13. 回路のグラフとキルヒホッフの法則(2)

有向グラフの行列表現:接続行列

- $[A]=\{a_{ij}\},\ a_{ij}=\begin{cases}+1: & 節点iが枝jの始点\\ -1: & 接点iが枝jの終点\\ 0: & 枝の端点でない\end{cases}$
- 例1の接続行列

$[A$ … a_3 … $0 \quad -1 \quad 1$ … $-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

- 1行除くのは恣意な的操作
  ＝コンピュータは苦手
- 1行少ない行列を直接求めるアルゴリズムは？
  →カットセットやループ

- $[A]$の各列には1, −1を1個ずつ含むので、n行のうち1行は冗長。
- 1行除いて(n-1)×m行にすると、既約接続行列となり、$[D]$で表す。

$$[D]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

- 除いた行に対応する節点(上の例ではa_4)を基準点と呼ぶ。
  概ね接地電位の0V節点とみなせばよい。

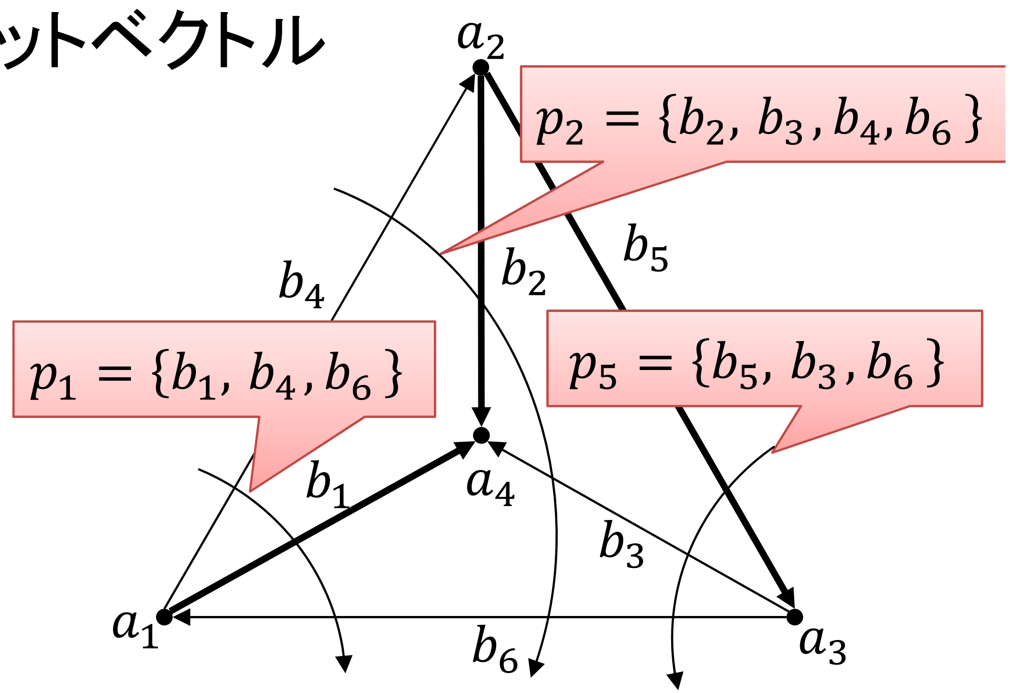
カットセット

- カットセットとは、回路を2分割するために必要な枝の集合を指す。
- ある木を選び、その枝を1個だけ含むカットセットは一意に決まる。これを基本カットセットという。
- 基本カットセットは含まれる枝とその向きを表すベクトルで表せる。
  - 枝の順序は木の枝が先、補木の枝が後。
  - 枝の向きは木の向きと同じなら1,逆なら-1。

【例】下図において、木を$\{b_1, b_2, b_5\}$とする。

枝 b_1, b_2, b_5 に対応する基本カットセットベクトル p_1, p_2, p_5 は、

$$p_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_5 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_6 \end{array} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad p_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



基本カットセット行列

- ある木の全枝の基本カットセットベクトルの転置行列を基本カットセット行列と呼び、$[C]$で表す

基本カットセット行列の例: (木2の場合)

枝b_1に対応する基本カットセットp_1 (b_1と同じ向きなら1, 逆なら-1)

補木の枝に対応するカットセット

$$[C] = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_5 & b_3 & b_4 & b_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = [[U][C_l]]$$

