正弦波電圧・電流のベクトル表現

7. 交流回路 (1)

正弦波交流

- 正弦波交流の瞬時値の式

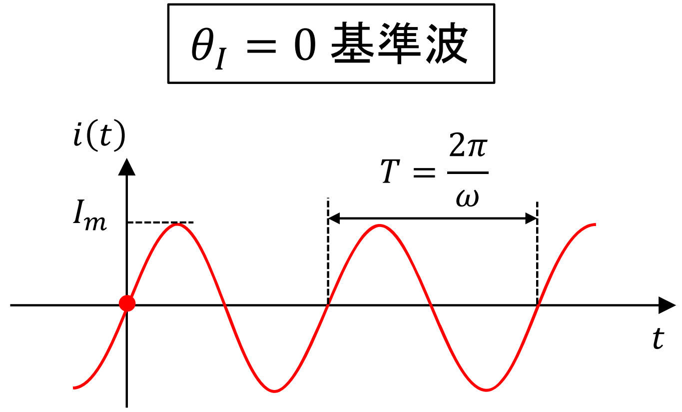
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_I)\ [\mathrm{A}]$$

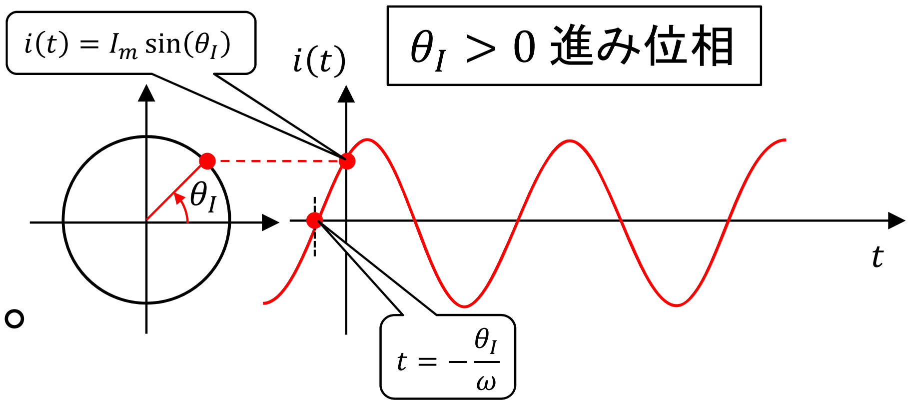
$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)\ [\mathrm{V}]$$

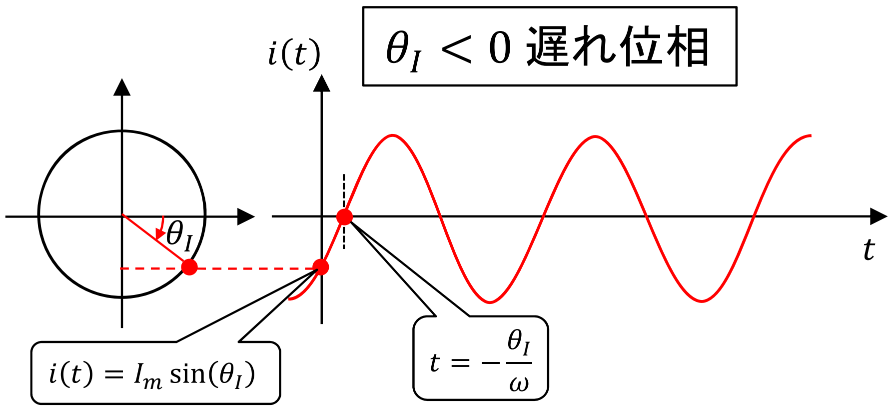
記号	意味	単位
I_m, V_m	振幅(＝最大値)	[V],[A]
ω	角周波数	[rad/s]
θ_I, θ_V	初期位相(t=0での位相)	[rad]

- 初期位相の正負を進み/遅れと呼ぶ。
  - 「位相」はsin(), cos()の括弧の中身のこと。
  - 位相0の時刻は$t = -\frac{\theta_I}{\omega}$
    - θ_Iとは正負逆なので進み/遅れの判断には使わない！
- ωと周期T [sec], 周波数f [Hz]の関係

$$T = \frac{2\pi}{\omega},\quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},\quad \omega = 2\pi f$$







