12. 回路のグラフとキルヒホッフの法則(1)

そもそもこの回は何をしたいのか？

【前提】回路図、電圧源E, 電流源J, 素子Zが既知

【問題】任意の節点電圧V, 枝電流Iは？

【予想】

- 多分、E, J, Z, V, Iの連立方程式になる
- どんな回路でも、適切な連立方程式を得る方法(一般解)は？

【方法】

1. 回路を有向グラフとみなし、行列[A]で表現。
2. オームの法則を一次変換で表現する。

今日は、これらの行列を扱う準備。

例　$\boxed{[\mathrm{A}]}[Z][\mathrm{A}]^T\boldsymbol{I} = \boldsymbol{E},$　　$\boxed{[B]}[Y][B]^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{J}$

補足: なぜ$[\mathrm{A}][Z][\mathrm{A}]^T$?

- 回路図と素子Zを分けて考えるため。

  $[Z]$ 素子の情報だけ(対角行列)

  $[A]$ グラフとしての回路の情報だけ

$$[\mathrm{A}][Z][\mathrm{A}]^T \boldsymbol{I} = \boldsymbol{E}$$

$$\Leftrightarrow \quad [Z_A]\boldsymbol{I} = \boldsymbol{E}$$

[回路図Aに固有のZ行列]

行列の例

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Z_A] = \begin{bmatrix} Z_2 + Z_5 + Z_3 & -Z_2 & Z_2 + Z_5 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_4 & -Z_1 + Z_2 \\ Z_2 + Z_5 & -Z_1 + Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_5 + Z_6 \end{bmatrix}$$

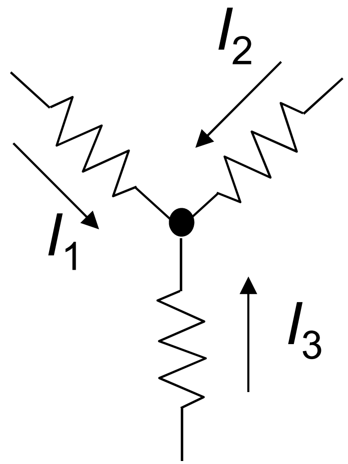
問題: $[Z_A] = [\mathrm{A}]\boldsymbol{Z}$ となるように$[\mathrm{A}]$を選ばないのは、なぜだろうか

再掲

回路の見方: キルヒホッフの法則

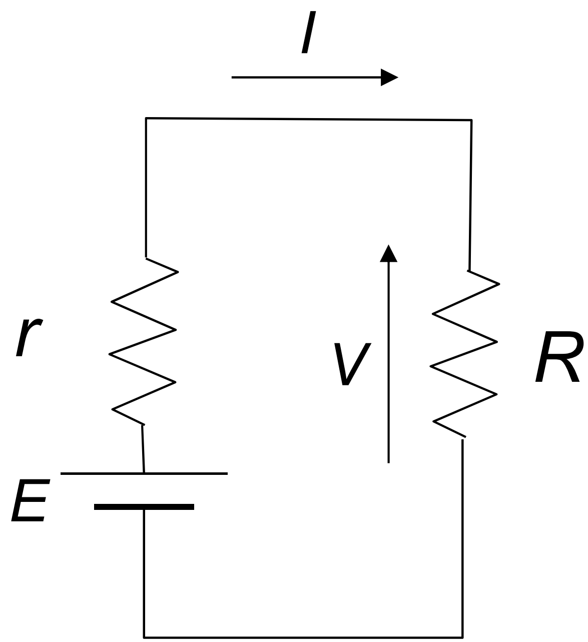
- 電流則
  - ある節点に流入流出する電流の和は0
  - 流入する電流は正,流出する電流は負とみなす
  - 右図では、

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$



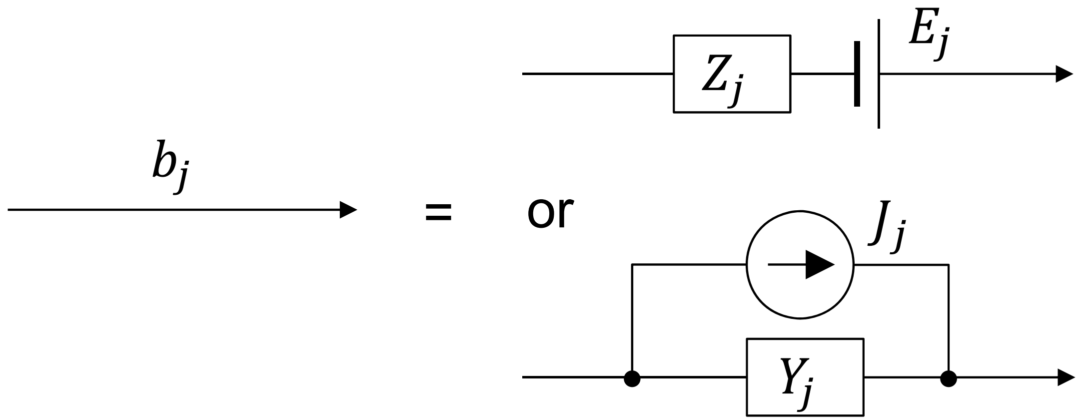
- 電圧則
  - ある閉路に含まれる起電力の和と電圧降下の和は等しい
  - 起電力は＋極から電流が流れるように働くので、閉路の方向と一致したら正、逆方向なら負
  - 右図では、