単位行列

- キルヒホッフの第一法則(電流平衡)は、$[C]$を用いて次式で表せる。

$$[C]\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}_C$$

$\boldsymbol{J}_C$は、各々の基本カットセット中に存在する電流源の和。$\boldsymbol{I}$の向きと逆にとる。

注: 電圧平衡を「あるカットセット上の電流の代数和は0」と考えれば、上式は

$[C]\boldsymbol{I} + (-\boldsymbol{J}_C) = 0$ と変形できるので、$\boldsymbol{J}_C$は$\boldsymbol{I}$の向きと逆に取ると都合がよい。

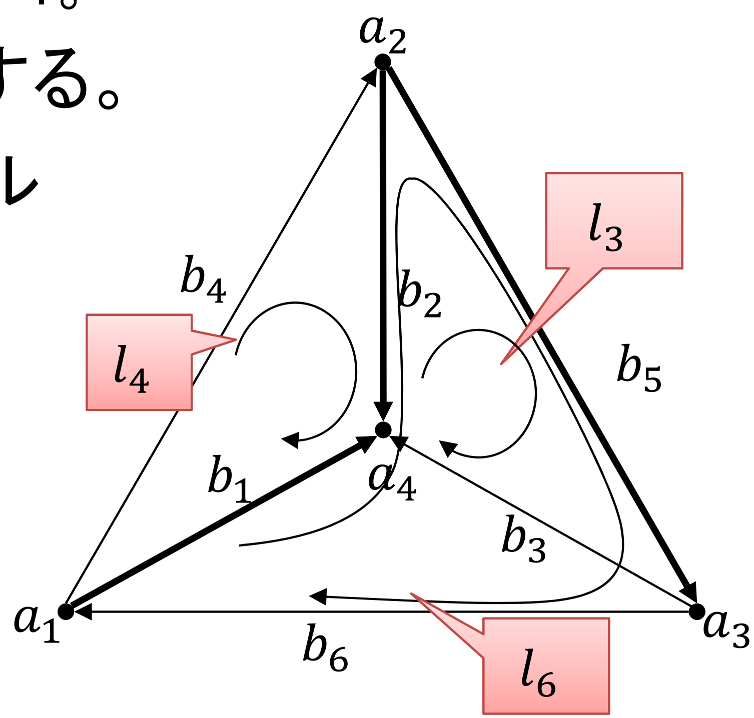
ループ

- ループ(閉路) とは、ある節点を出発して、いくつかの枝と節点を途中一回だけ通って元の節点に戻る経路を指す。
- 補木の枝を1個だけ含むループは一意に決まり、これを基本ループという。向きは任意だが、補木の枝の向きに合わせるとよい。
- 基本ループも、含まれる枝とその向きを表すベクトルで表せる。
  - 枝の順序は基本カットセットと同様。
  - 枝の向きはループの向きと同じなら1,逆なら-1。

【例】下図において、補木を$\{b_3, b_4, b_6\}$とする。

枝 b_3, b_4, b_6 に対応する基本ループベクトル l_3, l_4, l_6 は、

$$l_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_5 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_6 \end{matrix} \quad l_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad l_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



基本ループ行列

- ある補木の全枝の基本ループベクトルの転置行列を基本ループ行列と呼び、$[B]$で表す。

基本ループ行列の例: (木2の場合)

補木の枝b_3に対応する基本ループl_3

木の枝に
対応する
ループ

$$[B] = \begin{array}{c} \\ l_3 \\ l_4 \\ l_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_5 & b_3 & b_4 & b_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = [[B_t][U]]$$

単位行列

- キルヒホッフの第二法則(電圧平衡)は、$[B]$ を用いて次式で表せる。

$$[B]\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{E}$は、各々の基本ループ中に沿って存在する電圧源の和。$\boldsymbol{V}$の向きと同じにとる。

