2 行列で $A^3=E$ とする．f_A は 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトルを持つことを示せ．

練習問題 11.5.
$A^3=aA$ を満たす A が 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトルを持たないとき，a と A を求めよ．

練習問題 11.6. 2×2 行列 A が $A^k=O$ $(k\in\mathbb{N})$ を満たすならば $A^2=O$ が成り立つことを示せ.

練習問題 11.7. A を 2×2 行列で $A\neq O$, $A^2=O$ を満たすものとする. このとき, 2×2 行列 X で $X^2=A$ を満たすものは存在しないことを示せ.

練習問題 11.8. ⊛ A, B を 2×2 行列とし, $C_n=A^n+B^n$ $(n\in\mathbb{N})$ とおく. ある $k\geq 1$ があって $C_k=C_{k+1}=O$ となるならば, $C_2=O$ であることを示せ.

12 表現行列入門

線形写像 $\mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^d$ や $\mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ はいつでも行列で表示できるのだった．この章と 17 章では, 任意の線形写像が行列で表示できることを示す．この章においては特別な場合にそれを見て, 17 章で一般化するが, 大事な点はほぼすべてこの章に現れる．

こうして，線形写像の研究 (例えば固有値問題) は行列の研究に帰着されることになり， 線形写像を理解するのに行列がいつでも本質的な役割を果たすことが分かる．

この章で考えるのは, 次の特別な性質を満たす複素ベクトル空間 V に対する 線形変換 $f\colon V \to V$ である:

(#) 2 つの V の元 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V$ があり，どんな元 $\boldsymbol{v}$ も $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の一次結合で唯一通りに書ける．

このような $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ のことを V の**基底**と呼ぶ．$\mathbb{C}^2$ がこれを満たしていることは，命題 9.1（の複素版）から分かる．この性質を満たすベクトル空間として, $\mathbb{C}^2$ を 12.1 節で, 漸化式を満たす数列のベクトル空間を 12.2 節で扱う．内容的にはほぼ同じことの繰り返しである．

12.1 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の場合

この節では A を 2×2 行列とし， $f_A\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を考える．

12.1.1 表現行列の定義と求め方

f_A の 2 つの互いに定数倍でない固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が見つかるとき, $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ による実斜交座標を用いると f_A がよく記述できるのだった (picture).

$$\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2 \rightsquigarrow \alpha p\boldsymbol{v}_1 + \beta q\boldsymbol{v}_2.$$

座標の変化を記すと $(p, q) \longmapsto (\alpha p, \beta q)$ である．これは $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ と同様に表示してみると, やはり $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p \\ \beta q \end{pmatrix}$ と行列を用いて書ける．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の決める斜交座標の f_A による変化を表す行列として $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が現れた.

$\mathbb{C}^2$ において，2 つの互いに定数倍でないベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は， 命題 9.1 で見た通り,（斜交）座標系を与える．そして実は,

> $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が固有ベクトルでなくても, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の定める斜交座標 ($\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ 座標ということにする) の f_A による変化は, やはり行列を使って書けることが分かる．

証明. $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2$ と書くと $f(\boldsymbol{v}) = pf(\boldsymbol{v}_1) + qf(\boldsymbol{v}_2)$. よって $f(\boldsymbol{v}_1)$ と $f(\boldsymbol{v}_2)$ が $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ で表されるならば, $f(\boldsymbol{v})$ も表せる. $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が互いに定数倍でないので, 命題 9.1 より,

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \gamma\boldsymbol{v}_2, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \beta\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2 \tag{12.1}$$

となる $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ が存在する. よって

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= p(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \gamma\boldsymbol{v}_2) + q(\beta\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2) \\ &= (p\alpha + q\beta)\boldsymbol{v}_1 + (p\gamma + q\delta)\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

こうして $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ 座標は
$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} p\alpha + q\beta \\ p\gamma + q\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と変化し, 線形変換 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の通常の座標の変化のように行列を左からかけることで記述される. □

まとめ

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の f_A による 行き先を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で表すことによって行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を得る (式 (12.1) を見よ. **係数の並べ方に注意**). $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する f_A の**表現行列**と呼ぶ.

(2) 表現行列の大事な性質が次： $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ 座標の変化は, 行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を左から掛けることで記述できる.

例 12.1. 基底 $\boldsymbol{e}_1$と $\boldsymbol{e}_2$ に関する f_A の表現行列は A に他ならない. このとき, 上のまとめの (1), (2) が確かに成り立っていることを各自納得しておくこと. (注意 2 参照).

表現行列の一つの求め方

$f_A(\boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$, $f_A(\boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ なので $(f_A(\boldsymbol{v}_1)\ f_A(\boldsymbol{v}_2)) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
他方, $f_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1,\ f_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2$ より, $(A\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2) = A(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ここで $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は 互いに定数倍でないので, $P := (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ は逆行列を持つことに注意.

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = P^{-1}AP \tag{12.2}$$

注意 25. これは次節で述べる基底の取り換えによる表現行列の変化の特別な場合に なっている. またこの話は, 13.1 節につながる.

例題

(1) $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に関する $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の表現行列を求めよ.
(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を互いに定数倍でない $\mathbb{R}^2$ の 2 つのベクトルとする. A を 2×2 行列とし, $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の $\underline{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2}$ に関する表現行列が $\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ であるとき, $\underline{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1}$ に関する表現行列は何か?

. $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する f_A の表現行列とは, $\begin{cases} f_A(\boldsymbol{v}_1)=\alpha\boldsymbol{v}_1+\gamma\boldsymbol{v}_2 \\ f_A(\boldsymbol{v}_2)=\beta\boldsymbol{v}_1+\delta\boldsymbol{v}_2\end{cases}$ となる $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を用いて書かれる $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ のことであった.

(1) 上の 2 つの式を満たす $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を計算する.

$$\begin{aligned} f_A(\boldsymbol{v}_1)=\alpha\boldsymbol{v}_1+\gamma\boldsymbol{v}_2 &\iff \begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha &=7 \\ \alpha+\gamma &=13\end{cases} \iff (\alpha,\gamma)=(3.5,9.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_A(\boldsymbol{v}_2)=\beta\boldsymbol{v}_1+\delta\boldsymbol{v}_2 &\iff \begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2\beta &=3 \\ \beta+\delta &=5\end{cases} \iff (\beta,\delta)=(1.5,3.5)\end{aligned}$$

従って, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する f_A の表現行列は $\begin{pmatrix}3.5&1.5\\9.5&3.5\end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する f_A の表現行列が $\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ なので, $\begin{cases} f_A(\boldsymbol{v}_1)=p\boldsymbol{v}_1+r\boldsymbol{v}_2 \\ f_A(\boldsymbol{v}_2)=q\boldsymbol{v}_1+s\boldsymbol{v}_2\end{cases}$ が成り立つ. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の順序を入れ替えると $\begin{cases} f_A(\boldsymbol{v}_2)=s\boldsymbol{v}_2+q\boldsymbol{v}_1 \\ f_A(\boldsymbol{v}_1)=r\boldsymbol{v}_2+p\boldsymbol{v}_1\end{cases}$ になる. 従って, $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1$ に関する f_A の表現行列は $\begin{pmatrix}s&r\\q&p\end{pmatrix}$ である. □

練習問題 12.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に関する f_A の表現行列を求めよ.[*151]

練習問題 12.2. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を互いに定数倍でない $\mathbb{R}^2$ の 2 つのベクトルとする. A を 2×2 行列とし, $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する表現行列が $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ であるとき, $2\boldsymbol{v}_2, 3\boldsymbol{v}_1$ に関する表現行列は何か?

練習問題 12.3. 10.2 節の 2-2) の状況で, $\Phi_A(t) = (t-\alpha)^2$ で $A \neq \alpha E$ のとき $A\boldsymbol{v}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = \alpha\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ となる基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ がとれた. この基底に関する f_A の表現行列を求めよ.

レポート問題

p, q を実数とするとき, 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を考える.
この数列に対して, 行列 A を $A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定めると, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ が成立していることが, 容易に確かめられる.
よって $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ となって, a_1, a_0 が与えられれば (初期条件), A^n を計算することで数列の一般項が計算できる（ここまで一般論. 知っておいて損はない）.
(1) A が互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルを持つのはいつか? p, q の条件を求めよ.
(2) A の固有値が 1 であり, A の全ての固有ベクトルが互いに定数倍であるとする. p, q を求めよ. また, $n \to \infty$ とするとき, a_n が 0 でない定数に近付くための, a_0, a_1 の条件を求めよ.

解. (1) A の固有多項式は $t^2 - pt - q = 0$. $D := p^2 + 4q$ とおくと,

- $D > 0$ ならば, A は 2 つの異なる実解を持つので, 互いに定数倍でない 2 つの固有ベクトルを持つ.
- $D = 0$ ならば, A は唯一つの実固有値 $\dfrac{p}{2}$ を持つが, A は $(2,1)$ 成分に 1 を持つために, スカラー行列にはならない. 従って, 全ての固有ベクトルは互いに定数倍である.
- $D < 0$ ならば, A は実固有値を持たないため, 実固有ベクトルを持たない.

以上により, 求める条件は $p^2 + 4q > 0$.

(2) (1) の解答より, $t^2 - pt - q = 0$ が $t = 1$ を重解を持つ p, q を求めれば良い. $t^2 - pt - q = (t-1)^2$ より, $p = 2, q = -1$.

[*151] 式 (12.2) を使ってもよいが, めのこでもできる. その方が意味がはっきりする.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると, $a_n = 0$ $(\forall n \geq 0)$ となって条件を満たさない. 以下, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ として良い.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルであるとする. $(E-A)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ である. この時, $A^n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ なので, $a_n = t \neq 0$ となり, a_n は 0 でない値に収束する.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルでないとする. $\boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{v}_2$ は固有ベクトルではないので, $\boldsymbol{v}_1 := (E-A)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である. ケーリー・ハミルトンの定理より $(A-E)^2 = O$ なので, $(A-E)\boldsymbol{v}_1 = 0$ である. つまり, $\boldsymbol{v}_1$ は A の固有ベクトルである.

従って $\begin{cases} A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 \\ A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{cases}$ より, $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ に関する $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. よって, $\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと, $A(z\boldsymbol{v}_1 + w\boldsymbol{v}_2) = z'\boldsymbol{v}_1 + w'\boldsymbol{v}_2$ となる. f_A を n 回繰り返すと f_{A^n} になるので, $\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと, $A^n(z\boldsymbol{v}_1 + w\boldsymbol{v}_2) = z_n\boldsymbol{v}_1 + w_n\boldsymbol{v}_2$ となる.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O \text{ のため.}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $A^n\boldsymbol{v}_2 = n\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ である. 従って $n \to \infty$ で a_n は収束しない.

以上により, 求める条件は $a_0 = a_1 \neq 0$. □

練習問題 12.4. A を任意の複素 2×2 行列とするとき, $f_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ の表現行列が $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形になる $\mathbb{C}^2$ の基底が存在することを示せ.

次の問題は 10.2 節の 3) の場合に, $f_A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の固有ベクトルが, $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ のよい表現行列を 与える $\mathbb{R}^2$ の基底を与えるのに役立つことを示している. また, 10.4 節の説明とも関係している.

<u>**練習問題**</u> **12.5.** A を実 2×2 行列とし, その固有値が実数ではないとする. その固有多項式の係数が実数であるので その固有値は $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおけることに注意して以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}$ を $A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$ となる固有ベクトルとするとき, $A\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\alpha}\ \overline{\boldsymbol{v}}$ を示せ.[*152]

(2) $\boldsymbol{v}+\overline{\boldsymbol{v}}$ と $i(\boldsymbol{v}-\ \overline{\boldsymbol{v}})$ はともに実ベクトルであり, $\mathbb{R}^2$ の基底となることを示せ.

(3) $\alpha = a+bi$ とする. $\boldsymbol{v}+\overline{\boldsymbol{v}},\ i(\boldsymbol{v}-\ \overline{\boldsymbol{v}})$ に関する $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の表現行列を a, b で表せ.

12.1.2　基底の取り換えによる表現行列の変化

$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{C}^2$ の基底とし，また，$\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ も $\mathbb{C}^2$ の基底であるとする． 基底を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ に取りかえたとき，表現行列がどう変わるかが記述できることを見よう[*153].

B を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ についての表現行列, C を $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ についての表現行列とする. (12.2) により, $B = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)^{-1}A(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2),\ \ C = (\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2)^{-1}A(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2)$ であるから,

$$C = \underbrace{(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2)^{-1}(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)}\ \ \underbrace{(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)^{-1}A(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)}_{B}\ \ \underbrace{(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)^{-1}(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2)}$$

が成立している. これは $D = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)^{-1}(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2)$ とおくと,

$$C = D^{-1}BD$$

が成り立つということである.

D の意味を考えよう. D の定義により，$(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)D$ である. $D = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ と書くと, $\begin{matrix} \boldsymbol{w}_1 = e\boldsymbol{v}_1 + g\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 = f\boldsymbol{v}_1 + h\boldsymbol{v}_2 \end{matrix}$ となり, つまり D は $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ **を** $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ **の一次結合で表す行列**である. これを**基底** $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ **から 基底** $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ **への基底の変換行列**と呼ぶ. D の大切な性質を述べる.

D は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ に関する座標 $p,\ q$ を $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ に関する座標 $r,\ s$ で表す行列にもなっている.

<u>証明</u>. $\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{w}_1 + s\boldsymbol{w}_2 = r(e\boldsymbol{v}_1 + g\boldsymbol{v}_2) + s(f\boldsymbol{v}_1 + h\boldsymbol{v}_2) = (re+sf)\boldsymbol{v}_1 + (rg+sh)\boldsymbol{v}_2$ であるから, $\begin{matrix} p = re+sf \\ q = rg+sh, \end{matrix}$ 　つまり，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$ □

[*152] つまり $\overline{\boldsymbol{v}}$ は $\overline{\alpha}$ の固有ベクトル.

[*153] A が $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ に関する f_A の表現行列なので，(12.2) では $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ から $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ へと取りかえた場合を説明していたことになる.

注意 26. 表現行列の変換と基底の変換は一見似ているが，まったく別物であることに注意!!

練習問題 **12.6.** $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ への基底の変換行列を求めよ.

12.2 漸化式を満たす数列のベクトル空間の場合

基底の考え方を使うと，$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ に限らず線形変換を行列で記述できるようになる．それを， 漸化式を満たす数列のベクトル空間 $W = \{\{a_n\} \mid \forall_{n\geq 0}, a_n \in \mathbb{C}, a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_0 a_n\}$ の場合に見てみよう．ほとんどの議論が 12.1 節と同じであることに注目してほしい.

12.2.1 表現行列

W について, 2 つの互いに定数倍でない 数列の組 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は， $\mathbb{C}^2$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ と同じ役割を果たす．つまり,

どんな W の数列 $\{d_n\}$ も唯 1 通りに $\{d_n\} = p\{a_n\} + q\{b_n\}$ と書ける.

これは, 命題 8.2 と同様に分かるので**各自考えてみること**.

> $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を使うと任意の線形変換 $f : W \longrightarrow W$(例えばずらし写像 T) も行列で表示できる.

証明. $f(\{a_n\})$, $f(\{b_n\})$ も W の元なので $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を使って, $f(\{a_n\}) = \alpha\{a_n\}+\gamma\{b_n\}$, $f(\{b_n\}) = \beta\{a_n\} + \delta\{b_n\}$ と書ける．$\{d_n\} \in W$ を任意にとる．$\{d_n\} = p\{a_n\} + q\{b_n\}$ と書ける.[*154]

$$\begin{aligned} f(\{d_n\}) &= pf(\{a_n\}) + qf(\{b_n\}) \\ &= p(\alpha\{a_n\} + \gamma\{b_n\}) + q(\beta\{a_n\} + \delta\{b_n\}) \\ &= (p\alpha + q\beta)\{a_n\} + (p\gamma + q\delta)\{b_n\} \end{aligned}$$

こうして $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ による座標の変化はやはり $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を左から掛けることで記述できる. □

[*154] $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ による座標表示のようなもの.

まとめ

(1) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の f による 行き先を $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ で表すことによって行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を得る.

(2) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ 座標の変化は, 行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を左から掛けることで記述できる.

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を基底 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に関する f の**表現行列**と呼ぶ.

例 12.2. もし $t^2-pt-q=0$ が重解をもたないならば, その 2 解を α, β とし, $\{a_n\}=\{\alpha^n\}$, $\{b_n\}=\{\beta^n\}$ ととると, $T(\{a_n\})=\alpha\{a_n\}$, $T(\{b_n\})=\beta\{b_n\}$ であったから T の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる.

練習問題 12.7. $\{a_n\}\in W$ を $a_0=1, a_1=0$ となる元, $\{b_n\}\in W$ を $b_0=0, b_1=1$ となる元とする. 基底 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する T の表現行列を求めよ.

12.2.2 基底の取り換えによる表現行列の変化

12.1.2 節と同様に, 基底を取り換えたときに表現行列がどう変化するのかも記述ができる. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を W の基底, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ も W の基底であるとする. ここでは, 12.1.2 節と異なり, そこでの議論を逆手に取って, 先に第二の基底 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ を第一の基底 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で表す行列を定義することにする. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一次結合で表す:

$$\begin{aligned} \{\alpha_n\} &= e\{a_n\}+g\{b_n\} \\ \{\beta_n\} &= f\{a_n\}+h\{b_n\}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

$D=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ **から** $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ **への基底の変換行列**という. 12.1.2 節の定義と比較せよ. 何度も言うが成分の並べ方に注意.

12.1.2 節と同様, D は $\{a_n\},\{b_n\}$ 座標を $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 座標で表す行列にもなっている.

証明. $\{d_n\}\in W$ を任意に取る. $\{d_n\}$ を $\{a_n\},\{b_n\}$ 座標で表すとき, $\{d_n\}=p\{a_n\}+q\{b_n\}$ と書

き, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 座標で表すとき $\{d_n\} = r\{\alpha_n\} + s\{\beta_n\}$ と書く.

$$\begin{aligned}\{d_n\} = r\{\alpha_n\} + s\{\beta_n\} &= r(e\{a_n\} + g\{b_n\}) + s(f\{a_n\} + h\{b_n\}) \\ &= (re + sf)\{a_n\} + (rg + sh)\{b_n\} \\ &= p\{a_n\} + q\{b_n\}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{matrix} p = re + sf \\ q = rg + sh \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}. \tag{a}$$

□

大切な事実だが, **D は逆行列を持つ.**[*155] 実際, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ から $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ への基底の変換行列を F とすると F が D の逆行列になることが分かる.

$$\begin{aligned}\{a_n\} &= e'\{\alpha_n\} + g'\{\beta_n\} \\ \{b_n\} &= f'\{\alpha_n\} + h'\{\beta_n\},\end{aligned} \tag{12.4}$$

$F = \begin{pmatrix} e' & f' \\ g' & h' \end{pmatrix}$ とおく. (12.3) を (12.4) に代入すると.

$$\begin{aligned}\{\alpha_n\} &= e(e'\{\alpha_n\} + g'\{\beta_n\}) + g(f'\{\alpha_n\} + h'\{\beta_n\}) \\ \{\beta_n\} &= f(e'\{\alpha_n\} + g'\{\beta_n\}) + h(f'\{\alpha_n\} + h'\{\beta_n\})\end{aligned}$$

を得るが, これは $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ の一次結合で表す式である. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ は基底であるからこのような表し方は一通りしかない. よって係数を比較して, $ee' + gf' = 1$, $eg' + gh' = 0$, $fe' + hf' = 0$, $fg' + hh' = 1$ が成り立つ. これは $FD = E$ に他ならない. 同様に (12.4) を (12.3) に代入して整理すれば $DF = E$ を得る. よって F は D の逆行列である.

命題 12.1. $f\colon W \to W$ を線形変換とする. B を (第一の) 基底 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する表現行列, C を (第二の) 基底 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ に関する表現行列とする. すると $C = D^{-1}BD$ が成立する.

証明. $f(\{d_n\})$ についても D によって $\{a_n\}, \{b_n\}$ 座標を $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 座標で表すことができる：$f(\{d_n\}) = p'\{a_n\} + q'\{b_n\} = r'\{\alpha_n\} + s'\{\beta_n\}$ と書くと,

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} \tag{b}$$

[*155] ここでの議論は, 命題 17.1 で一般化される.

が成立.
ところが, さらに表現行列 B, C の性質より,

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{c}$$

$$\begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \tag{d}$$

も成立している. (c) に (a) と (b) を代入すると,

$$D \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} = BD \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} = D^{-1}BD \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

これと (d) を見比べると, $C = D^{-1}BD$. □

12.2 節の内容は別の設定でも通用する. それを問題としておく. ただし, 微分を考えるので実ベクトル空間を 扱う.[*156] 以下の例においても, 互いに定数倍でない二つの元を基底と呼ぶ. 12 章の初めに述べた条件 (#) が成り立っている ことが確認できる (ここでは認めてよい).

練習問題 12.8. $W = \{p + qx \mid p, q \in \mathbb{R}\}$(つまり 1 次以下の多項式全体) とする. $f : W \longrightarrow W$ を, $p(x) \longmapsto \alpha p(x) + \beta p'(x)$ で定める. これが線形変換であることは認めてよい ($(p(x)+q(x))' = p'(x) + q'(x), \quad (kp(x))' = kp'(x)$ より).

1. f の基底 $1, x$ に関する表現行列を求めよ.[*157]
2. $x - 1, x - 2$ も基底である. $x - 1, x - 2$ に関する表現行列を求めよ.
3. $1, x$ から $x - 1, x - 2$ への基底の変換行列を求めよ.

練習問題 12.9. ベクトル空間 $W_1 = \{a \cos x + b \sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{ae^x + bxe^x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ に対して微分はそれぞれ $W_1 \to W_1$, $W_2 \to W_2$ なる線形変換を与えることが分かる. このそれぞれの線形変換の, 基底 $\cos x, \sin x$, e^x, xe^x に関する 表現行列を求めよ.

なぜ $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ と $W \longrightarrow W$ について類似のことが成立するのか？それは 12.4 節の同型の考え方を使うと一層はっきりする.[*158]

[*156] 実は複素に拡張できる.
[*157] $1, x$ の行き先, $1, x$ に関する座標の変化, いずれの考え方でもできる.
[*158] みんなけっこう無意識に使っていることをきちんと定式化したもの.

12.3　固有値問題と表現行列

表現行列を用いると 12 章の最初に述べた (#) を満たすベクトル空間に対する固有値問題は 2×2 行列の固有値問題に帰着する.

V を (#) を満たすベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を取り, それに関する f の表現行列を B とする. このとき,

命題 12.2. $f(p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2) = \alpha(p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2)$ であることと， $B\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ であることは同値である.

証明. 一般に，任意の元 $p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2$ に対して， $f(p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2) = r\boldsymbol{v}_1 + s\boldsymbol{v}_2$ とおくと，表現行列の性質より， $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ が成り立つ． よって， $f(p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2) = \alpha(p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow B\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. □

よって, B について 10.1 節の求め方 によって固有値と固有ベクトルを求めれば, f の固有値と固有ベクトルも求められる. こうして (#) を満たすベクトル空間の線形変換に 関しては, 固有値問題に対して満足な解答が得られることが分かった.

注意 27. 9.2 節の問題の場合は, 例えば練習問題 12.7 で求めた表現行列を用いて, この節の考え方で解くことも出来るが, 9.2 節で説明したやり方の方が単純である. これは問題の特性による.

練習問題 12.10. 練習問題 12.9 において, 微分の固有値と固有ベクトルを求めよ.

練習問題 12.11. 実 2×2 行列全体の集合 $M_{2,2}(\mathbb{R})$ が実ベクトル 空間になることは認めてよい. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおくとき次の問に答えよ.

1. A によって写像 $f \colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ を $M_{2,2}(\mathbb{R}) \ni X \mapsto AX - XA \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ で定める. f は線形変換であることを示せ.

2. $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の部分集合

$$V := \left\{ p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

が $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間になることを示せ.

3. f によって V の元は V の元に移されることを示せ.

4. $f\colon V\to V$ の基底 $\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-1\\0&-2\end{pmatrix}$ に関する表現行列を求めよ.

5. $f\colon V\to V$ の固有ベクトルを求めよ.

12.4 付録：同型という考え方

12.4.1 同型の定義

$\mathbb{C}^2$ と $W=\{\{a_n\}\mid\forall n,\ a_n\in\mathbb{C}, a_{n+2}=c_1a_{n+1}+c_0a_n\}$ は 2 つの元によって他の元をその一次結合として唯一通りに表すことができるという意味で非常に似ているのだった．このようなベクトル空間を本当に同一視してしまおうという考え方がある．

定義 12.1. V, W をベクトル空間とする． 写像 $f:V\longrightarrow W$ が**同型 (写像)** であるとは, 次の 3 条件がみたされるということ：

1) f は単射である (picture).

つまり $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{v}_2\Longrightarrow f(\boldsymbol{v}_1)\neq f(\boldsymbol{v}_2)$.
対偶をとれば，$f(\boldsymbol{v}_1)=f(\boldsymbol{v}_2)\Longrightarrow\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$.

2) f は全射である (picture).

つまり，どんな $\boldsymbol{w}\in W$ に対してもある $\boldsymbol{v}\in V$ があって $\boldsymbol{w}=f(\boldsymbol{v})$.

3) f は線形写像である.

V と W が**同型である**とは，V から W への, ある同型写像 $f:V\longrightarrow W$ が存在するということ． 同型写像は $f\colon V\xrightarrow{\sim}W$ という記号で表す.

この同型という考え方は, 1) と 2) のみ見ると, f によって V と W の元の間に 1 対 1 の対応があるということを意味している．言いかえれば, V と W の各元の個性を忘れるならば, V と W が f を通して同一視できるということである．さらに f が線形であるということにより, f を通して V と W のたし算と定数倍が対応していることになる．よって, 条件 1)–3) は f を通して, V と W がベクトル空間として同一視できるということを意味している.

例 12.3. $V=\mathbb{C}^2,\ W=\{\{a_n\}\mid\forall n,\ a_n\in\mathbb{C}, a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\}$ とおく．V と W が似ているということを同型の考え方で説明する．つまり V と W が同型であることを示す．定義によって, ある同型写像 $f:V\longrightarrow W$ を構成すればよい.

W において大切だったのは a_0 と a_1 によって数列が決まってしまうということだった． そこで $f:V\longrightarrow W$ を $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\overset{f}{\longmapsto}(a_0=x, a_1=y$ となる W の元 $\{a_n\})$ で定めてみる．これは確かに同型である．チェックすべきなのは次の 3 点: 1)f は線形． 2)f は単射． 3)f は全射.

1) •

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \xmapsto{f} (a_0 = x_1+x_2, a_1 = y_1+y_2 \text{となる } W \text{ の元 } \{a_n\}),$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \xmapsto{f} (b_0 = x_1, b_1 = y_1 \text{となる } W \text{ の元 } \{b_n\}),$$
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \xmapsto{f} (c_0 = x_2, c_1 = y_2 \text{となる } W \text{ の元 } \{c_n\})$$

である． $\{a_n\}$ も $\{b_n\}+\{c_n\} = \{b_n+c_n\}$ も第 0，1 項が同じなので一致：$\{a_n\} = \{b_n\}+\{c_n\}$.

つまり $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$.

• $f\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \alpha f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ は各自.

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ それらを 0，1 項とする数列は異なる：$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) \neq f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$． よって単射.

3) $\{a_n\} \in W$ を任意にとってくると，$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \{a_n\}$ となっているので 全射． //

こうして V と W が同型であることが分かった (picture).

<u>練習問題</u> 12.12.

- $V = \mathbb{C}^2$ と $W = \{1$ 次以下の複素係数多項式 $\}$ は同型であることを示せ.
- $V = \mathbb{C}^2$ と $W = \left\{ s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{C} \right\}$ は同型であることを示せ.
- $V = \mathbb{C}^2$ と $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z=0 \right\}$ は同型であることを示せ.
- θ 回転 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は同型写像であることを示せ.
- $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}\right)$ は同型写像でないことを示せ.

- $\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{C}^3$ は同型でないことを示せ. [*159]

線形代数においては，V と W が同型ならば V において成立することは W においても成立する，そういう事実を研究するのである

実は同型の定義は次の事実を確認しておかなければ考え方としては不十分である.

一般に V, W を集合, $f\colon V \to W$ を全単射とするとき, 各 $\boldsymbol{w} \in W$ を, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ に対応させることで, $W \to V$ を得る.[*160] これを f の逆写像と呼び f^{-1} で表す.

命題 12.3. V, W：ベクトル空間について，$f : V \longrightarrow W$ が同型 $\Longrightarrow f^{-1} : W \longrightarrow V$ も同型.

$\because f^{-1}$ が単射なこと：$f^{-1}(\boldsymbol{w}_1) = f^{-1}(\boldsymbol{w}_2) \Longrightarrow f \circ f^{-1}(\boldsymbol{w}_1) = f \circ f^{-1}(\boldsymbol{w}_2) \Longleftrightarrow \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$.

f^{-1} が全射なこと：$\boldsymbol{v} = f^{-1} \circ f(\boldsymbol{v})$.

線形性は各自.//

なぜこれを確認する必要があるのかの 1 つの納得の仕方は次の通り. 同型の定義は V と W について対称でない. だから本当は V **が** W **と**同型というべき. よって，V が W と同型でも W が V と同型というのは定義だけでは保証されない. 同型を通じて V と W を同一視したいのだから，V が W と同型なのに W が V と同型ではないという事態はさけたい. そんなことにはなっていないということを保証するのがこの命題である.

練習問題 12.13. 次を示せ:

$f : V \longrightarrow W,\ g : W \longrightarrow U$ が同型 $\Longrightarrow g \circ f : V \longrightarrow W \longrightarrow U$ も同型.

12.4.2 同型による表現行列の対応

同型の考え方を用いれば, W から W への線形変換を $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を通して理解できる. W と $\mathbb{C}^2$ は同型なのであった：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & W \\ \Uplus & & \Uplus \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \{a_n\} \quad (a_0 = x,\ a_1 = y)\,. \end{array}$$

[*159] 同型写像があるとして矛盾を導く.

[*160] f が全単射という仮定から, $\boldsymbol{v}$ が一通りに決まることに注意.

逆写像は

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \cup & & \cup \\ \{a_n\} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

であり，これも同型写像である．$\{1,0,\ldots\}$ なる数列が $\boldsymbol{e}_1$，$\{0,1,\ldots\}$ なる数列が $\boldsymbol{e}_2$ へうつっていることに注．そして $\{1,0,\ldots\}$ と $\{0,1,\ldots\}$ は W の基底をなす．

実は W の基底を選ぶごとに $W \longrightarrow \mathbb{C}^2$ なる同型写像が得られる．

$\because$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を W の基底とする．W の任意の元 $\{c_n\}$ は $\{c_n\} = p\{a_n\} + q\{b_n\}$ と唯 1 通りに書けるのであった．そこで $W \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を $\{c_n\} \longmapsto \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ で定める．これは基底を決めれば座標が決まるということに他ならない.[*161] このとき $W \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は同型写像であることが容易にチェックできる ($\because$ 線形性＋全射＋単射を各自チェックしてみよ). //

つまり W の基底 $\{a_n\},\{b_n\}$ を選ぶと $\{a_n\} \longmapsto \boldsymbol{e}_1$, $\{b_n\} \longmapsto \boldsymbol{e}_2$ となる $W \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$ が得られる．この同型写像を φ で表すことにする．

この同型写像を用いると，先に $\mathbb{C}^2$ と W について別々にやったこと（表現行列，基底の変換行列）を統一的に見ることができる.[*162]

まず $f: W \longrightarrow W$ の基底 $\{a_n\},\{b_n\}$ についての表現行列について考える．次の図式を見ながら考えると分かりやすい:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow{\scriptstyle\wr} & & {\scriptstyle\wr}\downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

ここで，$\varphi: \{a_n\} \longmapsto \boldsymbol{e}_1$, $\{b_n\} \longmapsto \boldsymbol{e}_2$ であった．また，図式の一番下の行にある $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は $g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ で定める．練習問題 12.13 より g は線形写像である．

$g: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は線形写像なので行列で書けるのであった: ある 2×2 行列 B があって，すべての $\boldsymbol{v}$ に対して，$g(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}$． これを f に翻訳すると，f の基底 $\{a_n\},\{b_n\}$ に関する表現行列が B であることが分かる．

$\because$ $\{c_n\} \in W$ を任意にとる．$\{c_n\} = p\{a_n\} + q\{b_n\}$ とかける．

$$\begin{aligned} f(\{c_n\}) = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(\{c_n\}) &= \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(p\{a_n\} + q\{b_n\}) \\ &= \varphi^{-1} \circ g\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = \varphi^{-1}\left(B\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

[*161] このとき $\{a_n\} \longmapsto \boldsymbol{e}_1$, $\{b_n\} \longmapsto \boldsymbol{e}_2$ となっていることに注意.

[*162] ただし求め方を与えるとは考えない方がよい.

$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと $\varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}\right) = p'\{a_n\} + q'\{b_n\}$.
すなわち

$$f(p\{a_n\} + q\{b_n\}) = p'\{a_n\} + q'\{b_n\}, \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

となって, B は $\{a_n\}\{b_n\}$ 座標の f による変化を表すので, まさに f の $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する表現行列である．//

次に基底を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ から $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ にとりかえたときの表現行列の変化をみる．φ は同型より $\varphi(\{\alpha_n\})$ と $\varphi(\{\beta_n\})$ は $\mathbb{C}^2$ の基底であることに注意.
$D = (\varphi\{\alpha_n\} \quad \varphi\{\beta_n\})$ とおく．$g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ の $\varphi(\{\alpha_n\}), \varphi(\{\beta_n\})$ による表現行列は $D^{-1}BD$ であった．つまり

$$g(r\varphi(\{\alpha_n\}) + s\varphi(\{\beta_n\})) = r'\varphi(\{\alpha_n\}) + s'\varphi(\{\beta_n\}), \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} = D^{-1}BD \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

である.
これを f に翻訳することで f の $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ に関する表現行列は $D^{-1}BD$ であることが分かる.
$\because$

$$\begin{aligned} f(r\{\alpha_n\} + s\{\beta_n\}) &= \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(r\{\alpha_n\} + s\{\beta_n\}) \\ &= \varphi^{-1} \circ g(r\varphi(\{\alpha_n\}) + s\varphi(\{\beta_n\})) \\ &= \varphi^{-1}(r'\varphi(\{\alpha_n\}) + s'\varphi(\{\beta_n\})) \\ &= r'\{\alpha_n\} + s'\{\beta_n\}. // \end{aligned}$$

また, D はまさに $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ から $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ への基底の変換行列であることも分かる.

同型の考え方を使うと，W に限らず, 12 章の最初の書いた条件 (#) を満たすベクトル空間 V については, 表現行列，基底の変換行列が, $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ なる線形変換の対応物から求まることが分かる.

13　行列の標準形とその応用

13.1　行列の相似とジョルダン標準形

12.1.1 節で見たように, 2×2 行列 A で定義される $f_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ について, 基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に関する表現行列は，$D = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ とおくと，$D^{-1}AD$ と書けるのであった.

線形変換 f_A を少し離れて, A を正則行列とその逆行列ではさむというこの操作に注目しよう.

定義 13.1. $A : 2\times 2$ 行列 に対して，$D^{-1}AD$ なる形の行列（D はある正則な 2×2 行列）を A と**相似な行列**という.

基底の取り換えによって表現行列同士は互いに相似である．逆に, 正則な行列 D を $D = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ と表示すると, $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は互いに定数倍でないので $\mathbb{C}^2$ の基底をなす．12.1.1 節の表現行列の求め方の説明をさかのぼることで，$D^{-1}AD$ が，f_A の D の列ベクトルに関する表現行列であることが分かる.

練習問題 13.1. 相似な 2×2 行列同士の 固有多項式と最小多項式は等しい事を示せ.

基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が A の固有ベクトルでもあれば, その固有値をそれぞれ α, β とすると，$D^{-1}AD = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ が成立する．$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ という形の行列を**対角行列**という．よって, A の固有ベクトルからなる基底があれば[*163], A は対角行列と相似になることが分かる．逆に, A が対角行列と相似であれば, つまり, 正則行列 D で $D^{-1}AD$ が対角行列となるものがあれば, D の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は，基底であると同時に A の固有ベクトルでもあることが分かる．これを命題としてまとめておく.

命題 13.1.

$$f_A\text{の固有ベクトルからなる基底がある} \Longleftrightarrow A\text{ が対角行列と相似.}$$

こうして, f_A の固有ベクトルからなる基底があるという理想的状況を純粋に行列の言葉で言い換えることができた.

さらに言葉を定義しておこう.

定義 13.2. A と相似な行列で対角行列となるものがとれるとき，A は**対角化可能**であるという．また, このとき, f_A が**対角化可能**であるともいう.

行列の対角化の次の応用はよく知っているであろう.

---

*163 今までは，「互いに定数倍でない固有ベクトル」と言っていたが，これからは，このように「固有ベクトルからなる基底」とか「基底をなす固有ベクトル」などと言うことが多い.

練習問題 13.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して A^n を計算せよ. $\left(答 : \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}\right)$

f_A の固有ベクトルからなる基底がない場合, つまり, 固有方程式が重解 α を持ち, すべての固有ベクトルが互いに定数倍である場合, 注意 24 に従って, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を $A\boldsymbol{v}_1 = \alpha \boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = \alpha \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ となるように取り, $D = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ とおくと, $D^{-1}AD = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ が成り立つ. 命題 13.1 に対応するのが次の命題である.

命題 13.2.

$$f_A \text{ の固有ベクトルからなる基底がない} \Longleftrightarrow A \text{ は} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{という形の行列と相似.}$$

証明. $\Rightarrow$ は今示した通り. $\Leftarrow$ は, 練習問題 13.1 を使って次のように示される[*164]. A と $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ が相似なので, 練習問題 13.1 より, A の最小多項式は $(t-\alpha)^2$ である. 従って, これは重根を持つので, 定理 11.2 より, f_A の固有ベクトルからなる基底がない. □

命題 13.1 と 13.2 をまとめると, 2×2 行列は, 対角行列か $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ という形の行列に相似であり, 前者の場合は, f_A の固有ベクトルからなる基底が存在し, 後者の場合はそうでない.

定義 13.3. 2×2 行列 A と相似な対角行列, または $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ という形の行列を A の**ジョルダン標準形**という.

練習問題 13.3. A を正則な 2×2 行列とするとき $X^2 = A$ を満たす 2×2 行列が存在することを示せ.

練習問題 10.6 において，実対称行列は互いに定数倍でない固有ベクトルを持つことを示した（つまり，それらは対角化可能である）．次節ではこれを他の問題に応用する．

[*164] 講義では，次のように説明した． A と $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ が相似なので， 練習問題 13.1 より，$\Phi_A(t) = \Phi_{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}(t) = (t-\alpha)^2$ が成り立つ．よって，A の固有値は α のみである． もし，A がスカラー行列であれば， $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ と相似にはなり得ない．よって，10.2 節 2) より，f_A の固有ベクトルからなる基底がない．

13.2　実対称行列の対角化の応用–二次曲線の標準形–

この節では, 実 2×2 行列と $\mathbb{R}^2$ の話に戻る.

定義 13.4. $\mathbb{R}^2$ において次の形の方程式で定義される図形 C を **2 次曲線**という.

$$C : f(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (a \sim f \in \mathbb{R}).$$

注：$a \sim f$ の値によっては $C = \emptyset$ ということもある．また $a = b = c = 0$ かつ $(d, e) \neq (0, 0)$ ならば C は直線である．こういう場合も含め，ここでは C を 2 次曲線ということにする．

この状況で自然に**実対称行列** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ がでてくる．A を使って C の方程式を書き下すことができる.

これを述べる前に行列の転置を定義しておこう.

定義 13.5. $A \in M_{l,m}(\mathbb{C})$ に対して, その (i, j) 成分を (j, i) 成分に置いたものを ${}^tA$ と書き, A の**転置行列**と言う. ${}^tA \in M_{m,l}(\mathbb{C})$ である.

つまり, A の i 行目が ${}^tA$ の i 列目, A の j 列目が ${}^tA$ の j 行目になっている. 転置行列は双対ベクトル空間を考えると自然に出てくる（練習問題 17.7 を参照）.

次は転置行列の大事な性質である.

命題 13.3. $A \in M_{l,m}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対して ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ が成り立つ.

これは ${}^t(AB)$, ${}^tB{}^tA$ それぞれの (i, j) 成分を計算してみれば分かる.

$n \times n$ 行列 A が**対称行列**であるとは, $A = {}^tA$ が成り立つと時に言う.

C の定義方程式が次のように書けることが直接計算で示される.

命題 13.4. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．$f(x, y) = {}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \boldsymbol{v} + f$ と書ける.

練習問題 13.4. $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$ を上のように対称行列を用いて表示せよ.

対称行列 A が対角化可能であることを利用すると C の方程式が簡単になるような直交座標系がとれることが分かる．これを求めるのがこの節の主題である.

命題 13.5. 実対称行列 A の固有ベクトルで互いに直交するものが選べる.

証明. 練習問題 10.6 の解答で, すでに証明を与えているが, ここでは別証明を与える．ただし, A の固有値が実数であることの証明は練習問題 10.6 の解答の通りとする． $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ のときは, 例えば $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ をとればよい（任意の 2 つの直交するベクトル）.

それ以外のとき, 次のように内積を使うとすっきり示せる[*165]．次の内積の性質に注目.
A を 2×2 行列とするとき $A\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1\cdot{}^tA\boldsymbol{v}_2$.
$\because\ \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2={}^t\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ により,

$$A\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2={}^t(A\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2=({}^t\boldsymbol{v}_1{}^tA)\boldsymbol{v}_2={}^t\boldsymbol{v}_1({}^tA\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1\cdot({}^tA\boldsymbol{v}_2).$$

行列積の結合法則と 転置の性質 (命題 13.3) が効いていることに注意.//
よって，A が対称行列ならば $A\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1\cdot A\boldsymbol{v}_2$ である．ここで $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ として互いに定数倍でない固有ベクトルをとる．$A\boldsymbol{v}_1=\alpha\boldsymbol{v}_1,\ A\boldsymbol{v}_2=\beta\boldsymbol{v}_2$ とおく．$A\neq\alpha E$ により $\alpha\neq\beta$ に注.

$$A\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=(\alpha\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_2=\alpha\,(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2),\ \boldsymbol{v}_1\cdot A\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1\cdot(\beta\boldsymbol{v}_2)=\beta\,(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)$$

より $\alpha\,(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)=\beta\,(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)$ であり，$\alpha\neq\beta$ なので，$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$ である． □

練習問題 13.5. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

注意 28. ただし，ここでは, 固有ベクトルを考えてはいるが, A で定義される線形写像を考えている訳ではない !!

A を対称行列とし，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ を互いに直交する固有ベクトルとする．さらに長さを調節することで $|\boldsymbol{v}_1|=|\boldsymbol{v}_2|=1$ としておく．$D=(\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2)$ とおくと[*166],

$$D^{-1}AD=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\Longleftrightarrow A=D\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}D^{-1}$$

とできるのであった．ここでさらに次のことに注.

命題 13.6. $D^{-1}={}^tD$.

証明. ${}^tDD=E$ を check すればよい (定理6.2)．${}^tD=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{v}_1\\ {}^t\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}$ より，${}^tDD=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1 & {}^t\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2\\ {}^t\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1 & {}^t\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. [*167] □

[*165] この考え方は $n\times n$ 実対称行列に拡張できる．25.2 節参照.
[*166] このように, 二列が直交する長さ 1 のベクトルであるような 2×2 行列を**直交行列**と呼ぶ. 直交行列は, 回転行列または鏡映行列であることが簡単に分かる.
[*167] 直交行列が回転行列または鏡映行列であることを使っても示せる.

命題 13.6 より $A = D\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}{}^tD$ が成立する．
これを $f(x,y)$ に代入する．

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& {}^t\boldsymbol{v}\left(D\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}{}^tD\right)\boldsymbol{v} + 2\begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix}\boldsymbol{v} + f\\
=& {}^t\left({}^tD\boldsymbol{v}\right)\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\left({}^tD\boldsymbol{v}\right) + 2\begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix}\boldsymbol{v} + f. \qquad (13.1)
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{w} := {}^tD\boldsymbol{v} = D^{-1}\boldsymbol{v}$ とおく．つまり

$$\boldsymbol{v} = D\boldsymbol{w}.$$

$\boldsymbol{w}$ の意味を考えよう．$D = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ であった．$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2$．つまり，$\boldsymbol{w}$ というのは $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ によって定まる座標系で表したものに他ならない**. 一般に, 長さが 1 で互いに直交するベクトルからなる基底を**正規直交基底**と呼び, それから定まる座標系を**正規直交座標系**という. このような座標系は通常の xy 座標系と同じ役割を果たす. $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は正規直交基底である. (13.1) を整理すると，

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& {}^t\boldsymbol{w}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\boldsymbol{w} + \underbrace{\begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix}D}_{(\delta\ \ \epsilon)\text{ とおく}}\boldsymbol{w} + f\\
=& \alpha p^2 + \beta q^2 + \delta p + \epsilon q + f. \qquad (13.2)
\end{aligned}
$$

となる．

$$g(p,q) = \alpha p^2 + \beta q^2 + \delta p + \epsilon q + f$$

とおくと，$f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow g(p,q) = 0$ である．よって，C は pq 座標系では右辺で定義される．**ポイントは pq の項がなくなったこと．** さらなる方程式の簡略化については練習問題で考える[*168].

レポート問題

以下の二次曲線について, その定義方程式が pq の項を持たないような正規直交座標系を見つけよ. それを利用して二次曲線の概形を描け (楕円, 放物線, 双曲線のいずれかになる).

- $f(x,y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 6x + 18y + 9.$

[*168] 詳しい 2 次曲線の分類表は，例えば参考文献で挙げた足助太郎著「線形代数学」の 9.2 節などを見よ.

解. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと, $f(x,y) = {}^t\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} + 2(-3 \quad 9)\boldsymbol{v} + 9$ である. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ とおく.

A の固有方程式は, $\det(tE - A) = (t-5)^2 - 1 = 0$ より, A の固有値は $t = 4, 6$. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を $t = 4$ に対する A の固有ベクトルとすると, $(4E - A)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を $t = 6$ に対する A の固有ベクトルとすると, $(6E - A)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\beta \neq 0)$.

$\alpha = \beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると, 各固有ベクトルの長さが1になり, また互いに直行するため, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は正規直交座標系である. $D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ と すると, D は直交行列である. 即ち, ${}^tD = D^{-1}$. $A = D\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}D^{-1} = D\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}{}^tD$ を $f(x,y)$ に代入すると,

$$f(x,y) = {}^t\boldsymbol{v}D\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}{}^tD\boldsymbol{v} + 2(-3 \quad 9)\boldsymbol{v} + 9 = {}^t({}^tD\boldsymbol{v})\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}({}^tD\boldsymbol{v}) + 2(-3 \quad 9)D({}^tD\boldsymbol{v}) + 9. \tag{13.3}$$

ここで $\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} := {}^tD\boldsymbol{v}$ とおいて (1) に代入すると,

$$\begin{aligned} g(p,q) = {}^t\boldsymbol{w}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\boldsymbol{w} + 2(-3 \quad 9)D\boldsymbol{w} + 9 &= p^2 + q^2 - 12\sqrt{2}p + 6\sqrt{2}q + 9 \\ &= 4\left(p - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6\left(q + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 12. \end{aligned}$$

この場合 $g(p,q)$ は pq の項を持たないため, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求めていた正規直交座標系である.

また, $g(p,q) = 0 \iff \left(\dfrac{p - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{q + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ より, $g(p,q) = 0$ の表す図形は, 中心が $(p,q) = \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 頂点が $\left(\pm\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ の楕円である.

最後に, 中心と頂点の情報を xy 座標に直す. $\boldsymbol{v} = D\boldsymbol{w}$ に中心と頂点の pq 座標を代入すれば次が得られる: $f(x,y)=0$ の表す図形は, 中心が $(x,y)=(1,-2)$, 頂点が $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}+1, \mp\frac{\sqrt{6}}{2}-2\right)$, $(2,-1)$, $(0,-3)$ の楕円である. □

練習問題 13.6. 以下の二次曲線について, その定義方程式が pq の項を持たないような正規直交座標系 を見つけよ. それを利用して二次曲線の概形を描け (すべて, お馴染の楕円, 放物線, 双曲線のいずれかになる).

- $f(x,y) = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 \quad$ (双曲線. 中心：$(3,2)$).
- $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 10y - 1 \quad \left(\text{放物線. 頂点：}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{7}{5}\right)\right)$.
- $f(x,y) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 6x + 18y + 9$.

注意 29. 二次曲線 C が楕円, 放物線, 双曲線である場合, それらのうちのどれになるかは 対称行列 A の二つの固有値の符号の組み合わせで判定できる. 二つの固有値がともに正またはともに負のとき楕円, その符号が異なるとき双曲線, 一つが 0 であるとき放物線である.

13.3 指数関数の行列バージョン

例 3.3 で言及した指数関数の行列バージョンについて，2×2 行列に限定して説明し，連立微分方程式の解法への応用を与える．

A を実 2×2 行列とする[*169]． A に対して，2×2 行列 e^A を，指数関数のテイラー展開を踏まえて，

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

と定義する．指数関数のテイラー展開の時と同様， 問題は，この右辺がちゃんと収束するかということである． これは数学 I で習う収束の議論で解決するのだが，ケイリー・ハミルトンの定理を使えば， 結局，通常の（ただし複素の）指数関数のテイラー展開の収束の話に 帰着される．これを以下見てみよう．

場合１．A が二つの相異なる固有値 α, β（一般には複素数）を持つとき． x^n を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割り算した結果を

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)q(x) + rx + s$$

[*169] 実は，以下の内容は複素 2×2 行列でも通用する．というより，以下の説明は，A を実行列としても， 固有値を使うので，複素数が避けられない．10.4 節で複素数に対して，指数関数を考えたのと同様である．

とおくと， $x=\alpha,\beta$ を代入することで， $r=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, $s=\frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}$ と分かる． よって，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$$A^n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A+\frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}E$$

が成り立つ（$n=0$ でも OK）[*170]． よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A+\frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}E\right)=$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)A+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}\right)E=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(e^\alpha-e^\beta)A+(\alpha e^\beta-\beta e^\alpha)E\} \tag{13.4}$$

となって確かに収束する．

場合２．A がただ一つの固有値 α を持つ場合． ケイリー・ハミルトンの定理より，$(A-\alpha E)^2=O$ であるから，二項定理を使うと，

$$A^n=\{(A-\alpha E)+\alpha E\}^n=n(A-\alpha E)\alpha^{n-1}E+\alpha^nE=n\alpha^{n-1}A+(1-n)\alpha^nE$$

となる（$n=0$ でも OK）． よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(n\alpha^{n-1}A+(1-n)\alpha^nE)=$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\alpha^{n-1}\right)A+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-n}{n!}\alpha^n\right)E=e^\alpha A+(1-\alpha)e^\alpha E \tag{13.5}$$

となり，確かに収束する．

こうして，e^A は無事に定義された． よって，A の代わりに t を変数として tA を考えると，e^{tA} が定義される．これは，(??), (??) により，t の関数を成分とする 2×2 行列である． 具体的に書き下しておくと，A が二つの相異なる固有値 α,β（一般には複素数）を持つとき，

$$e^{tA}=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(e^{\alpha t}-e^{\beta t})A+(\alpha e^{\beta t}-\beta e^{\alpha t})E\}, \tag{13.6}$$

A がただ一つの固有値 α を持つとき，

$$e^{tA}=te^{\alpha t}A+(1-\alpha t)e^{\alpha t}E \tag{13.7}$$

である． e^{tA} が指数関数と同様によい性質を持つことを示す．

まず，

$$(e^{tA})'=Ae^{tA} \tag{13.8}$$

[*170] A^n の公式．

が成り立つ．ただし，左辺は e^{tA} の各成分を t で微分すると言う意味である． これは，(13.6), (13.7) で得られた公式を微分し，ケーリー・ハミルトンの定理を使えば，容易に確かめられる．

また，

$$e^{tA}e^{-tA} = E \tag{13.9}$$

が成り立つ[*171]．これを示すためには，$e^{tA}e^{-tA}$ を微分してみると，積の微分法により，$(e^{tA}e^{-tA})' = (e^{tA})'e^{-tA} + e^{tA}(e^{-tA})'$ となるが，これは，(13.8) を使って，$Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA}$ となる．ところが，(13.6), (13.7) より，A と e^{tA} の積は可換である．よって，$Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA} = Ae^{tA}e^{-tA} - Ae^{tA}e^{-tA} = O$ となる．つまり，$(e^{tA}e^{-tA})' = O$， すなわち， $e^{tA}e^{-tA}$ は定数行列である．したがって， $e^{tA}e^{-tA} = e^{0A}e^{0A} = E$ が得られた．

さて，いよいよ，e^{tA} を例 3.3 の連立微分方程式の解法に 応用しよう．

定理 13.1. A を実 2×2 行列， $x_1(t), x_2(t)$ を微分可能な関数として，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とおくとき， 連立微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ を考える． この解は，$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$ で与えられる．ここで $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ は任意のベクトルである．

これから，$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の解は，その初期値 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(0)$ からただ一つに決まる事が分かる．

証明. 指数関数の行列バージョンを導入して， それが良い性質を持つことも示したので， 証明法は，2.2 節で与えた (2.4) の解法とほぼ同じである[*172]．

まず，$e^{tA}\boldsymbol{c}$ は確かに解である．実際，(13.8) より， $(e^{tA}\boldsymbol{c})' = (e^{tA})'\boldsymbol{c} = Ae^{tA}\boldsymbol{c}$ が成り立っている．

次に $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の解に対して， $\boldsymbol{y}(t) = e^{-tA}\boldsymbol{x}(t)$ とおく． この両辺を微分すると，

$$\boldsymbol{y}'(t) = (e^{-tA}\boldsymbol{x}(t))' = (e^{-tA})'\boldsymbol{x}(t) + e^{-tA}\boldsymbol{x}'(t) = -Ae^{-tA}\boldsymbol{x}(t) + e^{-tA}\boldsymbol{x}'(t)$$

となる．これに $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ を代入して， A と e^{-tA} が可換なことに注意すれば，$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{o}$ を得る．すなわち $\boldsymbol{y}(t)$ は定数ベクトルである． よって， $\boldsymbol{c} := \boldsymbol{y}(t)$ と置けば， $\boldsymbol{c} = e^{-tA}\boldsymbol{x}(t)$, この両辺に左から e^{tA} を掛ければ， (13.9) より $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$ を得る． □

この定理の系として，(13.9) の一般化を示すことが出来る．

系 13.1. A, B を実 2×2 行列として，$AB = BA$ が成り立っていると仮定する． このとき，$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ が成り立つ． 特に $e^Ae^B = e^{A+B}$（指数法則）が成り立つ．

証明. $F(t) := e^{tA}e^{tB}$ とおく． 積の微分法より，

$$F'(t) = (e^{tA})'e^{tB} + e^{tA}(e^{tB})' = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}.$$

[*171] これはより一般の指数法則の特別な場合である． 後で，微分方程式の解の応用として，一般の場合を示す．

[*172] 最終的には解析であるが，上で見たように， 指数関数の行列バージョンの導入という 線形代数の考え方が本質的な役割を果たしている．

ここで，$AB = BA$ を仮定しているので，(13.6), (13.7) より，$Ae^{tB} = e^{tB}A,\ Be^{tA} = e^{tA}B$ が成り立つ．よって，

$$Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F(t),$$

つまり，$F'(t) = (A+B)F(t)$ が成り立つ．これは，$F(t)$ の各列が，微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = (A+B)\boldsymbol{x}(t)$ の解になっているという事である．$F(0) = E$ より，定理 13.1 から，$F(t)$ の i 列目 $(i = 1, 2)$ は $e^{t(A+B)}\boldsymbol{e}_i$ と分かる．よって $F(t) = e^{t(A+B)}$ が成り立つ．□

定理 13.1 の連立微分方程式は，実は，微分方程式 (9.3) を含んでいる．実際，微分方程式 (9.3) において，変数を x から t に変えて，$x_1(t) = f(t), x_2(t) = f'(t)$ とおくと，微分方程式 (9.3) は，

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) &= f''(t) = c_1x_2(t) + c_0x_1(t) \end{aligned}$$

となり，定理 13.1 において，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix}$ とした場合になっている．よって，定理 13.1 は，微分方程式 (9.3) の別解法を与える．

この節の話は，$n \times n$ 行列にも一般化される．23 章を参照のこと．2×2 行列では，ジョルダン標準形を持ち出さずに済ませられたが，$n \times n$ 行列の場合はそれが必要である．ただし，23 章では，ジョルダン標準形の代わりにジョルダン分解を使っている．

次は，2015 年度講義時に出題したレポート問題である．

レポート問題

次の微分方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = -2$

(2) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$

解．$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とする．A を 2×2 行列とすると, $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c}$ は定数ベクトル) である．e^{tA} の定義より $e^{0A} = e^{O} = E$(単位行列) であるので, $\boldsymbol{x}(0) = e^{0A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$ が成り立つ．従って初期条件が与えられている場合の解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}(0)$ 唯一つである．e^{tA} は A の固有値の個数によって計算方法が変わるので, (1), (2) で分けて計算する．

(1) $\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ より，$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると求める解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}(0) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．A の固有多項式は $\det(tE - A) = (t-2)(t-3)$ より, A は異なる二個の固有

値 $3,2$ を持つ．よって，

$$e^{tA}=\frac{1}{3-2}\left\{\left(e^{3t}-e^{2t}\right)A+\left(3e^{2t}-2e^{3t}\right)E\right\}=\begin{pmatrix}2e^{3t}-e^{2t} & -e^{3t}+e^{2t}\\ 2e^{3t}-2e^{2t} & -e^{3t}+2e^{2t}\end{pmatrix}.$$

従って，$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}2e^{3t}-e^{2t} & -e^{3t}+e^{2t}\\ 2e^{3t}-2e^{2t} & -e^{3t}+2e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4e^{3t}-3e^{2t}\\ 4e^{3t}-6e^{2t}\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{x}'(t)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -5\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ より，$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ とすると求める解は $\boldsymbol{x}(t)=e^{tA}\boldsymbol{x}(0)=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ である．A の固有多項式は $\det(tE-A)=(t+2)^2$ より，A は唯一つの固有値 -2 を持つ．よって，

$$e^{tA}=te^{-2t}A+(1+2t)e^{-2t}E=\begin{pmatrix}(3t+1)e^{-2t} & -3te^{-2t}\\ 3te^{-2t} & (-3t+1)e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

従って，$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}(3t+1)e^{-2t} & -3te^{-2t}\\ 3te^{-2t} & (-3t+1)e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(6t+1)e^{-2t}\\ (6t-1)e^{-2t}\end{pmatrix}$. □

13.4 話題：曲面のガウス曲率

2.1 節の話をもう少し続けてみよう．

実は，第一，第二基本量は次のように 2×2 対称行列として理解しておくと よい[*173]：

$$I:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_s\cdot\boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}_s\cdot\boldsymbol{g}_t\\ \boldsymbol{g}_s\cdot\boldsymbol{g}_t & \boldsymbol{g}_t\cdot\boldsymbol{g}_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix},$$

$$II:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_{ss}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{g}_{st}\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{g}_{st}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{g}_{tt}\cdot\boldsymbol{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}.$$

I, II を，それぞれ**第一，第二基本行列**という．

なぜこのように捉えておくと都合が良いかと言うと， 曲面のパラメーター表示を取り替えた時の 第一，第二基本量の変化を記述しやすいからである．

2.1 節において，曲面 S を $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ なる写像の像として定義した．その定義の性格上，曲面 S はパラメーター表示されている（地図付きで与えられている）が，曲がり具合を考えるときは，S 自体を問題にすべきである． 実は，第一，第二基本量は，像が同じでも違う写像を取れば（言い換えれば，違うパラメーター表示を取れば），変化することが分かる．これらから，

[*173] というわけで，ここにこの話を持ってきたのである．

写像の像だけで決まる量を取り出したいので，パラメーター表示を取り替えた時，第一，第二基本量の変化を記述しておきたい[*174].

曲面 S の別のパラメーターを u,v とする．これは，$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ なる写像

$$\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (h_1(u,v), h_2(u,v), h_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

であって，その像が g と同じであるものである．実は，このとき，$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ なる写像 $(u,v) \mapsto (s(u,v), t(u,v))$ があって[*175]，$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は 合成関数

$$(u,v) \mapsto (s(u,v), t(u,v)) \mapsto (g_1(s(u,v), t(u,v)), g_2(s(u,v), t(u,v)), g_3(s(u,v), t(u,v))) \quad (13.10)$$

になっている事が分かる[*176](picture)．u,v に関する S の第一，第二基本量を $\widetilde{M}$ のように~を付けて表すことにする．(13.10) に，合成関数の偏微分の公式（連鎖律）[*177]を適用すれば，u,v に関する S の第一，第二基本量を s,t に関する S の第一，第二基本量で表すことが出来る．実際，$i=1,2,3$ に対して，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_i}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} g_i(s(u,v), t(u,v)) = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial g_i}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial g_i}{\partial t}, \\
\frac{\partial h_i}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} g_i(s(u,v), t(u,v)) = \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial g_i}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial g_i}{\partial t}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これを

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_u & \boldsymbol{h}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

と行列表示すると見通しが良くなる[*178]．出てくる 行列 $J := \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}$ は 写像 $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (s(u,v), t(u,v)) \in \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列に他ならない.

ここで，

$$\widetilde{I} = {}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_u & \boldsymbol{h}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_u & \boldsymbol{h}_v \end{pmatrix},\ I = {}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}_t \end{pmatrix}$$

と書けることに注意すると，(13.11) より，

$$\widetilde{I} = {}^tJIJ \quad (13.12)$$

を得る．

[*174] 12 章と考え方は似ている．基底を取りかえると表現行列は変化するのだった．その変化を記述しておくことで（その変化を相似というのだった），固有値と言う，表現行列によらない量を取り出すことが出来たのだった.

[*175] $s,\ t$ が u,v の関数になっているという事である．u,v に関して何度でも偏微分可能になる.

[*176] 本当は，S の各点で局所的に考える必要がある.

[*177] 数学 I で習っているはずである.

[*178] このように，連鎖律も行列の有用性を示す好例である．有用性と言うより，「行列と言うのは至る所に出てくるものだ」と言うべきかもしれない.

第二基本量についても，同様に変化が記述できるが， 一手間挟む必要がある． $\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{g}_t$ で張られる平面の法線ベクトルだから，$\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{g}_t \cdot \boldsymbol{n} = 0$ が成り立つことに注意する． この内積に，積の微分法を適用して[179]，$\boldsymbol{g}_{ss} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{n}_s = 0$ などを得る． これにより，

$$L = \boldsymbol{g}_{ss} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{n}_s,\ M = \boldsymbol{g}_{st} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{g}_s \cdot \boldsymbol{n}_t,\ N = \boldsymbol{g}_{tt} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{g}_t \cdot \boldsymbol{n}_t \tag{13.13}$$

を得る．これらの右辺を使って，第一基本量の時と同様に連鎖律を踏まえて 計算すれば,

$$\widetilde{I\!I} = {}^tJ I\!I J \tag{13.14}$$

を得る（この計算は各自に任せる）[180].

(13.12), (13.14) を見ると， パラメーター表示によらない S の量を取り出すことが出来る．これらの式により

$$\widetilde{I}^{-1}\widetilde{I\!I} = J^{-1}(I^{-1}I\!I)J$$

が得られることに注意する[181]． つまり $\widetilde{I}^{-1}\widetilde{I\!I}$ と $I^{-1}I\!I$ は相似である！ よって，$\widetilde{I}^{-1}\widetilde{I\!I}$ と $I^{-1}I\!I$ の固有値は等しい． まとめると，**第一基本行列の逆行列に，第二基本行列を掛けて得られる行列の固有値は，パラメーター表示によらず，S だけから決まる**． 実は，この固有値が実数であることが分かる（後述）． この固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \leq \lambda_2$ としておく） を**主曲率**という．また, $K := \lambda_1\lambda_2$ を**ガウス曲率**, $H := \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ を**平均曲率**と呼ぶ．K は $I^{-1}I\!I$ の行列式 $= \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$， H は $I^{-1}I\!I$ のトレースの $\frac{1}{2}$ に他ならないので，固有値を求めなくても計算できる．

<u>例</u> **13.1.** 2 変数 $z = h(x, y)$ のグラフの場合，例 2.2, 2.4 より， ガウス曲率 K は

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{h_{ss}h_{tt} - h_{st}^2}{(h_s^2 + h_t^2 + 1)^2}$$

である．

1. $h(x, y) = x^2 + y^2$（回転放物面）の場合， $K = \frac{4}{(4s^2+4t^2+1)^2} > 0.$
2. $h(x, y) = x^2 - y^2$（一葉双曲面）の場合， $K = \frac{-4}{(4s^2+4t^2+1)^2} < 0.$
3. $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$（半球）の場合， $K = 1$ で一定である．

また，円柱の表面 $g\colon (s, t) \mapsto (\cos s, \sin s, t)$ の場合， $K = 0$ でこれも一定である．

これらの意味は，定理 13.2 によって一層はっきりする．

---

[179]適用できることを確認せよ．

[180]このように，(13.12), (13.14) において， 行列を,「行列と行列の転置で挟む」という変換が現れた．これは 2 次曲線の標準形を求める際にも現れた． この一致は実は偶然ではない． これを説明するには,「二次型式」というものを定義するとよいのだが，残念ながらこの講義では，時間の都合で割愛する（27 章のコメント参照）．

[181]I は正則であることに注意する． 実際，I の行列式は $EG - F^2$ であり， これは，ベクトル $\boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{g}_t$ (ともに $\boldsymbol{o}$ でなく平行でもない）を 2 辺とする 平行四辺形の面積の 2 乗であるから 0 でない（2.1 節参照）．

以上により，確かに曲面 S に固有の量を取り出すことに成功したが，上の定義では， それらが S の曲がり具合を表しているのかは（少し雰囲気が出ているものの）明らかではない．最後にこれを明らかにしたい．その議論には，思わぬ形で行列 $I^{-1}II$ の固有値問題が現れてくる．

大雑把にいえば，曲面 S の一点 $g(s_0,t_0)$ における主曲率とは， 「S において，$g(s_0,t_0)$ から色々な方向へ，ただし一定距離，離れるとき，$g(s_0,t_0)$ における接平面からどれだけ離れるかの最小値と最大値を 表している」ということを明らかにする．

準備として，2.1 節で予告したように， 第一基本量によって S 上の曲線の長さを測ることが出来ることができることを示しておく[*182]． $\mathbb{R}^3$ における曲面を $\mathbb{R}^2$ からの写像の像として定義したように，$\mathbb{R}^3$ における曲線とは $\mathbb{R}$ からの写像の像の事と定義する．しかも S 上の曲線とは，ある写像 $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}\ni u\mapsto (s(u),t(u))\in\mathbb{R}^2$) を用いて，合成写像 $g\circ\gamma$ の像となっているものと定義する[*183](picture)．この曲線を C で表す．u が u_0 から $1\gg\Delta u>0$ だけ変化するとき， 曲線 C は，連鎖律を用いると，大体，

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s}(s(u_0),t(u_0))s'(u_0)+\frac{\partial g_1}{\partial t}(s(u_0),t(u_0))t'(u_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(s(u_0),t(u_0))s'(u_0)+\frac{\partial g_2}{\partial t}(s(u_0),t(u_0))t'(u_0)\\ \frac{\partial g_3}{\partial s}(s(u_0),t(u_0))s'(u_0)+\frac{\partial g_3}{\partial t}(s(u_0),t(u_0))t'(u_0)\end{pmatrix}\Delta u = (s'(u_0)\boldsymbol{g}_s(s(u_0),t(u_0))+t'(u_0)\boldsymbol{g}_t(s(u_0),t(u_0)))\Delta u \tag{13.15}$$

だけ変化する[*184]．ただし，s', t' は u についての微分を表す． 距離で言えば，

$$\|(s'(u_0)\boldsymbol{g}_s(s(u_0),t(u_0))+t'(u_0)\boldsymbol{g}_t(s(u_0),t(u_0)))\Delta u\|$$

だけ変化するが，これは第一基本量を使えば

$$\sqrt{Es'(u_0)^2+2Fs'(u_0)t'(u_0)+Gt'(u_0)^2}\Delta u$$

と書ける． よって， u が a から b まで増大するとき， C の長さは

$$\int_a^b\sqrt{E(s'(u))^2+2Fs'(u)t'(u)+Gt'(u)^2}du$$

で与えられる．

以下，速度が一定，しかも 1 となるように，パラメーターを 取り替えておくと便利である．そのためにはパラメーターを曲線の長さに取り替えればよい．このようなパラメーターを**弧長パラメーター**と言う． 以下，u を弧長パラメーターとする．このとき， $\boldsymbol{v}(u):=s'\boldsymbol{g}_s+t'\boldsymbol{g}_t$ と置けば，

$$\boldsymbol{v}(u)\cdot\boldsymbol{v}(u)=Es'(u)^2+2Fs'(u)t'(u)+Gt'(u)^2=1 \tag{13.16}$$

[*182] すると，曲率を定義する行列は， 接平面からの離れ具合を測る行列 II を，距離を測る行列 I で「割ったもの」と見ることができて，一定距離離れたときどのくらい接平面から離れるかを測っているという雰囲気が出る．

[*183] やはり γ は何度でも 微分可能と仮定する．

[*184] u を時間と見れば， $s'(u_0)\boldsymbol{g}_s(s(u_0),t(u_0))+t'(u_0)\boldsymbol{g}_t(s(u_0),t(u_0))$ は速度ベクトルである．曲面 S に対して $\boldsymbol{g}_s$, $\boldsymbol{g}_t$ がともに $\boldsymbol{o}$ でなく平行でもないと言う条件を課したが，対応して，C について， $s'\boldsymbol{g}_s+t'\boldsymbol{g}_s$ が $\boldsymbol{o}$ でないと仮定する．これは，$\boldsymbol{g}_s$, $\boldsymbol{g}_t$ の条件から，$s'\neq 0$ または $t'\neq 0$ と同値である．

が成り立っている．

これを踏まえて，S 上を点 $g(s_0, t_0)$ から，曲線 C にそって一定距離動くとき[*185]，どのくらい $g(s_0, t_0)$ における接平面から離れるか（正確には離れようとするか）を定式化する．それは，曲面の時と同様，加速度ベクトル $\boldsymbol{v}'(u)$ によって測る[*186]．(13.16) を微分すると $\boldsymbol{v}'(u) \cdot \boldsymbol{v}(u) = 0$ を得る．つまり，加速度ベクトルは速度ベクトルに直交している[*187]．平面内の曲線でも同様の事を考えることが出来るが，その場合，速度ベクトルに直交する方向は $\pm$ を除いて一つに決まる．しかし，空間内の曲線の場合はもっと自由度がある (picture)．そこで $\boldsymbol{v}'(u)$ を S の性質と相性がよいように分解しておく．2.1 節の通り，S の接平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を取る．$\boldsymbol{\kappa}_S := \boldsymbol{v}'(u) - (\boldsymbol{v}'(u) \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ を考えると これは $\boldsymbol{n}$ と直交するので，接平面に属する．よって $\boldsymbol{\kappa}_n := (\boldsymbol{v}'(u) \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ と置けば，$\boldsymbol{v}'(u) = \boldsymbol{\kappa}_S + \boldsymbol{\kappa}_n$ と分解する．$\boldsymbol{\kappa}_n$ は接平面の法線方向にどの位速度ベクトルが変化するかを表している (picture)．$\boldsymbol{v}'(u) \cdot \boldsymbol{n}$ のことを C の**法曲率**と言う．この法曲率は，第二基本量を用いて表される．実際，$\boldsymbol{v}(u) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ より，これを微分して，

$$\boldsymbol{v}'(u) \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{v}(u) \cdot \boldsymbol{n}' = -(s'\boldsymbol{g}_s + t'\boldsymbol{g}_t) \cdot \boldsymbol{n}'$$

であるが，さらに，

$$\boldsymbol{n}' = s'(u)\boldsymbol{n}_s + t'(u)\boldsymbol{n}_t$$

なので（$\boldsymbol{v}$ の求め方と同じ）, (13.13) より

$$\boldsymbol{v}'(u) \cdot \boldsymbol{n} = (s'(u)\boldsymbol{g}_s + t'(u)\boldsymbol{g}_t) \cdot (s'(u)\boldsymbol{n}_s + t'(u)\boldsymbol{n}_t) = Ls'(u)^2 + 2Ms'(u)t'(u) + Nt'(u)^2 \quad (13.17)$$

を得る．

以上の準備の下，次を示すことが出来る．

定理 13.2. $g(s(u_0), t(u_0))$ を通り S に含まれる曲線 C を動かすとき，S の主曲率 λ_1, λ_2 は，それぞれ，曲線 C の法曲率の最大値・最小値に等しい．これで主曲率が実数であることも分かる．

証明. (13.16), (13.17) より，$\boldsymbol{v}(u_0) \cdot \boldsymbol{v}(u_0) = Es'(u_0)^2 + 2Fs'(u_0)t'(u_0) + Gt'(u_0)^2 = 1$ の下で，$Ls'(u_0)^2 + 2Ms'(u_0)t'(u_0) + Nt'(u_0)^2$ の最大値・最小値を求める．原点をずらすことで，$u_0 = 0$，$(s(u_0), t(u_0)) = (0, 0)$ としてよい．曲線 C は $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R} \ni u \to (s(u), t(u)) \in \mathbb{R}^2$) を用いて，合成関数 $g \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ の像として定まっているのだった．ここで，最大値・最小値を求める問題には，C そのものではなく，C を定める曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ の原点における接ベクトル $(s'(0), t'(0))$ だけが効いてくるという事に注意する．よって，$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ のすべての可能性を考える必要はなく，接ベクトル $(s'(0), t'(0))$ がすべての可能性を尽くせればよ

[*185] 一定距離と言うのは，C をいろいろ取り替えても $g(s_0, t_0)$ から同じ距離と言う意味である．

[*186] パラメーターを弧長にしたので，一定距離進むと言う部分は考慮する必要はなく，加速度ベクトルそのものを考えればよい．

[*187] 一定の速さで走っているとき，速度ベクトルの変化は，走っている方向と直交する方向に感じるということが，数学的に示された．

い． 接ベクトル $(s'(0), t'(0))$ は，その s 軸からの角を θ とすると，ある定数 $\rho > 0$ を用いて，$(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ と書ける． $(s'(0), t'(0))$ が $Es'(0)^2 + 2Fs'(0)t'(0) + Gt'(0)^2 = 1$ を満たすことから， ρ は $\rho^2(E\cos\theta^2 + 2F\cos\theta\sin\theta + G\sin\theta^2) = 1$ を満たす数として決まる． このような接ベクトルを実現する $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ として， $u \mapsto (u\rho\cos\theta, u\rho\sin\theta)$ を取ればよい (picture)．θ を動かせば，すべての接ベクトルの可能性が尽くせる． このとき，

$$Ls'(0)^2 + 2Ms'(0)t'(0) + Nt'(0)^2 = \frac{L\cos\theta^2 + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin\theta^2}{E\cos\theta^2 + 2F\cos\theta\sin\theta + G\sin\theta^2}$$

が成り立つ． よって，結局，$(a, b) \neq (0, 0)$ とした時の

$$\lambda(a, b) := \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

の最大値・最小値を求めればよい． 特に最大値・最小値は極大値・極小値なので， $\frac{\partial\lambda}{\partial a} = \frac{\partial\lambda}{\partial b} = 0$ が成り立つ[*188]． このとき， $(La^2 + 2Mab + Nb^2) - \lambda(Ea^2 + 2Fab + Gb^2) = 0$ を偏微分して，

$$(La + Mb) - \lambda(Ea + Fb) = 0, (Ma + Nb) - \lambda(Fa + Gb) = 0$$

が成り立つ． これを行列で書いてみると

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となる．さらに左から $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$ を掛ければ，

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となって， λ は行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ の固有値である！ 特に極大値・極小値が一つずつ（一致することもあり得る） なので，それらは最大値・最小値でもある． そして，主曲率の定義より，これらは主曲率に一致する． □

注意 30. 主曲率 λ_1, λ_2 が等しい点のことを臍点（せいてん，臍はへそ）と言う．球面上のすべての点は臍点である（例 13.1)．実は，全ての点が臍点である曲面は，球面または平面の一部分であることを示すことが出来る．

臍点でない点において，主曲率を与える方向は互いに直交することが分かる． これは，定理 13.2 の証明を参照して，スカラー行列でない対称行列の固有ベクトルが互いに直交することの証明をまねれば示せる．

[*188] 数学 I で習ったはず.

定理 13.2 とこの注意を踏まえて，例 13.1 をよく味わってみるとよい．例えば，一葉双曲面は，至る所ガウス曲率が負である． よって，どの点も正の主曲率と負の主曲率を持つので， 臍点ではない．どの点も峠の点（馬の鞍状）になっている (picture)[*189].

ガウス曲率は，ガウスがドイツにおいて測量に携わった過程で発見されたものである． 今，地球のパラメーター表示（地図）を次のような方法で作るとしよう．地球上の十分近い異なる 2 点 p_0, q_0 を決めておく．p_0 から，地球上の別の点 p まで，ぴんと糸を張りながら進むとする[*190].そのとき，必要な糸の長さは p の関数である．これを $r(p)$ で表す． また，p_0 から q_0 まで進むときの糸と，p_0 から p まで進むときの糸のなす角もまた，p の関数である．これを $\theta(p)$ で表す．$r(p)$ と $\theta(p)$ が，少なくとも p_0 の十分近くで（ただし p_0 自身は除く），地球のパラメーター表示（座標）を与えているのは，直感的には納得できるであろう．これを測地的極座標という．このようなパラメーター表示は糸を張りながら進めばよいから， 測量で求めることが出来る． そして，パラメーター表示が得られれば，それに関する第一基本量を求めることが出来る．ここまでは，もし，地球人が宇宙空間にいることを知らなくても可能な事である． ところが，第二基本量については，各点において，地上から，宇宙空間に向けて法線を立てなくてはならないので，もはや宇宙空間なしでは定義できない． **にもかかわらず**，ガウスは，ガウス曲率が，第一基本量とその二階の偏微分のみで書き下せることを発見した．よって，ガウス曲率は，定義自体には，第二基本量まで 必要とするけれども，宇宙を知らない地球人にも測定可能な量だということになる．地球にへばりつくように暮らしていても，その曲り具合を測量によって 知ることが出来るという事である． この事実を発見したガウスは大変興奮したようで，この定理を「驚愕定理（Theorema egregium)」と名付けた[*191]． 驚愕定理の応用として， 地球（今，これは球であるとする）の正確な地図を（一部分でさえも） 描くことが出来ない[*192]という事が分かる．というのは，もし，正確な地図（パラメーター表示）が得られるとすれば， 地球上の曲線の長さと， 地図（平面）上の対応する曲線の長さは等しいから，地球と地図[*193]の第一基本量は等しいという事になる．すると，驚愕定理により，地球と地図のガウス曲率は等しくなければならない．ところが， 地図のガウス曲率を計算すると 0 になる[*194]．一方で，球面のガウス曲率は上で求めた通り至る所正である．これは矛盾である[*195].

この章の結びとして，曲面論の最高峰の結果であるガウス・ボンネの定理に触れておこう．

[*189]実は， 一葉双曲面のどの点も，2 本の直線が通っている (picture)．そのように見ると， 一葉双曲面はいかにもまっすぐな面のように感じるが，ガウス曲率によれば曲がっている．一葉双曲面の近似が折り紙で折れるので（インターネットで検索すれば分かる），自分で折って鑑賞してみるとよい（しかし，あくまでこれは近似であることが，以下で述べるガウスの驚愕定理から分かる）．

[*190]つまり，常に最短距離を与えるように 進んでいく．このような糸の軌跡を測地線と言う．

[*191]ガウスはよく興奮するようで，ガウスの曲面論を発展させたリーマンの講演（それはリーマン幾何と言う 一般相対論の理論的支柱を与える重要な考え方の導入だった）を聞いた帰り道，その講演についての考え事に熱中するあまり，ドブにおっこってしまったらしい．

[*192]紙を折り曲げることなく丸めて球面の一部にすることはできないと言ってもよい．

[*193]地図（平面）のパラメーター表示は，平面の座標を s, t とすると， $(s,t) \mapsto (s,t,0)$ によって与えられる．

[*194]第一基本量は至る所， $E=1, F=0, G=1$ である．

[*195]同様の考え方で，紙を丸めて一葉双曲面を作ることはできないことも分かる．

曲率と言うのは，各点で決まっている量なので，局所的な量である．ところがその曲率というデータを曲面全体で見渡すことで，曲面の大域的な 性質（より正確に言えば，連続的な変形で変わらない大域的な性質）を導くことができる．それがガウス・ボンネの定理である．

定理 13.3 (ガウス・ボンネの定理). S を，球面やドーナツの表面のように，有界で，境界を持たず，向き付けが可能な曲面とする[a]．

S のガウス曲率を S 全体で積分すると，S のオイラー数に 2π を掛けたものに一致する．

[b]

ここで，S のオイラー数とは，S が g 人乗り浮き袋の表面を連続的に変形したものであるとき，$2-2g$ のことである[c]．

[a]有界でない曲面の例として，円柱の表面，境界を持った曲面の例として，半球の表面（赤道が境界），向き付け可能でない曲面の 例としてメビウスの帯（小田急のマーク）がある．有界で，境界を持たず，向き付けが可能な曲面は，「g 人乗り浮き袋の表面」を連続的に変形したものであるという定理がある．$g=0$ のとき球面，$g=1$ のときドーナツの表面である．

[b]ここで考えている積分は，面積分と呼ばれるもの．2.1 節のように，S を小さな平行四辺形で近似するとき，ガウス曲率に平行四辺形の面積を書けて足しあげる，その極限値の事である．

[c]S を三角形に分割したときの

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

にも一致する．球面を正四面体あるいは正二十面体を膨らましたもの と考えてみよ．これが球面の三角形分割の例である．オイラー数を計算してみよ．

このガウス・ボンネの定理は，大域的ガウス・ボンネの定理とも呼ばれ，以下の定理を単にガウス・ボンネの定理と呼ぶこともある．

定理 13.4 (測地的三角形の内角の和公式). 曲面 S 上で測地線を三辺とする三角形 ABC の内角の和から π を引いたものは，S のガウス曲率を三角形 ABC の内部で積分したものに等しい．

実は定理 13.4 から定理 13.3 を導くことが出来る．その証明は容易であるが，オイラー数が出てくるところが目の当たりにできて面白い．定理 13.4 の証明はこの講義の範囲を超えているが（この付録自体超えているが），以下で挙げている参考書に証明が丁寧に書いてある．数学 I, II の知識で十分理解可能である[*196]．意欲的な人は是非読んでみてください[*197]．

2.1 節とこの章を書くに当たって，

[*196]そのうち数学 II の知識が 必要な部分は，ほぼこの講義ノートで解説した．

[*197]球面の ガウス曲率は至る所正だから，定理 13.4 によると，地球上の三角形の内角の和は π よりも大きい（反対に，一葉双曲面では π より小さい）．ガウスは，この定理を実感したかったのだろう，北ドイツの互いに数 10 キロ離れた三つの山（ホーエルハーゲン，インゼンベルク，ブロッケン）を三頂点とする三角形の内角の和を調べたそうだ．これから，π を引いたものが，正であれば，また，大変興奮したのだろうが，結局，内角の和は誤差の範囲で π だったそうで … ガウスは，肖像画で見る限り，気難しそうな風貌の持ち主だが，案外，面白い人だったのかもしれない．

曲線と曲面–微分幾何的アプローチ– 梅原雅顕・山田光太郎共著（裳華房）
を参考にした．この本の最もお勧めな点は，わずか 65 ページ（54–118 ページ）で，ガウス・ボンネの定理に到達できることである．

また，同種の本として，
曲線と曲面の微分幾何　小林昭七著（裳華房）
が名著として知られる．どちらも丁寧に書かれてあり，難易度は変わらない．曲面論に興味を持った人は是非読んでみてほしい．（数学 II というより）数学 I の副読本と考えてもよい．

上で述べた通り，曲面論は，ガウスが測量に携わっている過程で誕生した．そういった経緯からも曲面論は地図の作成と大いに関係がある．その観点から書かれた曲面論の入門書が最近出版された．
等長地図はなぜ出来ない？　西川青季著（日本評論社） である．

第 III 部

二大目標「表現行列」と「固有値問題」の達成

第 III 部で線形代数学の一般理論を本格的に組み立ててゆく． その一環として，14，15 章において，以降の 議論のための基本的諸概念，**基底**，**次元**，**一次独立性**などを導入する．大切な考え方が目白押しであり，証明も多い． これらを基本の言葉として理論が構築されていくので，しっかり理解しなければならない．あらたに気を引き締めて頑張ってほしい． また，第 I 部の行列式，連立方程式の理論（基本変形を含む）も理論展開を支えているので よく復習しておいてほしい．

17 章では，この講義の一つの目標「**表現行列による線形写像の記述**」を達成する．

18–20 章では，この講義のもう一つの目標「**任意の線形変換に対する固有値問題**」を扱う．この講義の一つのクライマックスである．この部分が理解でき，使いこなせるようになれば,「線形代数をものにした」と胸を張ってもよい． 特に, (2×2 行列の場合には表だって出てこなかった）19 章で導入される**固有空間**，**固有分解可能性**（行列の対角化可能性に対応する），また，その過程で出てくる部分ベクトル空間の**直和**という一般的概念が重要であるので，しっかり理解してほしい．

14　ベクトル空間の基底と次元

定義 14.1 (**基底**). V をベクトル空間とする． V の元 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V の**基底**であるとは，V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合として**唯一通り**に書けるということ． つまり，任意の $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{v}_n$ となる $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ が唯一組あるということ．これにより $p_1, \dots, p_n$ を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に関する $\boldsymbol{v}$ の座標と考えることができる．

注意 31. $\{\boldsymbol{o}\}$ のみからなるベクトル空間には，この意味で基底はない． なぜなら，任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して $\boldsymbol{o} = a\boldsymbol{o}$ であり，a が一意に定まらないからである．

例 14.1. 5.2 節の設定で**斉次型**の連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を考える． $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解全体の集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$ を**解空間**と呼ぶのだった． そこでの説明より， $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ はまさに解空間の基底になっている事が分かる．これは基底の重要な例であるので各自よく頭に入れておくこと．

次の結果は，命題 9.1 の逆に相当する．

命題 14.1. $V = \mathbb{C}^2$ の時, この基底の定義は以前の定義（12 章冒頭） と一致する.

証明. $\mathbb{C}^2$ の基底の以前の定義から現在の定義を導くのは， 命題 9.1 ですでに行った.

逆に $\mathbb{C}^2$ の基底の現在の定義から以前の定義を導く． $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ を，現在の意味での $\mathbb{C}^2$ の基底とする． このとき $m = 2$ であり，かつ，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が互いに定数倍でないことを示す．もし $m = 1$ ならば，$\boldsymbol{v}_1$ の一次結合とは，その定数倍だけである． よって，$\mathbb{C}^2$ の元すべてを，その一次結合で表すことはできないので矛盾．$m \geq 2$ である．このとき，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は互いに定数倍でない． なぜなら，もし，互いに定数倍ならば，$\boldsymbol{v}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_2$ としても一般性を失わない． すると， $\boldsymbol{o}$ は, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ の一次結合として，$0\cdot\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{v}_m$, $1\cdot\boldsymbol{v}_1 - \alpha\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{v}_m$ と二通りに書けることになって，基底の現在の定義に反する． 最後に $m \geq 3$ として矛盾を導く． $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が互いに定数倍でないので，命題 9.1 より，$\boldsymbol{v}_3 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2$ と書ける．しかし，これは， 上の議論と同様に， $\boldsymbol{o}$ が $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ の一次結合として，$0\cdot\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{v}_m$, $-\alpha\boldsymbol{v}_1 - \beta\boldsymbol{v}_2 + 1\cdot\boldsymbol{v}_3 + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{v}_m$ と二通りに書けることになって，基底の現在の定義に反する． □

$\mathbb{C}^2$ の場合で分かるように基底の取り方は様々である． しかし，基底を取りかえても保たれるものがあることを言っているのが次の定理である．

定理 14.1. V をベクトル空間とする． $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ がともに V の基底である時，$n = m$ が成立．つまり，どの基底をとっても基底に現れる元の数は一定.

この定理は次章で一次独立の概念を導入してから示す.

この基底の性質を用いてベクトル空間の次元というベクトル空間の広がり具合を 表す量を定義できる.

定義 14.2 (次元).
V をベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をその基底とする． 基底に属するベクトルの数 n のことを **V の次元**と呼び，$\dim V$ で表す．定理 14.1 により，n は基底のとり方に依らないのでこの定義はうまく行っている．

例 14.2. 注意 31 により，$\boldsymbol{o}$ のみからなるベクトル空間の次元は 0 である．

例 14.3 (定理 5.2 の精密化). 例 14.1 に引き続き， 斉次型連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を考える． 次元と言う概念の確立により，定理 5.2 は次のように精密化できる．

解空間の次元は $n - r$ に等しい.

なぜならば， 解空間の基底 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ は $n - r$ 個の元からなるからである．
この精密化の大事な応用として，**行列 A の階数の定義がうまく行っていること**が分かる．なぜなら，これにより， **階数は $n - (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間の次元$)$** であり，解空間の次元は A の基本変形の取り方とは無関係に決まっているものだからである．

この注意を踏まえて， 5.2 節の要点を述べ直すと， 斉次型連立一次方程式を解くという事は，その解空間の（一つの）基底を求めることに他ならない[*198]．

練習問題 14.1.
$c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$ を定数として，

$$W_k := \{\{a_n\} \mid \text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n\}$$

とする． W_k の基底を見つけてくることで $\dim W_k = k$ を示せ．

練習問題 14.2. $Q_n = \{n$ 次以下の複素係数多項式$\}$ において，$i = 0, \ldots, n$ に対して， $F_i(x)$ を次数がちょうど i で，i 次の係数が 1 である多項式とする．$F_0(x), \ldots, F_n(x)$ は Q_n の基底となることを示せ．

練習問題 14.3. ⊛ 8.9 節で，ベクトル空間 V の双対ベクトル空間 V^* を定義した．$\dim V^* = \dim V$ を示せ．

注意 32. 実はここで考えているのは有限次元ベクトル空間の基底というものであり， 有限次元でない場合も含んだ基底の定義は次の通り：
ベクトル空間 V について，ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in \Lambda}$（$\boldsymbol{v}_i$ の添字集合 Λ は無限個の元を含むかもしれない）が V の基底であるとは，V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ が $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in \Lambda}$ の**有限個**の一次結合として唯一通りに書ける[*199]．

[*198] ただし，基底は一通りではないので，解の他の表示もある．
[*199] 無限集合でも有限和しか許さないのである．また, $\boldsymbol{v}$ を一次結合として表すために $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in \Lambda}$ から選ばれる有限個のベクトルは $\boldsymbol{v}$ によって異なる．

ベクトル空間には常にこの意味で基底が存在することが示せるが，これはこの講義の範囲を超える[*200]．ただし, 基底の存在さえ認めれば, 定理 14.1 は無限個のベクトルからなる基底の場合も含めて成り立つことが分かる.

以下この講義では, 特に断らない限り, 定義 14.1 にあるように，有限個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ からなる基底を持つベクトル空間（有限次元ベクトル空間）のみ考える．

[*200] 集合論における選択公理というものが必要となる.

問題のヒント・答.