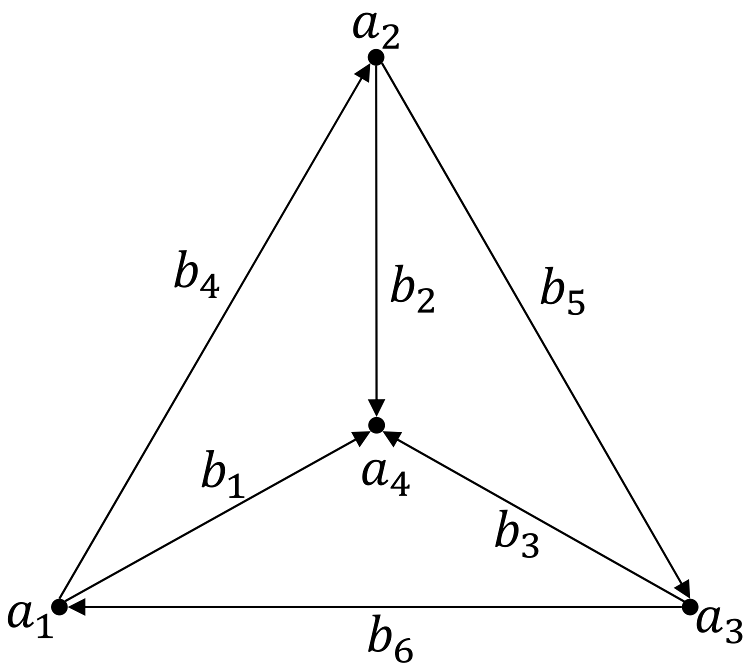
$$E = rI + RI$$



回路の有向グラフ表現

- 回路図を、構成する素子を区別せず、接続の形だけに着目する。
- 等電位点を表す**節点**(node, a_i) と、2端子素子や電源を表す**枝**(branch, b_j)のみで表す。
- 各枝は方向を持つ(任意)。これをE_j, J_jの正の向きとする。
- 直感的には、各枝にはインピーダンスZ_j, 電圧源E_jの直列回路、またはアドミタンスY_j, 電流源J_jの並列回路を含むと考えればよい。
- 枝電流をI_j,枝電圧をV_j,各節点の電圧(節点電圧)をW_i, とする。
- 有向グラフ表現の例1:





有向グラフの行列表現:接続行列

- $[A]=\{a_{ij}\},\ a_{ij}=\begin{cases}+1\text{: 節点}i\text{が枝}j\text{の始点}\\-1\text{: 接点}i\text{が枝}j\text{の終点}\\0\text{: 枝の端点でない}\end{cases}$
- 前ページ例1の接続行列

