少子高齢化・年金・自然利子率

—異質な家計を導入した OLG モデルによる自然利子率分析—*

慶應義塾大学　経済学部
廣瀬康生研究会 12 期生
又木啓充 †

2026 年 1 月 29 日

概要

少子高齢化社会は、自然利子率を減少させるのか、また、年金制度はその影響を緩和できるのか。中長期の経済安定化のために自然利子率の水準だけでなく変動要因についても把握する必要性がある。本稿では少子高齢化が自然利子率に与える影響について就業状態に異質性を認めた OLG モデルを導入しその一般均衡を計算することを通じて分析した。また、同モデルに年金制度を導入することを通じて、年金制度が自然利子率に与える影響についても同様に分析した。すると、人口変動と生命表を用いた分析では、少子化と長寿化はともに自然利子率を減少させた。それは家計の退職後に向けた予備的貯蓄や人口分布が変化し、資産を多くもつ高齢家計が相対的に多数を占めるからである。加えて年金制度について固定額を支払う国民年金とこれまでの所得に比例した年金額を支払う厚生年金を導入した分析では、国民年金は自然利子率を押し上げる一方で厚生年金は自然利子率を押し下げることが分かった。これは国民年金は将来の収入に関係なく受け取ることができる一方で厚生年金はこれまでの収入に比例する制度であり、結果として厚生年金は国民年金ほど家計の予備的貯蓄を減少させないからである。

Key words: 少子高齢化、自然利子率、年金制度、OLG モデル、異質な家計
JEL-classification: E12, H55, J11, C62

* 本稿は、2025 年度卒業論文のために作成したものである。本稿の作成にあたっては、廣瀬康生教授（慶應義塾大学）と廣瀬康生研究会 13 期生（慶應義塾大学）の方々から有益かつ熱心なコメントを頂戴した。ここに記して感謝の意を表したい。しかしながら、本稿にあり得る誤り、主張の一切の責任はいうまでもなく筆者個人に帰するものである。
† 慶應義塾大学経済学部 4 年

目次

1　はじめに

少子高齢化社会は、自然利子率を減少させるのか、また、年金制度はその影響を緩和できるのか。Wicksell (1896) で示されて以来、モデルごとの定義は異なるものの自然利子率は経済・物価に中立的な実質金利の水準として研究の対象となってきた。自然利子率の水準とその推移はマクロ経済において主に２つの理由から注目されている。１つは金融緩和の度合いを自然利子率と実質金利を比較することで判断するためである。例えば我が国では日本銀行が杉岡・中野・山本 (2024) ではじめて自然利子率の推計値を公表し、相応の幅をもってとしつつも、同水準を１つの根拠として政策金利が緩和的であると主張し続けてきた。2 つ目の理由は種々の経済事象や政策が自然利子率に与える影響を明らかにすることを通じて中央銀行の金融緩和余地の変動要因を明らかにするためである。特に 2008 年以降、多くの中央銀行は名目金利のゼロ金利制約に直面し、金融緩和の余地をどのように確保するかという議論は現在においても中央銀行に関する主要な課題である。そのような議論において自然利子率の上昇は資金需要の増加を通じて中央銀行に緩和余地を与えることになる。このような理由から、中長期の経済安定化のために自然利子率の水準だけでなく変動要因についても把握する必要性がある。

我が国の自然利子率に関して概観するとその水準に関しては 90 年代から一貫して減少したという点で多くの先行研究の結論は一致している (杉岡・中野・山本,2024)。一方で減少要因として少子高齢化を考慮したモデルは少ない。例えば、Goy and Iwasaki(2024)、Del Negro et al. (2017)、Imakubo・Kojima・Nakajima(2015)、Nakajima et al. (2023) など短期あるいは長期の実質金利の水準をもとに自然利子率を推定する時系列アプローチは推定される自然利子率の変動を実体経済の要因に分解できない。Okazaki・Sudo(2018) に代表される DSGE モデルは実体経済に関するデータをもとに推計する観点から自然利子率の変動要因分解が可能である。一方で、DSGE モデルの多くが代表的家計を想定したモデルであるため、少子化や長寿化に伴う家計の内生的な貯蓄行動を内生化しておらず結果として自然利子率への影響も分析できない。そのような中、少子高齢化や年金制度が自然利子率に影響を与えることを示唆する先行研究は多い。Sudo・Takizuka(2018) では過去 50 年間に生じた実質金利の低下幅 640 ベーシスポイントのうち、270 ベーシスポイント程度が、出生率低下による労働力人口の減少と長寿化に伴う予備的貯蓄といった人口動態の変化に起因することを主張している。また、年金に関しては Diamond(1965) 以来、年金制度が家計の過剰貯蓄を減少させ、消費の増加を通じて社会厚生を改善することが知られている。

このような背景から本稿では少子高齢化が自然利子率に与える影響について就業状態に異質性を認めた OLG モデルを導入しその一般均衡を計算することを通じて分析した。また、同モデルに年金制度を導入することを通じて、年金制度が自然利子率に与える影響についても同様に分析した。

結果を先取りすると、人口変動と生命表を用いた分析では、少子化と長寿化はともに自然利子率を減少させた。それは家計の退職後に向けた予備的貯蓄や人口分布が変化し、資産を多くもつ高齢家計が相対的に多数を占めるからである。加えて年金制度について固定額を支払う国民年金とこれまでの所得に比例した年金額を支払う厚生年金を導入した分析では、国民年金は自然利子率を押し

上げる一方で厚生年金は自然利子率を押し下げることが分かった。これは国民年金は将来の収入に関係なく受け取ることができる一方で厚生年金はこれまでの収入に比例する制度であり、結果として厚生年金は国民年金ほど家計の予備的貯蓄を減少させないからである。以下では第 2,3 節で分析に用いるモデルを導入する。第 4 節では一般均衡を求めるアルゴリズムを説明する。第 5,6 節では少子化、長寿化の仮定、年金制度の具体的な設計等シミュレーションの仮定を示す。これらの結果は第 7 節で考察する。第 8 節は結語である。

2　モデル 1

本稿が用いる１つ目のモデルは消費のみで効用を決定する異質な家計からなるモデルにこれまでの収入に関連ない同額の年金を支払う年金制度 (以下国民年金) を導入したモデルである。具体的には家計に 1. 資産、2. 就業状況、3. 年齢の３つの異質性を導入して議論する。このような家計が効用を最適化することで長寿化や年金といった将来の所得が若年時における消費に影響を与え、自然利子率への影響を分析することができる。以下では異質な家計、代表的最終財生産企業、年金制度を運用する政府、および均衡条件を順に説明する。

2.1　異質な家計

異質な家計は、労働者と企業家から構成される。この際、家計は期初に保有する現金資産 m、就業状態 s、年齢 t で区別される。すべての家計は消費財 C_t を購入することからのみ効用を得る。いま、３要素から定義される効用を $U(m,s,t)$ と表記するとき、家計の効用関数は以下のように表される。

$$U(m,s,t) = E_t \sum_{t'=t}^{o_d} \beta^{t'-\mathrm{t}} \frac{C_{t'}^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{1}$$

ここで、E_t は時点 t に得られる情報を条件とした期待オペレータ、$\beta \in (0,1)$ は主観的割引率、$\sigma > 0$ は異時点間代替の弾力性の逆数である。o_d は家計の寿命である。
家計の予算制約式は就業状態によって以下のように表される。

$$\begin{aligned} m_t &= (1+(1-\tau_r)r_{t-1})((1-\tau_m)m_{t-1} - (1+\tau_c)C(m_{t-1},e,t) + w) \\ m_t &= (1+(1-\tau_r)r_{t-1})((1-\tau_m)m_{t-1} - (1+\tau_c)C(m_{t-1},u,t)) \\ m_t &= (1+(1-\tau_r)r_{t-1})((1-\tau_m)m_{t-1} - (1+\tau_c)C(m_{t-1},r,t) + \psi w) \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，m_t は t 歳の資産、r_{t-1}：時点 $t-1$ から t にかけての利子率[*1]、τ_r は資本所得税率、τ_m は資産税率、τ_c は消費税率、$C(m_{t-1},s,t)$ は前期 m_{t-1} と就業状態 s と年齢 t で定義される消費政策関数、w は就業時の実質賃金率[*2]、ψ：年金の所得代替率である。
次に、各家計の状態はマルコフ連鎖に従うと仮定する。具体的には遷移行列 P を次の通り定義す

[*1] 本稿では自然利子率と一致すると仮定している
[*2] 本モデルでは就業時家計は１単位の労働を供給すると仮定する

る[*3]。すなわち、o_r を定年とし、それ以前は同じ遷移行列のもと、就業と失業を繰り返す。定年以降は就業にいたることはない。

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} p_{ee} & 1-p_{uu} & 0 \\ 1-p_{ee} & p_{uu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (1 \leq t \leq o_r - 1)$$

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (o_r \leq t)$$

2.2　代表的最終財生産企業

つぎに代表的財生産企業を導入する。財生産企業は資本 K に対するレンタル料 r と労働 L に対する費用である実質賃金率 w を所与として、利潤を最大化する資本、労働力を決定する。この際、生産関数は次とする。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