練習問題 14.1：W_k の元は, はじめの k 項のみで決まる.

練習問題 14.3：$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底, $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ を V の任意の元とするとき, 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して,

$$f_i(\boldsymbol{v}) := a_i$$

となる線形関数 f_i（線形になることを確認せよ）が基底になることを示す. このような基底 $f_1, \ldots, f_n$ を（$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対する）**双対基底**と呼ぶ.

f_i は言葉で言えば,「各 $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合で書いた時の $\boldsymbol{v}_i$ の係数を対応させる関数」である.

15　一次独立という考え方

基底の定義は次の二つの内容からなっている.

1. すべてのベクトルが $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合として書ける.

2. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合として書ける ベクトルに対して, その書き方は一通りである.

これらはいずれも非常に大切な概念である. 順に名前を与えて考察する.

(1) を独立させたのが次の概念である.

定義 15.1.
V をベクトル空間とし $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の元とする. V のすべての元が $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合として (ただ一通りとは限らないが) 書ける時, V は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で**生成されている** (張られている) という.

例 15.1. $\mathbb{C}^2$ において $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{C}^2$ を生成するが, $\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{a}$ となって一次結合としての書き方は一通りではない.

例 15.2. この例は一般的で重要な例である. $d \times e$ 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_e)$ で定まる $f_A \colon \mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^d$ の像 $\operatorname{Im} f_A$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_e$ で生成される $\mathbb{C}^d$ の部分ベクトルである. なぜなら, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_e \end{pmatrix}$ に対して, $f_A(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_e\boldsymbol{a}_e$ であり, $\operatorname{Im} f_A$ というのは, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_e$ の一次結合全体からなる部分ベクトル空間だからである.

(2) を独立させたのが次の概念である.

定義 15.2. V をベクトル空間とし, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の元とする. これらが「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合として書けるような任意の V の元について，その一次結合としての書き方が一通りである」という性質を満たすとき, **一次独立**であるという.
言い換えれば, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立とは, 「$x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{v}_k$ が成立するならば $x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k$ が従う」ということである.
「$x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{v}_k$ という $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ に関する方程式が $x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k$ という解しか持たない」と言ってもよい.

例 15.3. $\mathbb{C}^2$ において $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考えると, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の一次結合で書けるベクトルは $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{C})$. $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と唯一通りに書けるので $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は一次独立.

同様に $\mathbb{C}^3$ において $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ も一次独立. しかしいずれの場合も, 基底にはなっていない (ベクトル空間を生成していないので).

基底というのはベクトル空間に座標を与えるものであった. 座標と言うのはベクトル空間の**すべて**の元を**特定**するものである. 「すべて」に対応するのが生成するという概念であり,「特定」に対応するのが一次独立という概念である.

一次独立の概念はなかなかとらえどころがないし, 上の定義のままでは扱いにくい. 次の言いかえは有用である.

命題 15.1. V をベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の元とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立 $\Leftrightarrow$

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o} \text{ ならば } x_1 = \cdots = x_k = 0 \text{ が従う.} \tag{15.1}$$

証明. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立であると仮定する. 定義により, $\boldsymbol{o}$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合で表す方法は $0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_k$ しかない. よって, $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ ならば $x_1 = \cdots = x_k = 0$ が従う.

逆に (15.1) の条件を仮定して, 一次独立の定義の条件を導く. そこで, $x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{v}_k$ が成立すると仮定すると, 移項して, $(x_1 - y_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (x_k - y_k)\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ を得る. よって, (15.1) より, $x_1 - y_1 = \cdots = x_k - y_k = 0$ である. □

注意 33. (15.1) の条件は, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ から決まる $x_1, \ldots, x_k$ の方程式 $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ が $x_1 = \cdots = x_k = 0$ という解 (自明な解) しか持たないということである.

$V = \mathbb{C}^n$ のときを考えてみよう. このとき $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{v}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ と書いておき, $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ とおく. すると, 命題 15.1 の言い換えは「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が従う」となる. つまりこれは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ という連立一次方程式が自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ しか持たないということである. これは 行列の掃き出し法により判定できる (定理 5.2). [*201]

定義 15.3. 一次独立でないということを**一次従属**であるという.

[*201] こうして, また連立一次方程式が顔を出した.

練習問題 15.1 (各自で必ずやること). 一次従属を定義 15.2 と同様に定義せよ (その否定命題として). また, 命題 15.1 に対応する命題も述べよ[*202].

以下, 一次独立に関する問題を数多く用意した.

練習問題 15.2. V をベクトル空間とし, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とする. このとき

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ は一次独立} \iff \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \text{ は一次独立}$$

を示せ.

練習問題 15.3. V をベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立ならば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_k$ も一次独立であることを示せ.

練習問題 15.4. V をベクトル空間とし, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とする. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}$ が一次従属となるような $\lambda \in \mathbb{C}$ を求めよ.

練習問題 15.5. $\mathbb{C}^4$ において $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ \alpha \\ 2+3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1+i \\ \beta \end{pmatrix}$ が一次従属になるような $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を求めよ.

練習問題 15.6. V をベクトル空間とし, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とする.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は一次従属であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ $(i \neq j)$ が互いに定数倍になっているとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は一次従属であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次従属ならば, ある i に対して, $\boldsymbol{v}_i$ が他のベクトルの一次結合であることを示せ.

練習問題 15.7. $P_4 := \{\, a_4x^4+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{C}\}$(4 次以下の多項式全体) とする. P_4 において以下は一次独立であるか?

(1) $1-x, x-x^2, x^2-x^3, x^3-x^4, x^4-1$

(2) $1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3+x^4, x^4+1$

練習問題 15.8. $\circledast$ $f(x) = x^4+3x^3+2x^2+8$ とおく. 上の問の P_4 の部分集合 $\{\, f(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ を含む P_4 の最小の部分ベクトル空間は $1, x^2, x^3, x^4$ で生成されることを示せ.

[*202] 自分なりに分かりやすい形で頭に入れておくこと. 例えば, 「ある $(x_1, \ldots, x_k) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在して, $x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ が成立する.」

一次独立性の判定の問題は, 連立一次方程式に帰着されることを 注意した (命題 15.1 の下). 次はそれに関連した問題である.

練習問題 15.9. (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ が一次従属となる a を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ の一次結合として表す表し方を全て求めよ.

(3) $\begin{pmatrix} t \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一次結合となる t を求めよ.

<u>**問題のヒント・答.**</u>

練習問題 15.3 の解答：

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ を一次独立とする．この時任意の $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ に対して

$$a_1\boldsymbol{v}_2 + a_2(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \cdots + a_k(\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

が成り立つ事を示せば十分．左の等式を仮定すると

$$(a_1 + \cdots + a_k)\boldsymbol{v}_1 + (a_2 + \cdots + a_k)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k = 0$$

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$は一次独立なので

$$(a_1 + \cdots + a_k) = (a_2 + \cdots + a_k) = \cdots = a_k = 0$$

ゆえに

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

練習問題 15.5 の解答：

$$a\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\-5\\\alpha\\2+3i\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-2\\-1\\1+i\\\beta\end{pmatrix} = 0$$

を満たす a, b, c ($a = b = c = 0$ でない) が存在する事が一次従属のための必要条件．第 1 成分の等式と第 2 成分の等式より，$(a, b, c) = t(2, 1, 3), t \neq 0$ が必要である．これを第 3 成分と第 4 成分の等式に代入して α, β について解くと， $\alpha = -1 - 3i, \beta = -2 - i$ を得る．

練習問題 15.7 の解答： (1) $(a, b, c, d, e) = (1, 1, 1, 1, 1)$ に対して

$$a(1 - x) + b(x - x^2) + c(x^2 - x^3) + d(x^3 - x^4) + e(x^4 - 1) = 0$$

よって一次独立でない．

(2) $a(1 + x) + b(x + x^2) + c(x^2 + x^3) + d(x^3 + x^4) + e(x^4 + 1) = 0$ を考える．これは

$$d + e = 0, c + d = 0, b + c = 0, a + b = 0, a + e = 0$$

と同値である．(x の多項式として整理すればすぐ分かる．) これを解くと $a = b = c = d = e = 0$ (例えばすべて足すと $a + b + c + d + e = 0$ を得る．これを利用する)，よって一次独立である．

練習問題 15.8 のヒント： いろいろな値の λ に対する $f(\lambda x)$ を足したり引いたりすることで $1, x^2, x^3, x^4$ を作り出す．

練習問題 15.9 の答 (1) $a = \frac{9}{2}$ (2) $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix} = -(3k + 1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - (2k + 1)\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ (3) $x\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}8\\7\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\15\\3\end{pmatrix}$ となる x, y, z が存在するための t の条件を考える．掃出し法を使うと

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -3 & t \\ 3 & 7 & 0 & 15 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{2 行目から 3 行目を引く}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -3 & t \\ 1 & 5 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{3 行目から 2 行目の 2 倍を引く}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -3 & t \\ 1 & 5 & -1 & 12 \\ 0 & -8 & 3 & -21 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目の取り替え}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 12 \\ 0 & 8 & -3 & t \\ 0 & -8 & 3 & -21 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{3 行目に 2 行目を足す}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 12 \\ 0 & 8 & -3 & t \\ 0 & 0 & 0 & t-21 \end{array}\right)
$$

したがって、$t = 21$ が必要十分条件である.

16　一次独立性の応用

一次独立性はとっつきにくい概念かも知れない．この章では，この概念の応用をいくつか見てその有用性についての 理解を深めよう．この概念の導入によって，いかに色々な議論が進めやすくなるのかを感じ取ってほしい．

16.1　定理 14.1 の証明

まず, 14 章の**定理 14.1** を証明する. 鍵となるのは次の補題である.

補題 16.1. V をベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の元とする. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合で書けるベクトルとするとき, $l > k$ ならば, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は一次従属である.

注意 34. 補題の対偶は次の通りである．こちらの形の方が良く使う：
V をベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の元とする. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合で書けるベクトルとするとき, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ が一次独立ならば，$l \leq k$ である.

この補題から定理 14.1 を導くことは容易であるので，先にそれを示しておく．この証明で，基底の定義を「生成」と「一次独立」に分けて考えることの有用性を納得してほしい.

定理 14.1 の通り, 二組の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots,\ \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \ldots,\ \boldsymbol{w}_m$ を取る. $\boldsymbol{v}_1, \ldots,\ \boldsymbol{v}_n$ は基底であるから V を生成する. よって $\boldsymbol{w}_1, \ldots,\ \boldsymbol{w}_m$ はその一次結合で書ける. $\boldsymbol{w}_1, \ldots,\ \boldsymbol{w}_m$ は基底であるから一次独立であるので, 補題の対偶により $m \leq n$ でなければならない. $\boldsymbol{v}_1, \ldots,\ \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \ldots,\ \boldsymbol{w}_m$ の役割を入れ替えて考えれば $n \leq m$ も成り立つ. よって $m = n$ である. □

補題 *16.1* の証明. k に関する帰納法で証明する．まず $k = 1$ とする．$l > 1$ として，$\boldsymbol{w}_1 = a_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l = a_l\boldsymbol{v}_1$ とする．もし，$a_1, \ldots, a_l$ のすべてが 0 ならば，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は一次従属である (練習問題 15.6 (1)). そうでないとき，$a_1 \neq 0$ として一般性を失わない．すると，$\boldsymbol{w}_2 = \frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{w}_1$ となるので，練習問題 15.6 (2) より，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は一次従属である.

以下 $k > 1$ とし，$k - 1$ 以下で補題の主張が成り立っているとする．$l > k$ として，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{1k}\boldsymbol{v}_k \\
\boldsymbol{w}_2 &= a_{21}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{2k}\boldsymbol{v}_k \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
\boldsymbol{w}_l &= a_{l1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{lk}\boldsymbol{v}_k
\end{aligned}$$

とする．もし，$\boldsymbol{v}_1$ の係数がすべて 0，つまり，$a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{l1} = 0$ ならば，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合である．よって，$k-1$ の場合の結果より，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は一次従属である. $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{l1}$ のいずれかが 0 でないとき，$a_{11} \neq 0$ としても一般性を失わない．$\boldsymbol{w}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\boldsymbol{w}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{w}_l - \frac{a_{l1}}{a_{11}}\boldsymbol{w}_1$ を作ると，これらは，$l-1 > k-1$ 個あり，すべて，$\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の一次結合，よっ

て， $k-1$ の結果より， 一次従属である．つまり， $\alpha_2(\boldsymbol{w}_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\boldsymbol{w}_1)+\cdots+\alpha_l(\boldsymbol{w}_l-\frac{a_{l1}}{a_{11}}\boldsymbol{w}_1)=\boldsymbol{o}$ となる $(\alpha_2,\ldots,\alpha_l)\neq(0,\ldots,0)$ が存在する． これを展開すれば，$\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_l$ が一次従属であることが分かる． □

16.2 補題 16.1 の応用

補題 16.1 の系で有用なものをいくつか述べる．

系 16.1. V をベクトル空間とする．

(1) （V が有限次元ならば）V における一次独立なベクトルの最大数は有限である．

(2) (ここでは，V が有限次元とは仮定しなくてもよい．結果的に出る.） V における一次独立なベクトルの最大数が有限であるとき，その数の一次独立なベクトルは基底を成す． よって，その数が次元に一致することも分かる．

証明. (1) は注意 34 から直ちに分かる． (2) を示す． n を最大数とし，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとする． $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が V を生成することを示せばよい．$\boldsymbol{v}\in V$ を任意に選ぶ． n の定義により $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}$ は一次従属である．よって， ある $(x_1,\ldots,x_n,x)\neq(0,\ldots,0,0)$ が存在して $x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n+x\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ を満たす．$x=0$ とすると $x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{o}$ となるが， $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるので，$x_1=\cdots=x_n=0$ となる． しかし，これは $(x_1,\ldots,x_n,x)$ の取り方に反する．よって， $x\neq0$ が分かり， $x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n+x\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ において，$x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n$ を右辺に移項して， 全体を x で割ると， $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ の一次結合で書ける．$\boldsymbol{v}$ は任意であったので，これは， $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が V を生成するということを意味する． □

練習問題 16.1. ベクトル空間 V において，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ によって生成される部分ベクトル空間 $\langle\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\rangle$ の次元は， $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ の中の一次独立なベクトルの最大数に等しいことを示せ．

次の結果は，ベクトル空間の相当が，次元という数で判定できる ことを主張しており，次元という量の有用性を示している[*203]．

系 16.2.
V を (有限次元) ベクトル空間とし，W を部分ベクトル空間とする． この時，$\dim V\geqq\dim W$ が成立．また，等号が成立する $\iff$ $V=W$．

証明. 注意 34 により, W に含まれる一次独立なベクトルの最大数は $\dim V$ を超えない. 特にその最大数は有限であり, 系 16.1 (2) より, そのベクトルは W の基底をなす. よって $\dim W\leq\dim V$ である.

[*203] 有限個の元を持つ集合の相当の問題と比較してみよ．

$V = W$ ならば $\dim V = \dim W$ は明らかである. 逆に $\dim V = \dim W$ と仮定する. W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ $(m = \dim W)$ を取る. V は有限次元より, 系 16.1 (1) から, V における一次独立なベクトルの最大数は有限である. さらに, 系 16.1 (2) と $\dim V = \dim W$ より, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は V の基底でもある. $V \subset W$ を示せばよい. $\boldsymbol{v} \in V$ を任意の元とすると, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が V の基底でもあることにより, $\boldsymbol{v}$ はその一次結合で書けるが, もともと $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \in W$ であるから, その一次結合も W の元, よって, $\boldsymbol{v} \in W$. こうして $V \subset W$ が示された. □

次の系は, 基底がかなり自由にとれることを示す. これは, 以後, 非常に頻繁に使う有用な結果である.

系 16.3 (**基底への延長**).
V を n 次元のベクトル空間とし, $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_k$ を一次独立なベクトルとする. この時, $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_k$ を含む基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_n$ が存在する.
基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_n$ のことを, $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_k$ を**延長**して得られる基底と言う.

証明. $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_k$ を含む 一次独立なベクトルの列 $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が得られた状態を考えよう ($m = k$ の場合を含む). これらのベクトルは V の基底（※ V の次元は n なので n 個の一次独立なベクトルが存在することが暗黙に仮定されている）の一次結合であり, V の次元は n であるから, 補題 16.1 の対偶により $m \leq n$ でなければならない. ここで次の二つの場合が起こり得る.

場合１. V のすべての元が $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m$ の一次結合で書ける場合.
このとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m$ は一次独立でもあるので基底である. 定理 14.1 より $m = n$ であることに注意する.

場合２. $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m$ の一次結合で書けない V の元が存在する場合.
その一つを $\boldsymbol{v}_{m+1}$ とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}$ が一次独立であることを示す.

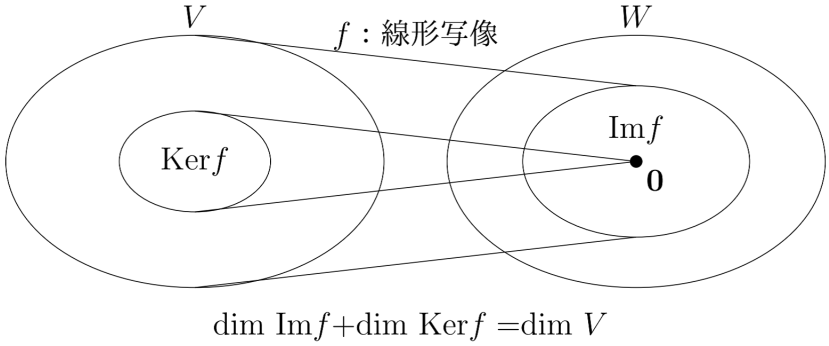
$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m + x_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} = \boldsymbol{o} \tag{16.1}$$

が成り立つとする. もし, $x_{m+1} \neq 0$ ならば, (16.1) を x_{m+1} で割って, $\boldsymbol{v}_{m+1} = \cdots$ の形にすれば, $\boldsymbol{v}_{m+1}$ が $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m$ の一次結合で書けることになってしまい, $\boldsymbol{v}_{m+1}$ の選び方に矛盾する. よって $x_{m+1} = 0$. すると $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m$ は一次独立であるから, (16.1) より $x_1 = \cdots = x_m = 0$. こうして $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}$ が一次独立であることが分かった. この場合は, 補題 16.1 の対偶より $m + 1 \leq n$, つまり $m < n$ である.

常に, $m \leq n$ であり, 場合１ならば $m = n$, 場合２ならば $m < n$ であるから, 場合１ $\Leftrightarrow m = n$, 場合２ $\Leftrightarrow m < n$ である.

以上の考察より, $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_k$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_n$ まで延長でき, このとき場合１が起こる, つまり, $\boldsymbol{v}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{v}_n$ は V の基底である. □

練習問題 16.2. V, W をベクトル空間, $f\colon V \to W$ を線形写像とするとき, $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$ が成り立つことを 示せ.



また，この公式を用いて，$f\colon V\to V$ なる線形変換の場合に，f が単射であることと全射であることが同値なことを示せ．

16.3 階数のもう一つの意味

例 14.3 で見たように，$m\times n$ 行列 A の階数は，A の定める連立一次方程式を考えた時，変数の数 n から 解空間の次元（解のパラメーターの自由度）を引いたものという解釈ができるのだった．一方で，解のパラメーターの自由度は直感的に考えると次のようにも求められるはずである．連立一次方程式を，一次方程式を一つづつ増やしていったものと考えてみる．すると，一次方程式が一つ増えるごとに大体，解のパラメーターの自由度は 1 減るという直観は納得できるだろう．しかし，増やした一次方程式が，すでにある一次方程式と同じだったり，すでにあるもののいくつかを足し引きして得られるものだったりしたら，解全体の広がり具合は変わらないはずだ，というのも納得がいくだろう．このように考えると，連立方程式の解のパラメーターの自由度は,（変数の数）−（無駄を省いた方程式の数）に等しいと考えられる．

以下，これを正確に定式化，証明して，階数の別の意味付けを与える．まず，無駄を省いた方程式の数とは，A の行が方程式に対応していることから，A の一次独立な行ベクトルの最大数と定義するのは自然であろう．すると次が成り立つ．

定理 16.1. A の階数は，A の一次独立な行ベクトルの最大数に等しい．

証明. A の行ベクトルを ${}^t\boldsymbol{a}_1,\dots,{}^t\boldsymbol{a}_m$ で表す．これらを $\mathbb{C}^n$ の m 個の元と見る．すると，練習問題 16.1 により，これらの生成する $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間の次元は，これらの中で一次独立なものの最大数に等しい．一方，行による基本変形で A は変化していくが，その行ベクトルの生成する $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間は変わらないことが分かる（各基本変形ごとにチェックする）．よって，${}^t\boldsymbol{a}_1,\dots,{}^t\boldsymbol{a}_m$ の中で，一次独立なものの最大数は，階段行列 (5.2) の行の中で一次独立なものの最大数に一致し，これは明らかに先頭の成分の数（階段の数）である． □

注意 35. 定理 16.1 の証明から分かるように，A の行ベクトルの生成する $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間の基底は，階段行列 (5.2) の最初の r 行（$r = \mathrm{rk}\, A$）で与えられる．

同様に，行列 A に対して，定理 6.4 から得られた階段行列の最初の r 列（$r = \mathrm{rk}\, A$）が，A の列ベクトルの生成する部分ベクトル空間（$\mathrm{Im}\, f_A$ でもある）の基底を与えることが分かる．

16.4 連立一次方程式と線形写像

前節では，階数を行列の行を用いて捉えることが出来るということを示した．これは，階数が**行**に関する基本変形の末に定義されるものであったから可能なのであった．しかし，実は，行列の**列**で階数を捉えることも出来るのである[*204]．これを示すためには，連立一次方程式と線形写像の関係に注目するのがよい．

まず，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の 解空間は，線形写像 $f_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ の核に他ならないことに注意する．ここで，線形写像 f_A を持ち出した利点は，A の列ベクトルで生成されるベクトル空間を $\mathrm{Im}\, f_A$ として捉えることが出来ると言う事である (命題 3.2 (1)，例 15.2)．練習問題 16.2 により, $\dim \mathrm{Im}\, f_A = n - \dim \mathrm{Ker}\, f_A$. よって, 例 14.3 により,

$$\mathrm{rk}\, A = \dim \mathrm{Im}\, f_A \tag{16.2}$$

が成り立つ．一方で，練習問題 16.1 により，$\dim \mathrm{Im}\, f_A$ は A の列の中で一次独立なものの最大数に等しい．よって次を得る．

定理 16.2. A の階数は，A の一次独立な列ベクトルの最大数に等しい．

定理 16.1 と 16.2 を合わせると，行列について，一次独立な行ベクトルの最大数と列ベクトルの最大数は一致することが分かる[*205]．これは，上のような説明がないと，かなり不思議なことと思われる．

${}^tA$ の列ベクトルは A の行ベクトルと 対応するから次を得る．

系 16.4. $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, {}^tA$ が成り立つ．

注意 36. ここで，定理 6.2 の，行列と線形写像の対応を使う 別証明を与えよう．

$n \times n$ 行列 A に対して，$n \times n$ 行列 B で $AB = E$ を満たすものがあるとすると，A, B で定まる線形変換 $f_A, f_B \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は $f_A \circ f_B = \mathrm{id}$ を満たす（3.5 節）．よって，写像の一般的な話から，f_A は全射でなければならない．すると (16.2) より，$\mathrm{rk}\, A = n$ が分かる．また，練習問題 16.2 により，f_A が単射であることと全射であることは 同値である．よって f_A は単射でもあり，f_A は逆写像を持ち，それが f_B に他ならない．つまり，$f_B \circ f_A = \mathrm{id}$ も成り立ち，$BA = E$ も従う．

[*204] 行列の列については，行に関する基本変形で，それらが生成するベクトル空間さえも保存されないのだから，これは不思議である．

[*205] 意味としては，f_A の像の次元と無駄を省いた連立一次方程式の式の数が 等しいということ．

<u>**練習問題**</u> **16.3.** 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つことと， $\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}f_A$ は同値であることを示せ．この事実から，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つことと $\operatorname{rk}A=\operatorname{rk}(A|\boldsymbol{b})$ が同値であることを証明せよ．

実は階数の見方はもう一つある．結果のみ紹介しておく． 行列 A に対して， A のある s 個の行と s 個の列に属する成分を抜き出して得られる $s\times s$ 行列の行列式のことを A の s 次小行列式という． このとき，$\operatorname{rk}A=\max\{s\mid A$ のある s 次小行列式でゼロでないものがある $\}$ が成り立つ．これによれば $\operatorname{rk}A=\operatorname{rk}{}^tA$ は明らかに成り立つ（定理 4.3 を使う）．

以上見たように，行列の階数というのは， 行列の基本変形で定義される非常に単純な量だが，実は様々な意味を持っている奥深い量なのである．

16.5 話題：有理式の部分分数展開

この章の最後に, 基底, 一次独立の考え方の応用として, 実有理式の部分分数展開の存在を示す.[*206]

$f(x)$ を n 次実係数多項式とする．このとき,

$$V:=\{\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{f(x)}\mid a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}\}$$

とおく． つまり V は, $f(x)$ を分母, $n-1$ 次以下の実係数多項式を分子に持つ有理式全体である．なお, ここで有理式は, 高々$f(x)=0$ を満たす $\mathbb{R}$ の点集合 (高々n 点からなる) を除いて定義される関数と見なす．V の $\boldsymbol{o}$ は定数関数 0 である．V が実ベクトル空間になることは容易に分かる．

$$\frac{1}{f(x)},\ldots,\frac{x^{n-1}}{f(x)} \tag{16.3}$$

が V の基底であることを示す．まず, V の定義により V の元は (16.3) の一次結合で 書ける．次に $a_0\frac{1}{f(x)}+\cdots+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{f(x)}=0$ とする (有理式としての等式)．すると, 高々$f(x)=0$ なる点集合 (高々n 点からなる) を除き $a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=0$ が成り立つ．$a_{n-1}\neq0$ ならば, $a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=0$ となる x は高々$n-1$ 個しかない．これは矛盾である． よって $a_{n-1}=0$ でなければならない．同様に $a_{n-2},\ldots,a_0$ もすべて 0 であると分かる．よって (16.3) は一次独立である．以上より (16.3) は基底であることが分かった.

よって $\dim V=n$ である．

V の別の基底を求める.[*207] $f(x)$ は

$$f(x)=a(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_p)^{m_p}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{l_1}\cdots(x^2+\beta_qx+\gamma_q)^{l_q}$$

[*206] 複素有理式でやってもよいが， 微分積分への応用を見込み，実係数で考える．
[*207] 以下の議論は，記号的に複雑であるので， 例で考えてみるとよい．

という形に因数分解できる．ただし，$a, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_q$ は実数であり，$a \neq 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ はすべて相異なり，$x^2+\beta_1 x+\gamma_1 = 0, \dots, x^2+\beta_q x+\gamma_q = 0$ の解はすべて虚数で互いに相異なる．

左右の次数を比べると $\sum_{i=1}^p m_i + 2\sum_{j=1}^q l_j = n$ となっていることに注意．このとき，

$$\begin{gathered}\frac{1}{x-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{(x-\alpha_1)^{m_1}}, \dots, \frac{1}{x-\alpha_p}, \dots, \frac{1}{(x-\alpha_p)^{m_p}}, \\ \frac{1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1}, \frac{x}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1}, \dots, \frac{1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}}, \frac{x}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}}, \dots, \\ \frac{1}{x^2+\beta_q x+\gamma_q}, \frac{x}{x^2+\beta_q x+\gamma_q}, \dots, \frac{1}{(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}}, \frac{x}{(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}}\end{gathered} \tag{16.4}$$

は，分母を $f(x)$ に通分すれば V に属することが分かる．これらが基底であることを示す．これらが一次独立なことを示せばよい．実際，もし，それが分かったとすると，基底の延長によりこれらを含む V の基底が存在するが，これらの個数は $\sum_{i=1}^p m_i + 2\sum_{j=1}^q l_j = n$ であり，すでに V の次元に一致しているから，(??) そのものが V の基底である．

(??) が一次独立であることを示す．

$$\begin{gathered}a_{11}\frac{1}{x-\alpha_1} + \dots + a_{1m_1}\frac{1}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \dots + a_{p1}\frac{1}{x-\alpha_p} + \dots + a_{pm_p}\frac{1}{(x-\alpha_p)^{m_p}} + \\ b_{11}\frac{1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + c_{11}\frac{x}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \dots + b_{1l_1}\frac{1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}} + c_{1l_1}\frac{x}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}} + \dots + \\ b_{q1}\frac{1}{x^2+\beta_q x+\gamma_q} + c_{q1}\frac{x}{x^2+\beta_q x+\gamma_q} + \dots + b_{ql_q}\frac{1}{(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}} + c_{ql_q}\frac{x}{(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}} = 0\end{gathered} \tag{16.5}$$

とする．左辺を通分したものを $\frac{g(x)}{f(x)}$ とおく．すると $f(x) = 0$ なる点集合を除き $g(x) = 0$ であるが，(16.3) の一次独立性を示したときと同様に $g(x)$ は関数として (多項式として)0 である．特に $g(\alpha_1) = 0$ である．$g(x)$ を良く見ると，$x = \alpha_1$ を代入して生き残るのは，$a_{1m_1}\frac{1}{(x-\alpha_1)^{m_1}}$ から来る部分

$$a_{1m_1} a(x-\boldsymbol{\alpha_2})^{\boldsymbol{m_2}} \dots (x-\alpha_p)^{m_p}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1} \dots (x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}$$

であり，これに α_1 を代入すると 0 になるから $a_{1m_1} = 0$ でなければならない．同様に $a_{2m_2} = a_{3m_3} = \dots = a_{pm_p} = 0$ が言える．これによって (??) の左辺は

$$a(x-\alpha_1)^{\mathbf{m_1-1}} \dots (x-\alpha_p)^{\mathbf{m_p-1}}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1} \dots (x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}$$

を分母にして通分が出来ることが分かる．これを (??) にかけて得られる有理式の分子 を $g(x)$ の代わりに考えれば，$a_{1m_1-1} = a_{2m_2-1} = \dots = a_{pm_p-1} = 0$ が言える．同様にして，結局，すべての $a_{ij} = 0$ が言える．

以下では，通分の分母は $a(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}\cdots(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}$ でよい．次に $x^2+\beta_i x+\gamma_i=0$ の解の一つを δ_i とする $(i=1,\dots,q)$. $g(\delta_1)=0$ であるが, $g(x)$ を良く見ると, $x=\delta_1$ を代入して生き残るのは,

$$b_{1l_1}\frac{1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}}+c_{1l_1}\frac{x}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}}$$

から来る部分

$$(b_{1l_1}+c_{1l_1}x)a(x^2+\beta_{\mathbf{2}}x+\gamma_{\mathbf{2}})^{l_2}\dots(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{l_q}$$

であり, これに δ_1 を代入すると 0 になるから $b_{1l_1}+c_{1l_1}\delta_1=0$ でなければならない. ここで, $c_{1l_1}\neq 0$ とすると $\delta_1=-\frac{b_{1l_1}}{c_{1l_1}}$ となって, δ_1 が虚数であることに反する. よって $c_{1l_1}=0$, 従って $b_{1l_1}=0$ も成り立つ. あとは $a_{ij}=0$ を示すのと同様にして, すべての b_{ij}, c_{ij} が 0 であることが分かる. よって (**??**) は一次独立である.

よって, 結果的に, V の元は, (**??**) に属する式の一次結合として 唯一通りに書ける. これが有理式の部分分数展開に他ならない.

問題のヒント・答.

練習問題 16.1 のヒント: 系 16.1 (2) の証明の議論を参照せよ.

練習問題 16.2 のヒント: $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を延長した V の基底を取る.

17　線形写像の表現行列と基底のとりかえによるその変化

この章では, 12 章の一般化を扱う.

定義 17.1. V, W をベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とする. $f : V \longrightarrow W$ を線形写像とし,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) & = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \\ f(\boldsymbol{v}_2) & = a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m \\ \quad\vdots & \\ f(\boldsymbol{v}_n) & = a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m \end{cases} \tag{17.1}$$

と書く．このデータから，次のような行列 A を定める：

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

成分の並べ方（縦横）に注意! この行列 A を，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ に関する f の**表現行列**という.
$V = W$ のときは，通常，$f \colon V \to V$ の定義域である V と値域である V について，同じ V の基底を選ぶ．その V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とするとき，A を，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f の表現行列という.

まずは，この定義をしっかり理解してほしい．そのための練習問題を挙げる.

練習問題 17.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が定める線形変換 $f_A \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ について，基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に関する表現行列を求めよ.

練習問題 17.2. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & i \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

1. 2×2 下半三角行列 ($(1,2)$ 成分が 0 の 2×2 行列のこと) 全体のなすベクトル空間 V (ベクトル空間となることは認めてよい) が B_1, B_2, B_3 を基底にもつことを示せ.

2. $V \ni X \longmapsto AX \in V$ によって定まる線形変換を $f\colon V \to V$ とする (写像 f で V の元が V の元に写ることは認めてよい). 基底 B_1, B_2, B_3 に関する線形変換 f の表現行列を求めよ

練習問題 17.3. 実関数 e^x, xe^x, x^2e^x は実関数全体のなす実ベクトル空間において一次独立であることを示せ. それらの生成する 3 次元実ベクトル空間を V とする. $f(x) \in V$ の導関数 $f'(x)$ もまた V に属する (これは認めてよい). $V \ni f(x) \mapsto f'(x) \in V$ は実線形変換を定める (これも認めてよい). これを $g\colon V \to V$ とする. 基底 $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ に関する線形変換 g の表現行列を求めよ.

練習問題 17.4. P_3 を 3 次以下の複素係数多項式全体のベクトル空間, P_2 を 2 次以下の複素係数多項式全体のベクトル空間とするとき, $D\colon P_3 \to P_2$ なる線形写像を

$$P_3 \ni f(x) \mapsto xf''(x) + x^2 f(i) + f'(0) \in P_2$$

で定める（線形写像であることは認めてよい）. P_3 の基底 $1, x, x^2, x^3$, P_2 の基底 $1, x, x^2$ に関する線形写像 D の表現行列を求めよ.

以下は, 抽象的な問題なので, 興味のある人が解いてくれればよい.

練習問題 17.5. V をベクトル空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を線形変換とする. W を V の部分ベクトル空間とし, $f(W) \subset W$ が成立すると仮定する. $n = \dim V$, $m = \dim W$ とおく. この時, V の基底を選んで, その基底に関する f の表現行列が $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ という形にできることを示せ. ただし, A, B, C は, それぞれ $m \times m$, $m \times (n-m)$, $(n-m) \times (n-m)$ 行列である.

練習問題 17.6. V, W をベクトル空間, $f\colon V \to W$ を線形写像とする. $\operatorname{Ker} f$ の基底を $\boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$, それを延長して得られる V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ とする. このとき, 練習問題 16.2 の証明から, $\boldsymbol{w}_1 := f(\boldsymbol{v}_1), \dots, \boldsymbol{w}_r := f(\boldsymbol{v}_r)$ は $\operatorname{Im} f$ の基底になる. これを延長して得られる W の基底を $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ とする. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$, W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ に関する f の表現行列を求めよ.

練習問題 17.7. $\circledast$ V をベクトル空間とし, $f\colon V \to V$ を線形変換とする. 8.9 節において, ベクトル空間 V に対して, 双対ベクトル空間 V^* を定義した. $\eta\colon V \to \mathbb{C}$ なる線形写像が与えられると, f を合成することで, $V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\eta} \mathbb{C}$ なる線形写像が得られる. こうして, 対応 $\eta \mapsto \eta \circ f$ によって, 写像 $V^* \to V^*$ を得るが, これが線形であることを示せ. この写像を f^* で表す.

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とし, A をこの基底に関する f の表現行列とする. 練習問題 14.3 のヒントで, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に対する V^* の双対基底 $f_1, \dots, f_n$ を定義した. このとき, この双対基底に関する f^* の表現行列は A の転置行列 ${}^tA$ であることを示せ.

表現行列の定義において, 成分の並べ方（縦横）に注意！と書いたが, 以下の定理 17.1 で, その並べ方の真意が分かる.

定義 17.2. V をベクトル空間，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．基底の定義により，V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は，$\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{v}_n\ (p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C})$ とただ一通りに書ける．$p_1, \ldots, p_n$ のことを $\boldsymbol{v}$ の**基底** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ **に関する座標**という．

定理 17.1. 定義 17.1 の状況を考える．任意の $\boldsymbol{v} \in V$ を $\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{v}_n$ と書き，$f(\boldsymbol{v}) = q_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + q_m\boldsymbol{w}_m$ と置くと，

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{17.2}$$

が成り立つ．つまり，この時，f による，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する座標 $p_1, \ldots, p_n$ から $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ に関する座標 $q_1, \ldots, q_m$ への変化は A とベクトルの積として記述できる．

証明. $\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{v}_n$ により，$f(\boldsymbol{v}) = f(p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{v}_n)$ となる．ここで，f **が線形写像であることから**

$$f(p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{v}_n) = p_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + p_n f(\boldsymbol{v}_n)$$

が成り立つ．この右辺に，(17.1) を代入すると，

$$p_1(a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m) + \cdots + p_n(a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m) \tag{17.3}$$

となる．これを各 $\boldsymbol{w}_i$ ごとに整理しよう．$p_i(a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + a_{2i}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{w}_m)$ における $\boldsymbol{w}_j$ の係数は $p_i a_{ji} = a_{ji} p_i$ であるので，(17.3) を整理した時の $\boldsymbol{w}_j$ の係数は

$$a_{j1}p_1 + \cdots + a_{jn}p_n$$

である．これを q'_j とおくと，(17.3) は，$q'_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + q'_m\boldsymbol{w}_m$ となる．一方，$f(\boldsymbol{v}) = q_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + q_m\boldsymbol{w}_m$ と置いていたのだから，$q_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + q_m\boldsymbol{w}_m = q'_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + q'_m\boldsymbol{w}_m$ が成り立つ．ここで，基底の性質により，$q_1 = q'_1, \ldots, q_m = q'_m$ が成り立つ．ここまでで分かったことをまとめると，

$$\begin{cases} q_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n \\ q_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n \\ \ \vdots & \\ q_m &= a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n \end{cases} \tag{17.4}$$

となるが，これは，行列とベクトルの積で表せば，まさに (17.2) に他ならない．□

この結果は、一つの記念碑的な成果であると言えよう．線形代数は，もともと行列で記述できる写像 $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ の研究に端を発し，次第に抽象化（一般化）が進み，ベクトル空間および

線形写像の抽象的定義を基盤として整理されるに至った．しかし，一般化されたあとも，基底を選ぶ必要こそあるものの，線形写像は行列によって記述できることが明らかになった．抽象化によって物事を統一的に捉えられるようになっただけでなく，抽象的に扱ってもなお，行列の恩恵にあずかれるというのは，たいへん幸運なことである．

定理 17.1 は基底の選び方に依存しているので，基底を取り替えたとき，表現行列がどう変化するのかを明確に理解することは非常に重要である．それは，定理 17.3 で明らかになる．その前に，一つのベクトル空間において基底をとりかえた時, その座標変化を表す行列を定義する．これが表現行列の変化を記述するために必要となる．

定義 17.3. V をベクトル空間，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ をともに V の基底とする．

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 &= d_{11}\boldsymbol{a}_1 + d_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + d_{n1}\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b}_2 &= d_{12}\boldsymbol{a}_1 + d_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + d_{n2}\boldsymbol{a}_n \\ \ \ \vdots & \\ \boldsymbol{b}_n &= d_{1n}\boldsymbol{a}_1 + d_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + d_{nn}\boldsymbol{a}_n \end{cases}$$

と唯一通りに書ける事に注意しよう（$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が基底だから）． このデータから定まる行列

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

のことを $\boldsymbol{a}_1, \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ から $\boldsymbol{b}_1, \ldots,\ \boldsymbol{b}_n$ への**基底の変換行列**という．表現行列と同じく，**成分の並べ方（縦横）に注意! また，表現行列と混同しないように！**

基底の変換行列によって, 第一の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に関する座標を第二の基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ に関する座標で表すことが出来る.

定理 17.2.
定義 17.3 の状況の下，$\boldsymbol{v} \in V$ を任意の元とする．$\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{a}_n = q_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + q_n\boldsymbol{b}_n$ とそれぞれの基底を用いて表す時,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

が成立する（**逆に理解しないように注意！**）.

練習問題 17.8 (各自で必ずやること). この定理を定理 17.1 の証明に倣って示せ.

練習問題 17.9. 実関数 1, $\cos x$, $\cos^2 x$ は実関数全体のなす実ベクトル空間において一次独立で

あることを示せ．これらを基底とする実ベクトル空間を V とする．実関数 $1,\ \cos x,\ \cos 2x$ を $\cos x$ の多項式で表すことで,[*208] $1,\ \cos x,\ \cos 2x$ も V に属し, 基底をなすことを示せ．また, 基底 $\{1, \cos x, \cos 2x\}$ から基底 $\{1, \cos x, \cos^2 x\}$ への基底の変換行列を求めよ.

練習問題 17.10. $P_n := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}$ とおく．$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$ は P_n の基底である． よって，$\dim P_n = n+1$ である（ここまでは認めてよい）．$a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ を定数とするとき, $f : P_n \longrightarrow P_n$ を

$$p\,(x) \longmapsto a\,p\,(x) + (bx + c)\,p'\,(x)$$

で定める（線形変換であることは認めてよい).

1. f の $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$ に関する表現行列を求めよ.
2. $1,\ x+1,\ (x+1)^2, \ldots,\ (x+1)^n$ が P_n の基底となることを示せ.
3. f の $1,\ x+1,\ (x+1)^2, \ldots,\ (x+1)^n$ に関する表現行列を求めよ.
4. $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$ から $1,\ x+1, \ldots,\ (x+1)^n$ への基底の変換行列を求めよ．二項定理を使ってよい.

定理 17.3 の証明にはもう一つ準備が必要である.

補題 17.1. V をベクトル空間，$\boldsymbol{a}_1, \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \ldots,\ \boldsymbol{b}_n$ をともに V の基底とする．このとき, $\boldsymbol{a}_1, \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ から $\boldsymbol{b}_1, \ldots,\ \boldsymbol{b}_n$ への基底の変換行列 D は正則行列である．D の逆行列は $\boldsymbol{b}_1, \ldots,\ \boldsymbol{b}_n$ から $\boldsymbol{a}_1, \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ への基底の変換行列である.

証明. 2 次元の場合（12.2.2 節参照）と本質的に変わらないが，和の記号 Σ を導入しないと分かりにくくなる．Σ の使い方をあまり説明していないので， 難しく感じるかもしれない．念のため証明を書いておく.

$D = (d_{ij})$ とすると，基底の変換行列の定義により,

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \boldsymbol{a}_i \tag{17.5}$$

である．$\boldsymbol{b}_1, \ldots,\ \boldsymbol{b}_n$ から $\boldsymbol{a}_1, \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ への基底の変換行列を $F = (f_{kl})$ とすると,

$$\boldsymbol{a}_l = \sum_{k=1}^{n} f_{kl} \boldsymbol{b}_k \tag{17.6}$$

[*208] 一般に $\cos nx$ は $\cos x$ の n 次多項式で表せる．これをチェビシェフの多項式と言う.

である． (17.5) に (17.6) を代入すると，

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(\sum_{k=1}^{n} f_{ki}\boldsymbol{b}_k) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} f_{ki}d_{ij})\boldsymbol{b}_k$$

となる．ここで，第二の等式では和の順序を変えた．$\boldsymbol{b}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{b}_n$ は基底であるから，左右の係数を見比べて，

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ji}d_{ij} = 1, \sum_{i=1}^{n} f_{ki}d_{ij} = 0 (k \neq j)$$

が成り立つ．これは，$FD = E$（E は単位行列）を意味している． 逆に (17.6) に (17.5) を代入すると，$DF = E$ を得る． □

練習問題 17.11. 命題 17.1 とは逆に，正則行列は，次の意味で，常に基底の変換を定めることを示せ．

$D = (d_{ij})$ を正則行列とする． $\boldsymbol{a}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{a}_n$ を基底とし，$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\boldsymbol{a}_i$ によって， $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を定めると，これは基底になる．

基底の変換行列により表現行列の変化が次のように記述できる．

定理 17.3. V, W をベクトル空間，$f : V \longrightarrow W$ を線形写像とする．V については，定義 17.3 のように二つの基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を取り， $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ への基底の変換行列を P とする．W についても，二つの基底 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$, $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ を取り，$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ から $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ への基底の変換行列を Q とする．V の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と W の基底 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ に関する f の表現行列を A, V の基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ と W の基底 $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ に関する f の表現行列を B とする．このとき，

$$B = Q^{-1}AP$$

が成立する．

証明. この証明も 2 次元の場合（命題 12.1）と本質的に変わらない．面倒な計算はすでに上で済んでいるし，落ち着いて，表現行列や基底の変換行列による座標の変化を追えば難しくはない．

$\boldsymbol{v}$ を V の任意の元とする．$\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p_n\boldsymbol{a}_n = p'_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + p'_n\boldsymbol{b}_n$ と二通りの基底で表しておくと， $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ への基底の変換行列の性質（定理 17.2）より，

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix} \tag{17.7}$$

が成り立っている． $f(\boldsymbol{v})$ についても， $f(\boldsymbol{v}) = q_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + q_m\boldsymbol{c}_n = q_1'\boldsymbol{d}_1 + \cdots + q_m'\boldsymbol{d}_n$ と二通りに表しておくと， $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ から $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ への基底の変換行列の性質（定理 17.2）より，

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} q_1' \\ \vdots \\ q_m' \end{pmatrix} \tag{17.8}$$

が成り立っている．

さらに表現行列 A, B の性質（定理 17.1）より，

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{17.9}$$

$$\begin{pmatrix} q_1' \\ \vdots \\ q_m' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{pmatrix} \tag{17.10}$$

も成立している． (17.9) に (17.7) と (17.8) を代入すると，

$$Q \begin{pmatrix} q_1' \\ \vdots \\ q_m' \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{pmatrix}$$

この両辺に Q^{-1} をかけて，(17.10) と見比べると, $B = Q^{-1}AP$ を得る． □

定理 17.3 は，今後，$V = W$ の場合，つまり線形変換のときによく使うので，その場合に改めて述べ直しておく．

系 17.1. V をベクトル空間，$f : V \longrightarrow V$ を線形変換とする．V について，定義 17.3 のように二つの基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を取り， $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ への基底の変換行列を P とする．V の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に関する f の表現行列を A, V の基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ に関する f の表現行列を B とする．このとき，

$$B = P^{-1}AP$$

が成立する．

注意 37 (階数標準形について). 系 6.3 は基底の取り替えによる表現行列の変化として解釈できる． A のサイズを (l, m) として，線形写像 $f_A \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ を考える． このとき， 系 6.3 における階数標準形は， $\mathbb{C}^m$ の基底で標準基底からの変換行列が Q であるものと， $\mathbb{C}^l$ の基底で標準基底からの変換行列が P^{-1} であるものに関する f_A の表現行列に他ならない． これらの $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^l$

の基底に関する座標を，それぞれ $(p_1, \ldots, p_m)$, $(q_1, \ldots, q_l)$ とすると， f_A は， $(p_1, \ldots, p_m) \mapsto (q_1, \ldots, q_l) = (p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$ と書ける．f_A はこの座標系では，あたかも正射影のようになっている．

<u>問題のヒント・答</u>.