行a_iは節点
列b_iは枝

$$[A]=\begin{array}{c}\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

- $[A]$の各列には1,-1を1個ずつ含むので、n行のうち1行は冗長。
- 1行除いて(n-1)×m行にすると、既約接続行列となり、$[D]$で表す。

$$[D]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

- 除いた行に対応する節点(上の例ではa_4)を基準点と呼ぶ。
  概ね接地電位の0V節点とみなせばよい。

接続行列とキルヒホッフの法則

$\boldsymbol{J}_D$:各節点に流入する電流源の和、$\boldsymbol{V}$: 枝電圧

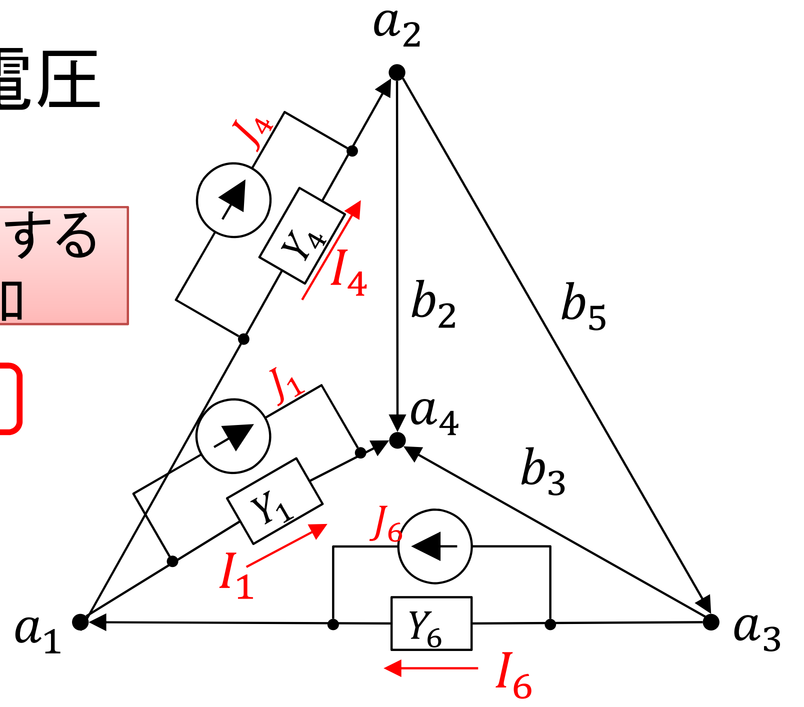
- 第一法則(電流則)

$$[D]\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}_D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 - J_4 + J_6 \\ -J_2 + J_4 - J_5 \\ -J_3 + J_5 - J_6 \end{bmatrix}$$

接点a_1に流入する電流源の和

接点a_1から流出する電流の和



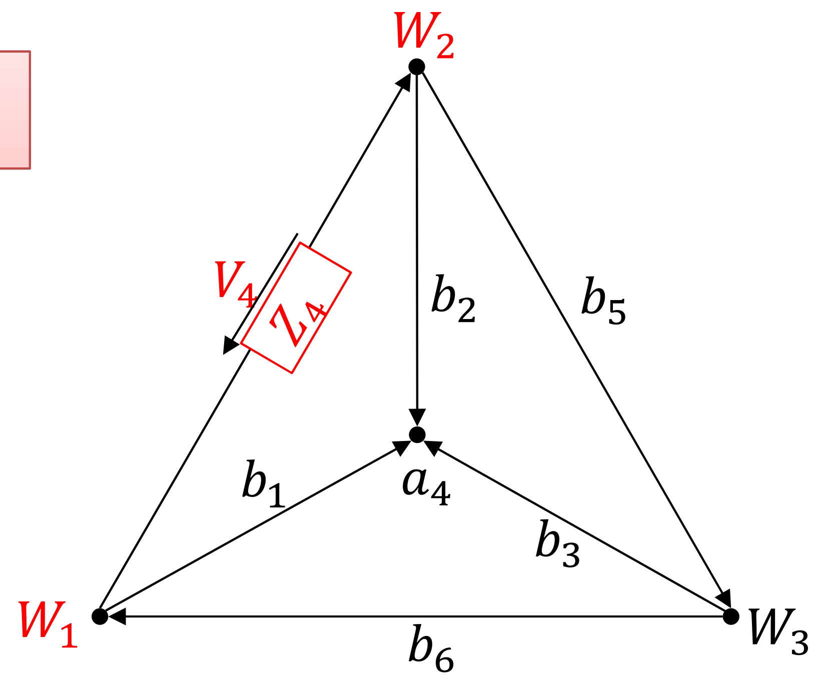
- 第二法則(電圧則)

$$[D]^T\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}$$

枝b_4の電圧降下
(枝電圧)