ここで A は全要素生産性である。

本モデルでは家計は賃金に関係なく一定の労働力を提供する。そのため、企業は投入資本についてのみ最適化し、その際、労働力について限界収益が実質賃金と一致するように賃金を設定すると仮定する。企業の名目利潤は

$$\Pi = Y - wL - rK \tag{4}$$

一階条件より、実質賃金 w と自然利子率 r は

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \tag{5}$$

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \tag{6}$$

2.3　政府

次に年金制度を運用する政府部門を導入する。年齢別の生存確率からなる生命表を $P_s = (p_1, \ldots, p_{o_d})$ とし、出生数成長率（人口成長率）を g_N とする。L_t を年齢 t の人口、L_1 を年齢 1 の人口とする、各年齢の人口は次式で与えられる。

$$L_t = L_1\,(1+g_N)^{-(t-1)} \prod_{j=1}^{t-1} p_j, \qquad t = 1, 2, \ldots, o_d. \tag{7}$$

このとき、市場の実質賃金率 w、年金の所得代替率 ψ のもとで、政府全体の年金支出 B は次の通り定まる。

$$B = \psi\, w \sum_{t=o_r+1}^{o_d} L_t \tag{8}$$

[*3] なお、計算の都合上実際にその経路をたどることのない場合 (例えば、定年退職以前の年金受給者の遷移) についても数値を割り当てている。

政府は年金支出について一定割合 α_F を政府基金 F の利払いを用いて行うと仮定する。このとき、政府が積み立てる必要がある政府基金 F の値は次の通りである。

$$F = \frac{\alpha_F B}{r} \tag{9}$$

このとき、政府基金利払いによらない年金支出 $(1-\alpha_F)B$ について 1. 消費税、2. 労働所得税、3. 資本所得課税、4. 資産課税のいずれかによって賄うと仮定する。

2.4 均衡条件

労働力 L と資本 K は次の通り集計される。

$$L \;=\; \sum_{t=1}^{o_d} L_t\bigl(1-U_t\bigr) \tag{10}$$

個々の家計は、年齢 $t \in \{1,\ldots,o_d\}$、就業状況 $s \in \mathcal{S}$、および資産グリッド上の資産水準 $m \in \mathcal{M}$ で定義される。状態 (m,s,t) にある家計の人口を $\mu(m,s,t)$ とする。このとき、資本[*4]は

$$K \;=\; \sum_{t=1}^{o_d}\sum_{s}\sum_{a\in\mathcal{M}} a\,\mu(a,s,t) \;+\; F \tag{11}$$

3 モデル 2

本稿が用いる 2 つ目のモデルは 1 つ目のモデルと比較して主に 2 つの点で異なる 1 点目が家計の効用が消費だけでなく労働によっても変化すること。2 点目が年金はこれまでの年収水準に比例するような制度 (以下厚生年金) に変更したことである。以下では異質な家計、代表的最終財生産企業、年金制度を運用する政府、および均衡条件を順に説明する。[*5]

3.1 異質な家計

異質な家計は、労働者と企業家から構成される。この際、家計は期初に保有する現金資産 m、就業状態 s、年齢 t、そして現時点で確定している年金給付の期待値の現在価値 v[*6]で区別される。すべての家計は消費財 C_t による正の効用と労働 H_t による負の効用を得る。いま、3 要素から定義される効用を $U(m,v,s,t)$ と表記するとき、家計の効用関数は以下のように表される。

$$U(m,v,s,t) = E_t \sum_{t'=t}^{o_d} \beta^{t'-\mathrm{t}} \left(\frac{C_{t'}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \eta\,\frac{H_{t'}^{1+\chi}}{1+\chi} \right) \tag{12}$$

[*4] この際、政府は政府基金を市場に貸し付けることで利払いを得ている仮定を想起し、市場全体の資本は各家計が保有する資産に政府基金を合算したものとするのが適切である。
[*5] モデル 1 と重複する箇所もあるがすべての部門を説明する。
[*6] 以下、これを責任準備金と呼ぶ。

ここで、E_t は時点 t に得られる情報を条件とした期待オペレータ、$\beta \in (0,1)$ は主観的割引率、$\sigma > 0$ は異時点間代替の弾力性の逆数である。 $\chi > 0$ は労働供給の弾力性の逆数である。η は労働の不効用に対するウエイトである。o_d は家計の寿命である。
家計の予算制約式は就業状態によって以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
m_t &= (1+r_{t-1})(m_{t-1} - C(m_{t-1}, v_{t-1}, e, t-1) + (1-\psi) w_e H(m_{t-1}, v_{t-1}, e, t-1)) \\
m_t &= (1+r_{t-1})(m_{t-1} - C(m_{t-1}, v_{t-1}, u, t-1) + (1-\psi) w_u H(m_{t-1}, v_{t-1}, u, t-1)) \\
m_t &= (1+r_{t-1})(m_{t-1} - C(m_{t-1}, v_{t-1}, r, t-1) + p(t, v))
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで，m_t は t 歳の資産、v_t は t 歳の責任準備金、r_{t-1}：時点 $t-1$ から t にかけての利子率[*7]、ψ は労働所得のうち将来受け取る年金のために積み立てる保険料率、$C(m_{t-1}, v_{t-1}, s, t-1)$ は前期資産 m_{t-1}、前期責任準備金 v_{t-1}、就業状態 s と年齢 $t-1$ で定義される消費政策関数、$H(m_{t-1}, v_{t-1}, s, t-1)$ は前期資産 m_{t-1}、前期責任準備金 v_{t-1}、就業状態 s と年齢 $t-1$ で定義される労働政策関数、w_e は就業時の実質賃金率、w_u は就業時の実質賃金率[*8]である。このとき、責任準備金 v_t は就業状態ごとに次の通りになる。

$$
\begin{aligned}
v_t &= (1+r)(v_{t-1} + \psi w_e H(m_{t-1}, v_{t-1}, e, t-1)) \\
v_t &= (1+r)(v_{t-1} + \psi w_u H(m_{t-1}, v_{t-1}, u, t-1)) \\
v_t &= (1+r)(v_{t-1} - p(t, v_{t-1}))
\end{aligned}
\tag{14}
$$

次に、各家計の状態はマルコフ連鎖に従うと仮定する。具体的には遷移行列 P を次の通り定義する[*9]。すなわち、o_r を定年とし、それ以前は同じ遷移行列のもと、就業と失業を繰り返す。定年以降は就業にいたることはない。

$$
P(t) \equiv \begin{pmatrix} p_{ee} & 1-p_{uu} & 0 \\ 1-p_{ee} & p_{uu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (1 \leq t \leq o_r - 1)
$$

$$
P(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (o_r \leq t)
$$

3.2 代表的最終財生産企業

次に代表的財生産企業を導入する。財生産企業は資本 K に対するレンタル料 r と労働 L に対する費用である実質賃金率 w を所与として、利潤を最大化する資本、労働力を決定する。この際、生産関数は次とする。

$$
Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{15}
$$

ここで A は全要素生産性である。

[*7] 本稿では自然利子率と一致すると仮定している

[*8] モデル 1 と異なり、失業でなく異なる実質賃金率としているのは失業を想定する際家計の効用最適化が複雑となるためである。

[*9] なお、計算の都合上実際にその経路をたどることのない場合 (例えば、定年退職以前の年金受給者の遷移) についても数値を割り当てている。

企業の名目利潤は

$$\Pi = Y - wL - rK \tag{16}$$

一階条件より、実質賃金 w と自然利子率 r は

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \tag{17}$$

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \tag{18}$$

3.3 政府

次に年金制度を運用する政府部門を導入する。モデル 2 において政府は現役世代から徴収した保険料の運用とそれに基づいた年金額 p の決定、およびその支給を行う。このとき、t 歳で責任準備金が V である家計の年金額 $p(t,V)$ は次の通りである。

$$p(t,V) = \frac{V}{\ddot{a}_t} \tag{19}$$

このとき、$\ddot{a}_t$ は t 歳加入期初払い終身年金原価である。
また、各家計から納付された保険料を運用することから、モデル 1 同様政府基金 F が各家計の責任準備金の和として次の通り定まる。

$$F = \sum_{t=1}^{o_d}\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{m\in\mathcal{M}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v\,\mu(m,v,s,t), \tag{20}$$

3.4 均衡条件

労働力 L と資本 K は次の通り集計される。

$$L \;=\; \sum_{t=1}^{o_d} L_t \tag{21}$$

$$K = \sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{m\in\mathcal{M}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{t=1}^{o_d} m\,\mu(m,v,s,t) \;+\; F. \tag{22}$$

4 一般均衡の計算手順

本節では各モデルの一般均衡について計算する手順を説明する。まず以下ではモデル 1,2 の一般均衡を求めるアルゴリズムの概略を示す。

4.1 アルゴリズムの概略

一般均衡を求めるアルゴリズム

1. 出生数成長率、生命表、実質賃金率、自然利子率、年金制度に関する初期値（給付や保険料率）を与える。
2. これらの初期値のもとで、各家計が将来を見据えて消費、労働に関する最適化問題を解く。
3. 家計の最適化の結果として、家計の資産遷移を計算する。
4. 家計の資産遷移に基づいて市場全体の資本と労働を集計する。
5. 集計された資本と労働を所与として、企業の最適化条件から新しい実質賃金率と自然利子率を計算する。同時に、政府についても、年金制度が収支均衡を満たすように、課税制度や給付水準を更新する。
6. 更新後の賃金率・利子率・年金制度の値が、それらの事前の値から十分小さな範囲しか変化していないかを確認し、変化が小さければ収束したとみなして計算を終える。変化がまだ大きければ、更新後の実質賃金率、自然利子率、年金制度を新たな初期値として 2 へ戻り、収束するまで反復する[*10]。