練習問題 17.1 の答: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 1-i & 2i & 1 \\ -1 & 3+2i & 2-i \end{pmatrix}$

練習問題 17.2 の解答：

1. まず B_1, B_2, B_3 が V を生成する事を示す． $\frac{1}{2}(B_1+B_2+iB_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 - \frac{1}{2}(B_1+B_2+iB_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 - \frac{1}{2}(B_1+B_2+iB_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より OK.

次に一次独立である事を示す．$aB_1+bB_2+cB_3 = O$ とする． $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ b+ci & a+ci \end{pmatrix} = O$ より，これを a, b, c の方程式と思って解けば， $a = b = c = 0$ となることが分かる（※ここでは略したが，試験の際はちゃんと説明を書くこと）.

2. 計算すると，

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 3B_1 - 2B_2 \tag{17.11}$$

$$AB_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_2 \tag{17.12}$$

$$AB_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3i & 3i \end{pmatrix} = 3B_3 \tag{17.13}$$

従って求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{17.14}$$

※ B_2, B_3 はこの写像の固有ベクトルになっている.

練習問題 17.5 のヒント：W の基底を延長して V の基底を取る.

練習問題 17.11 のヒント: $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が一次独立であることを示せば十分である.

さて，これからいよいよ固有値問題（線形変換の固有値と固有ベクトルをすべて求めるという問題）に取り組んでいく．

18　固有値と固有ベクトルの求め方

念のため，次の定義を復習しておく．

定義 18.1.
V をベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする．$\boldsymbol{v} \in V$ が f の**固有ベクトル**であるとは, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ であり, ある $\alpha \in \mathbb{C}$ があって $f(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v}$ となるということ．α のことを $\boldsymbol{v}$ に対する f の**固有値**という．また $\boldsymbol{v}$ を α に対する固有ベクトルという．

$V = \mathbb{R}^2$ または $\mathbb{C}^2$ の時の固有値と固有ベクトルの求め方は, 10 章で説明した．ここまで来ると，任意の線形変換に対して固有値と固有ベクトルを求めることができる．

18.1　$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ の場合

注：適宜，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に読み替えてよい．

この場合は，定理 6.8 を踏まえれば，10 章と全く同様にして，次の手順で固有値と固有ベクトルを求めることが出来る．

定理 18.1.
$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を線形変換とする．ある $n \times n$ 行列 A が存在して, すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書けるのだった（3.3 節）．このとき, f の固有値と固有ベクトルは, 次のように求めることができる．
(1) 方程式

$$\Phi_A(t) := \det(tE - A) = 0$$

を解く (これを **$\boldsymbol{A}$ の固有方程式**という．$\Phi_A(t)$ は A の**固有多項式**と呼ばれ，$\Phi_A(t)$ は t について n 次の多項式で n 次の係数が 1 であることが分かる).
この任意の一つの解を α とする．
(2)

$$(\alpha E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

なる連立一次方程式の $\boldsymbol{o}$ でない解を求め, その解の任意の一つを $\boldsymbol{v}$ とする．このとき $\boldsymbol{v}$ は f の固有ベクトル, α は $\boldsymbol{v}$ に対する f の固有値である．

ここで (1) は行列式を計算することで, (2) は掃き出し法によって, それぞれ解を求めることができる．こうして，ここまでで学んできたことを結集して固有値と固有ベクトルが求められ

るようになった.

なお, n 次方程式は複素数の範囲で少なくとも一つ解を持つ (「代数学の基本定理」と呼ばれる結果である) ので，次の結果が成り立つ.

系 18.1. どんな $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ に対しても固有値と固有ベクトルは少なくとも一組存在する.

これは，線形変換 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ では成り立たない．例えば，回転行列で定まる線形変換 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は固有値も固有ベクトルも持たない．系 18.1 が，この講義ノートで複素数上のベクトル空間を主に考えることにした理由の一つである.

系 18.1 は，当たり前とも思えるが，役立つことがある（例えば命題 26.1 の証明）.

練習問題 18.1. 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 17 & 10 \\ 7 & -21 & -12 \end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

練習問題 18.2. $n \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

を考える．ここで， $A_1, \dots, A_r$ は正方行列であり，そのサイズの和が n になっているとする.

また，A の $A_1, \dots, A_r$ に属さない成分はすべて 0 とする．$\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_r \end{pmatrix}$ と表示する． ただし，各 $\boldsymbol{x}_i$ は A_i のサイズと同じ長さを持つ縦ベクトルである． このとき， $\boldsymbol{x}$ が A の固有値 α の固有ベクトルであることと，すべての $i = 1, \dots, r$ に対して $A_i\boldsymbol{x}_i = \alpha\boldsymbol{x}_i$ が成り立ち, $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$ のいずれかは $\boldsymbol{o}$ でないことは同値であることを示せ.

練習問題 18.3. $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$ について, 各 i, j に対し, $a_{ij} \geq 0$, $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1$ が成立するとする. 次を示せ.

(1)A は 1 を固有値に持つ.

(2)A の任意の固有値の絶対値は 1 より大きくはない.

この練習問題に出てくる行列を**確率行列**という． これは，**マルコフ過程**（次の時刻における状態が現在の状態だけで記述される確率現象）を記述するときに現れる．詳しくは，数学セミ

ナー 2012 年 12 月号の芦野隆一氏の記事を読んでみるとよい． 確率行列の，Google のページランキングへの応用にまで言及されている秀逸な記事である．

練習問題 18.4 (ゲルシュゴリンの定理)**.** ⊛ $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の固有値は，複素平面 $\mathbb{C}$ において， 中心 a_{ii}， 半径 $r_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ の閉円板 $D_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ のいずれかに 含まれることを示せ．ただし，$r_i = 0$ のときも含めて閉円板という事にする．[*209]

練習問題 18.5 (ゲルシュゴリンの定理の精密化 ⊛)**.** 練習問題 18.4 の記号設定の下で考える． 閉円板の合併集合 $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ は連結成分 $G_1, \ldots, G_r$ に分けられる．ここで，連結成分とは（図を書けば一目瞭然であるが），いくつかの閉円板からなっており，相異なる D_k と D_l は交わらない，また，各 D_k は閉円板の互いに交わらない和集合に分割できない， という性質を持つものである．

このとき，各 D_k は，D_k を構成している閉円板の個数と等しい個数の固有値を含むことを示せ．ただし，A の固有値は重複を考えて n 個と数え， また，閉円板も $D_k = D_l$ $(k \neq l)$ なる D_k, D_l は異なるものと考える．

練習問題 18.6. A, B を $n \times n$ 行列とする．B が正則で $AB = 2BA$ が成り立つ時, A のすべての固有値は 0 であることを示せ.

18.2 一般のベクトル空間の線形変換の場合

実は, 表現行列のおかげで，この場合も行列の話に帰着できるのである．

V をベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする. $\boldsymbol{v}$ が f の固有ベクトル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, かつ，ある α があって $f(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v}$ であった．ここで，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を取り，$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, $f(\boldsymbol{v}) = x'_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x'_n\boldsymbol{v}_n$ と表しておくと，$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ が f の固有ベクトル ⇔ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$, かつ, ある α があって, $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ となる．ここで，基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f の表現行列を A とすると，

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であったことを思い出す（定理 17.1）と，さらに条件は, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$, かつ, ある α があって,

[*209] 固有値の計算しやすい存在範囲を与える定理である．

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と言い換えられる．この条件は，α が A の固有値，$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が α に対する A の固有値ということに他ならない！よって, A について定理 18.1 の (1) と (2) を行って固有値と固有ベクトルを求めれば, f の固有値と固有ベクトルも求められる.

ところで，表現行列は基底の取り方に依存しているが，固有値も固有ベクトルも，本来は基底の取り方に無関係に定まっているものなので，どのような基底を取って計算しても最終的には一つの答えに確定する．それは当然の事ではあるのであるが，固有値については，次の命題からも分かる．

命題 18.1. f の表現行列の固有多項式は，V の基底のとり方によらない. よって以下, これを f **の固有多項式**とよび, $\Phi_f(t)$ で表す.

証明. 基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f の表現行列を A, 基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ に関する f の表現行列を B，基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ への基底の変換行列を P とすると，系 17.1 により，$B = P^{-1}AP$ が成り立つのであった．$\Phi_A(t) = \Phi_B(t)$ を示せばよい．これは次のように分かる：

$$\begin{aligned}\Phi_B(t) &= \det(tE - B) = \det(tE - P^{-1}AP) = \det\left(P^{-1}(tE - A)P\right) \\ &= \det P^{-1}\det(tE - A)\det P = \det(tE - A) = \Phi_A(t).\end{aligned}$$

□

練習問題 18.7. V を 2 次以下の複素係数多項式全体のベクトル空間とする．線形変換 $f\colon V \to V$ を

$$V \ni P(x) \mapsto P''(x) - 2x\,P'(x) - P(x) \in V$$

で定める（線形変換になることは認めてよい）．f の固有値と固有ベクトルを求めよ．固有ベクトルは V の元として書くこと．

練習問題 18.8. V を関数 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ で生成されるベクトル空間とする．この 5 つが基底であることは認めて良い．$f : V \to V$ を $g(x) \mapsto g'(x)$ で定める．f の固有値と固有ベクトルを求めよ．

問題のヒント・答.

練習問題 18.1 の答

(1) 1; $k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$ -1; $k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0$ または $l\neq 0)$

(2)2; $k\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0$ または $l\neq 0)$

(3) 問題の行列 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1\end{pmatrix}$ を A とする．まず A の固有方程式を解く．

練習問題 4.4 (6) によって、 $\Phi_A(t) := \det(tE-A) = t^n + a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$. よって固有値は $t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n=0$ の解. 各固有値 α に対して $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ を解くと，$x_{i+1}=\alpha x_i$ $(1\leq i\leq n-1)$, $-a_nx_1-\cdots-a_1x_n=\alpha x_n$ を得るが，前者によって $x_i=\alpha^{i-1}x_1$ $(1\leq i\leq n)$ が得られ， これを後者に代入すると $x_1(-a_n-\cdots-a_1\alpha^{n-1})=\alpha^nx_1$ となるが，これはいつでも成り立つ． よって固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \vdots\\ \alpha^{n-1}\end{pmatrix}, k\neq 0.$

練習問題 18.2 のヒント： 行列積のブロック計算法（3.6 節）の練習問題と言ってよい．

練習問題 18.3 のヒント (1) $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ (2) 固有ベクトルの絶対値が最大の成分に注目

練習問題 18.5 のヒント：対角成分が A と同じ対角行列を B とする． B については明らかに主張は正しい（n 個の連結成分があって， それは固有値の集合と一致）．$C=A-B$ と置き，t を変数として 行列 $B+tC$ を考えよ． 固有値，閉円板は連続的に変化することに注意せよ．

なお，具体例 $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -7 & 8\end{pmatrix}$ を考えてみると面白い．

練習問題 18.8 の答:

$\boldsymbol{v}=x_1+x_2\sin x+x_3\cos x+x_4\sin 2x+x_5\cos 2x$ が f の固有ベクトルとする．$f(\boldsymbol{v})=x_2\cos x-$

$x_3 \sin x + 2x_4 \cos 2x - 2x_5 \sin 2x$ なので、f の表現行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. まず A の固有値及び固有ベクトルを求める． 直接やっても，もちろんよいが， $A_1 = 0$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ とおいて，練習問題 18.2 を適用すると見通しよく解ける． $A_1 = 0$ の固有値は 0, 固有ベクトルは任意の 0 でない複素数，A_2 の各固有値・固有空間の元は $-i; k \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $i; k \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, A_3 の各固有値・固有空間の元は $-2i; k \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $2i; k \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから， A の各固有値・固有ベクトルは， $0; k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -i; k \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, i; k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -2i; k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, 2i; k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$. よって f の固有値及び固有ベクトルは $0; k$, $-i;\ k(\cos x - i \sin x)$, $i;\ k(\cos x + i \sin x)$, $-2i;\ k(\cos 2x - i \sin 2x)$, $2i;\ k(\cos 2x + i \sin 2x)$ $(k \neq 0)$ になる．

19　固有基底の存在と固有空間

線形変換 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ のときの理想的状況は，固有ベクトルからなる基底が存在するときであった（なぜ，理想的なのかは 9 章を参照のこと）．この講義ノートの主目標の一つは，**任意のベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ について，固有ベクトルからなる基底が存在するための判定条件を与えること**である．この章と次章で，その様々な判定条件を与える．ここで得られるすべての判定条件において，線形変換 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の時には表に出てこなかった，**固有空間**という考え方が本質的である．

以下では，f の固有ベクトルからなる V の基底のことを **f に関する V の固有基底**と呼ぶことにする[*210].

19.1　固有空間

$n \times n$ 行列 A によって定まる $\mathbb{C}^n$ の線形変換 $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の場合，固有ベクトルを求めるというのは， 各固有値 α に対して， 連立一次方程式 $(\alpha E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間の基底を求めることに他ならない（練習問題 18.1 などの具体的問題で納得してほしい）．しかし，基底の取り方には任意性があるので，解空間そのものの方が本質的である．そこで，任意のベクトル空間の線形変換についても，この解空間に対応するものを定義しておく．

定義 19.1.
V をベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする．f の固有値 α に対して,

$$V_\alpha := \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v}\}$$

を f の固有値 α に対する**固有空間**という (これは α に対する f の固有ベクトル全てと $\boldsymbol{o}$ からなる集合に他ならない).

練習問題 19.1. V_α が V の部分ベクトル空間であることを示せ.

18.2 節の考え方を使えば， 任意の線形変換 $f\colon V \to V$ についても，固有ベクトルを求めるというのは，各固有値 α に対して固有空間の基底を求めることに他ならないことが分かる.

以下では，固有空間を用いて，固有基底の存在判定法をいくつか与える.

19.2　判定法 I

判定法を与えるためには，部分ベクトル空間の和という考え方が必要となる． これは，既出 (練習問題 8.4) であるが復習しておく.

[*210] この用語は他の教科書では使われていないと思う.

定義 19.2.
V をベクトル空間, $V_1, V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする．このとき

$$V_1 + V_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in V_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}$$

とおくと, これは部分ベクトル空間になる．これを V_1 **と** V_2 **の和**と呼ぶ.
3 つ以上の部分ベクトル空間の和も同様に定義する.

次の定理は, 固有空間を使った対角化可能性の判定法その 1 である．この判定法は，正直なところ使い勝手がよくないのだが，後に証明する判定法すべての根本にあるものなので，しっかり理解しておく必要がある.

定理 19.1 (判定法 I). V をベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする．また $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を f の全ての固有値とする (ここでは $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ は相異なるとしている)．このとき,

$$V \text{ が } f \text{ に関する固有基底を持つ} \Leftrightarrow V = V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$$

が成り立つ．右側の条件を，V は f に関して**固有分解可能**であるということにする.

定理 19.1 の $\Rightarrow$ の証明 これは，定義に立ち返れば，実は，ほぼ自明である．f の固有ベクトルからなる V の基底が存在すると仮定する．この基底を

$$\overbrace{\boldsymbol{v}^1_1, \ldots, \boldsymbol{v}^1_{k_1}}^{\text{固有値 } \alpha_1}, \overbrace{\boldsymbol{v}^2_1, \ldots, \boldsymbol{v}^2_{k_2}}^{\text{固有値 } \alpha_2}, \ldots \tag{19.1}$$

とし， $\boldsymbol{v}^i_1, \ldots, \boldsymbol{v}^i_{k_i}$ が固有値 α_i に対する固有ベクトルであるとする．この時，$\boldsymbol{v}^i_1, \ldots, \boldsymbol{v}^i_{k_i}$ は V_{α_i} に含まれ，(19.1) は V を生成するから， $V = V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$ が成立する.

定理 19.1 $\Leftarrow$ の証明のためには， 次の命題に述べられている固有空間の性質（固有空間の和の無駄のなさ）が鍵となる.

命題 19.1.
定理 19.1 の状況の下（ただし，f に関する V の固有基底が存在することは仮定しない），$\boldsymbol{v}_i \in V_{\alpha_i}$ に対して， $\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ が成り立つならば，$\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ である.

注意 38. これは，$\boldsymbol{o}$ を $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ の元の和として書く方法の一意性を言っている．$V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ の元 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ を用いて書き表されているため誤解しやすいと思うが，$V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ の元の性質ではなく，$V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ そのものの性質であることを理解してほしい.

また，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 一次独立と言っているわけではないので混乱しないように注意！

証明. 次のように，少し命題の形を変えて帰納法で証明できるようにする．各 l $(1 \leq l \leq k)$ と $\boldsymbol{v}_i \in V_{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq l)$ に対して，$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ が成り立つならば， $\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ であることを示す．l についての帰納法を用いる．$l = 1$ ならば明らか．$l \geq 2$ として， $\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$

を仮定する．これに f を施すと，$\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_l\boldsymbol{v}_l=\boldsymbol{o}$ となる． これから，$\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_l=\boldsymbol{o}$ の α_l 倍を引くと，$(\alpha_1-\alpha_l)\boldsymbol{v}_1+\cdots+(\alpha_{l-1}-\alpha_l)\boldsymbol{v}_{l-1}=\boldsymbol{o}$ となる．帰納法の仮定により，$(\alpha_1-\alpha_l)\boldsymbol{v}_1=\cdots=(\alpha_{l-1}-\alpha_l)\boldsymbol{v}_{l-1}=\boldsymbol{o}$ であるが，$\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ はすべて異なるから，$\boldsymbol{v}_1=\cdots=\boldsymbol{v}_{l-1}=\boldsymbol{o}$ でなければならない．$\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_l=\boldsymbol{o}$ により，$\boldsymbol{v}_l=\boldsymbol{o}$ も成り立つ． □

定理 *19.1* の $\Leftarrow$ の証明. V_{α_i} の基底を $\boldsymbol{v}^i_1,\ldots,\boldsymbol{v}^i_{k_i}$ とする．$V=V_{\alpha_1}+\cdots+V_{\alpha_k}$ という仮定により， V は

$$\boldsymbol{v}^1_1,\ldots,\boldsymbol{v}^1_{k_1},\boldsymbol{v}^2_1,\ldots,\boldsymbol{v}^2_{k_2},\ldots, \tag{19.2}$$

によって生成されている． よって (19.2) が一次独立なことを示せばよい．

$$\sum_{1\le i\le k,1\le j\le k_i} x^i_j\boldsymbol{v}^i_j=\overbrace{x^1_1\boldsymbol{v}^1_1+\cdots+x^1_{k_1}\boldsymbol{v}^1_{k_1}}^{V_{\alpha_1}\text{ に属す}}+\overbrace{x^2_1\boldsymbol{v}^2_1+\cdots+x^2_{k_2}\boldsymbol{v}^2_{k_2}}^{V_{\alpha_2}\text{ に属す}}+\cdots=\boldsymbol{o}$$

とする． i を固定すると $\sum_{1\le j\le k_i}x^i_j\boldsymbol{v}^i_j\in V_{\alpha_i}$ であるから， 命題 19.1 により， $\sum_{1\le j\le k_i}x^i_j\boldsymbol{v}^i_j=\boldsymbol{o}$ である．さらに $\boldsymbol{v}^i_1,\ldots,\boldsymbol{v}^i_{k_i}$ は V_{α_i} の基底であるから，$x^i_1=\cdots=x^i_{k_i}=0$ も成り立つ．こうして， (19.2) が一次独立なことが示された． □

19.3 ベクトル空間の直和–無駄のない和，一意性のある和–

一旦，固有空間を離れて一般的な話をする．命題 19.1 は，固有空間の和 $V_{\alpha_1}+\cdots+V_{\alpha_k}$ が，単なるベクトル空間の和にはない特別な性質を持っていることを示している．これを明確に捉えるために次の定義をする．

定義 19.3.
V をベクトル空間, $V_1,\ldots,V_k$ を V の部分ベクトル空間とする. $V_1+\cdots+V_k$ が**直和**であるとは, $V_1+\cdots+V_k$ の任意の元が $V_1,\ldots,V_k$ の元の和としてただ一通りに書けるということ. このとき，$V_1+\cdots+V_k$ を $V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ で表す.

注意 39. 一次独立性が有限個のベクトルの集合に関する一次結合（係数の自由度を許した和）の一意性であったのに対し， 直和は，有限個の部分ベクトル空間の和の一意性である．一意性と言う点で両者は類似しているし，実は密接な関係にあるが，混乱しないようにしてほしい．

よくある混乱の例を挙げておくと， $V_1+\cdots+V_k$ が直和であるというのを， 「$V_1+\cdots+V_k$ の任意の元が $V_1,\ldots,V_k$ の元の**一次結合として**ただ一通りに書ける」と誤解している人が非常に多い．$x_1\boldsymbol{o}+\cdots+x_k\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$ （$x_1,\ldots,x_k$ は何でもよい）が反例.

命題 19.2.
定義 19.3 の設定の下,

$V_1 + \cdots + V_k$ が直和 $\Leftrightarrow$ 「各 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ に対して，$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ ならば,
$\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ である」

が成り立つ.

この証明は，一次独立性の言い換えの証明（命題 15.1）とほぼ同じであるので各自に任せる.

命題 19.1 と 19.2 により， 固有空間の和 $V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$ は直和であることが分かった.

練習問題 19.2. V をベクトル空間，V_1, V_2 を部分ベクトル空間とするとき， $V_1 + V_2$ が直和であることと，$V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ であることは同値であることを示せ.

練習問題 19.3. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ で実 $n \times n$ 行列のなす実ベクトル空間を表す.
(1)$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ において, 実対称行列全体 $S := \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | B = {}^tB\}$ と実交代行列全体 $A := \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | B = -{}^tB\}$ は部分ベクトル空間になることを示せ.
(2)$M = S \oplus A$ であることを示せ.

練習問題 19.4. $f\colon V \to V$ を線形変換とするとき, $f \circ f = f$ が成り立つならば, $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ となる事を示せ.

練習問題 19.5. $f\colon V \to V$, $g\colon V \to V$ を線形変換とするとき, $f + g = \mathrm{id}$ かつ $f \circ g = g \circ f = 0$ が成り立つならば, $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ となる事を示せ.

直和の次元は計算しやすい.

命題 19.3 (直和の次元公式). V をベクトル空間, $V_1, \ldots, V_k$ を V の部分ベクトル空間とし, $V_1 + \cdots + V_k$ が直和であるとする．このとき

$$\dim(V_1 + \cdots + V_k) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$$

が成り立つ.

証明の概略. これは実質，定理 19.1 の $\Leftarrow$ の証明で示されていることである．概略を示す．$V_1, \ldots, V_k$ の基底を取って並べると，$V_1 + \cdots + V_k$ が直和であることにより，定理 19.1 の $\Leftarrow$ の証明と同様に, それらが $V_1 + \cdots + V_k$ において一次独立であることが分かる（**各自必ず確認すること**)．よって, それらは $V_1 + \cdots + V_k$ の基底である．この基底に属するベクトルの数は， $\dim V_1 + \cdots + \dim V_k$ であるから命題 19.3 の等式が成り立つ. $\square$

必ずしも直和でない部分ベクトル空間の和の公式が次の練習問題で得られる.

練習問題 19.6. V をベクトル空間，W_1，W_2 を V の部分ベクトル空間とする時，$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$ が成り立つことを示せ.

直和の性質を整備したので（特に命題 19.3 の次元公式），定理 19.1 をより使いやすい形に言い換えることができる．これを次節以降で行う．

なお，命題 19.3 の証明から，次の直和の言い換えが得られる． これも有用であるし，直和と一次独立の橋渡しをしてくれる．

命題 19.4. V をベクトル空間, $V_1, \ldots, V_k$ を V の部分ベクトル空間とする．$V_1 + \cdots + V_k$ が直和であることと， $V_1, \ldots, V_k$ それぞれの一組の基底を並べたものが $V_1 + \cdots + V_k$ の基底になることは同値である．

証明. $V_1 + \cdots + V_k$ が直和であると仮定するとき， $V_1, \ldots, V_k$ それぞれの一組の基底を並べたものが $V_1 + \cdots + V_k$ の基底になることは，命題 19.3 の証明で見た通りである．

逆に，$V_1, \ldots, V_k$ それぞれの一組の基底を並べたものが $V_1 + \cdots + V_k$ の基底であると仮定して，$V_1 + \cdots + V_k$ が直和であることを示そう．$\boldsymbol{v}_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq k)$ に対して， $\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ が成り立つとする．$\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$ を示したい．詳しくは時間があれば講義にて． □

19.4 判定法 II

定理 19.2 (判定法 II). V をベクトル空間，$f : V \longrightarrow V$ を線形変換，$\alpha_1, \ldots,\ \alpha_k$ を f の全ての固有値とする．この時,

$$V \text{ が } f \text{ に関する固有基底を持つ} \iff \dim V = \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$$

が成り立つ.

さらに，左辺は

$$\dim V \leq \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$$

という条件でもよい（少し使いやすくなる）.

証明. これは直和の次元公式（命題 19.3）を使えば容易である． $V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$ はいつでも直和であるから，$\dim(V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}) = \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$ が常に成り立つ．よって，

$$\dim V = \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k} \iff \dim V = \dim(V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k})$$

である．さらに，系 16.2 により，これは $V = V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$ と同値である．よって，定理 19.1（判定法 I）により，定理 19.2 が成り立つ．

「さらに」以下の部分を証明しよう．もし，V が f に関する固有基底を持つならば，すでに示したことから，$\dim V = \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$ が成り立つので，$\dim V \leq \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$ も成立している．逆に $\dim V \leq \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$ であるとしよう．右辺は，$\dim(V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k})$ に等しいのであった．そして，$V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k} \subset V$ なので，$\dim(V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}) \leq \dim V$ は

常に成り立つ．よって，結局，$\dim V = \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_k}$ となるので，すでに示したことにより，V は f に関する固有基底を持つ． □

次はとても使いやすい特別な場合である．命題 10.1 の一般化である．

系 19.1. $n = \dim V$ とする．f の固有多項式が n 個の相異なる解を持つならば，V は f に関する固有基底を持つ．

証明. $\dim V_{\alpha_i} \geq 1\,(1 \leq i \leq n)$ により，

$$\dim V = n \leq \dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_n}$$

が成り立つので，定理 19.2 の後半から，この系が分かる． □

次の例については， わざわざ定理 18.1 を使わなくても， 幾何的な意味を考え，定理 19.2 を応用することで，固有ベクトルと固有値が求められる．

練習問題 19.7. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $B = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

(4) 0 でない $a_i (i = 1, \cdots, n)$ に対し $a_{ij} = \frac{a_i}{a_j} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ を成分とする行列 D.

19.5 判定法 III

定理 19.2 は，f の固有多項式（命題 19.1）を持ち出すことで精密化できる．$\dim V = n$ とすると，f の固有多項式は n 次多項式である．これを $\Phi_f(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \cdots (t - \alpha_k)^{m_k}$ と因数分解する（$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ はすべて異なるとする）．$m_1 + \cdots + m_k = n$ に注意する．また, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ が f の全ての固有値である．各 m_i のことを固有値 α_i の**重複度**という．

定理 19.3 (判定法 III).

$$V \text{ が } f \text{ に関する固有基底を持つ} \iff \text{各 } i \text{ について } \dim V_{\alpha_i} = m_i$$

が成り立つ．
証明を見れば分かるように（下記の補題 19.1 も参照），左辺は，

$$\text{各 } i \text{ について } \dim V_{\alpha_i} \geq m_i$$

と言う条件とも同値になる．

証明. $\Leftarrow$ は次のように容易に示される． 各 i について $\dim V_{\alpha_i} = m_i$ ならば，$\sum_{i=1}^k \dim V_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k m_i = n = \dim V$ となり，定理 19.2 により，V は f に関する固有基底を持つ．

$\Rightarrow$ については， まず，以下の補題 19.1 により， $\dim V_{\alpha_i} \leq m_i$ はいつでも成立するので，

$$\sum_{i=1}^k \dim V_{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^k m_i = n. \tag{19.3}$$

他方，V が f に関する固有基底を持つならば， 定理 19.2 により，(19.3) は等号であり，従って，すべての i について， $\dim V_{\alpha_i} \leq m_i$ も等号になる． □

補題 19.1. 任意の線形変換 $f\colon V \to V$ について，$\dim V_{\alpha_i} \leq m_i$ が成立する（$1 \leq i \leq k$）．

証明. i を固定する．$f(V_{\alpha_i}) \subset V_{\alpha_i}$ に注意すると，練習問題 17.5 の W として V_{α_i} を選ぶことができ，V_{α_i} の基底を延長して得られる V の基底に関する f の表現行列が $D := \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ という形になる．ここで， V_{α_i} の基底は固有値 α_i の固有ベクトルからなるので， A は $\alpha_i E$ (E は $\dim V_{\alpha_i} \times \dim V_{\alpha_i}$ 単位行列）である．このとき，$\Phi_f(t) = \Phi_D(t) = \Phi_A(t)\Phi_C(t)$ であり（定理 4.2），$\Phi_A(t) = (t - \alpha_i)^{\dim V_{\alpha_i}}$ であるから， $\dim V_{\alpha_i} \leq m_i$ が成り立つ． □

注意 40 (**とても便利な注意**). 定理 19.3 において，条件を「各 i について $\dim V_{\alpha_i} \geq m_i$」に弱めておく利点の一つは次の通り： 定理の状況で，$V_{\alpha_i} \neq \{\boldsymbol{o}\}$($\because V_{\alpha_i}$ は少なくとも一つ固有ベクトルを含むので)，よって $\dim V_{\alpha_i} \geq 1$ はいつでも成り立つ．よって $m_i = 1$ なる固有値に関しては $\dim V_{\alpha_i} \geq m_i$ は自動的に成り立つので，問題を解く際にわざわざチェックする必要がない．これはずいぶん計算量を減らしてくれる．

19.6 表現行列の対角化可能性

V をベクトル空間，$f : V \longrightarrow V$ を線形変換とする．この節では，V が f に関する固有基底を持つという条件を f の表現行列を用いて言い換えておく．

V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を取り，これに関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ と書く．すると，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が固有基底というのは， つまり，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ がすべて f の固有ベクトルであるというのは，A の成分が $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 以外すべて 0 という事，つまり，A が対角行列であるという事に他ならない．

また，表現行列 A が対角行列であるとき， その固有多項式は $(t - a_{11}) \cdots (t - a_{nn})$ であるので，f のすべての固有値が A の対角成分として現れている．

以上を命題の形にまとめておく．

命題 19.5. 次は同値：

V が f に関する固有基底を持つ $\Leftrightarrow$ f の表現行列が対角行列となる V の基底が存在する．

さらに，このとき，固有基底に関する f の表現行列が対角行列であり，その対角成分が f の固有値全体である．

これを踏まえて次のような定義をしておく．

定義 19.4.
V をベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする．f の表現行列が対角行列となる V の基底が取れるとき, f は**対角化可能**であるという．これは V が f に関する固有基底を持つということの言い換えに過ぎないが，表現行列の条件で述べ直しているので分かりやすい．
$V = \mathbb{C}^n$, f が $n \times n$ 行列 A によって定まる線形写像 f_A であるときには，f_A が対角化可能であるというのを，A が**対角化可能**であるともいう．これは，ある正則行列 D が存在して，$D^{-1}AD$ が対角行列になるということに他ならない（系 17.1，練習問題 17.11）．

.

注意 41. V をベクトル空間，$f : V \longrightarrow V$ を線形変換，$\alpha_1, \ldots,\ \alpha_k$ を f の全ての固有値とする．$d_i = \dim V_{\alpha_i}$，$d := \sum_{i=1}^k d_i$，$e := \dim V - d$ とおく．$V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$ は直和であるから，$V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ の基底を並べると，それは $V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_k}$ の基底となる．さらに，それを延長して V の基底を作る．このとき，$f(V_{\alpha_i}) \subset V_{\alpha_i}$ なので，練習問題 17.5 より，この基底に関する f の 表現行列は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{d_1} & & & & & \\ & \alpha_2 E_{d_2} & & O & & A \\ & & \ddots & & & \\ & O & & \alpha_{k-1} E_{d_{k-1}} & & \\ & & & & \alpha_k E_{d_k} & \\ & O & & & & B \end{pmatrix}$$

という形である．ここで，自然数 l に対して E_l は $l \times l$ 単位行列を表し，A は $d \times e$ 行列，B は $e \times e$ 行列である．また，$\alpha_1 E_{d_1}, \ldots, \alpha_k E_{d_k}$, A, B に属さない成分はすべて 0 とする．この表現行列は，$e = 0$ のときには対角行列になるが，一般に A, B の部分についてはなにも言っていない．この表現行列をもっと精密化したのがジョルダン標準形である（21 章参照．ただし基底の並べ方を変える）．

練習問題 19.8. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化可能か？

<u>**練習問題**</u> **19.9.** $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能でない時の $a \in \mathbb{C}$ を求めよ.

<u>**問題のヒント・答.**</u>

練習問題 19.3: $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A = \frac{n(n-1)}{2}$.

練習問題 19.5 の解答： 次の二つを証明すればよい.（1）$V = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$（2）$\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ は直和である.

（1）$V \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ を示せばよい. $f + g = \mathrm{id}$ により，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$. $f(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\, f$, $g(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\, g$, よって $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$. つまり $V \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ が示された.

（2）$\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ は直和であることを示す. $f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ ならば，$f(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ を示せばよい. $f \circ (f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{w})) = f \circ f(\boldsymbol{v}) + f \circ g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ であるが，$f \circ g = 0$ により $f \circ f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$. 他方，$f + g = \mathrm{id}$ に f を施すと $f \circ f + f \circ g = f$ となるが，$f \circ g = 0$ により $f \circ f = f$ を得る. よって，$f \circ f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ から $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ を得る. $f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ より $g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ も成り立っている.

練習問題 19.6： まず $W_1 \cap W_2$ の基底をとり，それを延長して $W_1,\ W_2$ の基底を作る.

練習問題 19.7: どの問題も，わざわざ 固有方程式を解く必要はない. それぞれの行列の特徴から，いくつかの固有ベクトルを見つけてみよ. すると，定理 19.2 よりそれがすべての固有ベクトルであることが分かる.

(3) $b = 0$ なら固有値は a, 固有ベクトルは全ての 0 でないベクトル

$b \neq 0$ なら, $a - b$; $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k \neq 0$ または $l \neq 0$), $a + 2b$; $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k \neq 0$)

(4) n; $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 0; $\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ -a_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix}$

練習問題 19.9： 答えは $a = 1 \pm 2\sqrt{2}i$.

M（が表す線形変換）の固有方程式は

$$\begin{aligned}
\Phi_M(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ 1 & t-a & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 1 & -1 \\ 0 & t-a & -1 \\ t-3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 1 & -1 \\ 0 & t-a & -1 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= (t-3)\{(t-a)(t-1) - 2\} \\
&= (t-3)\{t^2 - (a+1)t + a - 2\}
\end{aligned}$$

より

$$(t-3)\{t^2 - (a+1)t + a - 2\} = 0 \tag{19.4}$$

となる．(19.4) が相異なる 3 解を持つ時，M は対角化可能．　よって対角化可能でないためには，少なくとも (19.4) が重解を持つ事が必要.

(i) $t^2-(a+1)t+a-2=0$ が重解を持つ時. この時，$a=1\pm 2\sqrt{2}i$（のどちらか）であり，重解となる固有値は (それぞれ)$1\pm\sqrt{2}i$ である．この時

$$M-(1\pm\sqrt{2}i)E \longrightarrow \begin{pmatrix} -2\pm\sqrt{2}i & 1 & -1 \\ 0 & -(\pm\sqrt{2})i & -1 \\ 0 & -2 & \pm\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

($\longrightarrow$ は基本変形した事を表す事にする．これは，$\Phi_M(t)$ の計算から分かる．)
より，$(1\pm\sqrt{2}i)$-固有空間の次元は 1 である．　よって判定法 III より，対角化不可能.

(ii) $t^2-(a+1)t+a-2=0$ が $t=3$ を解に持つ時.
この時，$a=2$ であり，

$$M-3E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19.5}$$

$$\tag{19.6}$$

より， 3-固有空間の次元は 2 である．したがって判定法 III より対角化可能.

以上より，求める条件は $a=1\pm 2\sqrt{2}i$.

20　ケーリー・ハミルトンの定理, 最小多項式, 対角化可能性

この章の内容は 11.2 節の内容と比較して読むとよい．$n \times n$ 行列に対して，ケーリー・ハミルトンの定理を証明し，最小多項式を定義する．そして，定理 11.2 の一般化として， 最小多項式を用いた対角化可能性判定法を与える（定理 20.2）．この判定法は，ベクトル空間 V の線形変換 f に関する固有基底の存在判定法に翻訳できる（定理 20.3)．19 章では，ベクトル空間の話から始めて行列の話に移ったが，ここでは，行列の話から始めた方がやりやすい．

20.1　行列の場合

定理 20.1 (**ケーリー・ハミルトンの定理**)**.** A を $n \times n$ 行列とし, $\Phi_A(t) := \det(tE - A)$($A$ の固有多項式) とする．このとき $\Phi_A(A) = 0$ が成り立つ．

この定理の証明は，講義では，A が対角化可能のときのみ説明する．一般の場合への拡張は，本質的に定理 11.1 の証明と変わらないので略す．

定義 20.1 (**最小多項式**)**.** A を $n \times n$ 行列とするとき, A を代入して O(全ての成分が零の行列) となるような 0 でない 多項式の存在が, 上の定理で保証されている．そのようなものの中で, 次数が最小, かつ, 最高次の係数が 1 であるものを A の**最小多項式**という．

命題 20.1. A の最小多項式は A を代入して O になるような任意の多項式を割り切る．

証明は命題 11.1 の証明とまったく同じ．

系 20.1. A の最小多項式はただ一つである．以下これを $m_A(t)$ と書くことにする．

例 1. 零行列 O の最小多項式は $m_O(t) = t$ である．単位行列 E の最小多項式は $m_E(t) = t - 1$ である．

最小多項式の可能性を絞るのに次の命題が有用である．

命題 20.2.

(1) 最小多項式 $m_A(t)$ は固有多項式 $\Phi_A(t)$ を割り切る．特に，$m_A(t)$ の根はすべて A の固有値である．

(2) A の固有値の全てを $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とするとき, $(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_k)$ は $m_A(t)$ を割り切る．つまり，すべての A の固有値は $m_A(t)$ の根である．

一般に多項式 $f(t)$ が $g(t)$ を割り切るとき $f(t) \mid g(t)$ で表す．よって, (1) と (2) は

$$(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_k) \mid m_A(t) \mid \Phi_A(t)$$

と表せる．この形で頭に入れておくとよい．

証明. (1) はケーリー・ハミルトンの定理と命題 20.1 より従う．(2) は次のように分かる．$m_A(A) = O$ より, どんな $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対しても $m_A(A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ が成り立つ．$\boldsymbol{v}_i$ を固有値 α_i の固有ベクトルとするとき, $A\boldsymbol{v}_i = \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ であるから, $m_A(A)\boldsymbol{v}_i = m_A(\alpha_i)\boldsymbol{v}_i$. よって，$\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{o}$ により $m_A(\alpha_i) = 0$. □

次は, 定理 11.2 の一般化である．4 つ目の固有基底の存在判定法である．ここでは，A の対角化可能性の判定法として述べる．一つ補題を用意しておく．

補題 20.1. A を $n \times n$ 行列，P を正則行列とするとき，A と $P^{-1}AP$ の最小多項式は一致する．

証明. $m_A(t)$ に $P^{-1}AP$ を代入すると，$m_A(P^{-1}AP) = P^{-1}m_A(A)P = P^{-1}OP = O$ となるので，$m_{P^{-1}AP}(t)$ に命題 20.1 を適用すれば，$m_A(t)$ は $m_{P^{-1}AP}(t)$ で割り切れる．今度は，$m_{P^{-1}AP}(t)$ に A を代入すると，$m_{P^{-1}AP}(A) = Pm_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP)P^{-1} = POP^{-1} = O$ となるので，$m_A(t)$ に命題 20.1 を適用すれば，$m_{P^{-1}AP}(t)$ は $m_A(t)$ で割り切れる．よって，$m_{P^{-1}AP}(t)$ も $m_A(t)$ も最高次の係数が 1 であるので一致する． □

定理 20.2 (判定法 IV).

$$A \text{ が対角化可能} \Leftrightarrow m_A(t) \text{ が重解を持たない.}$$

定理の証明には固有空間が出てくるが，定理の条件からは，もはや固有空間が消え去ってしまっている．

証明. $\Rightarrow$ の証明は，A が対角化可能と仮定して，表現行列が対角行列となる基底を取り，最小多項式を計算すれば容易に分かる（練習問題 13.1 を使う．そこでは 2×2 行列に限定して述べてあるが $n\times n$ 行列でも証明は同じ）．

$\Leftarrow$ の証明は 2×2 行列の場合よりずっと難しい．

$m_A(t)$ が重解を持たないとすると，命題 20.2 により，$m_A(t)=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_k)$ ($\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ はすべての相異なる固有値）である．$i=1,\ldots,k$ に対して，$f_i(t)$ を $t-\alpha_i$ を除く $t-\alpha_1,\ldots,t-\alpha_k$ の積とする．こうして得られた k 個の $k-1$ 次式 $f_1(t),\ldots,f_k(t)$ は，$k-1$ 次以下の複素係数多項式全体のベクトル空間 P_{k-1} の基底を成す．これを示すためには，$\dim P_{k-1}=k$ により，$f_1,\ldots,f_k$ が一次独立であることを言えばよいが，$a_1f_1(t)+\cdots+a_kf_k(t)=0$ とおいて，t に $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を代入すれば， 容易に $a_1=\cdots=a_k=0$ が分かる．

よって， $1=b_1f_1(t)+\cdots+b_kf_k(t)$ となる $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{C}$ が存在する[*211]．これにより，

$$E=b_1f_1(A)+\cdots+b_kf_k(A) \tag{20.1}$$

を得る．任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ を取る．(20.1) により， $\boldsymbol{v}=b_1f_1(A)\boldsymbol{v}+\cdots+b_kf_k(A)\boldsymbol{v}$ となるが，$(A-\alpha_iE)f_i(A)\boldsymbol{v}=m_A(A)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ により，$f_i(A)\boldsymbol{v}$ は固有値 α_i の固有空間に属する．こうして，$\mathbb{C}^n$ は固有空間の直和になる事が分かり，よって 定理 19.1（判定法 I）により，A は対角化可能である． □

いったん証明されると, 適用法は 2×2 行列の場合とあまり変わらない. 非常に使い勝手のよい結果である. 判定法 III までとは適用するときの頭の使い方が異なる.

注意 42. 系 19.1 を誤解して 「A が対角化可能 $\Leftrightarrow$ $\Phi_A(t)$ が重解を持たない」 と理解している人が非常に多いので注意． 例えば，$A=E$ がこの誤解の反例である．

注意 43. この定理の証明と類似の考え方が、ジョルダン標準形の存在定理 21.1 の証明の第 1 ステップで出てくるので，この定理の証明をよく理解しておいてほしい．

練習問題 20.1. 次の行列の最小多項式を求めよ．また対角化可能か判定せよ.

(1) $\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&2&2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&2&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$

練習問題 20.2. $n\times n$ 行列 A が $A^n=E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ.

練習問題 20.3. $n\times n$ 行列 A がべき零行列であるとする（つまり，ある正の整数 m があって $A^m=O$ となるということ）．このとき $A^n=O$ を示せ. さらに A の固有多項式は x^n であることを示せ.

[*211] このように線形代数の考え方の意外な形の応用が現れるのは興味深い．具体的な証明方法もあり，それは 21.6 節で学ぶ.

20.2　線形変換への翻訳

定理 20.2 は，線形変換に容易に拡張できる．

V をベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形変換とする． まず，練習問題 13.1 の証明から，命題 19.1 と同様にして，f **の最小多項式**を，V の基底に関する f の表現行列の最小多項式として定義することができる（どの基底を取っても，その表現行列の最小多項式は等しいので）．これを $m_f(t)$ で表す．

定理 20.3. V をベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．

$$V \text{ が } f \text{ に関する固有基底を持つ} \Leftrightarrow m_f(t) \text{ が重解を持たない．}$$

証明. V の基底を何でもよいから一つ取って，それを固定して考える．それに関する f の表現行列を A とする．命題 19.5 により，V が f に関する固有基底を持つことと，V のある基底に関する f の表現行列が対角行列になることは同値である．後者は，上で固定した A が対角化可能であることと同値である．そして，定理 20.2 により，それは，$m_A(t)$ が重解を持たないことと同値である．$m_f(t) := m_A(t)$ と定義したのだから，これで定理が示された． □

練習問題 20.4. ⊛

V をベクトル空間, $f, g\colon V \to V$ を二つの線形変換とする. V は f に関する固有基底，及び, g に関する固有基底を持ち，さらに $f \circ g = g \circ f$ が成り立つと仮定する. このとき V の基底で, f と g 両方に関する固有基底になっているものが存在することを示せ.