実効値

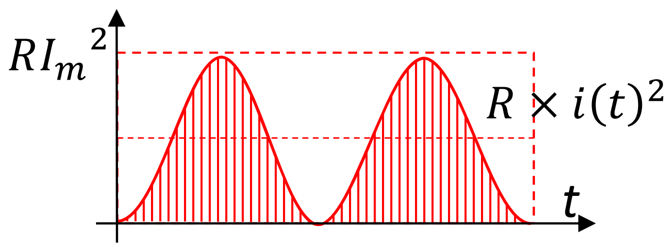
- $i(t), v(t)$の二乗平均値I_e, V_eを実効値と呼ぶ。

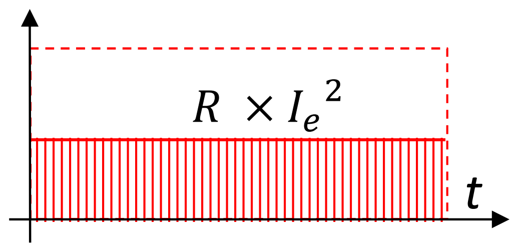
- 実効値とは、抵抗の消費電力が等しくなる直流に換算した値のことで、正弦波交流では、振幅I_m, V_mの$1/\sqrt{2}$に等しい。

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_I) = \sqrt{2} I_\mathrm{e} \sin(\omega t + \theta_I) \text{ [A]}$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_V) = \sqrt{2} V_\mathrm{e} \sin(\omega t + \theta_V) \text{ [V]}$$

例: 抵抗Rに電流 $i(t)$を流したときの平均消費電力(1周期分)





$$I_m{}^2 : I_e{}^2 = 2:1$$

$$\therefore I_m : I_e = \sqrt{2}:1$$

- 交流で振幅より実効値がよく用いられるのは、
電力計算が超簡単(＝直流と同様)になるから。

例: 家庭の100V電源

$I_\mathrm{e} = 100,\quad I_m = 100\sqrt{2} \fallingdotseq 141\mathrm{V},$　もし3A流れたら300Wとすぐに計算できる。

正弦波の複素数表現とフェーザ表現

- 対象回路で角周波数ωが共通なら、
  $i(t)$を一意に決めるには、I_{e}とθ_Iの2量さえあればよい。

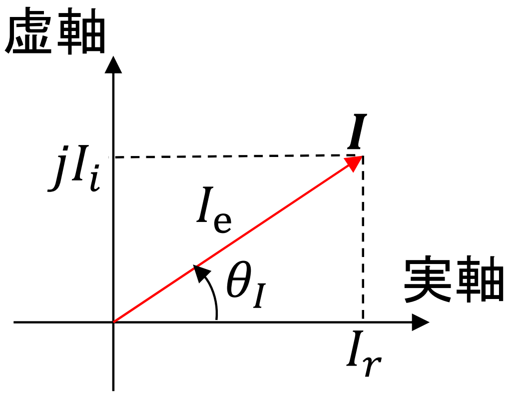
- 大きさI_{e}、方向θ_Iのベクトル$\boldsymbol{I}$で表せば、三角関数が消滅(＝楽!)

- ベクトル$\boldsymbol{I}$を複素平面に描くときの表現は2種類
  - 複素数*表現(直交形式)

    $$\boldsymbol{I} = I_r + jI_i, \qquad I_r = I_e \cos\theta_I,\ I_i = I_e \sin\theta_I$$

  - フェーザ**表現(極座標形式)

    $$\boldsymbol{I} = I_e e^{j\theta_I} = I_e \angle\theta_I$$



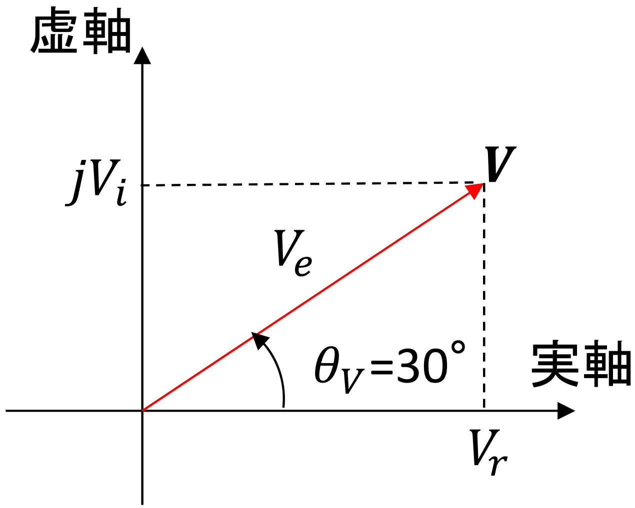
*電気回路では虚数単位をjで表す。

**フェーザ(phasor) は phase vector (位相ベクトル)の短縮形。
加減乗除の算法はベクトルと同じ。位置ベクトルや方向ベクトルと区別するための別名。

正弦波の複素数/フェーザ表現の例

- 例: $v(t) = 100\sqrt{2}\sin\left\{(2\pi \times 100)t + \frac{\pi}{6}\right\}$ [V]
  - $\omega = 2\pi \times 100$ [rad]
  - $V_e = 100$ [V]
  - $\theta_V = \frac{\pi}{6}$ [rad] = 30 [deg]　(進み位相)