上記のアルゴリズムについて 1 については次節で詳解する。3,4 のうち家計の資産遷移行列の求め方は Appendix で詳解する。5 についてはモデルの定義式から明らかである。よって本節では特に 2. 家計家計の最適化行動について議論する。代表的家計を前提とする多くのモデルは定常状態を解析的に得ることができ、その解の一部として家計の効用を最大化する消費水準も得られる。一方で家計の異質性を考慮した場合、その解は必ずしも解析的に得ることはできない。例えば、本稿が仮定する有限期間の家計の場合、資産が多い家計は資産が少ない家計と比べてより多く消費することが可能であり、資産や就業状態、年齢で場合分けされる最適な消費[*11]を計算する必要がある。そこで、Aiyagari(1994) 以来、異質な家計の効用関数について今期の効用関数を今期の行動と来期の効用関数に分離した Bellman 方程式を解くことで家計の状態ごとの最適消費、および労働時間を計算する手法を採用されている。以下ではモデル 1,2 それぞれの Bellman 方程式を示すとともにこれを解くアルゴリズムとして EGM アルゴリズムを説明する。

[*11] 以下このような最適化されて消費、労働時間をそれぞれ状態に関する消費関数、労働関数と呼ぶ。

4.2　家計の最適化

モデル 1,2 それぞれの家計の効用関数は遷移行列を含めて次の通り定義できる。

モデル 1

$$U_1(m,s,t)=\max_{c_t}\left\{\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\beta\,p_t\sum_{s'\in\{e,u,r\}}P_{ss'}(t)\,U_1\bigl(m',s',t+1\bigr)\right\} \tag{23}$$

モデル 2

$$U_2(m,v,s,t)=\max_{c_t,h_t}\left\{\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}-\eta\,\frac{h_t^{1+\chi}}{1+\chi}+\beta\,p_t\sum_{s'\in\{e,u,r\}}P_{ss'}(t)\,U_2\bigl(m',v',s',t+1\bigr)\right\} \tag{24}$$

ベルマン方程式を解くアルゴリズムの１つとして価値関数反復法 (VFI) がある。VFI 法では定義域で離散化された価値関数 U_{t+1} を所与としてベルマン方程式から今期の価値関数 U_t を最大化するように c_t, h_t を選ぶことで価値関数を更新することで Bellman 方程式を解く。一方で VFI は 1 回の更新に時間がかかることから、本稿が扱うモデルであっても相当の計算時間を要する。そこで本稿では Carroll(2006) が示した Endogenous Grid Method（EGM）法を用いて Bellman 方程式を解く。EGM 法は、次期資産に関する外生グリッドを与え、その点における将来の限界効用の期待値から当期の最適消費を計算する。続いて，得られた当期消費と予算制約を用いて，当期の手元資産に対応する内生的なグリッドを逆算し，所望の資産グリッド上へ補間することで消費政策関数を得る。この手続きにより，VFI で必要となる各グリッド点での最大化（探索）計算を回避できるため，特に本稿のような大規模な状態空間を持つモデルにおいて計算時間を大幅に削減できる (carroll,2006)。EGM の詳細なアルゴリズムは Appendix で議論する。以下ではこれを実装するために必要なモデル 1,2 の家計の一階条件を求める。
ラグランジアンは次である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{s,t}=E_t\Biggl[&\left\{\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}-\lambda_t^s\Bigl(m_{t+1}-(1+r)\bigl(m_t-c_t+(1-\phi)h_tw^s\bigr)\Bigr)\right\}\\&+\sum_{\tau=t+1}^{o_d}\beta^{\tau-t}\textstyle\prod_{j=t}^{\tau-1}p_j\left(\frac{c_\tau^{1-\sigma}}{1-\sigma}-\lambda_\tau^s\Bigl(m_{\tau+1}-(1+r)\bigl(m_\tau-c_\tau+(1-\phi)h_\tau w^s\bigr)\Bigr)\right)\Biggr].\end{aligned} \tag{25}$$

今期の消費 c_t で微分して、

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dc_t}=c_t^{-\sigma}-\lambda_t^s\bigl(1+(1-\tau_r)r\bigr)(1+\tau_c) \tag{26}$$

効用を最大化するとき、次が成り立つ。

$$c_t^{-\sigma}=\lambda_t^s\bigl(1+(1-\tau_r)r\bigr)(1+\tau_c) \tag{27}$$

同様に来期の資産 m_{t+1} で微分して、

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dm_{t+1}} = -\lambda_t^s + \beta p_t E_t\Big[\lambda_{t+1}^s\big(1+(1-\tau_r)r\big)\Big] = 0 \tag{28}$$

式 (27) を式 (28) に代入して、

$$c_t^{-\sigma} = \big(1+(1-\tau_r)r\big)\beta p_t\, E_t\big[c_{t+1}^{-\sigma}\big] \tag{29}$$

モデル 2

モデル 2 について、責任準備金の予算制約が現役時と退職後で異なるため、それぞれ場合分けして解く。

現役時

ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{s,t} = E_t\Bigg[&\Bigg\{\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \eta\,\frac{h_t^{1+\chi}}{1+\chi} - \lambda_t^{1,s}\Big[m_{t+1} - (1+r)\big(m_t - c_t + (1-\phi)h_t w^s\big)\Big] \\ &\qquad - \lambda_t^{2,s}\Big[v_{t+1} - (1+r)\big(v_t + \phi h_t w^s\big)\Big]\Bigg\} \\ &+ \sum_{\tau=t+1}^{o_d} \beta^{\tau-t}\Big(\prod_{j=t}^{\tau-1} p_j\Big) \times \Bigg(\frac{c_\tau^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \eta\,\frac{h_\tau^{1+\chi}}{1+\chi} \\ &\qquad - \lambda_\tau^{1,s}\Big[m_{\tau+1} - (1+r)\big(m_\tau - c_\tau + (1-\phi)h_\tau w^s\big)\Big] \\ &\qquad - \lambda_\tau^{2,s}\Big[v_{\tau+1} - (1+r)\big(v_\tau + \phi h_\tau w^s\big)\Big]\Bigg)\Bigg].\end{aligned} \tag{30}$$

今期の消費 c_t について微分して

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dc_t} = c_t^{-\sigma} - \lambda_t^{1,s}(1+r) = 0 \tag{31}$$

来期の資産 m_{t+1} について微分して

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dm_{t+1}} = -\lambda_t^{1,s} + \beta p_t E_t\Big[\lambda_{t+1}^{1,s}(1+r)\Big] = 0 \tag{32}$$

式 (32) を式 (31) に代入して

$$c_t^{-\sigma} = (1+r)\beta p_t E_t\big[c_{t+1}^{-\sigma}\big] \tag{33}$$

今期の労働時間 h_t について微分して、

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dh_t} = -\eta h_t^{\chi} + \lambda_t^{1,s}(1+r)(1-\phi)w^s + \lambda_t^{2,s}(1+r)\phi w^s \tag{34}$$

来期の責任準備金 v_{t+1} について微分して、

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dv_{t+1}} = -\lambda_t^{2,s} + \beta p_t E_t\Big[\lambda_{t+1}^{2,s}(1+r)\Big] \tag{35}$$

退職後

ラグランジアンは次の通りである。このとき、年金支給額 $p(t,v)=\psi(t,v)v$ と対応する $\psi(t,v)$ を計算のために導入する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{s,t} = E_t\Bigg[\Bigg\{&\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \lambda_t^{1,s}\Big[m_{t+1}-(1+r)\big(m_t-c_t+\psi(t,v)v_t\big)\Big] - \lambda_t^{2,s}\Big[v_{t+1}-(1+r)\big(1-\psi(t,v)\big)v_t\Big]\Bigg\}\\ &+\sum_{\tau=t+1}^{o_d}\beta^{\tau-t}\Big(\prod_{j=t}^{\tau-1}p_j\Big)\times\Bigg(\frac{c_\tau^{1-\sigma}}{1-\sigma}\\ &\qquad -\lambda_\tau^{1,s}\Big[m_{\tau+1}-(1+r)\big(m_\tau-c_\tau+\psi(\tau,v)v_\tau\big)\Big]\\ &\qquad -\lambda_\tau^{2,s}\Big[v_{\tau+1}-(1+r)\big(1-\psi(\tau,v)\big)v_\tau\Big]\Bigg)\Bigg].\end{aligned} \tag{36}$$

来期の責任準備金 v_{t+1} について微分して、

$$\frac{d\mathcal{L}_{s,t}}{dv_{t+1}} = -\lambda_t^{2,s} + (1+r)\beta p_t E_t\Big[(1-\psi(t+1,v))\lambda_{t+1}^{2,s} + \psi(t+1,v)\lambda_{t+1}^{1,s}\Big] = 0 \tag{37}$$

これを整理して、

$$\lambda_t^{2,s} = (1+r)\beta p_t E_t\Big[(1-\psi(t+1,v))\lambda_{t+1}^{2,s} + \psi(t+1,v)\lambda_{t+1}^{1,s}\Big] \tag{38}$$

5　想定

本節では前節までに定義したモデルを用いて行うシミュレーションの想定を議論する。本稿では以下の 3 つの想定でそれぞれ自然利子率を計算した。

表 1: 各想定

要素	想定 1（少子高齢化）	想定 2（国民年金）	想定 3（厚生年金）
使用モデル	モデル 1	モデル 1	モデル 2
出生数成長率 g_N	$-5\% \sim 5\%$（ 0.2% 刻み）	$\{-3\%, 0\%, 3\%\}$	$\{-3\%, 0\%, 3\%\}$
生命表	1950–2020（5 年刻み）	2020 年固定	2020 年固定
年金制度	なし	国民年金あり	厚生年金あり
財源（選択）	—	いずれか 1 つ：	
		(1) 消費税 (2) 労働所得税 (3) 金融所得税 (4) 金融資産税	—
所得代替率 ϕ	—	$0\% \sim 100\%$（5% 刻み）	—
積立金割合 α_F	—	$0\% \sim 100\%$（5% 刻み）	—
保険料率 ψ	—	—	$0\% \sim 100\%$（5% 刻み）