20.3　付録：線形変換のケーリー・ハミルトンの定理

$P(t) = p_n t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ を t に関する多項式とする．$n \times n$ 行列 A に対して, $P(A) = p_n A^n + p_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n$ と定義したのと同じ要領で，ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ に対して,

$$P(f) := p_n f^n + p_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}$$

と定義する．ただし，自然数 l に対して，f^l は f を l 回合成したもの， id は恒等写像を表す. $P(f)$ も V の線形変換になっている． 線形変換の合成と行列積の対応（3.5 節）を考えれば，これは自然な定義である．

練習問題??において， $f\colon V \to V$ の固有多項式 $\Phi_f(t)$ を V の基底に関する f の表現行列の固有多項式と定義した．これを踏まえれば， 行列のケーリー・ハミルトンの定理 より， 線形変換のケーリー・ハミルトンの定理が成り立つことが容易に分かる．すなわち,

$$\Phi_f(f) = 0 \tag{20.2}$$

である．ここで，右辺の 0 は，0 写像 $V \to V$（すべての V の元を $\boldsymbol{o}$ に移す）を表す.

ここで，この線形変換のケーリー・ハミルトンの定理を直接導いてみよう[*212]．これは余因子行列の良い応用である．簡単のため， $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ によって定まる $f_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ に対してのみ証明する．

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とする． $f_A(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{e}_n$ が成り立つが，これは，

$$a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (a_{ii}\mathrm{id} - f_A)(\boldsymbol{e}_i) + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{o}$$

と書ける．ここで，id は恒等写像であり，$a_{ii}\mathrm{id} - f_A$ は， $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$(a_{ii}\mathrm{id} - f_A)(\boldsymbol{v}) = a_{ii}\boldsymbol{v} - f_A(\boldsymbol{v})$ となる線形写像である．くどいようだが，これをさらに

$$a_{1i}\mathrm{id}(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + (a_{ii}\mathrm{id} - f_A)(\boldsymbol{e}_i) + \cdots + a_{ni}\mathrm{id}(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{o}$$

と書いておく． すると， これらは，線形写像を '係数' とする連立一次方程式と見ることが出来る． これを，線形写像を成分とする $n \times n$ 行列

$$F_A := \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{id} - f_A & a_{21}\mathrm{id} & \ldots & a_{n1}\mathrm{id} \\ a_{12}\mathrm{id} & a_{22}\mathrm{id} - f_A & \ldots & a_{n2}\mathrm{id} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}\mathrm{id} & \ldots & \ldots & a_{nn}\mathrm{id} - f_A \end{pmatrix}$$

と，$\mathbb{C}^n$ の元を成分とする縦ベクトル

$$V_E := \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

を用いて，

$$F_A V_E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} \\ \vdots \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix} \tag{20.3}$$

と書く．ここで，$n \times n$ 行列 F_A と縦ベクトル V_E の掛け算の規則は，通常の $n \times n$ 行列と縦ベクトルのそれと同じであるが，F_A の成分である線形写像 g と縦ベクトル V_E の成分である $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{v}$ の掛け算は $g(\boldsymbol{v})$ のこととする．

ここで， 注意 6 と全く同様にして，F_A の余因子行列 G_A を定義することが出来る．つまり，(i, j) 成分が，F_A の j 行と i 列を除いてできる（線形写像を成分とする）$n-1 \times n-1$ 行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものである行列である．ただし，行列式は， 練習問題 4.2 の公式で定義する（公式において成分の掛け算は線形写像の合成と見なす）．余因子行列の性質と同様

[*212] 逆に行列バージョンがこれから従う．

に， $G_AF_A = \begin{pmatrix} \det F_A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det F_A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \det F_A \end{pmatrix}$ が成り立つ． ここで， $\det F_A$ は，F_A の形により， A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ に f_A を代入したもの $\Phi_A(f_A)$ に他ならない．よって， (20.3) より，$\Phi_A(f_A)(\boldsymbol{e}_1) = \dots = \Phi_A(f_A)(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{o}$ を得る．これにより， $\Phi_A(f_A)$ は線形写像 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ として 0 である， つまり，(20.2) が f_A に対して成り立つ．

問題のヒント・答.

問題 20.1 の答え (1) $(x-2)^2$, 不可 (2) $(x-2)^3$, 不可 (3) $(x-2)(x-3)$, 可

第IV部

ジョルダン標準形とジョルダン分解

線形代数学の一つの究極の定理が $n \times n$ 行列に対するジョルダン標準形の存在定理である．21章でこれを証明する．この章の証明は,『数学』（岩波書店）という専門雑誌の記事

> **西岡 久美子著 『Jordan 標準形のわかり易い求め方』 2003 年 55 巻 4 号 p. 424-429**

を参考にした.

21　ジョルダン標準形

21.1　ジョルダン標準形の存在定理とは？

定義 21.1 (ジョルダン細胞). 複素数 α と自然数 m に対して，対角成分が α, その一つ上の斜めの列に 1 が並び，その他の成分がすべて 0 である $m \times m$ 行列を，サイズ m の **α-ジョルダン細胞**と呼び， $J_m(\alpha)$ で表す.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

一つ記号を用意しておく．一般的に，$A_1, \ldots, A_t$ を正方行列とするとき，

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{pmatrix}$$

という形の正方行列（書いていない成分はすべて 0）を $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_t$ と書く.

21 章で証明したいのは次の定理である.

定理 21.1 (ジョルダン標準形の存在と一意性). V を n 次元ベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形変換とする.

(1) (**ジョルダン標準形の存在**) V の基底で，それに関する f の表現行列が対角線上にジョルダン細胞を並べたもの，つまり，

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{d_2}(\alpha_2) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & J_{d_k}(\alpha_k) & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

という形になるものが存在する．ただし，ここで，$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は互いに異なる f のすべての固有値であり，左上から，α_1-ジョルダン細胞（一般的に，$J_{d_1}(\alpha_1)$ 一つだけでなく，d_1 とは異なるいくつかのサイズのものが並んでいる．下の例 21.1 を参照のこと），α_2-ジョルダン細胞，$\cdots$, α_k-ジョルダン細胞の順に並べてある．また，ジョルダン細胞に属さない成分はすべて 0 である． これを f の**ジョルダン標準形**という.

記号: 定義 21.1 の下で導入した記号にならい、このジョルダン標準形を

$$J_{d_1}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus J_{d_2}(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus J_{d_k}(\alpha_k) \oplus \cdots$$

と表す.

(2) (**ジョルダン標準形の一意性**)　各固有値のジョルダン細胞の数とサイズは，ジョルダン標準形を与えるような基底の取り方によらない.

注意 44. すべてのジョルダン細胞のサイズが 1 であることと，ジョルダン標準形が対角行列であることは同値である.

例 21.1.　以下の例で，書いていない成分はすべて 0 である． また，$\alpha \neq \beta$ とする.

(1)

$$J_2(\alpha) \oplus J_2(\alpha) \oplus J_2(\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 0 & \alpha & & & & \\ & & \alpha & 1 & & \\ & & 0 & \alpha & & \\ & & & & \beta & 1 \\ & & & & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (J_2(\alpha)^{\oplus 2} \oplus J_2(\beta) \text{ とも書く.})$$

(2)

$$J_1(\alpha) \oplus J_2(\alpha) \oplus J_2(\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & 0 & \alpha & & \\ & & & \beta & 1 \\ & & & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

定理 21.1 について，まず (1) が示されたとして (2) を示し（21.5 節），次に (1) を証明する（21.6 節）．証明が受け入れやすいように，入念な準備を行っていく（21.2 節から 21.4 節まで）．

次の節に進む前に，少し一般的な考察を行い，言葉の定義をしておく．V をベクトル空間として，$f\colon V \to V$ を線形写像とする．V のある基底に関する f の表現行列が

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_t = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

という形であるとする（$A_1, \ldots, A_t$ は正方行列で，書いていない成分はすべて 0）．A_i のサイズを $m_i \times m_i$ とする．このとき，表現行列を与える V の基底を，

$$\boldsymbol{v}_1^1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_1}^1, \boldsymbol{v}_1^2, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_2}^2, \ldots, \boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i, \ldots, \boldsymbol{v}_1^t, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_t}^t$$

のように，m_1 個，m_2 個，…，m_t 個のベクトルからなるブロックに分けておくと，各 A_i の上下の成分がすべて 0 であることから，$f(\boldsymbol{v}_1^i), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{m_i}^i)$ は $\boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i$ のみの一次結合で表される．よって，$\boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i$ を基底とする V の部分ベクトル空間を V_i とすると，f によって，$V_i \to V_i$ なる線形変換が定まり，A_i はまさに，その線形変換の $\boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i$ に関する表現行列となっている．$\boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i$ のことを A_i **に対応する基底の一部分**という言い方をすることにする．また，命題 19.4 により，

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$$

が成り立つことに注意しておこう．つまり，(21.1) のような大きな行列の小さな行列 $A_1, \ldots, A_t$ へのブロック分割は，ベクトル空間 V の部分ベクトル空間 $V_1, \ldots, V_t$ への直和分解を定める（$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_t$ という記号はこの事実に由来する）．

21.2　定理 21.1 (1) の意味

ここでは，定理 21.1 (1) が成り立っているというのはどういうことか，その意味を考えてみることにする．そうすることでジョルダン標準形の意味が分かり，定理の証明が理解しやすくなるはずである．

はじめに，ジョルダン標準形を構成しているすべてのジョルダン細胞を左上から $J_{m_1}(\alpha_1)$, $J_{m_2}(\alpha_2)$, $\ldots, J_{m_t}(\alpha_t)$ としておく（ここでは，$\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ がすべて異なるとは仮定していない．例えば，例 21.1 については，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \beta$ となっている）．ジョルダン標準形を与える基底を，前節最後の説明にならって，

$$\boldsymbol{v}_1^1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_1}^1, \boldsymbol{v}_1^2, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_2}^2, \ldots, \boldsymbol{v}_1^t, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_t}^t \tag{21.2}$$

と書き，$J_{m_i}(\alpha_i)$ に対応する基底の一部分 $\boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i$ を基底とする V の部分ベクトル空間を V_i とすると，

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t \tag{21.3}$$

が成り立つ．また，f は $V_i \to V_i$ なる線形変換を定め，$J_{m_i}(\alpha_i)$ はまさに，基底 $\boldsymbol{v}_1^i, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_i}^i$ に関する $V_i \to V_i$ の表現行列となっている．非常に大雑把に言えば，ジョルダン標準形を求める問題は，**$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ という V の「よい直和分解」と各 V_i の「よい基底」(21.2) を見つけるということ**である．

ここで「よい基底」の意味を説明しよう．そのため，$J_{m_1}(\alpha_1)$, $J_{m_2}(\alpha_2)$, $\ldots, J_{m_t}(\alpha_t)$ のうちの一つのジョルダン細胞 $J_m(\alpha)$ に注目してみる．このジョルダン細胞 $J_m(\alpha)$ に対応する V の基底の一部分を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ として，それらを基底とする V の部分ベクトル空間を L とする（L は V_i の一つである）．f から定まる線形変換 $L \to L$ の $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ に関する表現行列がまさに $J_m(\alpha)$ なのであった．よって，

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \alpha\boldsymbol{v}_1,\ f(\boldsymbol{v}_i) = \alpha\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_{i-1}\ (2 \leq i \leq m) \tag{21.4}$$

が成り立っている．ここで，$\boldsymbol{v} \mapsto f(\boldsymbol{v}) - \alpha\boldsymbol{v}$ で定まる線形変換を $f - \alpha\mathrm{id}$ で表す[*213]．(21.4) を少し変形し，$h := (f - \alpha\,\mathrm{id})|_L$ と置くと，

$$h(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{o},\ h(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_{i-1}\ (2 \leq i \leq m) \tag{21.5}$$

が得られる．**これは，非常に大事な式なのでよく頭に入れておいてほしい．** より視覚的に書くとすれば，線形変換 h を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ に施すと，一つずつ左にずれる次のような変化が起こるということである．

$$\boldsymbol{o} \leftarrow \boldsymbol{v_1} \leftarrow \boldsymbol{v_2} \leftarrow \cdots \leftarrow \boldsymbol{v_m}$$

このことから，**$\boldsymbol{v}_1$ は固有値 α の固有ベクトル，$i \geq 2$ に対して $\boldsymbol{v}_i$ は h^{i-1} で $\boldsymbol{o}$ にならず，h^i で $\boldsymbol{o}$ になる元である**ことが直ちに分かる． これが「よい基底」の意味である．

今度は，上で言った「よい直和分解」の意味を説明しよう．この説明は次の節に続いていく．(21.5) により， $f - \alpha\,\mathrm{id}$ の言葉で言えば，

$$(f - \alpha\,\mathrm{id})^m \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}\,(\forall 1 \leq i \leq m) \tag{21.6}$$

[*213] $f - \alpha\mathrm{id}$ という記号に心理的な抵抗があるかもしれないが，$n \times n$ 複素行列 A によって定まる $f_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ の場合を考えると，$f_A(\boldsymbol{v}) - \alpha\boldsymbol{v} = (A - \alpha E)\boldsymbol{v}$ なので，$f_A - \alpha\mathrm{id}$ は $A - \alpha E$ から定まる線形変換に他ならない．

が成り立っていることに注意する． よって，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を基底とする V の部分ベクトル空間 L は，$\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\,\mathrm{id})^m$ に含まれる．引き続き一つの固有値 α を固定するが，今度は α-ジョルダン細胞 $J_{m_1}(\alpha), \ldots, J_{m_l}(\alpha)$ $(m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_l)$ をすべて考えることにする．α-ジョルダン細胞に対応する V の基底の一部分をすべて集めたものを基底とする V の部分ベクトル空間を W とする．(21.6) から分かるように，W は $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\,\mathrm{id})^{m_l}$ に含まれる．このことを念頭に，広義固有空間を扱う次の節に進もう．

21.3　広義固有空間

前節の考察をもとに，次の非常に重要な定義をする．ただし，前節とは違い，ここでは，**定理 21.1 (1) が成り立っていることは前提としない．**

<u>**定義**</u> **21.2** (**広義固有空間**). f の固有値 α に対して，

$$G_\alpha := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{ある自然数}\, m\, \text{が存在して}\, (f - \alpha\,\mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\}$$

は部分ベクトル空間になる．これを α-**広義固有空間**という．

<u>**練習問題**</u> **21.1.** G_α が部分ベクトル空間になることを示せ．

少し脱線するが，次の補題は以下の説明で使うので，ここに挟んでおく．

<u>**補題**</u> **21.1.** V をベクトル空間，$g\colon V \to V$ を線形変換とする．$V = V_1 \oplus V_2$ なる直和分解が存在して，$g(V_1) \subset V_1$, $g(V_2) \subset V_2$ が成り立つとする．このとき，$g|_{V_2}\colon V_2 \to V_2$ なる線形変換が誘導されるが，もし，$g|_{V_2}$ が同型写像であれば，$\mathrm{Ker}\, g \subset V_1$ が成り立つ．

<u>証明</u>. $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, g$ を任意の元とする．$V = V_1 \oplus V_2$ より，ある $\boldsymbol{v}_1 \in V_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_2$ が存在して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と書ける．$\boldsymbol{o} = g(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}_1) + g(\boldsymbol{v}_2)$ となるが，$g(V_1) \subset V_1$, $g(V_2) \subset V_2$ により，$g(\boldsymbol{v}_1) \in V_1, g(\boldsymbol{v}_2) \in V_2$ であり，さらに，$V = V_1 \oplus V_2$ より $g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{o}, g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o}$ が成り立つ．ここで，$g|_{V_2}$ が同型写像であるので，$g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o}$ から $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$ と分かる．よって，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 \in V_1$ となる． □

ここで，定理 21.1 (1) を前提とした 21.2 節の話に戻ろう．定理 21.1 (1) が成り立っていることが分かった暁には，**21.2 節の最後で定めた部分ベクトル空間** W（α-ジョルダン細胞に対応する V の基底の一部分をすべて集めたものを基底とする V の部分ベクトル空間）**は，α-広義固有空間に他ならないことが分かる．**

$\because$ まず，W が α-広義固有空間に含まれることは明らかである．逆に $\boldsymbol{v}$ を α-広義固有空間の任意の元とすると，ある自然数 m が存在して $(f-\alpha\,\mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ となる．つまり，$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^m$ である．α と異なる固有値のジョルダン細胞に対応する V の基底の一部分を基底とする部分ベ

クトル空間を Z とする．このとき，$V = W \oplus Z$ であり（命題 19.4），$(f - \alpha\,\mathrm{id})^m(W) \subset W$, $(f-\alpha\,\mathrm{id})^m(Z) \subset Z$ が成り立っている（これらは，(21.5) から $(f-\alpha\,\mathrm{id})(W) \subset W$, $(f-\alpha\,\mathrm{id})(Z) \subset Z$ が成り立つということから従う）．$(f-\alpha\,\mathrm{id})^m$ を Z に制限すると，表現行列の形から同型写像である[*214]．よって，補題 21.1 により，$\boldsymbol{v}$ は W に含まれていなくてはならない．よって，α-広義固有空間は W に含まれる． □

なぜ広義固有空間を考えるかというと，いきなり,「よい直和分解」(21.3) を得るのは難しく，その一歩手前の分解にあたる広義固有空間への直和分解ならば，のちに説明するように，比較的容易に求めることができるからである（21.6 節）．

21.4　定理 21.1 (1) の証明のあらすじ

上記の考察を参考にして，次のようにジョルダン標準形を求める：V をまず各固有値の広義固有空間の直和に分解し（**第一ステップ**），次に，各広義固有空間をさらに細かく直和分解して（「よい直和分解」），各直和成分の「よい基底」を見つける（**第二ステップ**）．これがまさに，上で，V の「よい直和分解」と各 V_i の「よい基底」を見つけると言ったことの意味である．各ステップの少し詳しい説明を与えておく．

第一ステップ: V が f のすべての固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ に対する広義固有空間の直和

$$V = G_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus G_{\alpha_k}$$

であることを示す．実は，このステップは，どのようなやり方でやっても大差はない．ここでは，最小多項式を使った対角化可能性の判定法（定理 20.2）の証明，固有空間の和が直和であること（命題 19.1）の証明を修正したものを 21.6 節で与えてある．

このステップが終われば，各広義固有空間ごとに議論すればよいので，固有値 α を固定して考えてよい．α に対する広義固有空間 G_α を W として，$g := (f - \alpha\,\mathrm{id})|_W$ とおく．

第二ステップ: W の部分ベクトル空間 $W_1, \ldots, W_l$ が存在して，W は，これらの直和となり，各 W_i の基底 $\boldsymbol{v}^i_1, \ldots, \boldsymbol{v}^i_{m_i}$ で，

$$g(\boldsymbol{v}^i_1) = \boldsymbol{o},\ g(\boldsymbol{v}^i_j) = \boldsymbol{v}^i_{j-1} (2 \leq j \leq m_i)$$

を満たすものが取れることを示す（式 (21.5) を参照のこと）．

[*214] Z の部分空間で，あるジョルダン細胞 $J_d(\beta)$ $(\beta \neq \alpha)$ に対応するものを考えると，その部分空間で $f - \alpha\,\mathrm{id}$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \beta-\alpha & 1 & & & \\ & \beta-\alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta-\alpha & 1 \\ & & & & \beta-\alpha \end{pmatrix}$$

であり，これは正則行列である．よって，$f-\alpha\,\mathrm{id}$ を Z に制限すると同型であることが分かる．したがって，$(f-\alpha\,\mathrm{id})^m$ を Z に制限したものも同型である．

このステップが「通常の方法」だと面倒な部分であるが，この章の冒頭で挙げた記事の方法だと分かりやすい．

21.5　定理 21.1 (2) の証明

ジョルダン標準形の存在 (定理 21.1 (1)) を示す前に，**それが示されたと仮定したうえで**，上の考察を少し発展させて，**ジョルダン標準形の一意性** (定理 21.1(2)) を証明しておく．これは，**具体的に与えられた行列のジョルダン標準形を計算して求める際に極めて有用**である．

以下，一つのジョルダン標準形と，それを与える基底を決めて考える． このとき，結局，**このジョルダン細胞の個数とサイズが，ジョルダン標準形を知ることなく，線形変換** $f\colon V \to V$ **のみから計算できることを示せばよい**[*215]．

まず，固有値 α を 1 つ決めて考える．次の命題が鍵である．

命題 21.1. 各自然数 $j \geq 1$ に対して， 線形変換 $(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ の核の次元

$$n_j := \dim \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$$

は，ジョルダン標準形を与える V の基底に属するベクトルのうち， $(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ で $\boldsymbol{o}$ になるものの個数である．
なお，あとのために，$n_0 = 0$ と定めておくと便利である．

注意 45. 命題 21.1 の内容は，線形変換だと抽象的に感じると思うが，V の次元が n で，V のある基底に関する f の表現行列が A である場合，n_j は

$$n_j = n - \mathrm{rank}(A - \alpha E)^j \tag{21.7}$$

と計算できる．

命題 *21.1* の証明. 21.2 節を前提にして考える．$\mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ はもちろん α-広義固有空間に含まれるが，α-広義固有空間は 21.3 節の最後で示したように，21.2 節の最後に定めた V の部分ベクトル空間に一致するので，$\mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j \subset W$ が成り立つ．よって，W に含まれる基底の一部，すなわち，ある α-ジョルダン細胞に対応する V の基底の一部に属するベクトルのうち，$(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ で $\boldsymbol{o}$ になるものを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_a$, それ以外を $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_b$ とするとき，$a = n_j$ を示せばよい．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_a$ が $\mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ に含まれることは明らかである．よって，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_a$ が $\mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ を生成していることが分かれば，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_a$ が $\mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ の基底であることが分かり，$a = n_j$ が得られる．$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ を任意の元とする．$\boldsymbol{v} \in W$ であるから，

$$\boldsymbol{v} = p_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + p_a\boldsymbol{v}_a + q_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + q_b\boldsymbol{w}_b$$

[*215] この意味は，線形変換 f から読み取れるいくつかのデータから自動的に計算できるという意味である．ピンと来なければ，以下を読んで納得してください．

と表せる．$q_1 = \cdots = q_b = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} &= (f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{v}) \\ &= p_1(f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + p_a(f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{v}_a) + q_1(f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + q_b(f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{w}_b) \\ &= q_1(f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + q_b(f - \alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{w}_b) \end{aligned}$$

であることに注意する．ここで，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_b$ の取り方により，$(f-\alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{w}_1), \ldots, (f-\alpha\,\mathrm{id})^j(\boldsymbol{w}_b)$ はどれも $\boldsymbol{o}$ でなく，さらに，ジョルダン標準形を与える基底の性質 (21.5) により V の基底の一部になっていることが分かる．よって，一次独立であるから，$q_1 = \cdots = q_b = 0$ が成り立つ． □

n_j は，ジョルダン標準形を知ることなく，f と α だけから計算できることに注意しよう．そして，α は f の固有多項式の根であるので，やはり，f だけから決まっている．

n_j の計算は，ある程度手間のかかる作業であるのだが，以下の練習問題を解けば，実行可能ということは分かってもらえるはずである．

<u>練習問題</u> **21.2.** 次の行列について，n_j を計算せよ．

(1) $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -5 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

実は，ある程度手間のかかる計算をしなくてはならないのは，n_j の計算だけで，以下，n_j たちの差分を次々に取るという単純作業の繰り返しで，ジョルダン標準形の重要な情報を読み取っていくことができる．

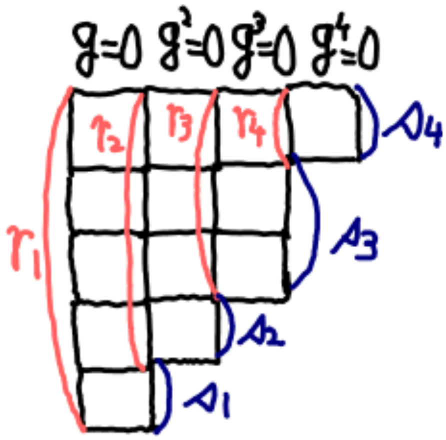
まず，$j \geq 1$ に対して，差分

$$r_j := n_j - n_{j-1} \tag{21.8}$$

を取る．これは，命題 21.1 によれば，ジョルダン標準形を与える基底のベクトルのうち，$j \geq 2$ の場合は，$(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ で $\boldsymbol{o}$ になるが $(f - \alpha\,\mathrm{id})^{j-1}$ では $\boldsymbol{o}$ にならないものの個数，$j = 1$ の場合は，$f - \alpha\,\mathrm{id}$ で $\boldsymbol{o}$ になるものの個数である．

ここからは，視覚的に理解していく方がよい．それを可能にするのが**ヤング図形**と呼ばれるものである．次の例の図を見ながら以下の説明を読んでほしい（図の意味も説明してある）．

まずは，すべてのジョルダン細胞が分かっているとして，固有値 α のジョルダン細胞をサイズの大きい方から並べるのを視覚化したい．図の例では，一番上の行がサイズ 4 のジョルダン細胞，次の 2 行がサイズ 3 のジョルダン細胞（サイズ 3 のジョルダン細胞が 2 つあるということ）$\cdots$ を表している．記号で書けば，$J_4(\alpha) \oplus J_3(\alpha)^{\oplus 2} \oplus J_2(\alpha) \oplus J_1(\alpha)$ である．つまり，サイズ



が l のジョルダン細胞を l 個の同じ大きさの正方形が横 1 行に並んだもので表すことにしているのである．そして，横の長さが長い正方形の行（つまり，サイズの大きなジョルダン細胞に対応するもの）から順に上から並べていくということである．このようにして得られる図形が**ヤング図形**であり，数学のいろいろな場面で姿を現す[*216]．各正方形は何に対応していると見なすかというと，各行ごとに左から，$g = (f - \alpha\,\mathrm{id})|_{\mathrm{W}}$ で $\boldsymbol{o}$ になる基底の元（図では一番上に $g = 0$ と書いている），g^2 で $\boldsymbol{o}$ になるが g では $\boldsymbol{o}$ にならない基底の元（図では一番上に $g^2 = 0$ と書いている），g^3 で $\boldsymbol{o}$ になるが g^2 では $\boldsymbol{o}$ にならない基底の元（図では一番上に $g^3 = 0$ と書いている）$\cdots$ と対応している（式 (21.5) を思い出しておこう）．それぞれの性質を持つ基底の元は各ジョルダン細胞に高々1 つしかないのでこのように考えることができる．

さて，ここまでは，すべてのジョルダン細胞が分かっているとして，横中心にヤング図形を見ていたが，今度はこれを縦に見てみよう．すると，上の r_j の定義から分かるように，まさに，1 番左の列の長さが r_1, 左から 2 番目の列の長さが $r_2 \cdots$ となっている．ということは，ヤング図形は，命題 21.1 によって縦から決めていけば，ジョルダン標準形を知ることなく求まってしまう！つまり，**ジョルダン標準形を知ることなく，ヤング図形を決定することができ，それを逆に横に見ることで，すべてのジョルダン細胞のサイズが読み取れてしまうのである．**

以上をまとめると次のようになる．

[*216] 興味を持ったら調べてみよう．

- 命題 21.1 の計算に基づいて (式 (21.7), (21.8) を参照)，$n_1, n_2, \dots, r_1, r_2, \cdots$ を求める．
- 同じサイズの正方形を縦に 1 列 r_1 個並べたもの，r_2 個並べたもの ⋯ を左から図のように並べていくと，ヤング図形が出来上がる．
- 横の列の長さを上から求めていくと，それが**ジョルダン細胞のサイズ**一覧になる．
- さらに，図の例から分かるように，差分

$$s_j := r_j - r_{j+1}$$

が**サイズ j のジョルダン細胞の数**である．

こうして，ジョルダン細胞のサイズと数が n_j から差分を取っていくことで読み取れるから，$f\colon V \to V$ のみから決まっていることが分かる．**こうして，定理 21.1 (1)（=ジョルダン標準形の存在）が証明されたと仮定した上で，定理 21.1 (2) が証明された．**

練習問題 **21.3.** 練習問題 21.2 の行列のジョルダン標準形を計算せよ．

今説明した方法でヤング図形さえ求めてしまえば，ジョルダン標準形の情報はすべて分かってしまうのだが（ただし，ジョルダン標準形を与える基底の取り方はまた別の話），以下のややゆるい情報=命題 21.2(1)–(3) もジョルダン細胞を決定する際に有用である．これらの利点は，(3) を除き，固有多項式，最小多項式から読み取れるため，計算量が少なくて済む点である（式 (21.7) の計算量は実はやや多い）．(3) についても，命題 21.1 の計算の一部から分かるので，計算量が抑えられている．命題 21.2 の各条件はよく記憶しておくとよい（その際，(1) と (2) において固有多項式と最小多項式を混同しないように注意）．

命題 21.2. V をベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形変換とし，その固有値 α を一つ固定する．

(1) (**ジョルダン細胞のサイズの和**) α-ジョルダン細胞のサイズの和は，**f の固有多項式**における α の重複度に等しい．

(2) (**ジョルダン細胞のサイズの最大値**) α-ジョルダン細胞のサイズの最大値は，**f の最小多項式**における α の重複度に等しい．

(3) (**ジョルダン細胞の数**) α-ジョルダン細胞の数は，α-固有空間の次元に等しい．

証明. ジョルダン標準形を用いて，固有多項式，最小多項式，固有空間の次元を計算してみれば分かる[*217]．以下の証明は，例 21.1 などに当たれば，理解しやすくなるはずである．

[*217] 証明はこのような方針で行うが，固有多項式，最小多項式，固有空間の次元はジョルダン標準形を知ることなく f そのものから計算できる．だからこそ，この命題が有用なのである．

(1)　まず，定理 4.2 により，$A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$ の行列式は，$A_1, \ldots, A_t$ の行列式の積に一致することを思い出しておこう．ジョルダン細胞 $J_m(\alpha)$ の固有多項式は $(t-\alpha)^m$ である．よって，すべての α-ジョルダン細胞を $J_{m_1}(\alpha), \ldots, J_{m_l}(\alpha)$ とすると，ジョルダン標準形の固有多項式の $t-\alpha$ のべきの部分は，$(t-\alpha)^{m_1+\cdots+m_l}$ となり，まさに，べきの部分に α-ジョルダン細胞のサイズの和が現れる．

(2) まず，最小多項式について，次の主張を示す．

主張　$M := \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ なる形の行列を考える．ここで A, B は正方行列である．このとき，M の最小多項式 $m_M(t)$ は A の最小多項式 $m_A(t)$ と B の最小多項式 $m_B(t)$ の最小公倍式に一致する（ただし，最小公倍式の最高次の係数は 1 に選んでおく）．

$\because$ 多項式 $f(t)$ に対して $f(M) = \begin{pmatrix} f(A) & O \\ O & f(B) \end{pmatrix}$ が成り立つことに注意すると，

$$f(M) = O \Leftrightarrow f(A) = O \text{ かつ } f(B) = O \tag{21.9}$$

が分かる．ここで，$f(M) = O$ は $f(t)$ が M の最小多項式 $m_M(t)$ で割り切れることと同値である．また，$f(A) = O$ かつ $f(B) = O$ は $f(t)$ が A の最小多項式 $m_A(t)$ と B の最小多項式 $m_B(t)$ の最小公倍式（これを $g(t)$ で表すことにする）で割り切れることと同値である．よって，$m_M(M) = O$ と (21.9) から $m_M(t)$ は $g(t)$ で割り切れる．また，$g(A) = O$ かつ $g(B) = O$ と (21.9) により，$g(t)$ は $m_M(t)$ で割り切れる．$m_M(t)$ も $g(t)$ も最高次の係数は 1 なので，$m_M(t) = g(t)$ が分かる．(主張の証明終わり）

主張を繰り返し使うことで，$A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$ の最小多項式は $A_1, \ldots, A_t$ の最小多項式の最小公倍式に一致することが分かる．このことを，ジョルダン標準形の α-ジョルダン細胞をまとめた部分に適用すると，その部分の最小多項式は，α-ジョルダン細胞のサイズの最大値を m_α とすれば，$(t-\alpha)^{m_\alpha}$ に等しいことが分かる．今度は，ジョルダン標準形が各固有値のジョルダン細胞をまとめた部分の直和であることに注目すると，その最小多項式は，すべての固有値に渡って，各固有値のジョルダン細胞をまとめた部分の最小多項式をかけ合わせたものであることが分かる．これによって (2) が分かる．

(3) 各ジョルダン細胞に対応する基底の一部に固有ベクトルが 1 つずつ含まれていることに注意しよう．すると，固有値 α のジョルダン細胞が l 個あるとすれば，α-固有空間は，l 個の α-固有ベクトルを基底とするベクトル空間になる．　□

以下の注意により，命題 21.2 は命題 21.1 を適用してジョルダン標準形を求める際にも有用であることが分かる．

注意 46. (1) 命題 21.1 で n_j をどの j まで求めればよいのかであるが，上で述べたように，$r_j = n_j - n_{j-1}$ は，ジョルダン標準形を与える基底のベクトルのうち，$j \geq 2$ の場合は $(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ で $\boldsymbol{o}$ になるが $(f-\alpha\,\mathrm{id})^{j-1}$ では $\boldsymbol{o}$ にならないものの個数，$j = 1$ の場合は $f - \alpha\,\mathrm{id}$ で $\boldsymbol{o}$ になるものの個数であった．ということは，α-ジョルダン細胞のサイズの最大値を m_α とすると

（これは，命題 21.2(2) によれば，最小多項式における $x-\alpha$ の重複度である！），$j \geq m_\alpha+1$ のとき，$r_j = 0$ となる．言い換えれば，

$$n_{m_\alpha} = n_{m_\alpha+1} = \cdots$$

となって，n_j は $j = m_\alpha$ 以降一定となることが保証されているので，**n_j の計算は n_{m_α} までてよいと分かる**．これは，命題 21.1 を使ってヤング図形を決定する際に，とても役に立つ事実であるので，記憶しておくとよい．

(2) 先に述べた通り，f から読み取れるのは，ヤング図形の縦の長さの情報 $r_1, r_2, \ldots$ の方である．結果的に，上で述べたように，正方形の行を長いものから順に上から並べて得られるヤング図形を左横から見ていくと $r_1, r_2, \ldots$ が読み取れるのだから，当然 $r_1 \geq r_2 \geq \ldots$ が成り立っている．

練習問題 21.4. 命題 21.2 を用いて，練習問題 21.2 の行列のジョルダン標準形を計算せよ．

練習問題 21.5. N は $N^4 = O$ を満たす 4 次正方行列とする．N のジョルダン標準形の可能性を，その固有多項式，最小多項式，固有空間の次元を用いて分類せよ．

練習問題 21.6.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とする．ただし，M は n 次正方行列であり，M の対角線より上の成分はすべて 1，対角線とその下の成分はすべて 0 であるとする．

(1) M の最小多項式は t^n であることを示せ．

(2) M のジョルダン標準形を求めよ．

練習問題 21.7. $n \in \mathbb{N}$ に対して，$J(0,n)^2$ のジョルダン標準形を求めよ．

21.6 定理 21.1 (1) の証明

これから，いよいよ，ジョルダン標準形の存在を証明する．

第一ステップ

簡単のため， 定理 20.2 と同様， $n \times n$ 行列 A の場合を考える（線形変換 f への翻訳は 20.2 節に従えばよい）．

まず，V が広義固有空間の和であることを示す． これについては概略にとどめるが，定理 20.2 の証明が分かれば理解できるはずである． A の最小多項式を $m_A(t) = (t-\alpha_1)^{d_1}\cdots(t-\alpha_k)^{d_k}$ と因数分解する．定理 20.2$\Leftarrow$ の証明で，$f_i(t)$ なる多項式を定義したが，ここでは，その代わりに $(t-\alpha_i)^{d_i}$ を除く $m_A(t)$ の因数の積 $m_i(t)$ を考える．つまり，多項式 $m_i(t)$ で $m_A(t) = (t-\alpha_i)^{d_i}m_i(t)$ を満たすものを考える． $\frac{1}{m_A(t)}$ を部分分数展開する[*218]：

$$\frac{1}{m_A(t)} = \frac{h_1(t)}{(t-\alpha_1)^{d_1}} + \cdots + \frac{h_k(t)}{(t-\alpha_k)^{d_k}}.$$

両辺に $m_A(t)$ をかけると，

$$1 = h_1(t)m_1(t) + \cdots + h_k(t)m_k(t)$$

を得る [*219]．これを使えば，後の議論は定理 20.2$\Leftarrow$ と同様である．

次に広義固有空間の和が直和であることを示す． 以下の証明は命題 19.1 の証明を少し修正したものである．各 l $(1 \le l \le k)$ と $\boldsymbol{v}_i \in G_{\alpha_i}$（$1 \le i \le l$) に対して，$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ が成り立つならば， $\boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ であることを示す．l についての帰納法を用いる．$l = 1$ ならば明らか．$l \ge 2$ として，

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o} \tag{21.10}$$

を仮定する． $\boldsymbol{v}_l \in G_{\alpha_l}$ より， ある自然数 m があって $(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ となるので，(21.10) に $(A-\alpha_l E)^m$ を掛けると $(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_{l-1} = \boldsymbol{o}$ を得る． ここで $(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_i \in G_{\alpha_i}$ $(1 \le i \le l-1)$ であるから[*220]，帰納法の仮定により $(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ $(1 \le i \le l-1)$ となる．$i \in \{1, \ldots, l-1\}$ を一つ固定する． $\boldsymbol{v}_i \ne \boldsymbol{o}$ と仮定して矛盾を導く． $\boldsymbol{v}_i \in G_{\alpha_i}$ より，ある自然数 k があって $(A-\alpha_i E)^k\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ となる．k としてこのような最小の自然数を取っておく（$\boldsymbol{v}_i \ne \boldsymbol{o}$ としているので $k > 0$ に注意）．すると $(A-\alpha_i E)^{k-1}\boldsymbol{v}_i \ne \boldsymbol{o}$ である．以下，記号を見やすくするため，$B := A - \alpha_i E$ とおく．$(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ により $B^{k-1}(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ であるので，

$$\begin{gathered}\boldsymbol{o} = B^{k-1}(A-\alpha_l E)^m\boldsymbol{v}_i = (A-\alpha_l E)^m B^{k-1}\boldsymbol{v}_i = \\ \{B + (\alpha_i - \alpha_l)E\}^m B^{k-1}\boldsymbol{v}_i = (\alpha_i - \alpha_l)^m B^{k-1}\boldsymbol{v}_i\end{gathered}$$

となる．しかし，$\alpha_i \ne \alpha_l$ だから $B^{k-1}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ となってしまって矛盾である．よって $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ $(1 \le i \le l-1)$ が成り立つ． (21.10) より $\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ も成立する．(**第一ステップ終了**）

第一ステップの論法を使えば，**線形変換 $f\colon V \to V$ の各広義固有空間を実際に計算することができる．**よい機会なので，ここで、第二ステップに行く前に，それについて学んでおこう．

まず，実は，第一ステップの論法は**最小多項式を固有多項式に置き換えても通用する**ことが比較的容易に分かる．念のため，第一ステップの一部を繰り返してみる．

---

*218 一年生の微積 II で，分数関数の積分の計算をするときに修得済みと思う．16.5 節も参照するとよい．

*219 この議論は定理 20.2$\Leftarrow$ でも通用する．

*220 $\boldsymbol{v}_i \in G_{\alpha_i}$ より，ある自然数 k があって $(A-\alpha_i E)^k\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}$ である．よって，$\boldsymbol{o} = (A-\alpha_1 E)^m(A-\alpha_i E)^k\boldsymbol{v}_i = (A-\alpha_i E)^k(A-\alpha_1 E)^m\boldsymbol{v}_i$ であるから，$(A-\alpha_1 E)^m\boldsymbol{v}_i \in G_{\alpha_i}$ が分かる．

A の固有多項式を $\Phi_A(t) = (t-\alpha_1)^{m_1}\cdots(t-\alpha_k)^{m_k}$ と因数分解する．$g_i(t)$ を $\Phi_A(t) = (t-\alpha_i)^{m_i}g_i(t)$ を満たす多項式とする．$\frac{1}{\Phi_A(t)}$ を部分分数展開する：

$$\frac{1}{\Phi_A(t)} = \frac{l_1(t)}{(t-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{l_k(t)}{(t-\alpha_k)^{m_k}}.$$

両辺に $\Phi_A(t)$ をかけると，

$$1 = l_1(t)g_1(t) + \cdots + l_k(t)g_k(t) \tag{21.11}$$

を得る．後の部分はまったく同じである．

次に，上の議論を整理すると，**実は，広義固有空間が求まっている**ことを説明する．上の計算を踏まえて

$$Z_i = \{l_i(A)g_i(A)\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\} \tag{21.12}$$

と置く．Z_i は V の部分ベクトル空間になることが確認できるが（これは各自に任せる），Z_i **が** α_i**-広義固有空間** G_{α_i} **である**ことを示す．$Z_i \subset G_{\alpha_i}$ であることは，最小多項式の場合と同じ理由で分かる．さらに，$\boldsymbol{v} \in V$ に対して，(21.11) により，$\boldsymbol{v} = l_1(A)g_1(A)\boldsymbol{v} + \cdots + l_k(A)g_k(A)\boldsymbol{v}$ を得るので，$V = Z_1 + \cdots + Z_k$ が分かる．一方で $V = G_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus G_{\alpha_k}$ なのだった．これらを踏まえて，各 i に対して $G_{\alpha_i} \subset Z_i$ を示す．$\boldsymbol{w}_i$ を G_{α_i} に任意の元とする．$V = Z_1 + \cdots + Z_k$ により，$\boldsymbol{v}_1 \in Z_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in Z_k$ があって，

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \tag{21.13}$$

と書ける．各 l に対して $Z_l \subset G_{\alpha_l}$ であったので，$\boldsymbol{v}_l \in G_{\alpha_l}$ である．$V = G_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus G_{\alpha_k}$（直和）であったので，(21.13) より，$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i$ かつ $\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{o}$ $(l \neq i)$ となる．よって，$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_i \in Z_i$ となって，$G_{\alpha_i} \subset Z_i$ が分かった．

こうして**，(21.12) は計算可能な** α_i**-広義固有空間の表示を与えていることが分かる．**実際の計算例は，以下の練習問題で見てみることにする．

練習問題 21.8. 次の行列の各固有値に対して広義固有空間を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

第二ステップ

このステップが，西岡さんの記事を参考にした部分である．以下の説明は，十分複雑に思えるかもしれないが，これ以上に分かりやすい証明はないと思われる．あまり広まっていないのが不思議なくらいである．しかも，この証明方法により，実際にジョルダン標準形を与える基底を計算して求めることが可能になる．その点でもこの証明は優れている．

α-広義固有空間 W において，(21.5) を満たす基底を見つければよい．これは，V を α-広義固有空間 W で，f を $g := (f - \alpha\,\mathrm{id})|_W$ で置き換えて，ジョルダン標準形を与える基底を見つける

ということに他ならない．これは，f の固有値がすべて 0 と仮定することに他ならない．そして，さらにそれは，f が**べき零**，すなわち，ある 1 以上の整数 m があって $f^m = 0$ (f^m が 0 写像) であることとも同値である．ここで，m をそのような最小の自然数に取っておく．このとき，部分ベクトル空間の列

$$\{\boldsymbol{o}\} = \mathrm{Im} f^m \subset \mathrm{Im} f^{m-1} \subset \mathrm{Im} f^{m-2} \subset \cdots \subset \mathrm{Im} f \subset V$$

が得られる．まず，$\mathrm{Im} f^{m-1}$ の基底を取る[*221]．それを

$$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1})$$

と書いておく．

主張 1.

$$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}), f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1}) \tag{21.14}$$

は一次独立である．

主張 *1* の証明.

$$a_1 f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}) + \cdots + a_{s_1} f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}) + b_1 f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}) + \cdots + b_{s_1} f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1}) = \boldsymbol{o} \tag{21.15}$$

であるとする．この両辺を f で移すと，$f^m = 0$ により，

$$b_1 f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}) + \cdots + b_{s_1} f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}) = \boldsymbol{o}$$

である．$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1})$ は $\mathrm{Im} f^{m-1}$ の基底であり，一次独立なので，$b_1 = \cdots = b_{s_1} = 0$ である．よって，(21.15) は $a_1 f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}) + \cdots + a_{s_1} f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}) = \boldsymbol{o}$ となり，同じ理由で，$a_1 = \cdots = a_{s_1} = 0$ となる．よって主張は正しい． □

この主張 1 と系 16.3（基底への延長）により，(21.14) を含む $\mathrm{Im} f^{m-2}$ の基底が取れる（実際にどのように取ればよいのかはやはりあとで実例で示す）．それを

$$\begin{aligned} f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}), f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1}) \\ f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{21}), \ldots, f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{2s_2}) \end{aligned} \tag{21.16}$$

とする（2 行目が新しく付け加わった部分）[*222]．以下，基本的にこれと似たことを繰り返していく．

[*221] ここでは，取れさえすればよい．実際に基底を求める問題を解く場合は，どう取るのかを知る必要が出てくるが，それはあとで実例で説明する．

[*222] $f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1})$ と $f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{21}), \ldots, f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{2s_2})$ の長さが表記上そろっているが，もちろん，一般的に長さは違う．以下，同様のことがあるので注意すること．

主張 2.　必要ならば $\boldsymbol{v}_{21},\dots,\boldsymbol{v}_{2s_2}$ を取り替えることで，

$$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{21})=\cdots=f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{2s_2})=\boldsymbol{o}$$

であるとしてよい．

主張 *2* の証明．$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{2s_2})\in \mathrm{Im}f^{m-1}$ であり，$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1})$ は $\mathrm{Im}f^{m-1}$ の基底なので，$i=1,\dots,s_2$ に対して，

$$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{2i})=a_{i1}f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11})+\cdots+a_{is_1}f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1})$$