接点a_1, a_2の接点電圧の差



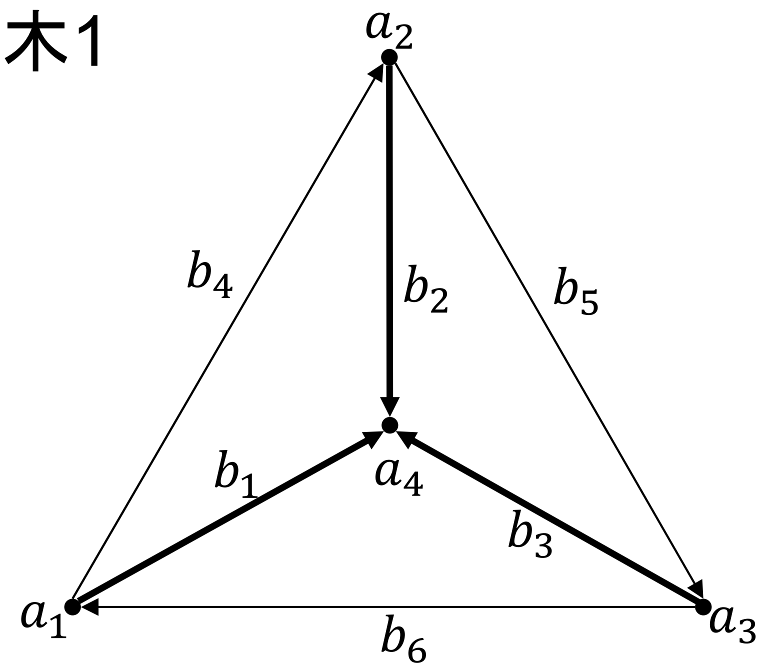
グラフの枝の分類

前提:連結グラフ(任意の2節点間を結ぶ経路が必ず存在する)である

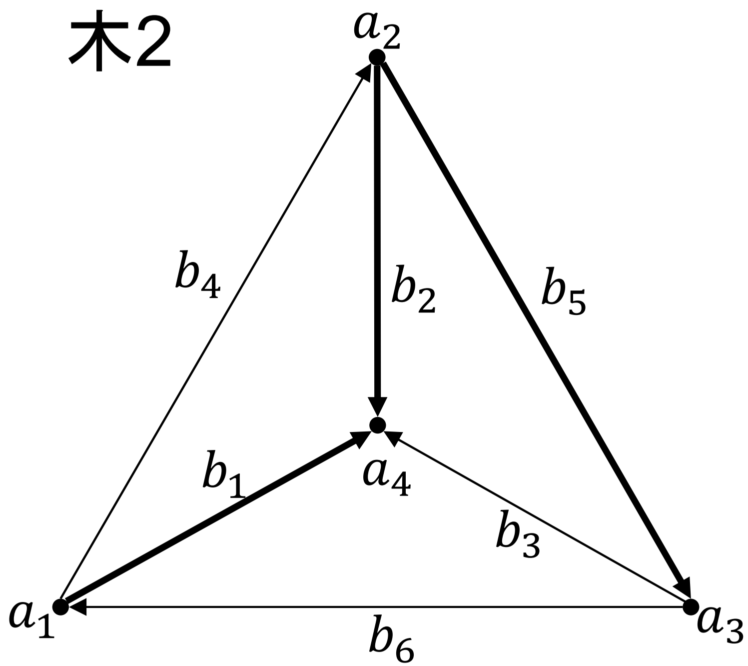
- 木: 全節点を連結する最小数の枝の集合。
  当然、閉路を含まない。1個の回路に対して選び方は複数ある。
- 木の枝: 木を構成する枝
- 補木: 木に含まれない枝の集合
- 補木の枝(リンク):補木の枝
- 木(太線)と補木(細線)の例:

$\overline{\text{木}}$

木1



木2



12. 演習問題

1. 前掲図「木1」の既約接続行列$[D]$は次式で表される。
   このとき、以下について答えよ。

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   ① 行列$[D]$の各行、各列に対応する節点記号 a_i と、枝記号b_jを記せ。

   ② 全ての木の枝を列ベクトルとして列挙せよ。

   ③ 全てのリンクを列ベクトルとして列挙せよ。

2. 「木2」の既約接続行列$[D]$を求めよ。
   ただし、下記の条件を満たすように列を適当に入れ替えること。
   - 木の枝に対応する列がリンクに対応する列より左側にくる。
   - 木の枝同士、リンク同士の間では、枝記号の添え字の小さい方が左側にくる。

今日は年内最終回です。よいお年を！

- 年末年始は「ソフ演の開発課題」が最優先。
- ただし、エレクトロニクスのレポート課題もお忘れなく。

レポート課題

出題日: 2022年12月13日(火) 13:00

提出期限: 2023年1月10日(火) 13:00

これまでの復習問題をMoodle演習します。冬休みは他科目でも課題が集中すると予想されるので、12月中なるべく早めの提出を強く推奨します。

- 下記の課題1～課題3の全てに解答しなさい。
- 完答できなくても、できたところまで必ず提出すること。
- 導出過程や論拠は省略せずに解答すること。
- 下書きを保存できる設定にしているので、入力フォームで「この状態で提出する」ボタンを押しただけでは、下書き状態になるだけで提出にはならない。各課題のページで「課題を提出する」ボタンを押して提出を完了させること。
- 他人の解答やWWW上の文書等の盗作や盗作幇助(≒自分の解答をどこかにアップロードしておくこと)は厳禁です。

課題1 インピーダンス

課題2 電力

課題3 用語定義