想定 1 では年金制度を一切考慮せず、少子高齢化が自然利子率に与える影響の分析を目的としている。想定 2 では想定 1 に年金制度を設定し、所得代替率や年金積立金割合、課税制度が自然利子率に与える影響の分析を目的としている。想定 3 では厚生年金を導入し、厚生年金が自然利子率に与える影響の分析を目的としている。

6　カリブレーション

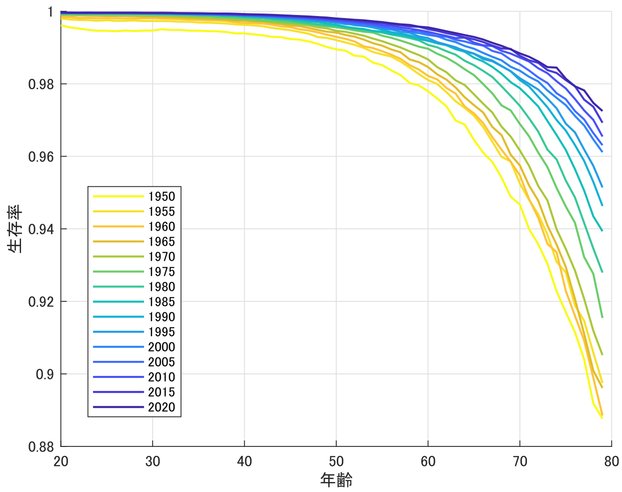

図 1: 年代ごとの生命表

生命表（図 1）に用いる生存確率は、厚生労働省『完全生命表』から各年齢における男女の平均生存率を取得した。

表 2: 主要パラメータのカリブレーション

記号	説明	値
α	資本分配率	0.36
σ	リスク回避度	2.0
χ	労働供給の弾力性の逆数	5
η	労働の不効用に対するウエイト	1
o_r	退職期	40
o_d	寿命期	60

表 2 に本稿で用いる主要パラメータのカリブレーションを示す。

7　分析結果

7.1　想定 1

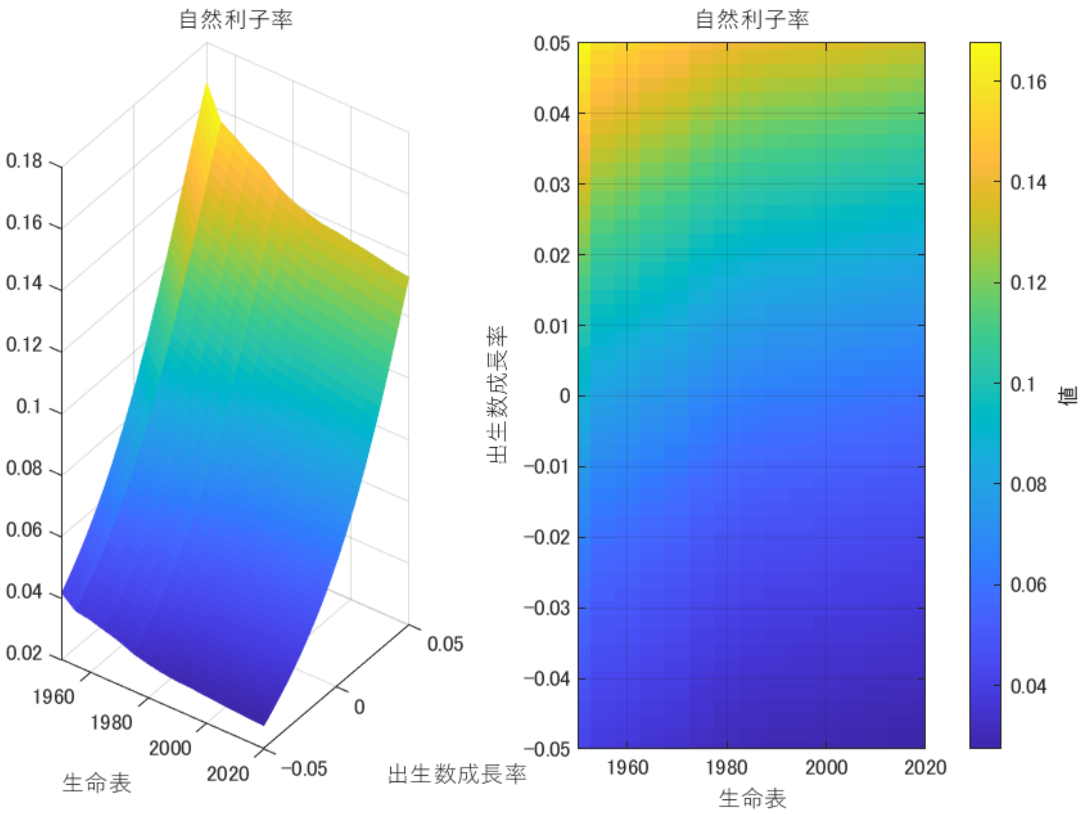

図 2: 少子高齢化と自然利子率

以下では想定 1 の計算結果をもとに少子高齢化が自然利子率に与える影響について議論する。図 2 は生命表を横軸、人口成長率を奥軸、自然利子率を縦軸とする自然利子率の計算結果である。図から明らかな通り、少子化と長寿化はともに自然利子率を減少させ、減少幅は最大で 10 ポイントに及ぶことがわかる。それぞれの影響をより具体的に議論すると、人口減少は非線形性があるものの、平均すると 1 ポイント出生数成長率が減少すると、自然利子率は 1.11 ポイント減少する。一方で長寿化の影響を見ると、1950 年、1985 年からそれぞれ 2020 年を比較すると、それぞれ約 1.3 ポイント 0.3 ポイント程度自然利子率が減少することがわかった。次に個別の資産分布の比較を通じて、自然利子率の減少要因を具体的に議論する。

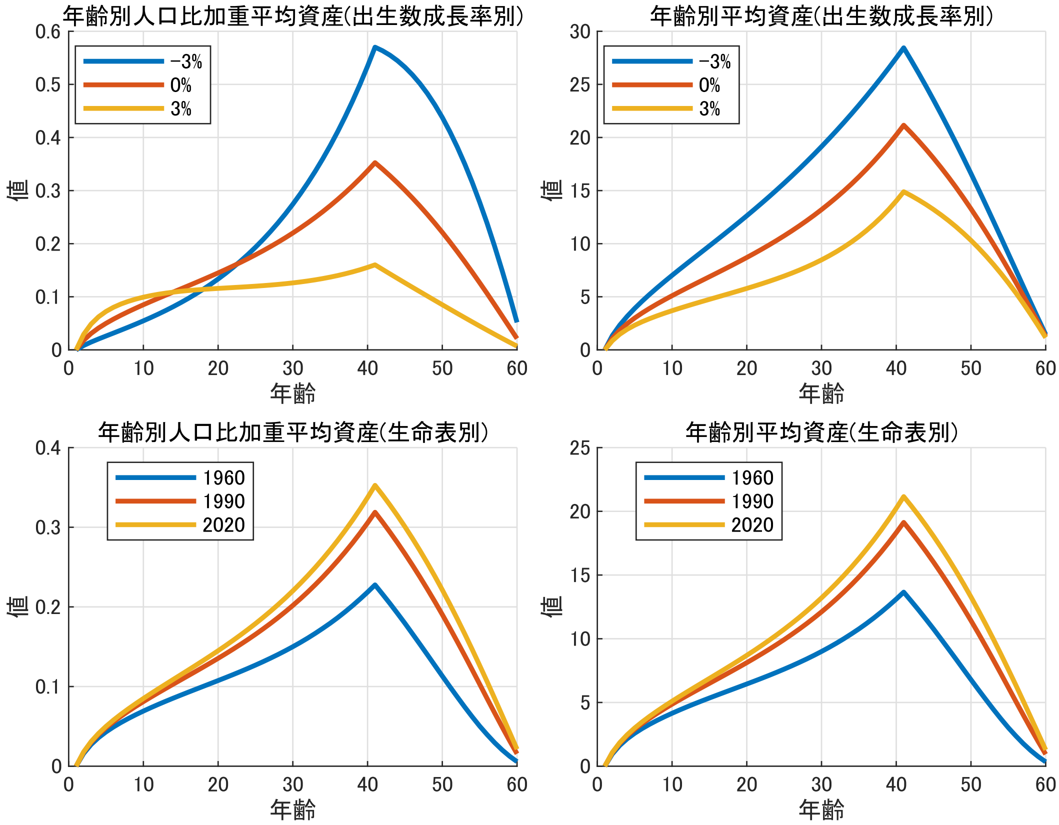

図 3: 少子高齢化による資産分布の変化

図 2 は、出生数成長率が異なる場合と生命表が異なる場合それぞれの年齢別資産分布である。右図年齢別平均資産分布をみると少子化、長寿化はそれぞれ全ての年齢で資産を増加させることがわかる。長寿化の場合は退職後の期待生存期間が長いため貯蓄をより多く増やすと解釈できる。また、出生数成長率が減少した場合は退職者の割合が多いことから、金利が減少し逆に賃金は増加する。現役時に多くの賃金を得られる一方で利払いが少ないため、家計は消費の平準化のために現役時により多く貯蓄をすると解釈できる。左図年齢別人口比加重平均資産である。生命表の場合は人口分布の変化が小さいために平均資産とほとんど同じ形状である。一方で出生数成長率を見ると人口が減少するもとでは資産を多く持つ退職直前から退職後の家計割合が多いために市場全体でみて、資産がより多く市場に供給されることがわかる。