という形に書ける．よって，

$$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{2i}-a_{i1}\boldsymbol{v}_{11}-\cdots-a_{is_1}\boldsymbol{v}_{1s_1})=\boldsymbol{o}$$

である．$\boldsymbol{v}_{2i}$ を $\boldsymbol{v}_{2i}-a_{i1}\boldsymbol{v}_{11}-\cdots-a_{is_1}\boldsymbol{v}_{1s_1}$ で置き換えればよい．□

このとき，主張 2, (21.16) により，主張 1 の証明の議論と同様にして，

$$\begin{aligned}f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{1s_1})\\ f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{2s_2}),f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{2s_2})\end{aligned}\tag{21.17}$$

が一独立であることが分かる．系 16.3（基底への延長）により，(21.17) を含む $\mathrm{Im}f^{m-3}$ の基底が取れる．それを

$$\begin{aligned}f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{1s_1})\\ f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{2s_2}),f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{2s_2})\\ f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{31}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{3s_3})\end{aligned}\tag{21.18}$$

とする．主張 2 の証明と同様にして，必要ならば $\boldsymbol{v}_{31},\dots,\boldsymbol{v}_{3s_3}$ を取り替えることで，

$$f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{31})=\cdots=f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{3s_3})=\boldsymbol{o}$$

であるとしてよい．

以下同様にして基底への延長を繰り返すと，$\mathrm{Im}f^{m-1},\mathrm{Im}f^{m-2},\dots,\mathrm{Im}f$，そして，最後に，以下のような V の基底を構成することができる：

$$\begin{aligned}f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{11}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{1s_1}),\dots,\boldsymbol{v}_{11},\dots,\boldsymbol{v}_{1s_1}\\ f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{2s_2}),f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{21}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{2s_2}),\dots,\boldsymbol{v}_{21},\dots,\boldsymbol{v}_{2s_2}\\ f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{31}),\dots,f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{3s_3}),\dots,\boldsymbol{v}_{31},\dots,\boldsymbol{v}_{3s_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_{m1},\dots,\boldsymbol{v}_{ms_m}\end{aligned}$$

ここで，左から f^{m-1} のかかっているところまでが $\mathrm{Im} f^{m-1}$ の基底，f^{m-1}, f^{m-2} のかかっているところまでが $\mathrm{Im} f^{m-2}$ の基底,$\ldots$, $f^{m-1}, \ldots, f^{m-i}$ のかかっているところまでが $\mathrm{Im} f^{m-i}$ の基底である（$V = \mathrm{Im} f^0$ と考えることにする）．さらに，

$$f^{m-i+1}(\boldsymbol{v}_{i1}) = \cdots = f^{m-i+1}(\boldsymbol{v}_{is_i}) = \boldsymbol{o} \tag{21.19}$$

が成り立っている（これは，主張 2 と同様に示せる）．

この基底をうまく並びなおせば，f の表現行列がジョルダン標準形になっていることが分かる．例えば，$\boldsymbol{v}_{11}$ が出てくるものだけ集めて，$f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{11}), f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{11}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{11}), \boldsymbol{v}_{11}$ と並べてみると，これらに f を施したときの変化はまさに (21.5) と同じである！よって，この基底の一部分は，$J_m(0)$ に対応する．また，$\boldsymbol{v}_{21}$ が出てくるものだけ集めて，$f^{m-2}(\boldsymbol{v}_{21}), f^{m-3}(\boldsymbol{v}_{21}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{21}), \boldsymbol{v}_{21}$ と並べてみると，主張 2 により $f^{m-1}(\boldsymbol{v}_{21}) = \boldsymbol{o}$ が成り立っているために，やはり，これらに f を施したときの変化は (21.5) と同じになる．よって，この基底の一部分は，$J_{m-1}(0)$ に対応する．一般的に，$\boldsymbol{v}_{ij}$ が出てくるものだけ集めて，$f^{m-i}(\boldsymbol{v}_{ij}), f^{m-i-1}(\boldsymbol{v}_{ij}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{ij}), \boldsymbol{v}_{ij}$ と並べてみると，(21.19) により $f^{m-i+1}(\boldsymbol{v}_{ij}) = \boldsymbol{o}$ が成り立っているために，やはり，これらに f を施したときの変化は (21.5) と同じになる．こうして，基底の一部である $f^{m-i}(\boldsymbol{v}_{ij}), f^{m-i-1}(\boldsymbol{v}_{ij}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{ij}), \boldsymbol{v}_{ij}$ に対応する f の表現行列の部分は，まさにジョルダン細胞になる．以上で第 2 ステップは終了で，定理 21.1(1) の証明も終わった．

ジョルダン標準形とそれを与える V の基底（の１つ）を計算する方法についてまとめておく．

(1) まず固有方程式を解く．

(2) 21.5 節で述べたように（命題 21.2 の後の注意 46 も踏まええる），各固有値 α に対して $n_j = \dim \mathrm{Ker}\,(f - \alpha\,\mathrm{id})^j$ を $j = 1, 2, \ldots, m_\alpha$ に対して計算して（m_α は最小多項式における $x - \alpha$ の重複度），ヤング図形を書けば，すべての α-ジョルダン細胞のサイズと数が分かる． 命題 21.2 のややゆるい情報だけからジョルダン標準形を決定できてしまう場合も多い．

(3) ジョルダン標準形を与える基底は，各固有値ごとに分けて求める．固有値 α を一つ固定して考える．f を $f - \alpha\,\mathrm{id}$, V を α-広義固有空間 W で置き換えて，上で説明した定理 21.1(1) の証明の第 2 ステップの通りに基底を取って並べればよい．

以下の例で実行してみるとよい．

練習問題 21.9. 練習問題 21.2 の行列のジョルダン標準形を与えるような基底を一組与えよ

練習問題 21.10. $J_n(\alpha)^k$ を計算せよ．

練習問題 21.11. 練習問題 21.9 の (1), (4) の行列の k 乗を計算せよ．

練習問題 21.12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．V を 2 次正方行列全体のなすベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を $V \ni X \mapsto AX + XB \in V$ で定まる線形写像とする（線形写像となることは問題としないが，各自確認すること）．f のジョルダン標準形とそれを与える基底を求めよ．

練習問題 21.13. $b \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ とする．V を 2 次正方行列全体のなすベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を $V \ni X \mapsto AXB \in V$ で定まる線形写像とする（線形写像となることは問題としないが，各自確認すること）．f のジョルダン標準形とそれを与える基底を求めよ．

以下の解答では，詳しい計算を略したところがありますが，必ず各自で確認してください．

この解答には，練習問題 21.2，21.3，21.4，21.9 の解答がまとめて書いてある．**命題 21.2 を使う省エネ式解法**が練習問題 21.4 の解答，**命題 21.1 を使う解法**が練習問題 21.2，21.3 の解答，**基底の取り方**が練習問題 21.9 の解答である．

(1) M_1 の固有多項式は $(t-2)^2(t-1)$．よって，M_1 の最小多項式は $(t-2)^2(t-1)$ または $(t-2)(t-1)$．計算してみると、$(M_1-2E)(M_1-E)\neq O$ より、M_1 の最小多項式は $(t-2)^2(t-1)$．ここまでは，以下のいずれの方法で解くにしても，計算しておくとよい．

命題 21.2 を使う省エネ式解法: 命題 21.2(1), (2) により，2-ジョルダン細胞のサイズの和は 2 で最大のサイズは 2．よって，2-ジョルダン細胞はサイズ 2 のものが一つあるだけである．同様に考えると，1-ジョルダン細胞はサイズ 1 のものが一つあるだけである．こうして，M_1 のジョルダン標準形は，$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=J_2(2)\oplus J_1(1)$ と決まってしまう！

この場合は，行列のサイズが小さいため，このように，命題 21.2 を使ってジョルダン標準形が求められるが，命題 21.1 を使った方法も説明しておこう．

命題 21.1 を使う解法: 固有値 $1,2$ に対して，n_j を計算していく．命題 21.2 下の注意 (2) を参照する．固有値 1 に関しては，まず，$\mathrm{rank}(M_1-E)$ を求めれば 2 と分かり，よって $n_1=1$ となる．1-ジョルダン細胞のサイズの最大値は 1 なので（この点は，命題 21.2 も使っていることになる），命題 21.2 下の注意 (2) より，$1=n_1=n_2=\cdots$．よって $r_1=1, r_j=0\ (j\geq 2)$ である．これより，ヤング図形を書いてみれば，1-ジョルダン細胞はサイズ 1 のものが一つあるだけと分かる．固有値 2 に関しては，$\mathrm{rank}(M_1-2E)$ を求めれば 2，よって $n_1=1$ となり，$\mathrm{rank}(M_1-2E)^2$ を求めれば 1，よって $n_2=2$ が分かる．2-ジョルダン細胞のサイズの最大値は 2 なので，命題 21.2 下の注意 (2) より，$n_1=1, 2=n_2=n_3=\cdots$．よって $r_1=1, r_2=1, r_j=0\ (j\geq 3)$ である．これより，ヤング図形を書いてみれば，2-ジョルダン細胞はサイズ 2 のものが一つあるだけと分かる．こうして，やはり，M_1 のジョルダン標準形は，$J_2(2)\oplus J_1(1)$ と分かる．

基底の取り方[*223]: この問題のジョルダン標準形は，各固有値に対して，ジョルダン細胞が一つずつしかない．こういう場合の基底の取り方は，もっとも簡単な部類に入るのでよく頭に入れておいてほしい（(2), (3) もそうである）．

まずは，2-ジョルダン細胞を考えよう．2-ジョルダン細胞は 1 つのみで，そのサイズは 2 なので，2-広義固有空間 G_2 の次元は 2 である．$(M_1-2E)^2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{o}$ かつ $(M_1-2E)\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{o}$ なる $\boldsymbol{x}_2$ を一つ選ぶ．例えば，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とすればよい．すると，$\boldsymbol{x}_1:=(M_1-2E)\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2$ は G_2 の基底になる．

$\because$ 実際，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ は，定理 21.1 (1) の証明第二ステップの主張 1 の方法で一次独立であることが分かる．$\dim G_2=2$ により，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ は G_2 の基底である（この $\because$ に書いた部分は通常，既知と

[*223] ジョルダン標準形を与える基底の取り方は一意ではないので，常にそれを選ぶ必要が出てくる．

して，解答に書く必要はない）.
こうして，2-ジョルダン細胞に対応する基底が取れた[*224].
1-ジョルダン細胞は1つのみで，そのサイズは1なので，これに対応する基底の一部 $\boldsymbol{x}_3$ は，単に固有値1の固有ベクトルを取ればよい．固有ベクトルの求め方はもう何度も練習したので省略する．例えば $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすればよい． こうして，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ に対応する f_{M_1} の表現行列がまさに $J_2(2) \oplus J_1(1)$ となっている．
(2) M_2 の固有多項式は $(t-1)^2(t-3)$. よって，M_2 の最小多項式は $(t-1)^2(t-3)$ または $(t-1)(t-3)$. しかし、計算してみると、$(M_2 - E)(M_2 - 3E) \neq O$ より、M_2 の最小多項式は $(t-1)^2(t-3)$.
命題 21.2 を使う省エネ式解法: 命題 21.2(1), (2) により，1-ジョルダン細胞のサイズの和は2で最大のサイズは2．よって，1-ジョルダン細胞はサイズ2のものが一つあるだけである．同様に考えると，3-ジョルダン細胞はサイズ1のものが一つあるだけである．こうして，M_2 のジョルダン標準形は，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_2(1) \oplus J_1(3)$ と決まってしまう．
　解法は (1) とほぼ同じであるので，命題 21.1 を使う解法は省略する．各自で試みること．
基底の取り方:（1）とほぼ同じ方法でできる．
1-ジョルダン細胞は1つのみで，そのサイズは2なので，1-広義固有空間 G_1 の次元は2である．$(M_2 - E)^2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{o}$ かつ $(M_2 - E)\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{o}$ なる $\boldsymbol{x}_2$ を一つ選ぶ．例えば，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすればよい．すると，$\boldsymbol{x}_1 := (M_2 - E)\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2$ は G_1 の基底となる．これで1-ジョルダン細胞に対応する基底が取れた． 3-ジョルダン細胞は1つのみで，そのサイズは1なので，これに対応する基底の一部 $\boldsymbol{x}_3$ は，単に固有値3の固有ベクトルを取ればよい．例えば $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすればよい． こうして，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ に対応する f_{M_2} の表現行列がまさに $J_2(1) \oplus J_1(3)$ となっている．
(3) M_3 の固有多項式は $(t+1)^3(t-3)$. よって，M_3 の最小多項式は $(t+1)^3(t-3)$, $(t+1)^2(t-3)$, または $(t+1)(t-3)$. 計算してみると、 $(M_3 + E)^2(M_3 - 3E) \neq O$ より、M_3 の最小多項式は $(t+1)^3(t-3)$.
命題 21.2 を使う省エネ式解法: 命題 21.2(1), (2) により，-1-ジョルダン細胞のサイズの和は3で最大のサイズは3．よって，-1-ジョルダン細胞はサイズ3のものが一つあるだけである．同

[*224] 以上の証明は，定理 21.1(1) の証明の第2ステップにあてはめて考えることもできるが，ここで説明したとおりに理解しておけば十分である．

様に考えると，3-ジョルダン細胞はサイズ 1 のものが一つあるだけである．こうして，M_3 の

ジョルダン標準形は，$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_3(-1) \oplus J_1(3)$ と決まってしまう．

命題 21.1 を使う解法: 固有値 $-1, 3$ に対して，n_j を計算していく．命題 21.2 の注意 (2) を参照する．固有値 3 に関しては，まず，$\mathrm{rank}(M_3 - 3E)$ を求めれば $n_1 = 1$ が分かる．3-ジョルダン細胞のサイズの最大値は 1 なので，命題 21.2 の注意 (2) より，$1 = n_1 = n_2 = \cdots$．よって $r_1 = 1, r_j = 0$ $(j \geq 2)$ である．これより，ヤング図形を書いてみれば，3-ジョルダン細胞はサイズ 1 のものが一つあるだけと分かる．固有値 -1 に関しては，$\mathrm{rank}(M_3 + E)$ を求めれば $n_1 = 1$, $\mathrm{rank}(M_3 + E)^2$ を求めれば $n_2 = 2$, $\mathrm{rank}(M_3 + E)^3$ を求めれば $n_3 = 3$ が分かる．-1-ジョルダン細胞のサイズの最大値は 3 なので，命題 21.2 の注意 (2) より，$n_1 = 1, n_2 = 2, 3 = n_3 = n_4 = \cdots$．よって $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, r_j = 0$ $(j \geq 4)$ である．これより，ヤング図形を書いてみれば，-1-ジョルダン細胞はサイズ 3 のものが一つあるだけと分かる．こうして，やはり，M_3 のジョルダン標準形は，$J_3(-1) \oplus J_1(3)$ と決まる．

基底の取り方: -1-ジョルダン細胞は 1 つのみで，そのサイズは 3 なので，-1-広義固有空間 G_{-1} の次元は 3 である．$(M_3 + E)^3 \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{o}$ かつ $(M_3 + E)^2 \boldsymbol{x}_3 \neq \boldsymbol{o}$ なる $\boldsymbol{x}_3$ を一つ選ぶ．例えば，

$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすればよい．そして $\boldsymbol{x}_2 = (M_3 + E)\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}_1 = (M_3 + E)^2 \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

とおくと，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は G_{-1} の基底になる．これで -1-ジョルダン細胞に対応する基底が取れた．3-ジョルダン細胞は 1 つのみで，そのサイズは 1 なので，これに対応する基底の一部 $\boldsymbol{x}_4$

は，単に固有値 3 の固有ベクトルを取ればよい．例えば $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすればよい． こうして，

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ に対応する f_{M_3} の表現行列がまさに $J_3(-1) \oplus J_1(3)$ となっている．

(4) M_4 の固有多項式は $(t+1)^4$．よって，M_4 の最小多項式は $(t+1)^4$, $(t+1)^3$, $(t+1)^2$, または $t+1$．計算してみると、 $(M_4 + E) \neq O$, $(M_4 + E)^2 = O$ より、M_4 の最小多項式は $(t+1)^2$.

命題 21.2 を使う省エネ式解法: M_4 のジョルダン細胞は全て -1-ジョルダン細胞である．命題 21.2(1), (2) により，-1-ジョルダン細胞のサイズの和は 4 で最大のサイズは 2．よって，(a) サイズ 2 のものが 2 つか，(b) サイズ 2 のものが 1 つでサイズ 1 のものが 2 つ，のいずれかである．上の小問の場合と違って，(a), (b) どちらかを決める手間がかかる．ここで，命題 21.2(3) が役に立つ．-1-ジョルダン細胞の数が -1-固有空間の次元なのだった．(a) の場合は 2, (b) の場合は 3 である．$\mathrm{rank}(M_4 + E) = 2$ により，-1-固有空間の次元は 2 である．よって (a) の場合が起

こると分かるのである．こうして，ジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_2(-1)^{\oplus 2}$ と決まった．

この場合は，命題 21.2 を使った方法でジョルダン標準形が求められたものの，上の場合と違って，すんなりとはいかなかった．命題 21.2 では結局，ジョルダン標準形が求められない場合もある．その点，命題 21.1 を使った方法は万能であることが以下の説明で実感できると思う．

命題 21.1 を使う解法: 固有値 -1 に対して，n_j を計算していく．命題 21.2 の注意 (2) を参照する．$\mathrm{rank}(M_4+E)$ を求めれば $n_1 = 2$, $\mathrm{rank}(M_4+E)^2$ を求めれば $n_2 = 4$ が分かる．-1-ジョルダン細胞のサイズの最大値は 2 なので，命題 21.2 の注意 (2) より，$n_1 = 2, 4 = n_2 = n_3 = \cdots$．よって $r_1 = 2, r_2 = 2, r_j = 0\ (j \geq 3)$ である．これより，ヤング図形を書いてみれば，-1-ジョルダン細胞はサイズ 2 のものが 2 つあると分かる．こうして、やはり，ジョルダン標準形は $J_2(-1)^{\oplus 2}$ と決まる．

基底の取り方：この場合は１つの固有値に対してジョルダン細胞が 2 つあるため，上の場合よりは基底を取るのに少し手間がかかる．定理 21.1(1) の証明の第二ステップの証明の流れに沿って考えていくのが分かりやすい．M_4+E の定める線形変換を f とする．$M_4+E \neq O, (M_4+E)^2 = O$ なので，$f \neq 0, f^2 = 0$ である．

まず，$\mathrm{Im} f$ の基底を取る．$\mathrm{Im} f$ は行列 M_4+E の列ベクトルで生成されることに注意（例 15.2）．

$M_4 + E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ であるが，これは階数 2 であったので，M_4+E の列ベクトルで一次独立なものは 2 つである．列基本変形していけば分かるように（※行基本変形を混ぜてはいけないことに注意），M_4+E の第 1，2 列目

$$(M_4+E)\boldsymbol{e}_1 = f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, (M_4+E)\boldsymbol{e}_2 = f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

が一次独立である．よって，これらが $\mathrm{Im} f$ の基底をなす．

定理 21.1(1) の証明の第 2 ステップの証明にならえば，次は，$f(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_1, f(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_2$ を考えることになる．これらが一次独立なことは保証されている（主張 1）．これを延長する形で $\mathbb{C}^4$ の基底を作るのが次のステップだが，$\dim \mathbb{C}^4 = 4$ であり，$f(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_1, f(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_2$ は 4 つのベクトルを含んでいるので，すでに基底をなしている．よって，これがジョルダン標準形を与える基底である．

練習問題 21.5 の解

練習問題 20.3 により, N の固有多項式は t^4 である．よって，N は 0-ジョルダン細胞しか持たない．命題 21.2(1) により，N のジョルダン細胞のサイズの和は 4 である．N の最小多項式

$m_N(t)$ は t^4, t^3, t^2, t のいずれかである．これに従って場合分けをする．

$m_N(t) = t$ のとき： $N = O$ ということだから，N **のジョルダン標準形は** O **である．**

$m_N(t) = t^2$ のとき：命題 21.2(2) により，N のジョルダン細胞の最大のサイズは 2 である．よって，(a) サイズ 2 のものが 2 つか，(b) サイズ 2 のものが 1 つでサイズ 1 のものが 2 つ，のいずれかである．命題 21.2(3) により，ジョルダン細胞の数が固有空間の次元なのだった．(a) の場合は 2, (b) の場合は 3 である．よって，**固有空間の次元が** 2 **ならば，ジョルダン標準形は** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**，固有空間の次元が** 3 **ならば，ジョルダン標準形は** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **となる．**

$m_N(t) = t^3$ のとき：命題 21.2(2) により，N のジョルダン細胞の最大のサイズは 3 である．よって，サイズ 3 のものが 1 つでサイズ 1 のものが 1 つである．よって，**ジョルダン標準形は** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **となる．**

$m_N(t) = t^4$ のとき：命題 21.2(2) により，N のジョルダン細胞の最大のサイズは 4 である．よって，サイズ 4 のものが 1 つだけであるから，**ジョルダン標準形は** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **となる．**

注意 47. 以下で頻繁に使うことをここで述べておく．$N = J_n(0)$ とおくと，$1 \leq k \leq n-1$ のとき，N^k は対角線を 0 番目として数えた斜め線の k 番目に 1 が並び，他の成分は全て 0 の行列である．これは簡単な計算で分かるので各自一度は計算して確かめること．

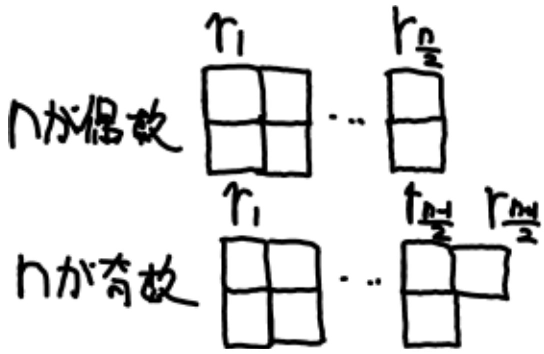
練習問題 21.6 の解

(1) $N = J_n(0)$ とおくと，注意 47 により，$M = N + N^2 + \cdots + N^{n-1}$ である．よって M^n を二項展開して計算すると，どの項も N^k $(k \geq n)$ という形なので，$M^n = O$ である．さらに，同様の計算をすると $M^{n-1} = N^{n-1}$ となるが，$N^{n-1} \neq O$ なので，M の最小多項式 $m_M(t)$ は t^n である．

(2) $m_M(t) = t^n$ なので，命題 21.2(2) により，M のジョルダン細胞の最大のサイズは n である．よって，M のジョルダン標準形は $J_n(0)$ である．

練習問題 21.7 の解

$N = J_n(0)$ とおく（前問と同じ）．すると $L := N^2$ の固有値は 0 のみである．命題 21.1 に基づいて考えると，$L^j = N^{2j}$ の階数を求め，ヤング図形を描けば，L のジョルダン標準形が求まる．N^{2j} の計算をしてみれば，$\mathrm{rank} L^j = n - 2j$ $(j \leq \frac{n}{2})$, $\mathrm{rank} L^j = 0$ $(j > \frac{n}{2})$ が分かる．よって，$n_j = 2j$ $(j \leq \frac{n}{2})$, $n_j = n$ $(j > \frac{n}{2})$ となるので， n が偶数の時，$r_j = 2$ $(j \leq \frac{n}{2})$, $r_j = 0$ $(j > \frac{n}{2})$ となり，n が奇数の時，$r_j = 2$ $(j \leq \frac{n-1}{2})$, $r_{\frac{n+1}{2}} = 1$, $r_j = 0$ $(j > \frac{n+1}{2})$ となる．よって，ヤング図形は下図のように求まる．



ゆえに，L のジョルダン標準形は，n が偶数の時，$J_{\frac{n}{2}}(0) \oplus J_{\frac{n}{2}}(0)$，$n$ が奇数の時，$J_{\frac{n+1}{2}}(0) \oplus J_{\frac{n-1}{2}}(0)$ である．

練習問題 21.8 の略解

(1) $\Phi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$ と分かる．

$$\frac{1}{\Phi_A(t)} = \frac{-t}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-2}$$

と部分分数展開される．分母を払うと $1 = -t(t-2) + (t-1)^2$．これより $E = -A(A-2E) + (A-E)^2$ を得る．

固有値 1 の広義固有空間 G_1 は $G_1 = \{-A(A-2E)\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\}$ である．$-A(A-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ より，$-A(A-2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-x_1+x_2+x_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるので，$G_1 = \left\{ s_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\}$ である．

固有値 2 の広義固有空間 G_2 は $G_2 = \{(A-E)^2\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\}$ である．$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ より，$(A-E)^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので，$G_2 = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$ である．

以下の小問については，ほぼ結果のみ記していく．

(2) $\Phi_B(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ と分かる．

$$\frac{1}{\Phi_B(t)} = \frac{2t-1}{(t-1)^2} + \frac{5-2t}{(t-2)^2}$$

と部分分数展開される．分母を払うと $1 = (2t-1)(t-2)^2 + (5-2t)(t-1)^2$．これより $E = (2B-E)(B-2E)^2 + (5E-2B)(B-E)^2$ を得る．

固有値 1 の広義固有空間 G_1 は，$(2B-E)(B-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，

$$G_1 = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

である．

固有値 2 の広義固有空間 G_2 は，$(5E-2B)(B-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，

$$G_2 = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

である．

(3) $\Phi_C(t) = (t-1)(t-2)^2$ と分かる．

$$\frac{1}{\Phi_C(t)} = \frac{1}{(t-1)} + \frac{3-t}{(t-2)^2}$$

と部分分数展開される．分母を払うと $1 = (t-2)^2 + (3-t)(t-1)$．これより $E = (C-2E)^2 + (3E-C)(C-E)$ を得る．

固有値 1 の広義固有空間 G_1 は，$(C-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，

$$G_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

である． 固有値 2 の広義固有空間 G_2 は，$(3E-C)(C-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，

$$G_2 = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

である．
練習問題 21.10 の解: $N = J_n(0)$ とおくと，$J_n(\alpha) = N + \alpha E$ であるから，

$$J_n(\alpha)^k = (N+\alpha E)^k = N^k + \alpha\,{}_kC_1 N^{k-1} + \alpha^2\,{}_kC_2 N^{k-2} + \cdots + \alpha^k E$$

(後半は二項展開)． ただし，$k \geq n$ の場合は $N^n = O$ に注意する．これが答え．
例えば，

$$J_2(\alpha)^k = k\alpha^{k-1}N + \alpha^k E = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix},$$

$$J_3(\alpha)^k = \frac{k(k-1)}{2}\alpha^{k-2}N^2 + k\alpha^{k-1}N + \alpha^k E = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\alpha^{k-2} \\ 0 & \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$$

である．
このように，ジョルダン細胞の k 乗は計算しやすい．次の問題はそれを利用するものであり，ジョルダン標準形の応用としてもっともよく知られたものであろう．

練習問題 21.11 の解：
(1) 上で求めた $\mathbb{C}^3$ の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ に対して，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$ とおくと，アタリマエの式 $P = EP$ を読み替えると，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} P$ となる．よって，P は標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ への基底の変換行列である．また，M_1 から定まる線形写像 $f_{M_1}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ について，M_1 は標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する表現行列であり，上で求めたジョルダン標準形 $J_2(2) \oplus J_1(1)$ は基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ に関する表現行列である．よって，定理 17.3 により，$P^{-1}M_1P = J_2(2) \oplus J_1(1)$ となる．ここで，

$$(P^{-1}M_1P)^k = P^{-1}M_1^kP,\ (J_2(2) \oplus J_1(1))^k = J_2(2)^k \oplus J_1(1)^k$$

であることに注意すると，$P^{-1}M_1^kP = J_2(2)^k \oplus J_1(1)^k$, よって $M_1 = P(J_2(2)^k \oplus J_1(1)^k)P^{-1}$ を得る．上で求めたように，$J_2(2)^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$, $J_1(1)^k = J(1)$ であるので， $M_1^k = P\begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ となる．P を代入して，具体的に計算すれば，

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2^k + 2^{-1+k}k & 2^{-1+k}k & -2^{-1+k}k \\ -1+2^k & 2^k & 1-2^k \\ -1+2^k+2^{-1+k}k & 2^{-1+k}k & 1-2^{-1+k}k \end{pmatrix}$$

となる．

(4) これは答えのみ記す.

$$M_4^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & -2(-1)^k k & 0 & (-1)^k k \\ (-1)^{1+k} k & (-1)^{1+k}(-1+3k) & (-1)^k k & 2(-1)^k k \\ (-1)^k k & (-1)^k k & (-1)^{1+k}(-1+k) & (-1)^{1+k} k \\ -2(-1)^k k & -6(-1)^k k & 2(-1)^k k & (-1)^k (1+4k) \end{pmatrix}$$

以下の２題では，表現行列を求めなくても解答できることを学んでほしい．

練習問題 21.12 の解： $A^2 = B^2 = O$ に注意する．$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ と置く．すると，$f(X) = \begin{pmatrix} z+y & w \\ w & 0 \end{pmatrix}$, $f^2(X) = f(AX+XB) = A(AX+XB)+(AX+XB)B = 2AXB = \begin{pmatrix} 2w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f^3(X) = f(f^2(X)) = f(2AXB) = A(2AXB)+(2AXB)B = 2A^2XB+2AXB^2 = O$ となる．よって，f はべき零であり，f の最小多項式は t^3 である．V は 4 次元のベクトル空間なので，f の固有多項式は t^4 である．以上から，命題 21.2 より，f のジョルダン標準形は $J_3(0) \oplus J_1(0)$ と分かる．

次にジョルダン標準形を与える基底を求める．$f^3 = 0$ より，定理 21.1(1) の証明の第二ステップに倣って，$\mathrm{Im} f^2, \mathrm{Im} f, V$ の順に延長して基底を求める．

$f^2(X) = \begin{pmatrix} 2w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ により，$\mathrm{Im} f^2$ は 1 次元であり，その基底として $f^2(E_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が取れる（$w \neq 0$ のものを 1 つ選べばよい）．ここで，$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置いた．

次に $\mathrm{Im} f$ の基底を求める．

$$f^2(E_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21.20}$$

は一次独立であることが保証されている（主張 1）．$f(X) = \begin{pmatrix} z+y & w \\ w & 0 \end{pmatrix} = (z+y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ により，$\mathrm{Im} f$ は 2 次元であるので，(21.20) がその基底をなす．

最後に V の基底を求める．$f^2(E_{22}), f(E_{22}), E_{22}$ を考えると，やはりこれらは一次独立であり，$\dim V = 4$ により，これにあと 1 つ行列 M を加えて，V の基底を得たい．ただし，定理 21.1(1) の証明の第 2 ステップに出てくる条件 (21.19) により，$f(M) = O$ を満たすものを選ばなくてはならない．ここは自分で選ばなくてはならないが，例えば $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすればよい（$f^2(E_{22}), f(E_{22}), E_{22}, M$ が一次独立となっていることを確認しなくてはならないが，これは容易なので各自に任せる）．こうして，f のジョルダン標準形 $J_3(0) \oplus J_1(0)$ を与える基底 $f^2(E_{22}), f(E_{22}), E_{22}, M$ が得られる．

練習問題 21.13 の解： $A^2 = O$ に注意する．$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ と置く．すると，$f(X) = AXB = \begin{pmatrix} bz+w & bw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$f^2(X) = f(AXB) = A(AXB)B = O$ となる．よって，f はべき零であり，f の最小多項式は t^2 である．V は 4 次元のベクトル空間なので，f の固有多項式は t^4 である．$f(X) = O$ を考えると，f の固有空間の次元は，$b \neq 0$ ならば 2 次元，$b = 0$ ならば 3 次元である．以上から，命題 21.2 より，f のジョルダン標準形は，$b \neq 0$ のとき $J_2(0)^{\oplus 2}$, $b = 0$ のとき $J_2(0) \oplus J_1(0)^{\oplus 2}$ と分かる．
次にジョルダン標準形を与える基底を求める．$f^2 = 0$ より，定理 21.1(1) の証明の第 2 ステップに倣って，$\mathrm{Im} f, V$ の順に延長して基底を求める．E_{ij} で (i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列を表す．
$f(X) = \begin{pmatrix} bz+w & bw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に注意する．よって，$b \neq 0$ ならば，$f(X) = \begin{pmatrix} bz+w & bw \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im} f$ の基底をなす．$b = 0$ ならば，$f(X) = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im} f$ の基底をなす．
$b \neq 0$ のとき，$f(E_{21}), E_{21}, f(E_{22}), E_{22}$ が一次独立であることが保証されている（主張 1）．さらに，$\dim V = 4$ なので，これらが V の基底をなし，これに関する f の表現行列がジョルダン標準形になる．$b = 0$ のとき，$f(E_{22}), E_{22}$ に $f(M_1) = O, f(M_2) = O$ なる行列 M_1, M_2 を加えることで V の基底を得たい．例えば，$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば条件が満たされることが分かる．各自確かめること．こうして，f のジョルダン標準形 $J_2(0) \oplus J_1(0)^{\oplus 2}$ を与える基底 $f(E_{22}), E_{22}, M_1, M_2$ が得られる．

22　射影とジョルダン分解

この章では，しばしばジョルダン標準形の代用として有用となる線形写像のジョルダン分解について述べる．

22.1　直和分解と射影

V をベクトル空間, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ を直和分解とする．このとき任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r$ ($\boldsymbol{v}_i \in V_i$ $(1 \le i \le r)$) と一通りに書ける（定義 19.3）．よって写像 $p_i : V \to V$ が $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}_i$ によって定まるが, これは容易に線形写像であることが分かる．また, $p_i|_{V_i}$ は恒等写像であり, $\operatorname{Im} p_i = V_i$ であることが分かる．この p_i のことを (直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ に関する)，V から V_i への**射影**と言う [*225]．さて $p_1, \ldots, p_r$ については, $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ $(i \neq j)$, $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}$ が成立 することが容易に確かめられる．次の命題はここまでの構成の逆を主張する．

命題 22.1. V をベクトル空間, $p_1, \ldots, p_r$ を $V \to V$ なる線形写像で, $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ $(i \neq j)$, $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}$ を満たすものとする．このとき $V_i := \operatorname{Im} p_i$ とおけば, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ となり, p_i はこの直和分解に関する V から V_i への射影となる．

証明. $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}$ により任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v} = p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + p_r(\boldsymbol{v})$ であるから $V = V_1 + \cdots + V_r$ が成立する．次に $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ に対して ($\boldsymbol{x}_i \in V_i$ とは仮定しない) $p_1(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + p_r(\boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{o}$ と仮定する．これに p_i を施すと $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ $(i \neq j)$ により左辺は $p_i(\boldsymbol{x}_i)$ となり右辺は $\boldsymbol{o}$ となる．よって $p_i(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{o}$ を得るので, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ が分かった．$\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v} = p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + p_r(\boldsymbol{v})$ であるから, 上の直和分解に関する V_i への射影は $\boldsymbol{v} \mapsto p_i(\boldsymbol{v})$ である．つまり p_i に一致する． □

22.2　ジョルダン分解

ジョルダン標準形を求めるとき, 広義固有空間への直和分解が本質的な役割を果たした (21 章第一ステップ)．この直和分解に関する射影は, しばしばジョルダン標準形の代用となるジョルダン分解というものを定める．V をベクトル空間, $f : V \to V$ を線形写像とし, $G_1, \ldots, G_k$ を f の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ に対する 広義固有空間とする．$V = G_1 \oplus \cdots \oplus G_k$ なる直和分解が存在するのだった．これに関する G_i への射影を p_i で表す．次の命題は $p_1, \ldots, p_k$ の簡単な計算方法を与える．

[*225] V から V_i への射影は部分ベクトル空間 V_i だけではなく直和分解を与えてはじめて決まる．例えば $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\boldsymbol{e}_1 \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e}_2 = \mathbb{C}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e}_2$ であるが, $\mathbb{C}\boldsymbol{e}_2$ への射影は，第 1 の直和分解によると $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \mapsto y\boldsymbol{e}_2$ であり，第 2 の直和分解によると $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + (-x+y)\boldsymbol{e}_2 \mapsto (-x+y)\boldsymbol{e}_2$ であり，異なったものになる．

命題 22.2. $m_f(t)$ を $f : V \to V$ の最小多項式とする．$m_f(t) = (t-\alpha_1)^{d_1}\cdots(t-\alpha_k)^{d_k}$ を因数分解,

$$\frac{1}{m_f(t)} = \frac{h_1(t)}{(t-\alpha_1)^{d_1}} + \cdots + \frac{h_k(t)}{(t-\alpha_k)^{d_k}}$$

を部分分数展開とする．$m_i(t) := m_f(t)/(t-\alpha_i)^{d_i}$ (t の多項式) とおく．このとき

$$p_i = m_i(f)h_i(f)$$

が成立する．特に，p_i は f の多項式である．

証明．実は証明はほとんど 21 章の第一ステップですんでいる．定義により, $m_1(t)h_1(t) + \cdots + m_k(t)h_k(t) = 1$ により $m_1(f)h_1(f) + \cdots + m_k(f)h_k(f) = \mathrm{id}$ が成立する．よって任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $m_1(f)h_1(f)(\boldsymbol{v}) + \cdots + m_k(f)h_k(f)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ である．21 章第一ステップで言及したように, 定理 20.2 $\Longleftarrow$ と同様にして, $m_i(f)h_i(f)(\boldsymbol{v}) \in G_i$ が分かる．よって p_i の定義により $p_i(\boldsymbol{v}) = m_i(f)h_i(f)(\boldsymbol{v})$ である． $\square$

広義固有空間への射影は実は固有多項式から求められる（21.6 節の第一ステップ後の議論も参照のこと）．

$\Phi_f(t)$ を f の固有多項式とし, $\Phi_f(t) = (t-\alpha_1)^{m_1}\cdots(t-\alpha_k)^{m_k}$ と因数分解し,

$$\frac{1}{\Phi_f(t)} = \frac{l_1(t)}{(t-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{l_k(t)}{(t-\alpha_k)^{m_k}} \tag{22.1}$$

を部分分数展開とする．$g_i(t) := \Phi_f(t)/(t-\alpha_i)^{m_i}$ とおく．$g_1(t)l_1(t) + \cdots + g_k(t)l_k(t) = 1$ が成立しているので, $g_1(f)l_1(f) + \cdots + g_k(f)l_k(f) = \mathrm{id}$ が成り立つ．定理 20.2 $\Longleftarrow$ と同様に, $g_i(f)l_i(f)$ **が f の広義固有空間への射影に一致する**ことが分かる．

練習問題 22.1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 9 & -2 & -7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して広義固有空間への射影を与える行列を計算せよ．

$p_1, \ldots, p_k$ を使うと f は次のように表せる：

$$s := \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k \tag{22.2}$$

$$n := (f-\alpha_1\mathrm{id})\circ p_1 + \cdots + (f-\alpha_k\mathrm{id})\circ p_k \tag{22.3}$$

とおくと,

$$f = s + n$$

である.

ここで s にとっては, $G_1, \ldots, G_k$ はそれぞれ固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ の固有空間である[*226]. したがって s は対角化可能である. また, n については, $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ $(i \neq j)$ であること, また, p_i が f の多項式であるので (命題 22.2), f の多項式である線形写像と順序交換できることにも注意すると, $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$n^l = (f - \alpha_1 \mathrm{id})^l \circ p_1 + \cdots + (f - \alpha_k \mathrm{id})^l \circ p_k$$

が成立する. ところが $f - \alpha_i \mathrm{id}$ は G_i においてべき零であるから, l を十分大きくとると, すべての i に対して $(f - \alpha_i \mathrm{id})^l \circ p_i = 0$ が成立する. よってこのとき $n^l = 0$ である. つまり n はべき零である. s と n はともに f の多項式であるから

$$s \circ n = n \circ s \tag{22.4}$$

であることに注意する. 分解

$$f = s + n$$

のことを f の**ジョルダン分解**と呼ぶ.

練習問題 22.2. 練習問題 22.1 の行列 A の行列のジョルダン分解を求めよ. それを利用して, A^k を計算せよ.

この問題の行列のべき乗計算を使うと, 行列のべき級数をうまく扱えるようになる. 例えば, 正方行列 A に対して e^A が定義出来て, 指数関数と同様のよい性質を持つことが分かる. そしてその性質が微分方程式の解法に役立つ. 興味が湧いた人は次の章を是非読んでみてほしい.

さて, ジョルダン分解は, 上で見たように, f から一通りに決まるものであるが, 次の意味でも一通りに決まっている.

定理 22.1. $f = s_1 + n_1$ なる分解で, s_1 は対角化可能, n_1 はべき零, $s_1 \circ n_1 = n_1 \circ s_1$ が成立するものはジョルダン分解に限る. つまり, $s_1 = s$, $n_1 = n$ である.

証明. まず s_1, n_1 が f と順序交換可能であることを示す. 実際, $s_1 \circ n_1 = n_1 \circ s_1$ により, $s_1 \circ f = s_1 \circ (s_1 + n_1) = s_1 \circ s_1 + s_1 \circ n_1 = s_1 \circ s_1 + n_1 \circ s_1 = (s_1 + n_1) \circ s_1 = f \circ s_1$ となり, また n_1 についても同様である. 命題 22.2 より, s と n は f の多項式であるから, s_1, n_1 は s, n とも順序交換可能である. さて $s + n = s_1 + n_1$ であるから, $s - s_1 = n_1 - n$ である. よって, この定理の証明は次の補題により完結する. □

[*226] 次のように示される (広義固有空間に限らず, 任意の直和分解でよい). $\boldsymbol{v} \in V$ とする. $\boldsymbol{v} = p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + p_r(\boldsymbol{v})$ なのだった.「$\boldsymbol{v}$ が s の, ある固有空間に属する $\Leftrightarrow$ ある $\beta \in \mathbb{C}$ が存在して, $s(\boldsymbol{v}) = \beta \boldsymbol{v}$」である. ここで, 左辺は $s(\boldsymbol{v}) = s(p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + p_r(\boldsymbol{v})) = (\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k)(p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + p_r(\boldsymbol{v})) = \alpha_1 p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + \alpha_r p_r(\boldsymbol{v})$ となる. 右辺は $\beta(p_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + p_r(\boldsymbol{v}))$ である. よって, 広義固有空間の和が直和であり, α_i が互いに異なるので, ある i があって $\beta = \alpha_i$ であり, $j \neq i$ に対しては, $p_j(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ となる. よって,「$\boldsymbol{v}$ が s の, ある固有空間に属する $\Leftrightarrow$ ある i があって $\boldsymbol{v} \in G_i$」となるので, s にとって $G_1, \ldots, G_k$ は固有空間である.

補題 22.1. (i) s, s_1 を 2 つの対角化可能な線形写像 $V \to V$ で, 順序交換可能であるとすると, $s - s_1$ も対角化可能である.

(ii) n, n_1 を 2 つのべき零な線形写像 $V \to V$ で, 順序交換可能であるとすると, $n_1 - n$ もべき零である.

(iii) 線形写像 $m : V \to V$ がべき零でかつ対角化可能ならば $m = 0$ である.

(i) 射影という考え方の有用性がよく分かる証明である. s は対角化可能なので, その広義固有空間は固有空間である. s の固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とする. V を s の固有空間に分解し, それに関する射影を $p_1, \ldots, p_k$ とする. すると, $s = \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k$ と書ける. s_1 についても同様で, その固有値を $\beta_1, \ldots, \beta_l$ とし, V の s_1 の固有分解に関する射影を $q_1, \ldots, q_l$ とすると, $s_1 = \beta_1 q_1 + \cdots + \beta_l q_l$ と書ける [*227]. $q_1 + \cdots + q_l = \mathrm{id}$ により, $p_i = p_i \circ \mathrm{id} = p_i \circ (q_1 + \cdots + q_l) = p_i \circ q_1 + \cdots + p_i \circ q_l$ であるから $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{j=1}^l p_i \circ q_j$ と書ける. 同様に $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{id}$ により $s_1 = \sum_{j=1}^l \beta_j \sum_{i=1}^k p_i \circ q_j$ と書ける. よって

$$s - s_1 = \sum_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) p_i \circ q_j \tag{22.5}$$

である. ここで $p_i \circ q_j$ $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq l)$ なる kl 個の線形写像は 命題 22.1 の仮定を満たす. 実際, まず $\sum_{i,j} p_i \circ q_j = \sum_{i=1}^k p_i \circ \sum_{j=1}^l q_j = \sum_{i=1}^k p_i = \mathrm{id}$ である. さらに, $p_1, \ldots, p_k$ は s の多項式, $q_1, \ldots, q_l$ は s_1 の多項式であり (命題 22.2) , s と s_1 は順序交換可能であるから, $p_1, \ldots, p_k$ と $q_1, \ldots, q_l$ も順序交換可能であることに注意する. よって, $(p_i \circ q_j) \circ (p_{i_1} \circ q_{j_1}) = p_i \circ p_{i_1} \circ q_j \circ q_{j_1}$ となり, これは $i = i_1$, $j = j_1$ のとき $p_i \circ q_j$ に一致し, それ以外では 0 となる. よって kl 個の線形写像 $p_i \circ q_j$ は V の直和分解を与え，その直和分解に関する射影である（命題 22.1）. このとき，(22.5) により, $s - s_1$ は固有値 $\alpha_i - \beta_j$ （$1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq l$）を持ち, 対角化可能であることが分かる.

(ii) $n \circ n_1 = n_1 \circ n$ により $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$(n_1 - n)^l = \sum_{i=0}^{l} (-1)^{l-i} \begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix} n_1^i \circ n^{l-i}$$

が成立する. $n^a = 0, n_1^b = 0$ となる $a, b \in \mathbb{N}$ をとる. $l \geq a+b-1$ としておけば $i \geq b$ 又は $l - i \geq a$ が成立するので $(n_1 - n)^l = 0$ となる. よって $n_1 - n$ はべき零である.