電圧平衡を「あるループ中の電圧源の和は電圧降下の和に等しい」と考えれば、上式は直感的に理解できる。

[C][B]とキルヒホッフの法則

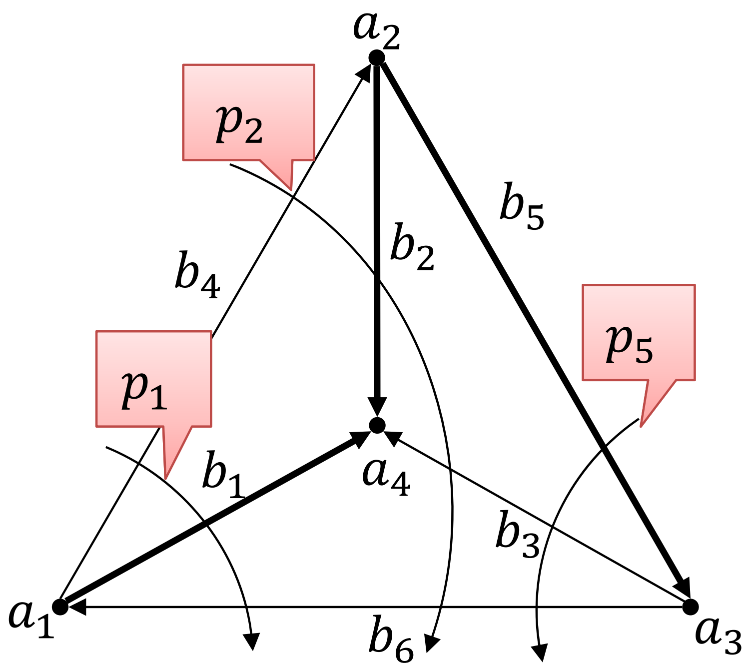
- 第一法則(電流則)

$$[C]\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}_C$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 - J_4 + J_6 \\ -J_2 - J_3 + J_4 - J_6 \\ J_3 - J_5 + J_6 \end{bmatrix}$$

p_1に含まれる
電流源の和
(*I*と逆向き)

カットセットp_1上の
受動素子を流れる電流の和



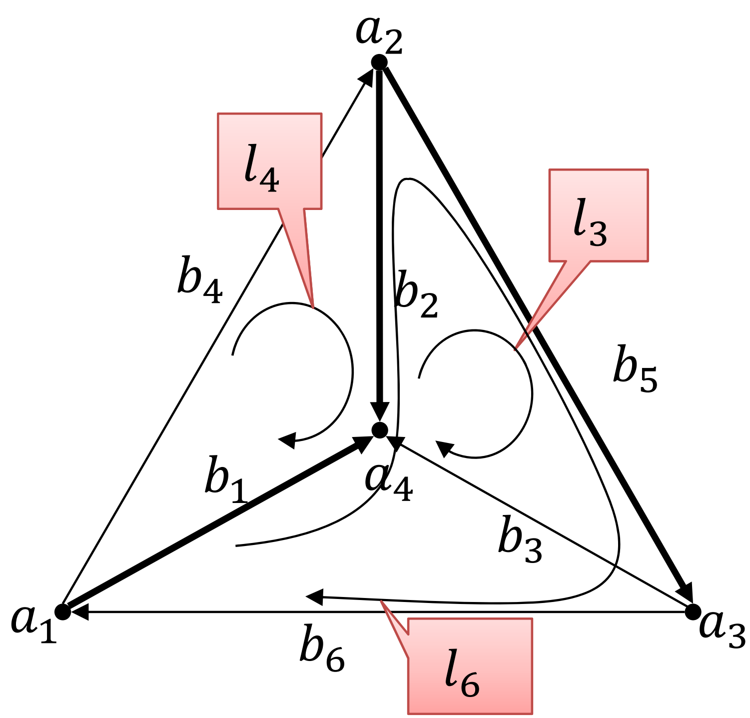
- 第二法則(電圧則)

$$[B]\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_2 + E_3 + E_5 \\ -E_1 + E_2 + E_4 \\ E_1 - E_2 + E_5 + E_6 \end{bmatrix}$$

l_3に含まれる
電圧源の和

ループl_3上の
受動素子による電圧降下の和



13. 演習問題

1. 前掲図「木1」「木2」について以下の行列を求めよ。ただし、「木の枝に対応する列を左に並べる(*)」こと。
   ① 既約接続行列$[D]$ (前回求めたので転記するだけでよい)
   ② 基本カットセット行列$[C]$
   ③ 基本ループ行列$[B]$

2. 行列$[D]$と$[C]$は「木1」 で一致し「木2」で異なる。理由を簡潔に述べよ。

3. J_C, J_Dのうち、木の選び方によらず一定なのはどちらか、また、木の選び方に依存するのはどちらか。