7.2　想定 2

本節では国民年金制度が自然利子率に与える影響を課税制度ごとに議論する。

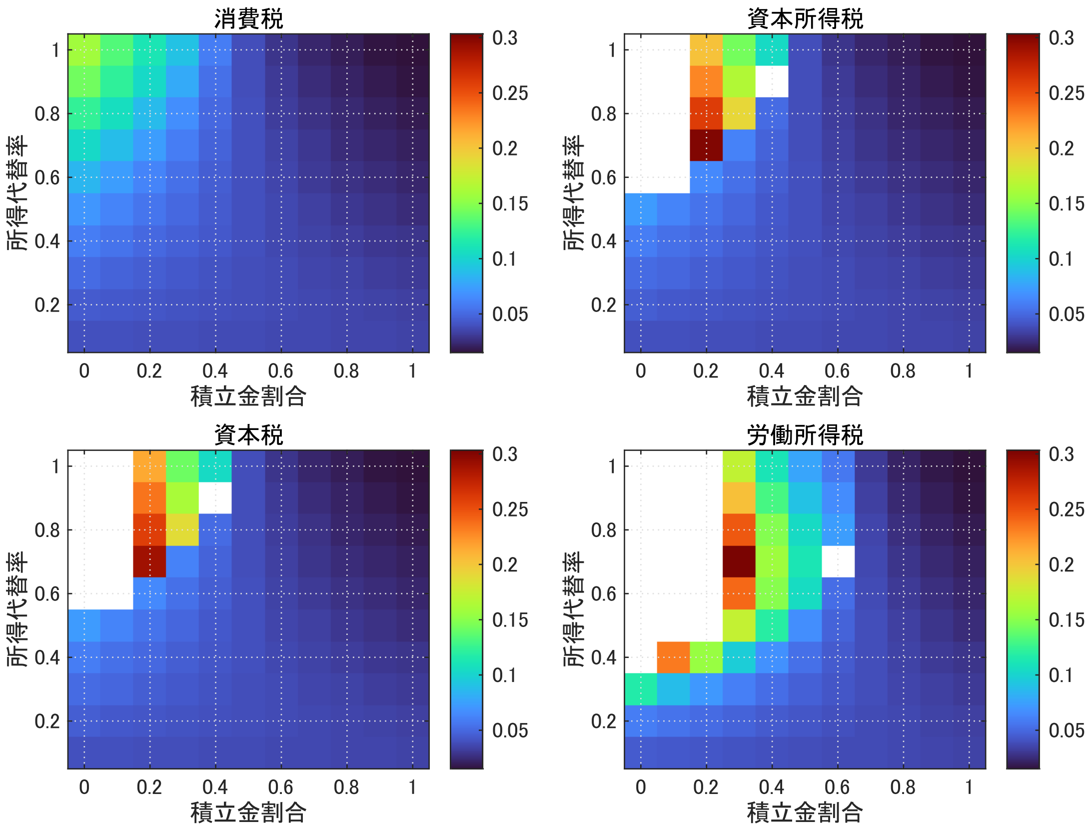

図 4: 課税種類ごとの所得代替率・積立金割合による自然利子率への影響

図 4 は課税ごとに所得代替率と積立金割合の変化による自然利子率への影響である。図 4 を見ると全ての課税制度で所得代替率の上昇がおおむね自然利子率を押し上げる一方で積立金割合の増加は自然利子率を押し下げることがわかる。要因について議論すると、それまでの収入総額に依存しない国民年金の場合、家計にとって老後に備えた貯蓄のインセンティブが減少する。そのため、家計が市場に供給する資本が減少し、自然利子率を上昇させ、その幅は所得代替率が大きいほど大きくなると解釈できる。これは Diamond(1965) で示された年金等老齢期の収入が保障されない OLG モデルにおける資本の過剰貯蓄が賦課年金制度によって解消されるという主張と整合的である。一方で積立金割合の増加は自然利子率を減少させた。先述の通り、国民年金は家計の過剰貯蓄を抑制するものの、式 (11) から明らかな通り、政府基金それ自体も市場全体の資産として集計されるため、市場に資本の増加によって自然利子率を減少させる。これは、年金制度それ自体が自然利子率の上昇をもたらすのではなく、市場全体の資本を減少させるような制度設計が必要であるこ

とを示している*12。

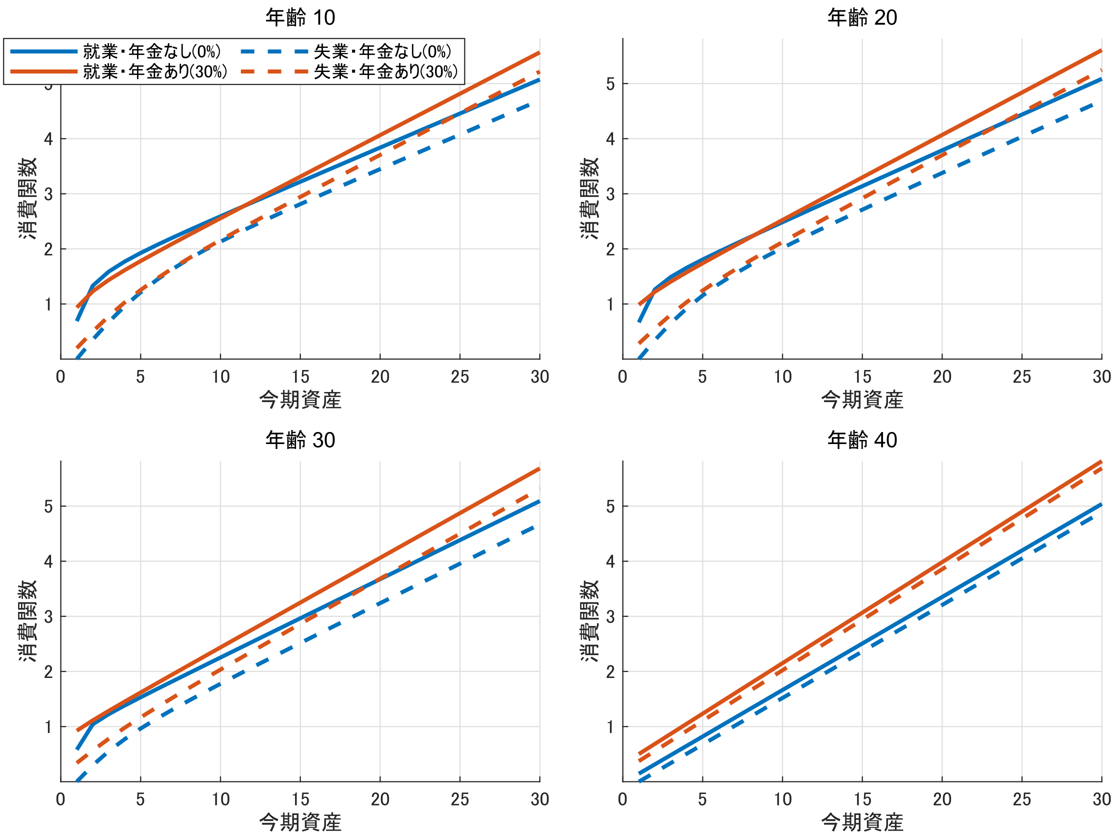

図 5: 年金の有無による消費関数の変化

図 5 は特に消費税によって資金を賄う年金制度のもとで各年齢の消費関数である。図 5 から全年齢において、年金制度がある方が同じ今期資本に対して消費額は大きいことがわかる。先述の通り、将来の収入が年金によってされることで家計の消費が増加し、貯蓄が減少することが確認された。

図 4 右下図は労働所得税によって、必要な費用を賄う場合の所得代替率と積立金割合ごとの自然利子率の変化である。図から消費税と比較すると、所得代替率の増加が自然利子率を押し上げる一方で積立金割合の増加が自然利子率を押し下げるという点で共通している。一方で異なる点として、所得代替率が高く、積立金割合が小さい場合、一般均衡の解が存在しないことがわかった。また、このような解が存在しない範囲は人口が減少すると拡大することも明らかになった。解が存在しないとはそのような年金制度が持続可能でないことを示している。以下ではそのような解が存在しない場合についてその原因を議論する。労働所得税によって年金財源を賄う場合、所得代替率の上昇は将来の年金給付を通じて家計の老後リスクを緩和する一方で、現役期における労働所得に対