(iii) m はべき零よりその最小多項式は t^l という形である. 他方, m は対角化可能より最小多項式は t でなくてはならない. つまり $m = 0$.

[*227] $p_1, \ldots, p_k$ と $q_1, \ldots, q_l$ は一致するとは限らない.

23 線形写像の関数

$a(t)$ を実数を実数に対応させる関数，あるいは複素数に複素数を対応させる関数で何度でも微分可能なものとする．複素数に複素数を対応させる関数の場合，微分可能の定義は実関数 のときと同様である[*228]. 例えば多項式や, べき級数で定義される関数 e^t, $\sin t$, $\cos t$ はその例である[*229].

V をベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形変換とするとき，$a(f)\colon V \to V$ なる線形変換を定義するのがこの章の目標である．このために，前章で考察したジョルダン分解が役に立つ．f のかわりに $n \times n$ 行列 A を考え，$a(A)$ なる $n \times n$ 行列を定義すると読みかえることができる．$a(t)$ が多項式の場合はすでに 22.2 節で扱っている．定係数連立微分方程式への応用のためには $a(t) = e^t$ のみ必要であるが，一般的に考えてみることにする．

$f\colon V \to V$ のすべての相異なる固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ の集合 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ のことを f **のスペクトル**と呼び，Σ_f で表す（複素平面の部分集合とみることもある）．行列 A の場合には Σ_A で表す．$m_f(t) = (t-\alpha_1)^{d_1} \cdots (t-\alpha_k)^{d_k}$ を f の最小多項式の因数分解とする．

何度でも微分できる関数 $a(t)$，$b(t)$ について，各 α_i に対して，

$$a(\alpha_i) = b(\alpha_i), a'(\alpha_i) = b'(\alpha_i), \ldots, a^{(d_i-1)}(\alpha_i) = b^{(d_i-1)}(\alpha_i)$$

が成立するとき，$a(t)$ と $b(t)$ が**スペクトル上で一致する**と言い， $a(\Sigma_f) = b(\Sigma_f)$ で表す．

このとき関数 $a(t)$ に対して，線形写像 $a(f)\colon V \to V$ を次のように定義する．

(1) $a(\Sigma_f) = r(\Sigma_f)$ となる**多項式** $r(t)$ を見つける（見つかることは後で示す．ジョルダン分解はここで活躍する）．

(2) $a(f) := r(f)$ と定義. ここで $r(f)$ は通常通りの定義とする（25.2 節参照）．

多項式の場合に帰着できるのがポイントである．

このとき, $a(f)$ の定義が (1) のような $r(t)$ のとり方によらない[*230] ことを言っておく必要がある．（このためにスペクトル上での関数の一致と言う定義が上の通りになっているということが以下の議論で分かる）．まず，これを示しておこう．$r_1(t), r_2(t)$ がともに，$a(\Sigma_f) = r_1(\Sigma_f), a(\Sigma_f) = r_2(\Sigma_f)$ を満たしているとする．

$$p(t) := r_1(t) - r_2(t)$$

とおくと，条件により，各 α_i に対して，

$$p(\alpha_i) = p'(\alpha_i) = \cdots = p^{(d_i-1)}(\alpha_i) = 0$$

[*228] このような関数を正則関数という．複素関数入門で今習っているはず.
[*229] 指数関数や三角関数の複素数バージョンも複素関数入門で今習っているはず.
[*230] ただし，$r(t)$ が一意であると言っているわけではない.

が成立するので， $p(t)$ は $(t-\alpha_i)^{d_i}$ で割り切れる．よって，$p(t)$ は $m_f(t)$ で割り切れ，従って f を代入すれば $p(f)=0$ が分かる．すなわち $r_1(f)=r_2(f)$ である．

さて，$f\colon V\to V$ に対して上記 (1) のような多項式 $r(t)$ を見つけたい．そのため $r(t)=\sum_{l=0}^{e} r_l t^l$ とするとき，$r(f)$ を f のジョルダン分解を使って計算してみて，係数 r_l の当たりを付けることができる．$d:=\deg m_f(t)$ とおく．$r(t)$ を $m_f(t)$ で割った商を $q(t)$, 余りを $r_0(t)$ とすると，$r(t)=m_f(t)q(t)+r_0(t)$ である．これをもとに計算してみれば分かるように，$r(\Sigma_f)=r_0(\Sigma_f)$ が分かる．よって，$r(t)$ を $r_0(t)$ に置き換えることで，$e\le d$ としてよい．さらに，もし $e<d$ ならば $r_l=0$ ($e<l\le\deg m_f(t)$) とすることで，$e=d$ としてよい．

$$f=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i p_i+\sum_{i=1}^{k}(f-\alpha_i\mathrm{id})\circ p_i$$

が f のジョルダン分解であった．2 項定理より，

$$f^l=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^l p_i+\sum_{i=1}^{k}\binom{l}{1}\alpha_i^{l-1}(f-\alpha_i\mathrm{id})\circ p_i+\cdots+\sum_{i=1}^{k}\binom{l}{j}\alpha_i^{l-j}(f-\alpha_i\mathrm{id})^j\circ p_i+\cdots+\sum_{i=1}^{k}(f-\alpha_i\mathrm{id})^l\circ p_i$$

であるので，これを $r(f)=\sum_{l=0}^{d} r_l f^l$ に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}r(f)&=\sum_{i=1}^{k}r(\alpha_i)p_i+\sum_{i=1}^{k}r'(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})\circ p_i\\&+\cdots+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{j!}r^{(j)}(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})^j\circ p_i+\cdots+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{d!}r^{(d)}(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})^d\circ p_i\\&=\sum_{i=1}^{k}(r(\alpha_i)+r'(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})+\cdots+\frac{1}{(d_i-1)!}r^{(d_i-1)}(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})^{d_i-1})\circ p_i\end{aligned}$$

となる（最後の行のために，$(f-\alpha_i\mathrm{id})^{d_i}\circ p_i=0$ を使った）．さらに $r(\Sigma_f)=a(\Sigma_f)$ であったので，

$$r(f)=\sum_{i=1}^{k}(a(\alpha_i)+a'(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})+\cdots+\frac{1}{(d_i-1)!}a^{(d_i-1)}(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})^{d_i-1})\circ p_i$$

が成立しなくてはならない． ここで $p_i=m_i(f)h_i(f)$ と書けることを思い出す．記号を簡単にするため，

$$P_i(t):=m_i(t)h_i(t)$$

と置くと，

$$r(f)=\sum_{i=1}^{k}(a(\alpha_i)+a'(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})+\cdots+\frac{1}{(d_i-1)!}a^{(d_i-1)}(\alpha_i)(f-\alpha_i\mathrm{id})^{d_i-1})\circ P_i(f)$$

となる．

以上の発見法的考察をもとにして，

$$r(t) = \sum_{i=1}^{k} (a(\alpha_i) + a'(\alpha_i)(t-\alpha_i) + \cdots + \frac{1}{(d_i-1)!} a^{(d_i-1)}(\alpha_i)(t-\alpha_i)^{d_i-1}) P_i(t) \qquad (23.1)$$

と定義してみよう．ここで

$$\varepsilon_{ij}(t) := \frac{1}{j!}(t-\alpha_i)^j P_i(t) \ (1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq d_i - 1)$$

と置くと（ただし $0! = 1$ と定める），

$$r(t) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 0 \leq j \leq d_i - 1} a(\alpha_i)^{(j)} \varepsilon_{ij}(t) \qquad (23.2)$$

と表すことができる． 以下で，これが上記の条件 (1), すなわち，$r(\Sigma_f) = a(\Sigma_f)$ をみたすことを示す．次の補題が鍵となる．

補題 23.1. i, j, l, m を $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq k$, $0 \leq j \leq d_i - 1$, $0 \leq m \leq d_l - 1$ を満たす整数とするとき，

$$\varepsilon_{ij}^{(m)}(\alpha_l) = \begin{cases} 1: & m = j \text{ かつ } l = i \text{ のとき} \\ 0: & \text{それ以外} \end{cases}$$

が成立する．

証明.

$$\text{(A)} \ \sum_{i=1}^{k} P_i(t) \equiv 1$$

を思い出そう．これにより

$$\text{(B)} \ \ m \geq 1 \text{ に対して，} \sum_{i=1}^{k} P_i^{(m)}(t) \equiv 0$$

が成立する． また，$P_i(t) = (t-\alpha_1)^{d_1} \cdots (t-\check{\alpha_i})^{d_i} \cdots (t-\alpha_k)^{d_k} h_l(t)$[*231]であるので，

$$\text{(C)} \ l \neq i \text{ のとき，} P_i^{(m)}(\alpha_l) = 0 \ (0 \leq m \leq d_l - 1)$$

[*231] $(t-\check{\alpha_i})^{d_i}$ は $(t-\alpha_i)^{d_i}$ を除くという意味.

が成立する． よって，l を止めて i を変化させると，(A), (C) より $P_l(\alpha_l)=1$,（B）, (C) より $P_l^{(m)}(\alpha_l)=0$ $(1\le m\le d_l-1)$ が成り立つ．これと (C) をまとめると，i, l, m が $1\le i\le k$, $1\le l\le k$, $0\le m\le d_l-1$ を満たすとき，

$$\text{(D) } P_i^{(m)}(\alpha_l)=\begin{cases}1: & m=0 \text{ かつ } l=i \text{ のとき}\\ 0: & \text{それ以外}\end{cases}$$

である．

(D) より，補題が次のように示される．$\varepsilon_{ij}^{(m)}(t)$ を積の微分法で計算すると，$P_i^{(m')}(t)$ $(m'\le m)$ のかかった項の和になっていることに注意する．よって，$l\ne i$ のとき，(D) より $\varepsilon_{ij}^{(m)}(\alpha_l)=0$ と分かる．今度は $l=i$ かつ $m\ne j$ としよう．再び，$\varepsilon_{ij}^{(m)}(t)$ を積の微分法で計算することを考えると，$m<j$ のときはどの項にも $(t-\alpha_i)^j$ の微分の部分が生き残るために $\varepsilon_{ij}^{(m)}(\alpha_i)=0$ が分かり，$m>j$ のときは，$P_i^{(m')}(t)$ $(0<m'\le m)$ のかかった項の和になるので (D) より $\varepsilon_{ij}^{(m)}(\alpha_i)=0$ が分かる．最後に $l=i$ かつ $m=j$ の場合を考えると，$\varepsilon_{ij}^{(j)}(t)$ を積の微分法で計算したものに $t=\alpha_i$ を代入して生き残るのは $(\frac{1}{j!}(t-\alpha_i)^j)^{(j)}P_i(t)$ の部分のみなので，$\varepsilon_{ij}^{(j)}(\alpha_i)=1$ が分かる． □

(23.2) と補題 23.1 より，直ちに $0\le j\le d_i-1$ に対して $r^{(j)}(\alpha_i)=a^{(j)}(\alpha_i)$ が分かる．よって $r(t)$ は確かに $r(\Sigma_f)=a(\Sigma_f)$ を満たす多項式であることが示された.

例 23.1. $r(t)=\ e^t$ の時が定数係数連立線形微分方程式の解法で重要である．f のジョルダン分解を使えば

$$e^f=\sum_{i=1}^{k}e^{\alpha_i}(\mathrm{id}+(f-\alpha_i\mathrm{id})+\cdots+\frac{1}{j!}(f-\alpha_i\mathrm{id})^j+\cdots+\frac{1}{(d_i-1)!}(f-\alpha_i\mathrm{id})^{d_i-1})\circ p_i \quad (23.3)$$

なる表示を得る．

行列の場合に言い直しておくと次のようになる．ただし，射影 $p_i=m_i(f)h_i(f)$ に対応する行列 $m_i(A)h_i(A)$ を p_i^A で表した.

$$e^A=\sum_{i=1}^{k}e^{\alpha_i}(E+(A-\alpha_iE)+\cdots+\frac{1}{j!}(A-\alpha_iE)^j+\cdots+\frac{1}{(d_i-1)!}(A-\alpha_iE)^{d_i-1})p_i^A. \quad (23.4)$$

特に，A が零行列 O のとき，$e^O=E$ であることが分かる．これは指数関数の性質 $e^0=1$ の類似と見なせる.

式 (23.3), (23.4) はよく頭に入れておくとよい.

練習問題 23.1. 練習問題 22.1 の A に対して e^A を計算せよ.

指数関数の話をもう少し続けよう．t を変数として e^A の A に tA を代入して得られる行列 e^{tA} の各成分は t の関数となる．$t=0$ のとき $tA=O$ であるので，先に見た通り $e^O=E$ である．以

下では $t \neq 0$ とする．このとき $p_i^A = p_i^{tA}$ であることが分かる．これは，A の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ に対する広義固有空間 $G_1, \ldots, G_k$ が，tA の固有値 $t\alpha_1, \ldots, t\alpha_k$ の広義固有空間であることから分かる．射影の定義にも注意せよ．よって (23.4) により

$$e^{tA} = \sum_{i=1}^{k} e^{t\alpha_i}(E + t(A-\alpha_i E) + \cdots + \frac{t^j}{j!}(A-\alpha_i E)^j + \cdots + \frac{t^{d_i-1}}{(d_i-1)!}(A-\alpha_i E)^{d_i-1})p_i^A \quad (23.5)$$

となる．これを導くのに $t \neq 0$ としたが，実は $t = 0$ でもこれは正しい．なぜなら，この式で $t = 0$ とすると左辺は $e^O = E$ となり，右辺は $\sum_{i=1}^k p_i^A$ となるが $\sum_{i=1}^k p_i^A = E$ は射影の性質より確かに成り立っているからである．これを用いて次の重要な性質を導いておく．どちらも指数関数の重要な性質の行列バージョンと見なせる．

命題 23.1. (1) $(e^{tA})' = Ae^{tA}$.

(2) $(e^{tA})(e^{-tA}) = E$.

この命題の (1) は，式 (23.5) を t で微分すればすぐに確認できる． (2) については少し準備をして示すことにする（例 23.2 を見よ).

関数が様々な特性を持っていることがある．例えば $e^t \times e^{-t} = 1$ や $\sin t^2 + \cos t^2 = 1$ などである．次の命題によって，これは線形写像の関数についてもそのまま成立することが分かる．

命題 23.2. $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ を何度でも微分可能な関数，$u(s_1, \ldots, s_n)$ を $s_1, \ldots, s_n$ の多項式とする．もし，$u(a_1(t), \ldots, a_n(t)) \equiv 0$（関数として 0） ならば, $u(a_1(f), \ldots, a_n(f)) \equiv 0$ が成立する．

証明. 多項式 $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ を $a_1(\Sigma_f) = r_1(\Sigma_f), \ldots, a_n(\Sigma_f) = r_n(\Sigma_f)$ となるようにとる．

Σ_f 上 $u(a_1(t), \ldots, a_n(t))$ と $u(r_1(t), \ldots, r_n(t))$ が一致することを示す[*232]．まず $a_i(\alpha_j) = r_i(\alpha_j)$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k)$ により，

$$u(a_1(\alpha_j), \ldots, a_n(\alpha_j)) = u(r_1(\alpha_j), \ldots, r_n(\alpha_j))$$

が成立する．$u(r_1(t), \ldots, r_n(t))$ は多項式である．合成関数の微分の公式より

$$\frac{d}{dt}(u(r_1(t), \ldots, r_n(t))) = \sum_{i=1}^{n} r_i'(t)\frac{\partial u}{\partial s_i}(r_1(t), ..., r_n(t))$$

が成立する． これに $t = \alpha_j$ を代入すると，$r_i'(\alpha_j) = a_i'(\alpha_j), r_i(\alpha_j) = a_i(\alpha_j)$ により，

$$\text{(A)}\ \frac{d}{dt}(u(r_1(\alpha_j), \ldots, r_n(\alpha_j))) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(\alpha_j)\frac{\partial u}{\partial s_i}(a_1(\alpha_j), \ldots, a_n(\alpha_j))$$

[*232] ここでは $u(a_1(t), \ldots, a_n(t)) \equiv 0$ という条件は不要である．

となる． 合成関数の微分公式は $u(a_1(t),\dots,a_n(t))$ についても成立するので，(A) の右辺は

$$\frac{d}{dt}(u(a_1(\alpha_j),\dots,a_n(\alpha_j)))$$

となり，$\frac{d}{dt}(u(r_1(\alpha_j),\dots,r_n(\alpha_j)))=\frac{d}{dt}(u(a_1(\alpha_j),\dots,a_n(\alpha_j)))$ が成り立つ．これは何度微分しても同様なので，

$$\text{(B)}\ \frac{d}{dt}^{(l)}(u(r_1(\alpha_j),\dots,r_n(\alpha_j)))=\frac{d}{dt}^{(l)}(u(a_1(\alpha_j),\dots,a_n(\alpha_j)))$$

が $l=0,\dots,d_j-1$ に対して成り立つ．つまり， $u(r_1(t),\dots,r_n(t))$ と $u(a_1(t),\dots,a_n(t))$ は Σ_f 上一致する．

よって，定義の仕方により

$$u(a_1(f),\dots,a_n(f))=u(r_1(f),\dots,r_n(f))$$

である．一方で，$u(a_1(t),\dots,a_n(t))\equiv 0$ であるから，これは何度微分しても $\equiv 0$ である．よって（B）より，$\frac{d}{dt}^{(l)}(u(r_1(\alpha_j),\dots,r_n(\alpha_j)))\equiv 0$ が $l=0,\dots,d_j-1$ に対して成り立つ．以上より，$F(t):=u(r_1(t),\dots,r_n(t))$ とおくと（t の多項式），

$$u(a_1(f),\dots,a_n(f))=F(f),F^{(l)}(\alpha_j)=0\ (l=0,...,d_j-1)$$

が分かった．後者の条件によって，$F(t)$ が f の最小多項式によって割り切れるので $F(f)=0$ である．こうして $u(a_1(f),...,a_n(f))=0$ が示された． □

例 23.2. $a_1(t)=e^t$,$a_2(t)=e^{-t}$,$u(s_1,s_2)=s_1s_2-1$ とおくと，$u(a_1(t),a_2(t))\equiv 0$ であるから，$e^f\circ e^{-f}=\mathrm{id}$ が成立する．これで，命題 23.1 (2) が証明された．以下に見るように，これは定係数連立線形微分方程式への応用上大切である．

例 23.3. $a_1(t)=\cos t$,$a_2(t)=\sin t$,$u(s_1,s_2)=s_1^2+s_2^2-1$ とおくと，$u(a_1(t),a_2(t))\equiv 0$ であるので，$(\cos f)^2+(\sin f)^2=\mathrm{id}$ が成立する．

命題 23.1 を使えば，定理 13.1 と同様に次の定理を証明することができる．

定理 23.1. A を実 $n\times n$ 行列，$x_1(t),\dots,x_n(t)$ を微分可能な関数として， $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$ とおくとき， 連立微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ を考える． この解は，$\boldsymbol{x}(t)=e^{tA}\boldsymbol{c}$ で与えられる．ここで $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ は任意のベクトルである．
これから，$\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ の解は，その初期値 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}(0)$ からただ一つに決まる事が分かる．

この定理の系として，系 13.1 と同様に，次も証明できる．

系 23.1. A, B を実 $n\times n$ 行列として， $AB=BA$ が成り立っていると仮定する．このとき，$e^{tA}e^{tB}=e^{t(A+B)}$ が成り立つ． 特に $e^Ae^B=e^{A+B}$（指数法則）が成り立つ．

練習問題 22.1 の解答: A の固有多項式は $(t-2)^2(t-1)$ である．$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ とおく．$\frac{1}{(t-1)(t-2)^2} = \frac{-(t-3)}{(t-2)^2} + \frac{1}{t-1}$ により，$g_1(t)l_1(t) = (t-2)^2$, $g_2(t)l_2(t) = -(t-1)(t-3)$ と分かる．

よって，α_1-広義固有空間への射影を定める行列 P_1 は $g_1(A)l_1(A) = (A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

α_2-広義固有空間への射影を定める行列 P_2 は $g_2(A)l_2(A) = -(A-E)(A-3E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

である．

練習問題 22.2 の解答: まず，ジョルダン分解は，前問で求めた P_1, P_2 を使えば，定義から簡単に求まる．s に対応する行列は $S := \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = (A-2E)^2 - 2(A-E)(A-3E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

n に対応する行列 N は $A - S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

次に A^k であるが，$A^k = (S+N)^k$ として計算する．ここで $N^2 = O$ であることが分かり，また，$SN = NS$ なので，$(S+N)^k = S^k + kS^{k-1}N$ となる．さらに $S^k = (P_1 + 2P_2)^k = P_1^k + 2^k P_2^k = P_1 + 2^k P_2$, $S^{k-1}N = (P_1 + 2^{k-1}P_2)N$ であるが，これらは簡単に計算できる． こうして，$A^k = \begin{pmatrix} 1/2(2+(3k)2^k) & -2^{k-1}k & 1/2(2-2^{1+k}-2^k k) \\ 3(1-2^k+2^{1+k}k) & -2^k(-1+2k) & 3-3(2^k)-2^{1+k}k \\ -(3k)2^{-1+k} & 2^{-1+k}k & 2^{-1+k}(2+k) \end{pmatrix}$ と分かる．

練習問題 23.1 の解答: (23.4) 式に当てはめるだけである．$e^A = eP_1 + e^2(E + (A-2E))P_2 = \begin{pmatrix} e+3e^2 & -e^2 & e-2e^2 \\ 3e+9e^2 & -3e^2 & 3e-7e^2 \\ -3e^2 & e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$ と計算できる．

第 V 部
内積と直交固有値問題

24 章以降では，ベクトル空間に，$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の内積の抽象化（一般化）を考えて，線形写像を，より幾何学的な直感を付加して研究する．考える基底や線形写像も，内積と相性のよいもの（24.3 節で定義する**正規直交基底**，26 章で定義する**正規変換**）を主に考える．

内積のあるときの固有値問題の理想的な状況は，**固有ベクトルからなる正規直交基底**が存在するときである．これがいつ存在するかという問題（直交固有値問題）に解答を与える（定理 26.1）．これも，この講義の一つのヤマ場と言ってよい．

第 III 部の内容については，その動機が分かりにくいかもしれない．それを補うため，話題をたくさん書いたので（試験範囲外ではあるが），是非（全部でなくてよいので）読んでほしい．特に，21 章では，双対ベクトル空間を利用した**ジョルダン標準形の存在証明**を与えている．これは，内積とは関係ない話題に見えるが，双対ベクトル空間を考えることと 内積を持つベクトル空間を考えることは非常に類似していることが分かるのである．そういった意味で，内積の効用も感じてもらえると期待している．21 章の最後に，この講義の免許皆伝の問題を置いた．

24　内積と計量ベクトル空間

24.1　内積の抽象的定義

実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ 又は $\mathbb{R}^3$ については, そのベクトルの長さ, 内積が定義されて幾何的意味を持っている. $\mathbb{R}^3$ の場合, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ となっている（2 番目の等号は，余弦定理 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$ より従う）.

これを拡張して，$\mathbb{R}^n$ の **(実）標準的内積**を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

と定義する． また，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 \geq 0$ に注意して，$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とおき， $\boldsymbol{x}$ の**長さ**という.

標準的内積が以下の性質を満たしていることは容易にチェックできる.

命題 24.1.
(1)　(**2 重線形性**)　$(a\boldsymbol{x}+a'\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{y} = a\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + a'\,(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y})$. ($\boldsymbol{y}$ についても同様) .
(2)　(**対称性**)　$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$.
(3)　(**正定値性**)　$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geqq 0$ かつ $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

標準的内積は，$\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x}$ と $\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{y}$ を与えるごとに $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ なる実数を決める仕組みであるので, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ なる関数と見ることが出来る． ここで，$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n := \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\}$ である（**直積集合**という）.

定義 24.1. （第一の抽象化）これを抽象化して, 命題 24.1(1)–(3) を持つ全ての関数 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^n$ の**内積**と呼ぶ.
（第二の抽象化）さらに, 実ベクトル空間 V に対して, (1)–(3) を持つ全ての関数 $\varphi : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ のことを V の**内積**と呼ぶ．内積については，標準的でなくても $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ のように表すことにする． (3) に注意すれば $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とおける．これを $\boldsymbol{x}$ の**長さ**という.
V に 1 つの内積 $\varphi : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える時，V と φ の対 (V,φ) を**（実）計量ベクトル空間**という.

実ベクトル空間 V に対しては無数の内積を考えることができる． なぜなら，V の 1 つの基底を $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ とする時，$x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n$ と $y_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{v}_n$ の内積を $x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ で定めれば，(1)–(3) を満たす．$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ のとり方は無数にあるから, V の内積も無数にある． ここで挙げた内積の例は結局，標準内積とあまり変わらないが，次の例は，内積の抽象的定義をして初めてひっかかるものである.

例 24.1. $P_n = \{n$ 次以下の実係数多項式$\}$において，$a < b$ なる実数に対して，

$$\varphi\left(f(x)\,, g(x)\right) := \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \;\; (f(x), g(x) \in P_n)$$

とすると，これは P_n の内積になる.

$\because$

(i) $\int_a^b (\alpha f_1(x) + \alpha' f_2(x))\,g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha\int_a^b f_1(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha'\int_a^b f_2(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.（これは積分の性質）.

(ii) $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$ は明らか.

(iii) $\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \geqq 0$ は明らか. 後半は $f(x)$ の連続性による.

内積を付与して考える効用については 24.3 節 で説明する.

さて複素ベクトル空間についてもベクトルの長さや内積を考える[*233]. これは量子力学などへの応用もある. 主に命題 24.1 の (3) に対応する性質を得るために工夫を要する. まず $\mathbb{C}^n$ の**(複素）標準的内積**を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} := x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

と定める. $y_1, \ldots, y_n$ が全て実数ならば $\mathbb{R}^n$ の標準的内積に一致する. これが，次の性質を満たす $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ なる関数を決めていることは容易にチェックできる.

命題 24.2. (1) $(a\boldsymbol{x} + a'\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{y} = a\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + a'\,(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y})$.

(2) (**エルミート性**) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$.

※ (1) と (2) により，内積の右側のベクトルに関する分配については次が成立：

$\boldsymbol{x}\cdot(b\boldsymbol{y} + b'\boldsymbol{y}') = \overline{b}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \overline{b'}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}')$.[a]

(3) (**正定値性**) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geqq 0$ かつ $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

[a] これは計算の時，よく注意しなくてはならない規則である.

実ベクトル空間の場合と同様に抽象化を行う.

定義 24.2. 複素ベクトル空間 V に対して (1)–(3) の性質を持つ関数 $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ を V の**（エルミート）内積**という. また，$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とおいて $\boldsymbol{x}$ の**長さ**という.
内積をもつ複素ベクトル空間を**（複素）計量ベクトル空間**という.

以下 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と書く.

[*233] この節では，複素数の絶対値や複素共役という概念を自由に使う. それらは簡単に定義できるが， 幾何的な意味を伴って理解するためには複素平面を導入した方が良い. 24.5 節に説明を書いておいた.

例 24.2. 実閉区間 $[a,b]$ 上の複素関数 $f(x)$ を $f(x)=p(x)+iq(x)$ ($p(x)$ は実部，$q(x)$ は虚部) と書くとき，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b p(x)+i\int_a^b q(x)dx$ と定義する．

$Q_n=\{n$ 次以下の複素係数多項式$\}$ において，$a<b$ なる実数に対して，

$$\varphi\left(f(x)\,,g(x)\right):=\int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x\ \left(f(x),g(x)\in Q_n\right)$$

とおくと，これは Q_n におけるエルミート内積になる.

$\because$

(i) 複素関数の積分の定義により，

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

が確認できる．

(ii) $\int_a^b \overline{F(x)}\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x}$ から従う.

(iii) $\int_a^b f(x)\,\overline{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ から従う.

練習問題 24.1.
$n\times n$ 行列全体の複素ベクトル空間を M とする． $A,\ B\in M$ に対して $A\cdot B:=\mathrm{tr}\left({}^t\!A\bar{B}\right)$ とおくと，これは M 上のエルミート内積になることを示せ.

24.2 シュワルツの不等式と三角不等式

この（抽象的に定義した）内積について，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の標準的内積について成立していた三角不等式やシュワルツの不等式が成立することを見る．以下, 主に複素ベクトル空間の（エルミート）内積を考える．

準備として $t\in\mathbb{C}$ に対して $\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\|^2$ を計算しておく.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})\ &\underset{(1)}{=}\ \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})+t\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})\\ &\underset{(1),(2)}{=}\ \|\boldsymbol{x}\|^2+\bar{t}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}+t\bar{t}\,\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &\underset{(2)}{=}\ \|\boldsymbol{x}\|^2+\bar{t}\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\right)+t\overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}+|t|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2.\end{aligned}$$

これはいつでも ≥ 0 であることに注意.

定理 24.1. (1) (**シュワルツの不等式**)$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqq\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$. 等号成立条件「$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}$，または $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{y}$ の複素数倍になる.」

(2) (**三角不等式**)$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$. 等号成立条件「$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}$，または $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{y}$ の 0 以上の実数倍になる.」

(1) は，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}$ のときは自明，それ以外のときは，上の準備において，$t=-\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ と置けば分かる．(2) は上の準備において，$t=1$ とすれば分かる（(1) も使う）．

注意 48. V が実ベクトル空間の時，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$ であり, 定理 24.1 (1) により, $\boldsymbol{o}$ でない $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に対して $-1\leqq\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}\leqq 1$．よって $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$ となる $\theta\in[0,\pi]$ が存在．角度が定義できるのを保証するのが，シュワルツの不等式に他ならない．

24.3 正規直交基底

この節の内容は簡単であるが，内積の有用性を示しており大変重要である．

注意 48 において， 複素ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の場合は，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$ とは限らないので，二つのベクトルに対していつでも角度が定められるわけではない．しかし， 次のように直交関係は定義できて，これが内積を有用なものにしている大きな理由の一つである．

定義 24.3.

- $\boldsymbol{o}$ でない $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ が**直交**する $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0\,(\iff\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}=0)$．
- $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k\neq\boldsymbol{o}$ は，各 $i\neq j$ で $\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j=0$ となる時，**直交系**という．さらに各 i で $\|\boldsymbol{v}_i\|=1$ ならば，**正規直交系**という．

注意 49 (便利な記号). $\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ とおく．$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ が正規直交系 $\iff$ $\forall i,\ j,\ \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j=\delta_{ij}$ と書ける．

（正規）直交系の利点（元を辿れば内積を導入する利点でもある）を述べる（定義の系）．

系 24.1. 直交系 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ は一次独立.

証明. $x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{o}$ として， この式と各 $\boldsymbol{v}_i$ との内積を取れば，直交関係より $x_i=0$ が分かる． □

定義 24.4.
系 24.1 より, $\dim V=n$ の時，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_n$ なる直交系を見つければ, それは基底になる．これを**直交基底**という． さらに, $\|\boldsymbol{v}_i\|=1$ $(1\leqq i\leqq n)$ ならば**正規直交基底**という.

正規直交基底の利点は，その基底による一次結合の係数が内積で計算できるという事である．

系 24.2. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の正規直交基底とする． $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表す時，$x_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i$ である．(**注意**: $x_i = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}$ ではない.)

また，内積も標準内積として計算ができる（以下，この事実は非常によく使う）[*234].

系 24.3. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の正規直交基底とする．$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{w} = y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ と表す時，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$ が成り立つ.

24.4　シュミットの直交化法

このように, 正規直交基底というのは優れた基底であるが，いつ存在するのか？実はいつでも存在する．というのは，任意の基底から出発して，それを正規直交基底に修正することができるからである.

定理 24.2.
V を計量ベクトル空間とする時，正規直交基底が存在する． より具体的には $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ なる V の基底が与えられた時，これを出発点として，次の方法で正規直交基底を構成することができる（**シュミットの直交化法**）.

(1) $\boldsymbol{e}_1 := \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ とおく．$\|\boldsymbol{e}_1\| = 1$ である.

(2) 次に $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1$ とおく（**注意:** $(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)$ を $(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)$ としてはいけない！）．この時 $\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0$ である． $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は一次独立より $\boldsymbol{e}'_2 \neq \boldsymbol{o}$. よって $\boldsymbol{e}_2 := \frac{1}{\|\boldsymbol{e}'_2\|}\boldsymbol{e}'_2$ とおける．$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0, \|\boldsymbol{e}_2\| = 1$ である.

(3) さらに $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2$ とおく．$\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ である． $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次独立より $\boldsymbol{e}'_3 \neq \boldsymbol{o}$. よって $\boldsymbol{e}_3 := \frac{1}{\|\boldsymbol{e}'_3\|}\boldsymbol{e}'_3$ とおける．$\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0, \|\boldsymbol{e}_3\| = 1$ である.

(4) この操作を繰り返していくと，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ なる正規直交系が得られる．$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の数が $\dim V$ と一致するので，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は基底である（系 24.1 と定義 24.4 を参照）.

この定理は上の構成法を見ればそれがそのまま証明にもなっている.

練習問題 24.2. 次のベクトルをシュミットの直交化法で正規直交化せよ.

[*234] 標準内積を抽象化して内積を定義 したが，正規直交基底を取ることで（取れることは 24.4 節を参照）また標準内積に戻ってきたというわけである.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

練習問題 24.3. P_2 を 2 次以下の実係数多項式の実ベクトル空間とする． $f \cdot g := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ が P_2 の内積となることを見た．この内積に関して，P_2 の基底 $1,\ x,\ x^2$ をシュミットの直交化法で正規直交化せよ．

P_n において， $F_k(x) := \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\ (k = 0, 1, \ldots, n)$ なる k 次多項式を考えると，これは P_n の基底となる．これらは， $f \cdot g := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ なる内積に関して直交していることが部分積分法による積分の計算で確認できる．この直交基底 $F_0(x), \ldots, F_n(x)$ は，$1,\ x, \ldots, x^n$ からシュミットの直交化法によって得られる正規直交基底と，定数倍を除いて一致する（$n = 2$ の場合に確認してみよ．一般の場合は 下記の注意を参照）． $L_k := \frac{1}{2^k k!} F_k(x)$ を**ルジャンドルの多項式**と言う．

注意 50. シュミットの直交化法には次のような一意性がある：

定理 24.2 の状況で考える． $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ を V の正規直交基底で，各 i に対して， $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_i$ の生成するベクトル空間は， $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ の生成するベクトル空間と一致するとする（$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ はこの性質を満たしていることに注意）． このとき，実は， $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ は $\pm\boldsymbol{e}_1, \ldots, \pm\boldsymbol{e}_n$ に一致する． ここで，$\pm$ は $+$ か $-$ のいずれかという意味である．

実際，$\boldsymbol{f}_i$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ の一次結合で書けるが， $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i$ の決め方より，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i$ の一次結合でも書ける． その係数を $\boldsymbol{f}_1, \ldots$ と順に決めていけば，結局，$\boldsymbol{f}_1 = \pm\boldsymbol{e}_1, \ldots$ となっていくことが確かめられる．

この一意性を使うと， ルジャンドルの多項式によって得られる直交基底が， $1,\ x, \ldots, x^n$ からシュミットの直交化法によって得られる正規直交基底と，定数倍を除いて一致することが分かる． 実際， L_k は k 次式であり， $L_0, \ldots, L_k$ で生成されるベクトル空間と $1, \ldots, x^k$ で生成されるベクトル空間と一致しているからである（練習問題 14.2 参照）．$1,\ x, \ldots, x^n$ にシュミットの直交化法を実行するのは， $n = 2$ で分かるように，結構，面倒な計算を必要とする．それが，上のような微分を用いた $F_k(x)$ の定義式で 一気に与えられてしまうのは驚くべきことである．それを支えているのは，上記の一意性である点をよく味わってもらいたい．

24.5 付録：複素数の一般事項 (特に複素平面)

ここで複素数の基本的な話を少ししておく．

複素数とは**虚数単位** i $(i^2=-1)$ によって $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ と表される数. a を**実部**, b を**虚部**と言う. 複素数全体を $\mathbb{C}$ で表す. 複素数には次のように加法と 乗法が定まっている.

$$\textbf{加法}\ (a+ib)+(c+id):=(a+c)+i(c+d).$$

$$\textbf{乗法}\ (a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

乗法については, $i^2=-1$ と分配法則が成り立つためにこうならなくてはならない. $\alpha=a+ib$ に対して, $\overline{\alpha}=a-ib$ とおき, これを α の**共役**という.

<u>**練習問題**</u> **24.4.** $\alpha=a+ib$ に対して, $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$ を示せ. また, $\alpha\neq 0$ のとき, $\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}$ を示せ.

<u>**練習問題**</u> **24.5.** $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$ を示せ.

複素数 $x+iy$ を点 (x,y) と対応させることにより, 複素数全体を座標平面の点全体と同一視できる. このように考えた座標平面を**複素平面**と呼ぶ. このとき, x 軸は実数全体に対応するから**実軸**, y 軸は純虚数全体に対応するから**虚軸**と呼ばれる.

複素平面において, 複素数の加法と乗法は幾何的な意味を持つ. まず, 加法は平面ベクトルとしての足し算に他ならない. ちなみに複素数に実数をかけるのは, 平面ベクトルとしてのスカラー 倍に他ならない. こうして複素数全体は (実) ベクトル空間とも見なすことが出来る.

$\alpha=a+bi$ に対し $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$ を α の**絶対値**といい, $|\alpha|$ で表す. これは, 複素平面における原点からの距離に他ならない.

<u>**練習問題**</u> **24.6.** 次を示せ.[*235]

- [・]$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ (三角不等式)
- [・]$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$ (中線定理)

<u>**練習問題**</u> **24.7.** $|z-1|=|z-2|=1$ となる複素数 z を求めよ.[*236]

乗法の幾何的意味を考えるためには 複素数の極表示を導入するのがよい. $\alpha\neq 0$ に対して, 実軸の正の部分からはかった角 θ を α の **偏角**といい, $\arg\alpha$ で表す. このとき,

$$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表せる. これを α の**極表示**という.[*237] 乗法の幾何的意味であるが, α,β を 2 つの複素数とし, $\begin{matrix}\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)\\ \beta=|\beta|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\end{matrix}$ と表しておく. すると,

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=|\alpha||\beta|\{(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)\}\\&=|\alpha||\beta|\{(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\}.\end{aligned}$$

[*235]平面ベクトルの問題に翻訳して考えるとよい.
[*236]同じく平面ベクトルの問題に翻訳して考えるとよい.
[*237]0 に対しては適当に 偏角を決めておく (例えば 0) と決めておくと便利.

つまり, $\alpha\beta$ を α に β をかけると見ると,

α は絶対値 (原点からの距離) が $|\beta|$ 倍され, 反時計周りに φ 回転される

ことになる. このように複素数のかけ算というのは代数的には単なる定数倍だが, 幾何的には定数倍と回転を意味しているのである.

例 **24.3.** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (ド・モアブルの公式).
$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$(オイラーの公式) とおくと, $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ となり, 指数法則の拡張と見れる. 実際, 複素べきの指数関数というのを定義することができてこれは正当化される.[*238]

練習問題 **24.8.** $z^5 = 1$ を解け. また, その結果とド・モアブルの公式より, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ.[*239]

練習問題 **24.9.** 正五角形の対角線と一辺の長さの比を求めよ. また, その一辺の長さを 1 とするとき, 内接円, 外接円の半径を求めよ.

練習問題 **24.10.** 次を示せ: m, n 互いに素 $\Longrightarrow$1 の原始 m 乗根[*240]と原始 n 乗根の積は原始 mn 乗根.

24.6 話題：フーリエ級数について

エルミート内積を考える１つの動機として，フーリエ級数の話をする．

複素数に値を持つ実数上の関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ で何回でも微分ができ [*241]，かつ，$f(x+1) = f(x)$ という周期境界条件を満たすもの全体の集合を V とする． V は複素ベクトル空間になる． V の元として，$\cos 2\pi x, \sin 2\pi x$ があるが，これらをまとめて，$\mathbf{e}(x) := \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$ を考えた方がよい． わざわざ複素数値の関数を考えているのはこのためでもある．その利点は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{e}(x) = 2\pi i\mathbf{e}(x)$$

となって微分に関するふるまいが $\cos 2\pi x, \sin 2\pi x$ 単独よりもすぐれていることである (実部と虚部を取れば，$\cos 2\pi x, \sin 2\pi x$ の微分も回復することに注意)．例 24.2 と同様に，$f, g \in V$ に

[*238] 詳しくは微分積分の教科書 (授業) に譲るが, 本来は次のように考える. 複素数 z に対して, $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ と定義する. 右辺はすべての複素数に対して収束することが分かる. また, z が実数のときは通常の指数関数と一致することも分かる. この定義から, $e^z e^w = e^{z+w}$ も従う. 一方で, 複素数 z に対して, $\sin z = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ と定義する. これらについても, 右辺はすべての複素数に対して収束し, z が実数のときは通常の三角関数と一致することが分かる. これらの定義により, $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ が分かる.

[*239] 答 $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}i, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}i$ (複号同順)

[*240] m 乗して初めて 1 になる複素数のこと.

[*241] 実部と虚部に分ければ微分は容易に定義できる

対して，$f \cdot g := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ とおくと，これは V のエルミート内積を定める．次は容易に確かめられる．

$$\mathbf{e}_m(x) := \mathbf{e}(mx) = \cos 2\pi mx + i \sin 2\pi mx$$

とおくとき，

$$\mathbf{e}_m(x) \cdot \mathbf{e}_n(x) = \delta_{mn}.$$

すなわち，$\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \cdots, \mathbf{e}_m(x), \cdots$ (∞ 個ある) は正規直交系をなしている．このような正規直交基底が取れるというのも，複素数に値を持つ関数を考える理由の一つである．

次は自明ではないが成立する．

定理 24.3. すべての $f \in V$ は $f = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathbf{e}_m \quad (\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 < \infty)$ という形に唯 1 通りに書ける． また，

$$a_m = f \cdot \mathbf{e}_m = \int_0^1 f(x)\mathbf{e}_{-m}(x)dx$$

が成立する． これを f の**フーリエ展開**とよび，a_m を**フーリエ係数**という．

これは，$\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \cdots, \mathbf{e}_m(x), \cdots$ が（正規直交）基底であるということを示しているわけではないが，それに近い性質を言っている．

$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 < \infty$ という条件が必然的であることを見ておく．

$f = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathbf{e}_m$ と書けたとすると，$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$ であるが，

$$\|f\|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathbf{e}_m \cdot \overline{a_n \mathbf{e}_n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2$$

[*242] より，$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 < \infty$ を得る． $a_m = f \cdot \mathbf{e}_m$ も同様に確かめられる．

例 24.4. 定理を利用して，$g \in V$ を与えたとき，

$$a_0 \frac{\mathrm{d}^d f}{\mathrm{d}x} + \cdots + a_{d-1} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + a_d = g \tag{24.1}$$

を満たす $f \in V$ をフーリエ展開の形で求めてみる． まず，$g = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \mathbf{e}_m \quad (\sum_{m=-\infty}^{\infty} |g_m|^2 < \infty)$ とフーリエ展開しておく． $f = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \mathbf{e}_m$ が (24.1) を満たすとき $\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_m}{\mathrm{d}x} = 2\pi i m \mathbf{e}_m$ に注意する

[*242] 項別積分の議論が必要

と，(24.1) の左辺は $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) f_m \mathbf{e}_m$ と書ける[*243]．ただし，$F_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k (2\pi i m)^{d-k}$ とおいた．このとき，$\forall m, F(m) \neq 0$ を仮定しておく．等式 $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) f_m \mathbf{e}_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \mathbf{e}_m$ において，フーリエ展開の一意性より，$g_m = F(m) f_m$ が成立する．よって，$f_m = \frac{g_m}{F(m)}$ として，f のフーリエ係数が求まった．本当は，この f_m に対して，$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \mathbf{e}_m$ が V に属すること，つまり，$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{g_m}{F(m)} \right|^2 < \infty$ と，$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{g_m}{F(m)} \mathbf{e}_m$ が周期 1 で何度でも微分できる関数であることを確認しなくてはならないが，ここでは略す.

例 24.5. 複素数に値を持つ周期 2π の連続関数全体を W とする．V と同様 W についても定理と類似の結果が成立する．ただし，W においては，$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ というエルミート内積を考える．また $\mathbf{e}_m$ のかわりに $\cos mx + i \sin mx$ を考える．ここではこれを $\mathbf{e}_m$ と書く．微分可能性を落としたことで応用範囲が広がる．

$y = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ を周期 2π の関数として拡張したものを $y = F(x)$ としよう．$F(x)$ をフーリエ展開する．$F(x) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathbf{e}_m$ とおくと，

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathbf{e}_{-m} dx = \begin{cases} (-1)^m \frac{2}{m^2} & m \neq 0 \\ \frac{1}{3}\pi^2 & m = 0 \end{cases}$$

が確かめられる (各自 check せよ)．$a_m = a_{-m}$ に注意．よって，

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \mathbf{e}_m + a_{-m} \mathbf{e}_{-m}) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos mx. \end{aligned}$$

これに $x = \pi$ を代入すると (左辺) $= \pi^2$,(右辺) $= \frac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ となる．こうして有名な**オイラーの公式**

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る．

[*243] 項別微分の議論が必要.

問題のヒント・答.

練習問題 24.2 の答：(1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$. (2) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\dfrac{i}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(2) の解答まず

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

とおく．次に

$$\boldsymbol{e_2'} = \boldsymbol{v_2} - (\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{e_1})\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2i\\-2i\\i\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{e_2'}}{\|\boldsymbol{e_2'}\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2i\\-2i\\i\end{pmatrix}$$

とおき，さらに

$$\boldsymbol{e_3'} = \boldsymbol{v_3} - (\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{e_1})\boldsymbol{e_1} - (\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{e_2})\boldsymbol{e_2} = \frac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e_3} = \frac{\boldsymbol{e_3'}}{\|\boldsymbol{e_3'}\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

とおく．以上より正規直交基底 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ を得る．

練習問題 24.3 の答：$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})$.