本講義では電気業界での
慣用単位 [deg]を使います。

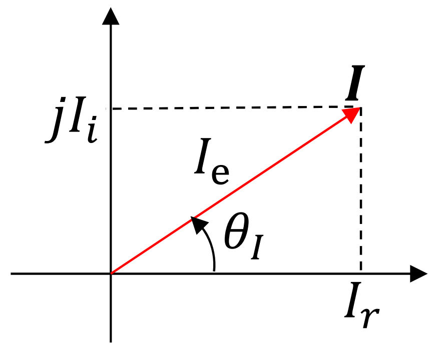


- フェーザ表現
  - $\boldsymbol{V} = V_e \angle \theta_V = 100\angle 30°$ [V]

- 複素数表現
  - $\boldsymbol{V} = V_e \cos\theta_V + jV_e \sin\theta_V = 50\sqrt{3} + j50$ [V]

複素数表現とフェーザ表現の関係

- フェーザから複素数へ
  - $\boldsymbol{I} = I_e \angle \theta_I \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{I} = I_e \cos\theta_I + jI_e \sin\theta_I$
- 複素数からフェーザへ
  - $\boldsymbol{I} = I_r + jI_i \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{I} = \sqrt{{I_r}^2 + {I_i}^2} \angle \tan^{-1}\frac{I_i}{I_r}$



- 加減算は複素数表現が便利
  - $\boldsymbol{I}_{ADD} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 = (I_{r1} + I_{r2}) + j(I_{i1} + I_{i2})$
  - $\boldsymbol{I}_{SUB} = \boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2 = (I_{r1} - I_{r2}) + j(I_{i1} - I_{i2})$
- 乗除算はフェーザ表現が便利
  - $\boldsymbol{I}_{MUL} = \boldsymbol{I}_1 \boldsymbol{I}_2 = I_{e1}\angle\theta_{I1} \times I_{e2}\angle\theta_{I2} = I_{e1}I_{e2}\angle(\theta_{I1} + \theta_{I2})$
  - $\boldsymbol{I}_{DIV} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{I_{e1}\angle\theta_{I1}}{I_{e2}\angle\theta_{I2}} = \frac{I_{e1}}{I_{e2}}\angle(\theta_{I1} - \theta_{I2})$

まとめ

- 正弦波交流の表し方は、瞬時値$i(t)$, 振幅I_m, 角周波数ω, 初期位相θ_Iとすると、〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕[A]　で表せる。
- 実効値I_eは振幅I_mの〔　　　　　〕に等しい。
- 初期位相θ_I>0の波は、基準となるθ_I, θ_V=0の波より、位相が〔　　　　　　　　　　〕という。
- 角周波数ωが対象回路で共通とすれば、正弦波交流を直交形式の〔　　　　　　　〕または〔　　　　　　　　〕で表すと、三角関数がなくなって楽。
- 複素数表現とフェーザ表現は相互に変換できる。
- 直交形式の複素数表現は〔　　　　　　　　〕算に有利で、フェーザ表現は〔　　　　　　　　〕算に有利。

7. 演習問題

1. 瞬時値表現の電圧*v*, 複素数形式の電流***I***を、どちらもフェーザ表示(極形式)に変換し、フェーザ図を描け。
   a. $v_a = 100\sqrt{2}\sin\{(2\pi \times 100)t - 30°\}$ [V]
   b. $v_b = 70.7\sin(376.8t + 60°)$ [V]
   c. $\boldsymbol{I}_c = 4 + j3$ [A]
   d. $\boldsymbol{I}_d = j2$ [A]
2. 次の各行に指定する電圧または電流をフェーザ表示し、フェーザ図を描け。
   1. $\boldsymbol{I}_1 = 2\sqrt{3} - j2$ [A] と、$\boldsymbol{I}_1$に対して位相が$60°$進み、$|\boldsymbol{I}_2| = 2$
   2. $\boldsymbol{V}_1 = 3$ [V] と、$\boldsymbol{V}_1$に対して位相が$45°$遅れ、実部の値が2である$\boldsymbol{V}_2$
3. 起電力$\boldsymbol{E}_1 = 100\angle 0°$, $\boldsymbol{E}_2 = 200\angle 45°$ の合成起電力$\boldsymbol{E}$を求めよ。
4. 電流源 $\boldsymbol{I}_1 = 50\angle 0°$, $\boldsymbol{I}_2 = 100\angle -60°$ の合成電流$\boldsymbol{I}$を求めよ。