*12 当然のこととして、政府基金は年金制度の持続性を向上させ、また、家計の税負担を軽減する利点があり、自然利子率とトレードオフと評価できる。

する課税を通じて可処分所得を減少させる。このため、特に若年期の家計においては、将来の年金給付を見越した貯蓄動機が過剰に弱まり、私的貯蓄が大きく抑制される傾向が生じる。所得代替率が高く、かつ積立金割合が小さい場合には、この傾向が顕著となる。すなわち、年金給付の多くが賦課方式によって賄われるため、若年世代は将来受け取る年金に全期間を通じた収入を強く依存することになる。その結果、資本市場への資金供給が大きく減少し、企業部門における資本需要を満たすことができなくなる。このような状況では、利子率を調整しても資本市場が均衡しないため、一般均衡解が存在しなくなる。さらに、人口成長率が低下、あるいは人口が減少する経済では、この問題が一層深刻化する。人口減少下では、将来世代の規模が相対的に小さくなるため、賦課方式年金による現役世代の負担が増加するにもかかわらず高い所得代替率が維持される場合、現役世代に課される労働所得税率は急激に上昇し、労働供給および貯蓄インセンティブを大きく歪める。この結果、解が存在しない領域が人口減少とともに拡大する。また、同様の理由により、資本税、資本所得課税の場合についても解なしの領域が存在する。

7.3　想定 3

本節では、厚生年金制度が自然利子率に与える影響を議論する。想定 3 では、家計が消費と労働供給を同時に選択する 2 変数最適化問題を解き、外生的に与えられる出生数成長率、生命表を所与として年金制度の設計パラメータとして保険料率を変化させ、自然利子率の反応を確認した。図 6 は、保険料率の変化による自然利子率への影響である。

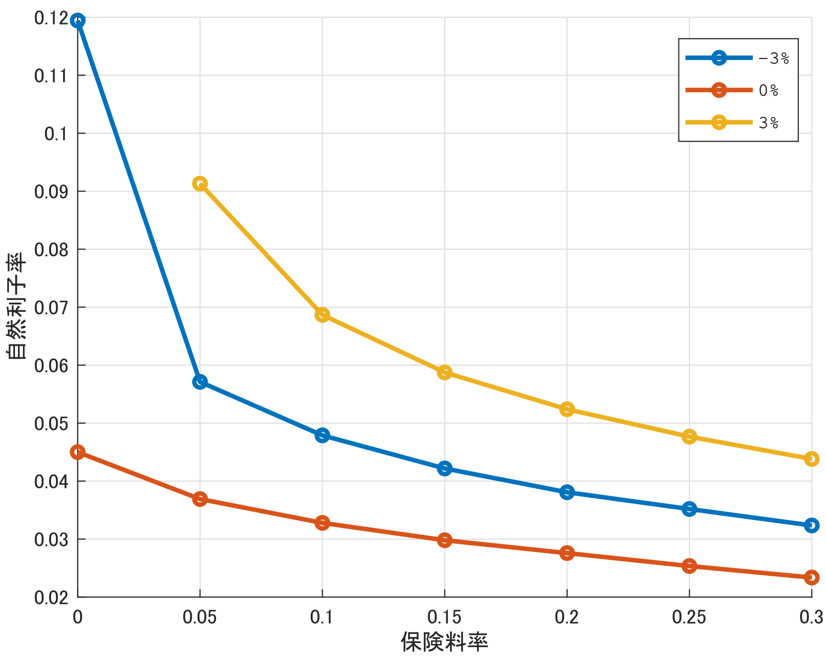

図 6: 厚生年金における保険料率ごとの自然利子率

計算結果を要約すると、3 つのケースすべてにおいて、保険料率の増加とそれに伴う年金支給額の増加は自然利子率を低下させることが確認された。すなわち、厚生年金制度の拡充は自然利子率の押下げ要因であることがわかった。これは、想定 2 で扱った国民年金と対照的である。このような違いが生じた原因として国民年金と厚生年金が持つ保険機能の違いが考えられる。国民年金はとりわけ若年層において失業による将来所得の減少と、それに伴う老後資金不足のリスクを緩和することで消費を押し上げた。一方、厚生年金は収入の一部を積立て、退職後給付するため、将来の給付水準は今後の就業状態に依存する。そのため、国民年金が有する老後資金不足のリスクを緩和する保険機能は限定的であり、制度拡充が家計の貯蓄行動と市場全体の資産供給に異なる形で作用すると考えられる。以下では厚生年金による自然利子率低下の原因を議論する。

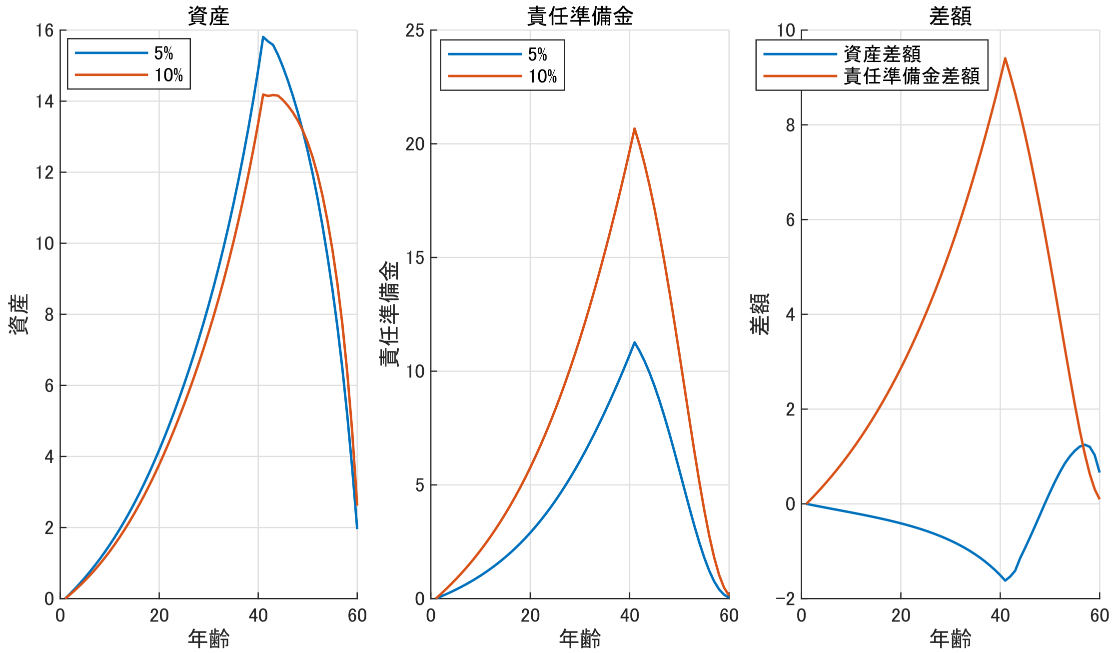

図 7: 厚生年金における資産・責任準備金の変化

図 7 は家計の平均資産と責任準備金の変化の比較である。図 7 によると保険料率の増加による年金制度の充実に伴い家計の平均資産は減少し、保険料率の増加に伴い当然責任準備金は増加している。一方でそれぞれの差分を比較すると、年金制度の充実による責任準備金の増加は、家計の資産をそれ以上に大きく減少させてはいない。言い換えれば、家計資産の減少は責任準備金の増加によって完全には代替されず、資産の責任準備金代替性は少なくとも現役期において 1 未満である。そのために、厚生年金は保険料率が増加するほど市場資本を増加させ、結果として自然利子率を減少させていることがわかる。家計資産の責任準備金代替性が現役期において一未満である要因として、借入制約の存在が挙げられる。以下では保険料納付後の現役家計を例に議論する。家計は当期の賃金所得から保険料を拠出した後に残る可処分所得をもとに、当期消費と将来に持ち越す資産を選択する。しかし借入が厳しく制限される環境では、保険料拠出によって可処分所得が減少して

も、家計はその不足分を借入によって補い消費を平準化することができない可能性がある。将来の年金給付が増えるとしても、それを担保に現役期の資金繰りを改善することは制度上困難であり、年金資産は現役期の支払いに直接用いることができないためである[*13]。結果として、保険料拠出は現役期の家計にとって短期的な流動性制約を強め、年金制度として考えられる貯蓄の減少という効果が十分に働かないことがわかる。

以上より、借入制約が存在するもとでは、年金資産は現役期の流動性需要と本質的に異なる役割を担うため、責任準備金の増加が私的資産の減少によって完全に相殺されない。このことが、現役期における家計資産の責任準備金代替性が一未満となる主要な要因であると解釈できる。

8 結語

本稿は、少子高齢化が自然利子率に与える影響と、年金制度がその影響を緩和し得るかどうか、家計の異質性を明示的に導入した OLG モデルを用いて分析した。本稿の主たる貢献は次の 3 点である。1 つ目は出生数成長率の鈍化と長寿化はそれぞれ自然利子率を押し下げその効果を定量的に評価したことである。これは長寿化は老後に備えた貯蓄増加をもたらし、少子化は相対的に資本を多くもつ家計が増加することにより、市場における資本が増加するからである。2 つ目は、国民年金は所得代替率の引き上げを通じて自然利子率を上昇させる一方で、積立金割合の増加は自然利子率を減少させること、そして課税方法によってモデルの解が存在しないことを明らかにした点である。3 つ目は、厚生年金を導入した分析において、保険料率の引き上げが一貫して自然利子率を低下させることを示した点である。これは借入制約を懸念した家計が保険料率の増加にともなう責任準備金の増加以上に家計貯蓄を減少させないからであり、国民年金と比較して、年金制度が自然利子率に対照的な影響を与えることを明らかにした。以上より、少子高齢化による自然利子率の低下は明らかであり、年金制度はあらゆる場合で自然利子率を上昇させるとは限らず、給付額の決定方法や財源方式の組合せによって自然利子率への影響が変わり得ることが明らかとなった。一方で残された課題もある。本稿では多くのパラメータをカリブレーションし、また定常状態に焦点を当てて分析を行ったが、より具体的な政策評価や制度設計上の提言を行うためには、モデルの精緻化や実際の統計に基づいてパラメータの推定が不可欠である。一方でそのような推定では尤度の計算等に膨大な計算時間が要求される。いずれにしても、少子高齢化と年金制度が家計の予見的な最適化行動の結果として貯蓄を変動させ、自然利子率に影響を与えることを議論した点は本稿が自然利子率に関する議論に与えた新たな貢献といえよう。

[*13] もし借入制約がない場合、家計は保険料を納付した際、納付分の将来得られる年金を返済にあてることを想定して、今期、保険料分を借りることで今期の可処分所得を維持することが可能であり、また、この時の生涯所得の現在価値も変化しない。

参考文献

[1] 杉岡 優・中野 将吾・山本 弘樹 (2024). 自然利子率の計測をめぐる近年の動向. 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, No. 24-J-9.