解答：$\boldsymbol{f_1} = 1, \boldsymbol{f_2} = x, \boldsymbol{f_3} = x^2$ とおく． まず

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{f_1}{(f_1, f_1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

次に

$$\boldsymbol{e_2'} = \boldsymbol{f_2} - (\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{e_1})\boldsymbol{e_1} = x - 0 = x$$

$$\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{e_2'}}{\|\boldsymbol{e_2'}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

とおき，さらに

$$\boldsymbol{e_3'} = \boldsymbol{f_3} - (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_1})\boldsymbol{e_1} - (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_2})\boldsymbol{e_2} = x^2 - \frac{1}{3} - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3})$$

とおく． 以上より正規直交基底 e_1, e_2, e_3 を得る．

25　直交分解と随伴写像

この章では，26 章の準備として，タイトルにある二つの重要な考え方を導入する．

25.1　直交分解

定義 25.1. V を計量ベクトル空間とする．V の部分ベクトル空間 W に対して，

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{すべての } W \text{ の元 } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対して } \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = 0\}$$

とおく．$W^{\perp}$ のことを W の**直交補空間**という．

命題 25.1.
上の設定で $V = W \oplus W^{\perp}$ が成立する．つまり V の元は W の元と $W^{\perp}$ の元の和としてただ一通りに書ける．また, $W = (W^{\perp})^{\perp}$ である (つまり W と $W^{\perp}$ の関係は対等).

証明. W，$W^{\perp}$ は，V の内積を制限することで，計量ベクトル空間になっていることに注意する．

ステップ１．シュミットの直交化法によって，W の正規直交基底を 延長した V の正規直交基底を構成する．ここが証明のキーステップである．

まず，W の基底を選ぶ．W が計量ベクトル空間であるので，シュミットの直交化法（定理 24.2）により，その基底は W の正規直交基底に修正可能である．この W の正規直交基底を延長して，V の基底を構成する．今度は，この V の基底にシュミットの直交化法を適用して，V の正規直交基底を得るが，この時，W の正規直交基底の部分はもとのままである（シュミットの直交化法の定義により分かる）．こうして，W の正規直交基底を延長した V の正規直交基底を得ることが出来た．これを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と書く．ただし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が W の正規直交基底である．

ステップ２．$\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $W^{\perp}$ の正規直交基底になることを示す．

$\boldsymbol{w}$ を $W^{\perp}$ の任意の元とする． $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底であるから，$\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ と一次結合で一通りに書ける． ここで $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in W$ であるから，これらと $\boldsymbol{w}$ の内積は 0 である．よって，$a_1 = \cdots = a_m = 0$ が分かる（系 24.2）．これは，$W^{\perp}$ の任意の元 $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合として一意に書けることを言っているので，$\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $W^{\perp}$ の基底を成すことが分かった．

ステップ3． $V = W \oplus W^{\perp}$ を示す[*244].

まず，$V = W + W^{\perp}$ を示す．$\boldsymbol{v}$ を V の任意の元とする．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底であるから，$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$ と一次結合で一通りに書ける．ここで，$b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m \in W$, $b_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n \in W^{\perp}$ より， $\boldsymbol{v} \in W + W^{\perp}$ である．$\boldsymbol{v}$ は任意であったから，これで $V = W + W^{\perp}$ が分かった.

次に $W + W^{\perp}$ が直和であることを示す． $\boldsymbol{w}_1 \in W$, $\boldsymbol{w}_2 \in W^{\perp}$ に対して，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{o}$ が成り立つとき $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{o}$ を示せばよい．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$， $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はそれぞれ W, $W^{\perp}$ の基底であるので $\boldsymbol{w}_1 = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$, $\boldsymbol{w}_2 = c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ と一次結合で書ける．$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m + c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$ であるが，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底であるので，$c_1 = \cdots = c_n = 0$ となる． よって $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{o}$ が分かった.

ステップ4． $W = (W^{\perp})^{\perp}$ を示す.

まず，W の任意の元は，$W^{\perp}$ の定義により， $W^{\perp}$ の任意の元と直交するので， $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ が成り立つ．次に，$\boldsymbol{w}$ を $(W^{\perp})^{\perp}$ の任意の元とする． $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合で表すとき，系 24.2 により， $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の係数は 0 である．よって，$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の一次結合であるから， W に属す．これで $W \supset (W^{\perp})^{\perp}$ も分かった． □

命題 25.1 の証明は，$W \subset V$ が与えられたとき， $W^{\perp}$ を求める方法も与えている.

練習問題 25.1. P_2 を二次以下の実係数多項式のなす実ベクトル空間とする. P_2 の内積を $f \cdot g := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ で定める. $f_1(x) = 2 - 3x$, $f_2(x) = x$ とおく． (1)f_1 と f_2 の生成する P_2 の部分ベクトル空間を W_1 とする. $W_1^{\perp}$ の正規直交基底を求めよ.

(2)f_2 の生成する P_2 の部分ベクトル空間を W_2 とする. $W_2^{\perp}$ の正規直交基底を求めよ.

命題 25.1 のような V の分解表示は, 次の直交分解の特別な場合である.

定義 25.2.
V を計量ベクトル空間とする. V の部分ベクトル空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ があって,

(1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$, すなわち V の元は $W_1 \sim W_k$ の元の和として唯一通りに書ける, かつ,

(2) $i \neq j$ の時 W_i と W_j は直交する, つまり任意の $\boldsymbol{w}_i \in W_i$, $\boldsymbol{w}_j \in W_j$ に対して $\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{w}_j = 0$

が成立するとき, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ という表示を**直交分解**という.
これを $V = W_1 \perp W_2 \perp \ldots \perp W_k$ と書く.

練習問題 25.2. 練習問題 19.3 で定義した M, S, A について, $n \times n$ 行列を成分を全て縦に並べて n^2 次元ベクトル空間と見て内積をとることにより M に内積を入れる. この内積について $M = S \perp A$ であることを示せ.

[*244] ステップ 1， 2 を踏まえれば，あとは 19 章で行った議論で済む.

25.2 随伴変換

定理 25.1.
V を計量ベクトル空間とする．このとき任意の線形変換 $f: V \to V$ に対し，次を満たすような線形変換 $f^*: V \to V$ が**唯一つ**存在する:

$$\text{すべての } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \text{ に対して } f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot f^*(\boldsymbol{w})$$

f^* のことを f の**随伴変換**という．

証明. まず，上の性質を満たす線形変換 f^* が少なくとも一つ構成できることを示す． V の正規直交基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とし，それに関する f の表現行列を A とする[*245]． $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を V の任意の元として， $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i$， $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{v}_i$ と書き， $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とおく． 表現行列の性質より， $f(\boldsymbol{v})$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合で書いた時の係数を縦に並べてできるベクトルは $A\boldsymbol{x}$ に等しい． このとき，

$$f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tA\overline{\boldsymbol{y}}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{({}^t\overline{A}\boldsymbol{y})}$$

が成り立つ，ここで， 最初の等号は， $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が正規直交基底であることから， 系 24.3 により従う． $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する表現行列が ${}^t\overline{A}$ である線形変換を f^* とおく．すると， $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{v}_i$ は f^* によって $\sum_{i=1}^n z_i \boldsymbol{v}_i$ に移る，ただし， $\boldsymbol{z} = {}^t\overline{A}\boldsymbol{y}$， $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ と置いた． よって再び，系 24.3 により， ${}^t\boldsymbol{x}\overline{({}^t\overline{A}\boldsymbol{y})} = \boldsymbol{v} \cdot f^*(\boldsymbol{w})$ が成り立つ．こうして，$f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot f^*(\boldsymbol{w})$ が成立することが分かった．

このように，f^* は V の正規直交基底を一つ選んで定めるが，実は基底の取り方には依らないことが， 次のように，上とは別の議論で示すことが出来る．すべての $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して，g_i $(i = 1, 2)$ がともに $f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot g_i(\boldsymbol{w})$ を満たす線形変換とする．すると， $\boldsymbol{v} \cdot (g_1(\boldsymbol{w}) - g_2(\boldsymbol{w})) = 0$ となる． 特に，$\boldsymbol{v}$ として $g_1(\boldsymbol{w}) - g_2(\boldsymbol{w})$ を選ぶことも出来る．すると，$(g_1(\boldsymbol{w}) - g_2(\boldsymbol{w})) \cdot (g_1(\boldsymbol{w}) - g_2(\boldsymbol{w})) = 0$ であるから，$g_1(\boldsymbol{w}) - g_2(\boldsymbol{w}) = 0$ でなければならない（内積の正定値性）． $\boldsymbol{w}$ は任意であるから， これは $g_1 = g_2$ を意味する． □

f と f^* の関係によって定まる線形変換のクラス (正規変換) が次章の主役である．

[*245] このように，一つ 正規直交基底を選んでから構成する．

25.3　計量ベクトル空間の線形変換と行列

V を計量ベクトル空間, $f : V \to V$ を線形変換とする. 定理 25.1 の証明にあるように, 計量ベクトル空間については, f の表現行列を考えるとき, V の正規直交基底によるものを考えることが多い. 次は実質, 定理 25.1 の証明中で示されている.

命題 25.2.
$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を V の正規直交基底, B をそれに関する f の表現行列とする. このとき f^* の表現行列は ${}^t\overline{B}$ である.

証明. 定理 25.1 の証明において, f^* を, V の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を一つ選んで作ったが, 結局, 正規直交基底の選び方に依らないことを示した. よってどの正規直交基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ から出発して, 定理 25.1 の証明の方法で f^* を構成しても, すなわち, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ に関する f の表現行列を B とするとき, ${}^t\overline{B}$ を表現行列に持つ線形写像として f^* を定義しても結局同じものが得られる. よって 命題 25.2 が成り立つ. □

$n \times n$ 行列 A に対して, ${}^t\overline{A}$ のことを A^* で表し, A の**随伴行列**と呼ぶ. 記号上, 転置は左肩に t を書くが, 随伴行列は右肩に $*$ を乗せる（紛らわしいので注意）.

問題のヒント・答. 問題 25.1 の答： (1) 例えば x^2 を加えた基底を考えて正規直交化すると，$\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$. (2) 例えば $x, 1, x^2$ なる基底を正規直交化すると，$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2-\frac{1}{3})$.

26　正規変換

26.1　直交固有分解可能性

ここで目標としてきた固有値問題の話と計量ベクトル空間の話を結びつけて，この講義の大団円に向かいたい.

V を (複素) 計量ベクトル空間, $f: V \to V$ を線形変換として， V は f に関する固有基底を持つとする． 定理 19.1 より，f の固有空間 $V_{\alpha_1}, \cdots, V_{\alpha_k}$ を用いて $V = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_k}$ と書ける（この状況を固有分解可能と呼んだ）が，この章で考えたいのは,

この分解が直交分解になるのはいつか？

という問題である（注意 52 も参照のこと）．

正確に述べ直しておく.

Q. V を計量ベクトル空間, $f: V \to V$ を線形変換とする．V が f の固有空間に**直交**分解されるとき，V は f に関して**直交固有分解可能**であると言う.
f が直交固有分解可能となるための f の必要十分条件は何か?

この **Q** には, 驚くべき単純で意外な解答がある.

定理 26.1. V が f に関して直交固有分解可能 $\Longleftrightarrow$

$$f \circ f^* = f^* \circ f, \text{ つまり } f \text{ とその随伴変換 } f^* \text{ が交換可能.} \tag{26.1}$$

定義 26.1. 関係式 (26.1) を満たす線形変換を**正規変換**という.

注意 51. f が正規であることと， ある正規直交基底に関する f の表現行列 A が $AA^* = A^*A$ を満たすことは同値である (命題 25.2 参照).

$AA^* = A^*A$ を満たす正方行列 A を**正規行列**という[*246].

正規変換の特に重要な例が，$n \times n$ 正規行列 A の定める $f_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ である．ただし，ここで，$\mathbb{C}^n$ は標準内積によって計量ベクトル空間と見る． このとき，$\mathbb{C}^n$ の標準基底は標準内積に関して正規直交基底であり，A は標準基底に関する f_A の表現行列であるから， 確かに f_A は正規変換である.

注意 52. V が f の固有空間に直交分解されることと， f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在することは同値である[*247]．この証明は，定理 19.1 の証明に直交性の議論を付け

[*246]余談であるが，昨年度の期末試験で正規行列の定義を聞いたところ， 正則行列の定義を答えた人が少なからずいた.

[*247]後者の方が問題の動機づけとしては分かりやすいだろう． $f \circ f^* = f^* \circ f$ との同値性を示すためには前者の方が適している.

加えるだけで 得られる． 実際， f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在すれば, V が f の固有空間に直交分解されることは，定理 19.1 の $\Rightarrow$ の証明とほぼ同じである（確認してみよ）．

逆については， シュミットの直交化法によって 各固有空間に正規直交基底が取れることに注意する（ここは新しい）． よって， V が f の固有空間に直交分解されると仮定すると，各固有空間の正規直交基底を並べれば V の正規直交基底になる（定理 19.1 の $\Leftarrow$ の証明をなぞって確認してみよ）．

定理 26.1 の証明について，V が f の固有空間に直交分解されていると仮定するとき，$f \circ f^* = f^* \circ f$ が成り立つことをチェックするのは容易である． 実際，注意 52 を踏まえて，固有ベクトルからなる正規直交基底を取ると， それに関する f の表現行列 A は対角行列である． この対角成分を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする．すると，f^* の表現行列は $A^* = \overline{{}^t A}$ であり（命題 25.2)，これは対角成分を $\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n$ とする対角行列である．よって明らかに $AA^* = A^*A$ が成り立ち， これは $f \circ f^* = f^* \circ f$ を意味する．

以下で，$f \circ f^* = f^* \circ f$ を仮定して，V が f の固有空間に直交分解されていることを示す[*248]. その証明の鍵となるのが次の命題である.

命題 26.1. 交換可能な線形変換には共通の固有ベクトルが存在する，つまり，V を (必ずしも計量の入っていない) ベクトル空間, f, g を $V \to V$ なる線形変換とする．もし $f \circ g = g \circ f$ ならば f と g に共通な固有ベクトルが存在する．つまり, ある $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ があって $f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w}, g(\boldsymbol{w}) = \beta \boldsymbol{w}$ となる.

証明. 固有空間という考え方の有効性がよく分かる証明である． また，系 18.1 も役に立つ．

V_α を f の一つの固有空間とする． 仮定 $f \circ g = g \circ f$ を使って V_α の任意の元が g によって V_α に移されることを示す．実際，任意の $\boldsymbol{v} \in V_\alpha$ に対して，

$$f \circ g(\boldsymbol{v}) = g \circ f(\boldsymbol{v}) = g(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha g(\boldsymbol{v})$$

であるから， $g(\boldsymbol{v}) \in V_\alpha$ である．よって，$g|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to V_\alpha$ なる線形変換が定まる．系 18.1 により，この線形変換の固有ベクトル $\boldsymbol{w}$ が存在する． これは g の固有ベクトルでもある． また, $\boldsymbol{w} \in V_\alpha$ より，f の固有ベクトルでもある． □

$f \circ f^* = f^* \circ f$ から V が f の固有空間に直交分解されていることを示して，**定理 26.1 の証明**を終えよう．

$\dim V$ に関する帰納法で証明する． $\dim V = 1$ のとき， 任意の線形変換の固有空間は V 自身であるので， 明らかに固有空間に直交分解されている．

$k := \dim V \geq 2$ と仮定し， $k-1$ 次元以下のベクトル空間については主張が正しいとする． 命題 26.1 により，f と f^* の共通の固有ベクトル $\boldsymbol{w}$ が存在する． $f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w}$, $f^*(\boldsymbol{w}) = \beta \boldsymbol{w}$ と

[*248] その証明は，19 章の方法とは全く異なる．

書いておく．W を $\boldsymbol{w}$ で生成されるベクトル空間とする． $V = W \perp W^{\perp}$ が成り立つのだった（命題 25.1）．ここで，$f(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$， $f^{*}(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$ が成り立つことを示す．これが帰納法の適用のための鍵である． f についてのみ示す（f^{*} についても同様である）． $\boldsymbol{z} \in W^{\perp}$ とするとき，$f(\boldsymbol{z}) \in W^{\perp}$ を言えばよい．これは,

$$f(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{z} \cdot f^{*}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{z} \cdot \beta \boldsymbol{w} = \overline{\beta}(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w}) = 0$$

となって確かに成り立っている．

よって， f, f^{*} は $W^{\perp} \to W^{\perp}$ なる線形写像を定める． $g := f|_{W^{\perp}}$ とおくと，$g^{*} = f^{*}|_{W^{\perp}}$ が分かる[*249]．よって，$f \circ f^{*} = f^{*} \circ f$ により $g \circ g^{*} = g^{*} \circ g$ が分かる．よって帰納法の仮定より，$W^{\perp}$ は g の固有空間に直交分解される． $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ を $g\colon W^{\perp} \to W^{\perp}$ の相異なるすべての固有値， W_{α_i} を α_i に対する固有空間とすると， $W^{\perp} = W_{\alpha_1} \perp W_{\alpha_2} \perp \cdots \perp W_{\alpha_l}$ となっている． よって， $V = W \perp W^{\perp}$ により,

$$V = W \perp W_{\alpha_1} \perp W_{\alpha_2} \perp \cdots \perp W_{\alpha_l} \tag{26.2}$$

となる． $f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w}$ とおいていたが， どの α_i も α と一致しなければ，(26.2) が V の f に関する直交固有分解である． もし，ある α_i が α と一致するならば，固有値の順序を並べ替えることで， $\alpha = \alpha_1$ としても一般性を失わない． すると（W と W_{α_1} はひとまとめにして）

$$V = (W \perp W_{\alpha_1}) \perp W_{\alpha_2} \perp \cdots \perp W_{\alpha_l}$$

が f に関する直交固有分解である．以上により定理の証明が完結した． □

次の二つの節で，正規変換の重要な例を二つ挙げる．

26.2　エルミート変換

[*249] f の随伴写像の $W^{\perp}$ への制限が，f の $W^{\perp}$ への制限の随伴写像に等しいということである．

定義 26.2. V を計量ベクトル空間とする．線形変換 $h : V \to V$ が**エルミート変換**であるとは

$$h = h^*$$

が成立するということと定義する．言い換えれば，

$$\text{すべての } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \text{ に対して } h(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot h(\boldsymbol{w})$$

が成立するということである．
また，これは，V の正規直交基底に関する h の表現行列 H が

$$H = H^*$$

を満たすという事と同値である（注意 51 を参照）． この性質を満たす行列を**エルミート行列**という．
H が実行列であるとき，$H = H^*$ は $H = {}^tH$ ということ，つまり， 実エルミート行列とは実対称行列に他ならない．

容易に分かる通り, エルミート変換は正規変換である．これは量子力学で大切な役割を果たす（量子力学では自己共役作用素と呼ばれている）．

正規変換のなかでエルミート変換を特徴づけることができる．

定理 26.2. V を計量ベクトル空間, $f : V \to V$ を正規変換とする．このとき

$$f \text{ がエルミート} \Leftrightarrow f \text{ の固有値が全て実数.}$$

証明. f が正規という前提の下で考えているので， 定理 26.1 より，f の固有ベクトルからなる正規直交基底が取れる．それに関する f の表現行列 A は固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を対角成分とする対角行列で，f^* の表現行列 A^* は固有値 $\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}$ を対角成分とする対角行列である．よって，$A = A^*$ は $\alpha_i = \overline{\alpha_i}$，つまり，すべての α_i が実数であるということに他ならない． □

練習問題 26.1. $h = -h^*$ を満たす線形変換 を**歪エルミート変換**という．f を定理 26.2 と同様に固有値で特徴付けよ.[*250]

26.3 ユニタリー変換

[*250] 実歪エルミート行列のことを（実）**交代行列**という．交代行列と，下で定義する直交行列の関係については，26.6 節を参照.

定義 26.3. V を計量ベクトル空間とする．$u : V \to V$ が**ユニタリー変換**であるとは

$$u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{id}$$

が成立するということと定義する（この定義から明らかなようにユニタリー変換は 正規変換である）．
これは，V の正規直交基底に関する u の表現行列 U が

$$UU^* = U^*U = E$$

を満たすことと同値である． この性質を満たす行列のことを **ユニタリー行列**という．
V が実計量ベクトル空間であるとき，ユニタリー変換を**直交変換**と言う． これは V の正規直交基底に関する u の表現行列 U が

$$U^tU = {}^tUU = E$$

を満たすということに他ならない．この性質を満たす行列 を**直交行列**と言う．

注意 53. ユニタリー変換の条件は，実は $u^* \circ u = \mathrm{id}$ のみでよい．実際， V を計量ベクトル空間，$u : V \to V$ が $u^* \circ u = \mathrm{id}$ を満たす線形変換とする．V の正規直交基底を取り，それに関する表現行列を U とすると， $U^*U = E$ が成り立つ． ここで，定理 6.2 により，$UU^* = E$ も成り立つ． これを線形変換の条件に翻訳すれば $u \circ u^* = \mathrm{id}$ となる．
ここでの説明から分かるように，ユニタリー行列の条件も $U^*U = E$ のみでよい．

練習問題 26.2. 直交行列の行列式は ± 1 であることを示せ． ユニタリー行列については何が言えるか？

ユニタリー変換は色々な言い換えを持つ．言い換えることによって 意味がはっきりしてくるであろう．
まず，定理 26.2 と同様に， 正規変換のなかでユニタリー変換を特徴づけることができる（証明は同様なので練習問題とする）．

定理 26.3. V を計量ベクトル空間, $f : V \to V$ を正規変換とする．このとき

$$f \text{ がユニタリー} \Leftrightarrow f \text{ の全ての固有値の絶対値が } 1.$$

次の言い換えによってユニタリー変換の意味が最もはっきりするであろう[*251]．

[*251] この言い換えにおいては，表だって随伴変換 u^* が出てこない．

定理 26.4. 以下は同値：

(i) u はユニタリー変換.

(ii) u は内積を保つ，すなわち，任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対して $u(\boldsymbol{v}) \cdot u(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ となる.

(iii) u は長さを保つ，すなわち 全ての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\|u(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$ となる.

証明. (i) を仮定して (ii) を導く． 随伴変換の性質より，任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対して

$$u(\boldsymbol{v}) \cdot u(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot u^* \circ u(\boldsymbol{w})$$

であるが，u はユニタリーと仮定しているので，$u^* \circ u = \mathrm{id}$, よって，$u(\boldsymbol{v}) \cdot u(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$.

また，この議論の逆をたどれば，(ii) から (i) を導くことも出来る． 定理 25.1 の後半の議論を参照せよ（注意 53 も使う）.

(iii) は (ii) の特別な場合であるから，(ii) から (iii) が従うのは自明である.

最後に (iii) から (ii) を導く.

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u},$$

$$\|\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$$

により，

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2i}(i\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\|^2 - (i-1)\|\boldsymbol{u}\|^2 - (i-1)\|\boldsymbol{v}\|^2)$$

となり，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ をいくつかのベクトルの長さで書き表すことが出来るから， (iii) により，$u(\boldsymbol{u}) \cdot u(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ が導かれる. □

$\mathbb{C}^n$ を標準内積によって，計量ベクトル空間と見る． 注意 51 と定義 26.3 を踏まえれば， $n \times n$ 行列 U に対して， $f_U \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ がユニタリ変換であることと U がユニタリー行列であることは 同値である． よって，この状況に定理 26.4 を適用すれば次を得る（U の条件として述べてある）.

系 26.1. 以下は同値：

(i) U はユニタリー行列.

(ii) U は標準内積を保つ，すなわち，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して $U\boldsymbol{x} \cdot U\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ となる.

(iii) U は長さを保つ，すなわち 全ての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ となる.

$\mathbb{R}^n$ を標準内積によって，計量ベクトル空間と見れば，直交行列について同様の言い換えを得る.

ユニタリー行列のより単純な言い換えが 系 26.1 の系として得られる．

系 26.2. $n \times n$ 行列 U がユニタリー行列 $\Leftrightarrow$ U の列ベクトルが $\mathbb{C}^n$ の標準内積に関する正規直交基底.
$n \times n$ 実行列 U が直交行列 $\Leftrightarrow$ U の列ベクトルが $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する正規直交基底.

証明. 系 26.1 の条件 (ii) は，基本ベクトル同士の内積が U で変わらない，つまり，

$$\text{(ii)}' \quad U\boldsymbol{e}_i \cdot U\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

と同値である（(ii) からこの条件がでるのは自明． 逆は，任意のベクトルを標準基底の一次結合で書いてみればよい）． (ii)' がまさにこの系の主張に他ならない． □

余談であるが，ユニタリーは人名ではなく，形容詞の unitary（単位的）である． その名前の由来は，この系から来ていると思われる．

次の問題はある意味，ユニタリー行列とエルミート行列は同じくらいあるということをいっている．

練習問題 26.3.

(1) $n \times n$ 行列 A がエルミート行列であるとき $E + iA$ は正則であることを示せ.

(2) (1) の A に対して $U = (E - iA)(E + iA)^{-1}$ が定義できる. U はユニタリー行列であり -1 を固有値に持たないことを示せ.

エルミート行列 A をユニタリー行列 U に対応させるこの操作を**ケーリー変換**と言う.

(3) 逆に U を -1 を固有値に持たないユニタリー行列とすると, $E + U$ は正則になるが, このとき $A = -i(E - U)(E + U)^{-1}$ はエルミート行列であることを示せ.

これはエルミート変換の話をユニタリー変換の話に帰着させるのに用いられる (フォン · ノイマンによるアイデア, [志賀 29 講] 参照).

練習問題 26.4. 行列式が 1 の 3×3 直交行列は 1 を固有値に持つことを示せ.

練習問題 26.4 を使うと， 行列式が 1 の 3×3 直交行列 U の定める線形変換 $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は，固有値 1 の固有ベクトルを軸とする回転であることが分かる． 実際，$\boldsymbol{v}_3$ を固有値 1 の固有ベクトルとする．$\boldsymbol{v}_3$ の長さは 1 に調節しておく． $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が正規直交基底となるように $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を選ぶ．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で生成される平面を L とする．定理 26.4 により，u はベクトルの内積を変えない．よって，$\boldsymbol{v}_3$ に直交するベクトルは，u によって再び $\boldsymbol{v}_3$ に直交するベクトルに移る．言い換えれば，L を L に移す．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する u の表現行列は $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}$ と言う形である（A は 2×2 行列）．ここで $\det U = 1$ より $\det A = 1$ である．さらに，u は L 内のベクトルの内積を変えないから，u の L への制限 $u|_L$ は直交変換であり，よって，正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する表現

行列 A は直交行列である．さらに $\det A=1$ により A は回転行列である．$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と書けば，u が $\boldsymbol{v}_3$ を軸とし，$\boldsymbol{v}_1$ から $\boldsymbol{v}_2$ への角度 θ の回転であることが分かる．

この続きとして，26.5 節の話題を読むとよい（(有限）群論への ちょっとした入門）．

26.4　ユニタリー対角化

$n\times n$ 行列 A が正規行列であるとする．注意 51 により，これは，f_A が（$\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積に関して）正規変換であるということと同値である．従って，$\mathbb{C}^n$ には，A の固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する（定理 26.1，注意 52)．それを並べて得られる行列を D とすると，$D^{-1}AD$ は対角行列である．一方，系 26.2 により，D はユニタリー行列である．以上まとめると，正規行列 A はユニタリー行列を用いて対角行列にできることが分かった．このことを正規行列は**ユニタリー対角化可能**であるという．

D がユニタリー行列より，D^{-1} は D^* に等しいことにも注意． $D^{-1}AD$ を D^*AD と書いておいた方が便利なことが多い．

練習問題 26.5. $A=\begin{pmatrix}1 & \omega & \omega^2\\ \omega^2 & 1 & \omega\\ \omega & \omega^2 & 1\end{pmatrix}$ がエルミート行列であることを示せ，ただし，ω は $x^2+x+1=0$ の解である（$\omega^2=\bar{\omega}$ に注意).

A をユニタリー対角化せよ．

練習問題 26.6. $B=\begin{pmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & i\\ 1 & -i & 0\end{pmatrix}$ がエルミート行列であることを示せ,

B をユニタリー対角化せよ．

練習問題 26.7. $n\times n$ 行列 A が正規行列であり $A^m=0$ を満たすならば $A=0$ を示せ．

練習問題 26.8. A がエルミート行列で $A^3=E$ を満たすとき，$A=E$ であることを示せ．

練習問題 26.9. A を $n\times n$ 行列とする．$A^*=A^2+A$ が成立するとき A は正規行列であることを示せ．またその固有値の可能性を求めよ．

26.5　話題：正多面体の対称性

練習問題 26.4 に関連する話を少し続けてみよう．$\mathbb{R}^3$ において，重心が原点に一致する正四面体を T とする．原点を通る直線を軸とする回転で T を保つものは，恒等写像，T の向かい合う辺の中点を結ぶ直線を軸とする π 回転（辺が 6 本より 3 つある），頂点とその対面の重心を

結ぶ直線を軸とする $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ 回転（軸は４本ある）のいずれかである（図を書いて考えてみよ）. これらは T の回転対称性と呼ばれる．回転対称性すべての成す集合を G_T とする．G_T は次の３性質を持つ：（１）恒等写像を含む,（２）$u_1, u_2 \in G_T$ ならば，その合成 $u_1 \circ u_2$ も G_T に含まれる.（３）$u \in G_T$ ならば $u^{-1} \in G_T$. ここで,（１）,（３）のチェックは容易である.（２）について， $u_1 \circ u_2$ が T を T に移すことは自明である．$u_1 \circ u_2$ が再び原点を通る直線を軸とする回転であることは， 練習問題 26.4 と行列式の積公式（定理 6.5）によって確かめられる（実際，各 $u_1, u_2 \in G_T$ に対して $u_1 \circ u_2$ がどのような回転になるか，調べてみると面白い）．（１）,（２）,（３）は G_T が群になっているということを言っている.[*252] さらに G_T は有限個の元からなるから有限群と呼ばれる． まとめると，T の回転対称性全体の集合は有限群である． これは，重心を原点とする正多面体（正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体）の回転対称性についても言えることである.

興味深いのは，この逆に近いことが言えることである． $\mathbb{R}^3$ において，原点を通る直線を軸とする回転全体の集合を SO(3) と書く．これも（１）,（２）,（３）と同様の性質を持つので群である（有限群ではもちろんない）．このとき，SO(3) に含まれる有限群は，重心が原点にある正多面体の回転対称性の群か，重心が原点にある正多角形の回転対称性の群か，重心が原点にあり，‘表裏’ のある正多角形の回転対称性の群[*253]のいずれかである． 興味を持った人は， 上記アームストロングによるの群論の教科書の１９章を読むとよい.

<u>練習問題</u> **26.10.** 正四面体 T の頂点に番号を振ることで，G_T は群として置換全体のなす群 S_4 の偶置換全体の部分群に一致することを示せ．正六面体 S の対角線に番号を振ることで（四本ある），その回転対称性の群 G_S は群として S_4 に一致することを示せ.

26.6　話題：実 3×3 行列のケーリー変換の変種

練習問題 26.3 により，エルミート行列をユニタリー行列に対応させるケーリー変換を考えたが，実 $n \times n$ 行列に対して，次のような変種がある． A を交代行列, $x \in \mathbb{R}$ として，$R := (xE - A)^{-1}(xE + A)$ とおく．ただし，A が正則であれば，x は任意として，A が正則でなければ,[*254] $x \neq 0$ とする（交代行列の固有値は 0 または純虚数であるから，これが， $xE - A$ が逆行列を持つ必要十分条件である）．このとき，R は行列式が 1 の直交行列になる． また，R が固有値 -1 を持つのは $x = 0$ のときに限り，このとき $R = -E$ である.

逆に固有値 -1 を持たない行列式 1 の直交行列 R と $x \in \mathbb{R}$ に対して， $A := x(R - E)(R + E)^{-1}$ とおくと，A は交代行列となり，$x \neq 0$ のとき，これは上記の変換の逆を与える.

[*252] 群の定義については，アームストロング著「対称性からの群論入門」(シュプリンガー社) などの群論の教科書，あるいは 4.2 章を参照のこと.

[*253] これは，正 m 角形をその重心を 中心にぐるぐる回すだけでなく，m が偶数ならば対頂点を結んだ軸と対辺の中点を結んだ軸それぞれのまわりの π 回転，m が奇数ならば頂点と対辺の中点を結んだ軸のまわりの π 回転も考えるという事である．これらの回転は，平面で考えていれば鏡映であって，回転ではないことに注意．回転としては， ３次元で初めて回転として現れるものである.

[*254] n が奇数であれば，交代行列は正則でないことが分かる．練習問題 4.8 参照.

$n=3$ の場合に,

$$A=\begin{pmatrix}0 & \lambda & \mu\\ -\lambda & 0 & \nu\\ -\mu & -\nu & 0\end{pmatrix}$$

として, $R:=(xE-A)^{-1}(xE+A)$ を計算してみると,

$$R=\frac{1}{x^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\begin{pmatrix}x^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 & 2x\lambda-2\mu\nu & 2x\mu+2\lambda\nu\\ -2x\lambda-2\mu\nu & x^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & 2x\nu-2\lambda\mu\\ -2x\mu+2\lambda\nu & -2x\nu-2\lambda\mu & x^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2\end{pmatrix}$$

を得る（オイラーによる行列式 1 の直交行列のパラメーター表示）. この表示は, $x^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0$ であれば意味を持っている. 例えば, $x=\lambda=\mu=0,\ \nu\neq 0$ とすると, $xE-A$ は正則でないが, $R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ となる（固有値 -1 を持つが $-E$ ではないので上の対応からは外れる）. 実は, 行列式 1 の直交行列はすべてこのようなパラメーター表示を持つことが示される. この表示は x,λ,μ,ν の比だけで決まる. n 個の実数の組全体の集合は $\mathbb{R}^n$ であったが, $(0,\cdots,0)$ を除く n 個の実数の組の比全体の集合を $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ と書き, $n-1$ **次元（実）射影空間**と呼ぶ. n 個の実数の組を考えても比だけを見るので自由度が n でなく $n-1$ になっている. $n=4$ の場合, 上記のパラメーター表示によって, $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ から行列式 1 の直交行列全体の集合 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ への全単射が得られていることが分かる.

26.7 話題：2×2 ユニタリー行列と 4 元数

系 26.2 により, 2×2 ユニタリー行列は, $\begin{pmatrix}a & -b\\ \alpha\bar{b} & \alpha\bar{a}\end{pmatrix}$ $(a,b,\alpha\in\mathbb{C},\ |a|^2+|b|^2=1,\ |\alpha|=1)$ という形をしている. 例えば, 電子の角運動量スピンを記述する パウリ行列 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ はすべて（行列式 -1 の）ユニタリー行列になっている.

以下では, 行列式が 1 の 2×2 ユニタリー行列を考える. それは $\begin{pmatrix}a & -b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbb{C},\ |a|^2+|b|^2=1)$ という形をしており, 2×2 **特殊ユニタリー行列**と呼ばれる. さらに, $a=p+iq,\ b=r+is$ $(p,q,r,s\in\mathbb{R})$ と書けば,

$$A=p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\ (p^2+q^2+r^2+s^2=1)$$

となる． つまり， 2×2 特殊ユニタリー行列全体は,

$$\text{単位行列 } E,\, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される実４次元ベクトル空間の中で，３次元球面をなす． また，E, I, J, K の間には,

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E,\, IJ = -JI = K$$

という関係式が成り立っている． この関係式により， E, I, J, K で生成される実４次元ベクトル空間に掛け算を決めることができる．これを**４元数（体）**という．

実は，複素数についても同様な捉え方が出来る．複素数 $p+iq$ に対して，実 2×2 行列 $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$（回転と拡大の合成を表す行列）を対応させると， 二つの複素数の和 $(p+iq)+(r+is)$，積 $(p+iq)(r+is)$ が，それぞれ，行列の和 $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$， 積 $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$ に対応することが分かる． こうして，和と積を込めて， 複素数全体（複素数体）を $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ なる行列全体と 同一視することができる．後者は,

$$\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

により，実２次元ベクトル空間である．

４元数体はハミルトンにより長い苦闘の末発見されたものである． ハミルトンは，長い間,複素数体が実２次元ベクトル空間であることから，実３次元ベクトル空間でこのような積構造を持つものを探し求めていたが 徒労に終わった．今となっては，そのようなものが存在しないことは，固有値問題の考え方によって簡単に示せる．

定理 26.5. V を n 次元実ベクトル空間であって，さらに V の元の間に積が定まっており，それが実（二重）線形性を満たすとする． すなわち，

(1) $x, y \in V$ に対して，V の元 $x \cdot y$ が定まる（これを積という）．

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$ に対して， $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$ が成り立つ．

(3) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$ に対して， $z \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha(z \cdot x) + \beta(z \cdot y)$ が成り立つ．

また，V は積に関する単位元 e，すなわち， 任意の元 x に対して $x \cdot e = e \cdot x = x$ を満たす元を持つと仮定する．さらに，次の**可除性**を仮定する：
任意の 0 でない V の元 a と，任意の $b \in V$ に対して，

方程式 $xa = b$ がただ一つの解を持つ，かつ， 方程式 $ax = b$ がただ一つの解を持つ．

（複素数体，４元数体の積はいずれもこれらの性質を満たしている．４元数体のときを考慮して積の可換性は仮定しない.）
このとき，もし，n が奇数であれば，$V = \mathbb{R}$ となり，V の積は $\mathbb{R}$ の通常の積に限る．

証明. $a \in V$ に対して，a を左から掛けることによって，線形変換 $L_a \colon V \to V$ $(V \ni x \mapsto ax \in V)$ が定まる（積の性質（３）より）．n が奇数であるので，練習問題 26.4 と同じ考え方（固有多項式の次数が奇数ということが大切）により， L_a は実固有値 α を持つ．$v \in V$ をその固有ベクトルとすると，$av = \alpha v$ である．右辺を $(\alpha e) \cdot v$ と見なせば， 積の二重線形性により， $(a - \alpha e) \cdot v = 0$ となる．ところが，可除性により（$v \neq 0$ に注意）， $a - \alpha e = 0$，つまり，$a = \alpha e$ となる．a は任意の元であり，それが常に e の定数倍なので，V は１次元である． V の積の二重線形性から，それが $\mathbb{R}$ の積に一致することも分かる． □

さて， $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ のタイプの行列の行列式の積公式から 練習問題 6.6 にあるような２項２乗和２つの積を２項２乗和で表す公式が得られた． ４元数で同じことを考えてみよう．

練習問題 26.11. $\begin{pmatrix} p + iq & -(r + is) \\ r - is & p - iq \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p' + iq' & -(r' + is') \\ r' - is' & p' - iq' \end{pmatrix}$ を用いて，

$$\begin{aligned}(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)({p'}^2 + {q'}^2 + {r'}^2 + {s'}^2) = \\ (pp' - qq' - rr' - ss')^2 + (pq' + qp' + rs' - sr')^2 + \\ (pr' + rp' + sq' - qs')^2 + (ps' + sp' + qr' - rq')^2\end{aligned}$$

を示せ（４項２乗和２つの積を４項２乗和で表す公式）．

26.8　話題：正値変換

この節では，計量ベクトル空間の線形同型変換の基本をなすのが， エルミート変換とユニタリー変換であることを示す（練習問題 26.12）.

定義 26.4. 全ての固有値が正であるようなエルミート変換（定理 26.2 により 全ての固有値が正であるような正規変換と言っても同じこと）を**正値変換**という.

正規変換 $f\colon V \to V$ に対して，関数 $f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$ を用いて正値変換を言い換えることができる.

定理 26.6.
V を計量ベクトル空間とし，$f : V \longrightarrow V$ を正規変換とする． この時，f が正値変換 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して $f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} > 0$.

証明. f は正規なので，f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とする． 任意の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ を $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i$ と表すと，$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ であるから， $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が正規直交基底であることに注意すると，

$$f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|^2 \tag{26.3}$$

となる.

ここで，f が正値変換，つまり，すべての α_i が正だとすると， $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して，(26.3) より明らかに $f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} > 0$ である.

逆に 任意の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して $f(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} > 0$ であれば，(26.3) において，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_i$ と取れば，$\alpha_i > 0$ を得るから， f は正値変換である. □

練習問題 26.12 (極分解). V を計量ベクトル空間，$f : V \longrightarrow V$ を同型写像とする.

(1) $f^* \circ f$ は正値変換であることを示せ.

(2) $f^* \circ f = h^2$ となる正値変換が唯一つ存在することを示せ.

(3) $f \circ h^{-1}$ はユニタリー変換であることを示せ.

$u = f \circ h^{-1}$ とおくと，$f = u \circ h$ となっている．これを f の**極分解**という.

(4) f を (3) のようにエルミート，ユニタリー変換の合成で書く方法は一意であることを示せ.

(5) $V = \mathbb{C}$ の時，(3) の意味は何か？

(**練習問題 26.5** の略解) 以下詳しい計算は省いてあるので，必ず自分で計算して確かめてみること．

ユニタリー対角化のために必要なユニタリー行列 D は，固有ベクトルからなる正規直交基底を並べて得られる行列として得られる． $\Phi_A(t) = t^2(t-3)$ は容易に計算できる．$t=0$ の固有空間の基底として $\begin{pmatrix} -\omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\omega^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これをシュミットの直交化法で正規直交化すると，$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\omega^2 \\ -\omega \\ 2 \end{pmatrix}$ なる固有値 0 の固有空間の正規直交基底を得る．$t=3$ の固有空間の正規直交基底として $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．これらを並べて，$D = \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{\sqrt{2}} & -\frac{\omega^2}{\sqrt{6}} & \frac{\omega^2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\omega}{\sqrt{6}} & \frac{\omega}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とおくと，D はユニタリー行列となり，$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

これも一つの答えだが，実は，もっときれいな解がある．まず，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ が固有値 0 の固有ベクトルである条件は，$x + y\omega + z\omega^2 = 0$ である．（行列の成分の様子から）固有値 0 の固有ベクトルとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が見つかる．これはきれいな固有ベクトルである．これと直交する固有値 0 の固有ベクトルの条件は，$x + y\omega + z\omega^2 = 0$ かつ $x+y+z=0$ である．これを解くと，$x = \omega z,\ y = \omega^2 z$ を得る．こうして，$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる固有値 0 の固有ベクトルを得る．これらを長さ 1 にすれば，$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる固有値 0 の固有空間の正規直交基底を得る．$t=3$ の固有空間の正規直交基底としては，上記の通り $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}$ を取る．これらを並べて，$D = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，D はユニタリー行列となり，$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

(**練習問題 26.6** の略解)

B がエルミート行列で正規行列であることは容易に確かめる．よって，B の固有ベクトルによる正規直交基底が存在する．まず固有値を求める．$\Phi_B(t) = (t-1)^2(t+2)$ なので，固有値は 1 と -2 である． $t=1$ の固有空間基底として $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これをシュミットの直交化法で正規直交化すると， $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}$ なる固有値 1 の固有空間の正規直交基底を得る．$t = -2$ の固有空間の正規直交基底として $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．これらを並べて、$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とおくと，D はユニタリー行列となり，$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる．

(**練習問題 26.7** の解)

A は正規行列なので，ユニタリー行列 D を用いて D^*AD と対角化できる． $(D^*AD)^m = D^*A^mD = 0(A^m = 0$ なので$)$．D^*AD が対角行列なので，その m 乗が 0 行列というのは，$D^*AD = 0$ となる．左から D を，右から D^* をかけて，$A = 0$ ということがわかる．

(**練習問題 26.8** の解)

A はエルミート行列なので，正規行列であり，ユニタリー対角化可能である．A の固有ベクトルを並べて得られる行列を D として，対角した行列を M とする．つまり $D^{-1}AD = M$．$D^{-1}A^3D = (D^{-1}AD)^3 = M^3$， よって，$A^3 = DM^3D^{-1}$．$A^3 = E$ なので，$M^3 = E$．よって，M の対角成分は $x^3 - 1$ の解である．A はエルミート行列であり，$D^{-1}AD$ は A の固有ベクトルについての表現行列なので，M の対角成分は固有値であり，実数にならないといけない，よって $M = E$ になる．$A = DMD^{-1} = DED^{-1} = E$．

(**練習問題 26.9** の略解)

まず，$AA^* = A(A^2 + A) = A^3 + A^2 = (A^2 + A)A = A^*A$ より A は正規行列．

A は正規行列なので，あるユニタリー行列 D があって， $B := D^*AD$ が対角行列になる（上で注意したように $D^{-1} = D^*$ である）．その対角成分を左上から順に $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とする．$A^* = A^2 + A$ を D^*, D ではさむと， $D^*A^*D = D^*(A^2 + A)D$．ここで，左辺について $B^* = (D^*AD)^* = D^*A^*(D^*)^* = D^*A^*D$ に注意すると，左辺は，対角成分が左上から順に $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n$ である対角行列である．右辺は $D^*(A^2 + A)D = (D^*AD)^2 + D^*AD = B^2 + B$ により，対角成分が左上から順に $\alpha_1^2 + \alpha_1, \ldots, \alpha_n^2 + \alpha_n$ である対角行列である． よって，各 i について，$\overline{\alpha}_i = \alpha_i^2 + \alpha_i$ が成り立つ．一般に $\overline{\alpha} = \alpha^2 + \alpha$ を満たす 複素数を求めると $\alpha = 0, -1 \pm i$ である．よって，求める条件は，各 α_i が $0, -1 \pm i$ のいずれか．

27　終わりに

最後に，この講義ノートで述べられなかったことのうち，是非，２章で挙げた参考文献などを参照して自習してほしいことを記しておく．

述べられなかった大きなものの 1 つは，２次型式の一般論である． その特別な場合を２次曲線の標準形を求める問題として 13.2 節で扱っているが，２次型式についての重要な一般的結果であるシルベスターの慣性法則については 全く触れていない．この点については，上記の参考文献にも書いてあるが，もう少し踏み込んで学びたい人には，

リー群の話　佐竹一郎著（日本評論社）

の１０章がお勧めである．この本は，教科書のようにがっちり書かれておらず，読み物風なので読みやすいかもしれない．

索 引