[2] Aiyagari, S. R. (1994). Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving. *The Quarterly Journal of Economics*, 109(3), 659–684.

[3] Carroll, C. D. (2006). The Method of Endogenous Gridpoints for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems. *Economics Letters*, 91(3), 312–320.

[4] Del Negro, M., Giannone, D., Giannoni, M. P., and Tambalotti, A. (2017). Safety, Liquidity, and the Natural Rate of Interest. *Brookings Papers on Economic Activity*, 48(1), 235–316.

[5] Diamond, P. A. (1965). National Debt in a Neoclassical Growth Model. *American Economic Review*, 55(5), 1126–1150.

[6] Goy, G. and Iwasaki, Y. (2024). *From the Natural Rate towards a Natural Curve: A First Step to Benchmarking the Term Structure*. Unpublished manuscript (mimeo).

[7] Imakubo, K., Kojima, H., and Nakajima, J. (2015). *The Natural Yield Curve: Its Concept and Measurement*. Bank of Japan Working Paper Series, No. 15-E-5.

[8] Nakajima, J., Sudo, N., Hogen, Y., and Takizuka, Y. (2023). *On the Estimation of the Natural Yield Curve*. IER Discussion Paper Series A, No. 753, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University.

[9] Okazaki, Y. and Sudo, N. (2018). *Natural Rate of Interest in Japan: Measuring its Size and Identifying Drivers Based on a DSGE Model*. Bank of Japan Working Paper Series, No. 18-E-6.

[10] Sudo, N. and Takizuka, Y. (2018). *Population Aging and the Real Interest Rate in the Last and Next 50 Years: A Tale Told by an Overlapping Generations Model*. Bank of Japan Working Paper Series, No. 18-E-1.

[11] Wicksell, K. (1896). *Finanztheoretische Untersuchungen: Nebst Darstellung und Kritik des Steuerwesens Schwedens*. Jena: Gustav Fischer.

データの出典

厚生労働省『完全生命表』

Appendix1 モデル 1 の計算アルゴリズム

本節では，モデル 1 の一般均衡を求める計算手順を示す。全体の反復は，所与の価格の下で政府ブロックと家計ブロックを解き，分布を更新して集計量を得たうえで，企業の最適化条件から含意価格を更新するという標準的な手順に従う。具体的な各ブロックの処理は，以下に示す各アルゴリズムに委ねる。

Algorithm 1: モデル 1：一般均衡計算の全体手順

外生変数: 人口成長率 g_N，生存率 $\{p_x\}_{x=1}^{o_d}$，遷移行列 P，資産グリッド $\mathcal{M}$，消費関数の初期値 $C^{(0)}(\mathcal{M},\mathcal{S},T)$，家計分布の初期値 $\mu^{(0)}(\mathcal{M},\mathcal{S},T)$，収束判定閾値 ε，最大反復回数 $K_{\max}$，自然利子率、実質賃金初期値 $r^{(0)}, w^{(0)}$，緩和係数 ω. 年金制度所得代替率 ψ, 積立金割合 α_F, 課税制度

Step1 初期値を与える

$k \leftarrow 1$，誤差 $d_r \leftarrow +\infty$，誤差 $d_w \leftarrow +\infty$。

Step2 人口分布を与える

$\mathcal{L} = (L_1, L_2, , , L_{o_d} | L_t = L_1 (1+g_N)^{-(t-1)} \prod_{j=1}^{t-1} p_j,)$

Step3 十分に価格の変化が小さくなるまで下記の処理を繰り返す

while $\max\{d_r, d_w\} > \varepsilon$ ***and*** $k < K_{\max}$ **do**

$k \leftarrow k+1$

// 3-1 **年金制度（政府ブロック）の更新**

$[F^{(k+1)}, p^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}] \leftarrow \textbf{Algorithm2}\big(r^{(k)}, w^{(k)}, C^{(k)}, \mu^{(k)}, \mathcal{L}, \psi, \alpha_F\big)$

// 3-2 **家計の消費最適化により消費関数を更新**

$[C^{(k+1)}] \leftarrow \textbf{Algorithm3}\big(r^{(k)}, w^{(k)}, p^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}\big)$

// 3-3 **分布の更新と集計**

$[\mu^{(k+1)}, K^{(k+1)}] \leftarrow \textbf{Algorithm4}\big(r^{(k)}, w^{(k)}, p^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, C^{(k+1)}\big)$

// 3-4 **企業の最適化による実質賃金と自然利子率の更新**

$[r^{(k+1)}, w^{(k+1)}] \leftarrow \textbf{Algorithm5}\big(K^{(k+1)}, \mathcal{L}, F^{(k+1)}\big)$

// 3-5 **誤差の更新**

$d_r \leftarrow |r_{\text{new}} - r_{\text{old}}|$, $d_w \leftarrow |w_{\text{new}} - w_{\text{old}}|$

return 収束価格 (r, w)，政策関数 C，分布 μ，集計量 K。

Algorithm 2: モデル 1：年金制度の更新

入力: r, w，消費関数 $C(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$，分布 $\mu(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$，人口分布 $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_{o_d})$，所得代替率 ψ，積立金割合 α_F，制度（課税方式の選択ルール）

出力: 政府基金 F，年金給付（または給付スケジュール）p，税率 τ

// （1） **年齢別人口と退職人口を計算**

$N_r \leftarrow \sum_{t=o_r+1}^{o_d} L_t$，$N_W \leftarrow \sum_{t=1}^{o_r} L_t$

// （2） **年金支出の総額を計算**

賃金 w と所得代替率 ψ から $B \leftarrow \psi\, w\, N_r$

// （3） **積立部分から必要な基金を計算**

$F \leftarrow \alpha_F\, B / r$

// （4） **市場から決定される税率を決定**

賦課で賄う支出を $B_{\text{payg}} \leftarrow (1 - \alpha_F) B$

課税方式に応じて税率 τ を決定

// （5） **年金給付額の決定**

年金給付額 $p \leftarrow \psi\, w$

return F, p, τ

Algorithm 3: モデル 1：家計の消費最適化

入力: 価格 r, w，年金給付 p，課税ベクトル τ，生存率 $\{p_x\}_{x=1}^{o_d}$，遷移行列 P，資産グリッド $\mathcal{M}$，消費関数の初期値 $C^{(0)}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$

出力: 更新後の消費関数 $C(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$

// 終端条件

最終年齢 $t = o_d$ において終端条件として、予算制約から $C(\mathcal{M}, r, o_d) = \mathcal{M}$ とする。

for $t = 1$ **to** $o_d - 1$ **do**

//（1）オイラー方程式から今期の消費額を計算

$$\forall m \in \mathcal{M}, \quad C_{can}(t, m)^{-\sigma} = \beta\, p_t \left(1 + (1 - \tau_r) r\right)\, E_t\!\left[\, C(t+1, m)^{-\sigma} \right].$$

//（2）予算制約から今期の資産を計算（内生グリッド）

状態別所得を

$$y(t) = \begin{cases} w & (e) \\ 0 & (u) \\ \psi w & (r) \end{cases}$$

と書く。予算制約から

$$m_{can}(t, m) = \frac{1}{1 - \tau_m} \left[\frac{m}{1 + (1 - \tau_r) r} + (1 + \tau_c)\, C(t, m) - y(t) \right]$$

を得る。

//（3）所定のグリッド上に補間

$m_{can}(t, m)$ 上の c_t を $\mathcal{M}$ 上へ補間し，$C(\mathcal{M}, t)$ を得る。

//すべての就業状態について上の処理を行う **return** $C(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$。

Algorithm 4: モデル 1：分布の更新と集計

入力: 価格 r, w，年金給付 p，課税ベクトル τ，消費関数 $C(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$，遷移行列 P，生存率 $\{p_x\}_{x=1}^{o_d}$，人口分布 $\mathcal{L}$，資産グリッド $\mathcal{M}$，分布の初期値 $\mu^{(0)}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, 1)$。

出力: 更新後の分布 $\mu(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T)$，集計資本 K

for $t = 2$ **to** o_d **do**

// （1） **政策写像による資産遷移**

各格子点 (a, s) について消費関数と予算制約式、遷移行列から任意の時期格子点 (a', s') へ移行する確率を得ることができる。

// （2） **生存確率の反映**

次期分布に生存率 p_t を反映し，$\mu(\mathcal{M}, \mathcal{S}, t+1)$ を得る。

// （3） **集計資本**

$$K \leftarrow \sum_{t=1}^{o_d} \sum_{s} \sum_{a \in \mathcal{M}} a\, \mu(a, s, t).$$

return $\mu(\mathcal{M}, \mathcal{S}, T), K$。

Algorithm 5: モデル 1：企業の最適化による価格更新

入力: 集計資本 K，人口分布 $\mathcal{L}$，政府基金 F

出力: 更新後の価格 r, w

// （1） **集計労働**

$L \leftarrow \sum_{t=1}^{o_d} L_t$

// （2） **市場で利用される資本**

$K_{\mathrm{mkt}} \leftarrow K + F$

// （3） **限界生産力条件から価格を計算**

$w \leftarrow (1-\alpha)\left(\frac{K_{\mathrm{mkt}}}{L}\right)^{\alpha}$

$r \leftarrow \alpha \left(\frac{L}{K_{\mathrm{mkt}}}\right)^{1-\alpha}$

return r, w

Appendix2 モデル 2 の計算アルゴリズム

本節では，モデル 2（厚生年金）の一般均衡を求める計算手順を示す。モデル 1 と同様，所与の価格の下で政府ブロックと家計ブロックを解き，分布を更新して集計量を得たうえで，企業の最適化条件から含意価格を更新するという標準的な反復に従う。ただしモデル 2 では，家計状態に責任準備金 V が追加され，政府基金 F は家計の V の集計として内生的に決定される。

Algorithm 6: モデル 2：一般均衡計算の全体手順

外生変数: 人口成長率 g_N，生存率 $\{p_x\}_{x=1}^{o_d}$，遷移行列 P，資産グリッド $\mathcal{M}$，責任準備金グリッド $\mathcal{V}$，消費・労働関数の初期値 $C^{(0)}(\mathcal{M},\mathcal{V},\mathcal{S},T)$，$H^{(0)}(\mathcal{M},\mathcal{V},\mathcal{S},T)$，家計分布の初期値 $\mu^{(0)}(\mathcal{M},\mathcal{V},\mathcal{S},T)$，収束判定閾値 ε，最大反復回数 $K_{\max}$，価格初期値 $r^{(0)}, w^{(0)}$，緩和係数 ω，制度パラメータ（保険料率 ψ）

Step1 初期値を与える

$k \leftarrow 1$，誤差 $d_r \leftarrow +\infty$，誤差 $d_w \leftarrow +\infty$。

Step2 人口分布を与える

$\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_{o_d} \mid L_t = L_1(1+g_N)^{-(t-1)} \prod_{j=1}^{t-1} p_j)$

Step3 十分に価格の変化が小さくなるまで下記の処理を繰り返す

while $\max\{d_r, d_w\} > \varepsilon$ ***and*** $k < K_{\max}$ **do**

  $k \leftarrow k+1$

  // 3-1 厚生年金制度（政府ブロック）の更新

  $[p^{(k+1)}(\cdot),\, \tau^{(k+1)}] \leftarrow$ **Algorithm7**$\big(r^{(k)}, \mathcal{L}\big)$

  // 3-2 家計の消費・労働最適化により政策関数を更新

  $[C^{(k+1)}, H^{(k+1)}] \leftarrow$ **Algorithm8**$\big(r^{(k)}, w^{(k)}, p^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, , \psi\big)$

  // 3-3 分布の更新と集計（μ, K, F）

  $[\mu^{(k+1)}, K^{(k+1)}, F^{(k+1)}] \leftarrow$ **Algorithm9**$\big(r^{(k)}, w^{(k)}, p^{(k+1)}(\cdot), \tau^{(k+1)}, C^{(k+1)}, H^{(k+1)}\big)$

  // 3-4 企業の最適化による実質賃金と自然利子率の更新

  $[r^{(k+1)}, w^{(k+1)}] \leftarrow$ **Algorithm10**$\big(K^{(k+1)}, H^{(k+1)}, \mathcal{L}, F^{(k+1)}\big)$

  // 3-5 誤差の更新

  $d_r \leftarrow |r_{\text{new}} - r_{\text{old}}|,\, d_w \leftarrow |w_{\text{new}} - w_{\text{old}}|$

return 収束価格 (r, w)，政策関数 (C, H)，分布 μ，集計量 (K, F)。

Algorithm 7: モデル2：厚生年金制度の更新

入力: 価格 r, w，人口分布 $\mathcal{L}$，生存率 $\{p_x\}_{x=1}^{o_d}$，保険料率 ψ

出力: 年金給付関数 $p(t, V)$,

// （1） **各年齢加入終身年金原価を計算**

for $t = o_r + 1$ **to** o_d **do**

$$\ddot{a}_t = \sum_{j=0}^{o_d - t} \left(\prod_{m=0}^{j-1} p_{t+m} \right) \frac{1}{(1+r)^j}$$

// （2） **年金給付関数を定義**

$$p(t, V) = \frac{V}{\ddot{a}_t} \qquad (t \geq o_r + 1).$$

return $p(t, V)$

Algorithm 8: モデル 2：家計の消費・労働最適化（政策関数の更新）

入力: 価格 r, w，制度パラメータ ϕ，生存率 $\{p_t\}_{t=1}^{o_d}$，遷移行列 $P(t)$，グリッド $\mathcal{M}, \mathcal{V}$，事前政策 $C^{(k)}(\mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{S}, T)$，$H^{(k)}(\mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{S}, T)$，年金支給額 $p(T, \mathcal{V})$

出力: 政策関数 C, H と遷移 m', v'

// **終端条件**

最終年齢 $t = o_d$ では予算制約から $C(m_i, v_j, o_d) = m_i + v_j$ が定まる。

for $t = 1$ **to** $o_d - 1$ **do**

// （1） **オイラー方程式に基づき** C **を更新**

$$\forall (m, v, s) \in \mathcal{M} \times \mathcal{V} \times \mathcal{S}$$

$$C_{can}(m, v, s, t) = ((1+r)\,\beta\, p_t \sum_{s'} p_{ss'}(t)\, C\big(t{+}1, m(m, v, s, t), v(m, v, s, t), s'\big)^{-\sigma})^{-1/\sigma}$$

// （2） **労働供給の最適条件により** H **を更新**

if $t < o_r$ **then**

$$H_{can}(m, v, s, t) = (1/\eta((1-\phi)\, w^s\, C(m, v, s, t)^{-\sigma} + (1+r)\,\phi\, w^s\, \lambda^2(m, v, s, t)))^{1/\chi}$$

$$\lambda^2(m, v, s, t) = \beta\, p_t \sum_{s'} p_{ss'}(t)\,(1+r)\,\lambda^2\big(t{+}1, m(m, v, s, t), v(m, v, s, t), s'\big)$$

// （3） **今期の資産、責任準備金を** (m_{can}, v_{can}) **を後ろ向きに解く**

if $t < o_r$ **then**

$$\forall (m, v, s) \in \mathcal{M} \times \mathcal{V} \times \mathcal{S},$$

$$v_{can}(m, v, s, t) = \frac{v}{1+r} - \phi\, H\big(m, v, s, t\big)\, w^s.$$

$$m_{can}(m, v, s, t) = \frac{m}{1+r} + C\big(m, v, s, t\big) - (1-\phi)\, H\big(m, v, s, t\big)\, w^s.$$

else

$$\forall (m, v) \in \mathcal{M} \times \mathcal{V}$$

$$v_{can}(t, m, v, r) = \frac{v}{1+r} - p(t, v).$$

$$m_{can}(t, m, v, r) = \frac{m}{1+r} + C\big(t, m, v, r\big) - p(t, v)$$

// （4） **点** (m_{can}, v_{can}) **上の** C_{can}, H_{can} **をそれぞれ点** (m, v) **に補間し、消費関数、労働関数を更新する。**

return C, H

Algorithm 9: モデル 2：分布の更新と集計

入力: 価格 r, w，年金給付 $p(t, V)$，保険料率 τ，政策関数 (C, H)，遷移行列 P，生存率 $\{p_x\}$，人口分布 $\mathcal{L}$，グリッド $\mathcal{M}, \mathcal{V}$，分布初期値 $\mu^{(0)}(\mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{S}, 1)$。

出力: 更新後の分布 $\mu(\mathcal{M}, \mathcal{V}, s, T)$，集計資本 K，政府基金 F

for $t = 1$ **to** $o_d - 1$ **do**

// （1） **遷移行列の計算**

政策関数、予算制約式により $(m, v, s) \mapsto (m', v', s')$ への遷移確率を得る

// （2） **生存確率の反映**

生存率 p_t を掛けて $\mu(\cdot, \cdot, \cdot, t+1)$ を得る。

// （3） **集計資本と政府基金**

$$K \leftarrow \sum_{t=1}^{o_d} \sum_{\mathcal{S}} \sum_{a \in \mathcal{M}} \sum_{v \in \mathcal{V}} a\, \mu(a, v, s, t), \qquad F \leftarrow \sum_{t=1}^{o_d} \sum_{\mathcal{S}} \sum_{a \in \mathcal{M}} \sum_{v \in \mathcal{V}} v\, \mu(a, v, s, t),$$

return $\mu(\mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{S}, T), K, F$。

Algorithm 10: モデル 2：企業の最適化による価格更新

入力: 集計資本 K，人口分布 $\mathcal{L}$，政府基金 F,

// （1） **集計労働**

$L \leftarrow \sum_{t=1}^{o_d} L_t$

// （2） **市場で利用される資本**

$K_{\text{mkt}} \leftarrow K + F$

// （3） **限界生産力条件から価格を計算**

$w \leftarrow (1-\alpha) A \left(\dfrac{K_{\text{mkt}}}{L} \right)^{\alpha}$

$r \leftarrow \alpha A \left(\dfrac{L}{K_{\text{mkt}}} \right)^{1-\alpha}$

return r, w