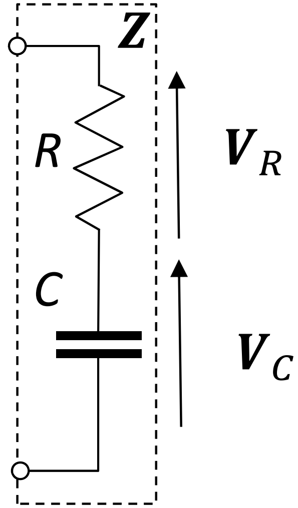
RL, RC, RLC回路

9. 交流回路 (4)

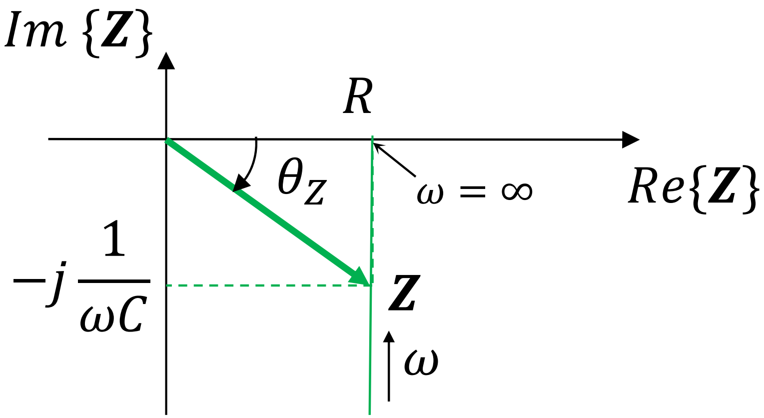
RC直列回路

- $\boldsymbol{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} = |\boldsymbol{Z}|\angle\theta_Z,\ \theta_Z = \tan^{-1}\frac{1}{R\omega C}$
  - $\boldsymbol{Z}$の軌跡は、$Re\{\boldsymbol{Z}\} = R, Im\{\boldsymbol{Z}\} < 0$の半直線
  - $\omega = 0$のとき(つまり$\frac{1}{\omega C}$は高)、$\boldsymbol{Z}$も∞に発散
  - $\omega = \infty$のとき(つまり$\frac{1}{\omega C}$は低)、$\boldsymbol{Z}$は最小。最小値はR

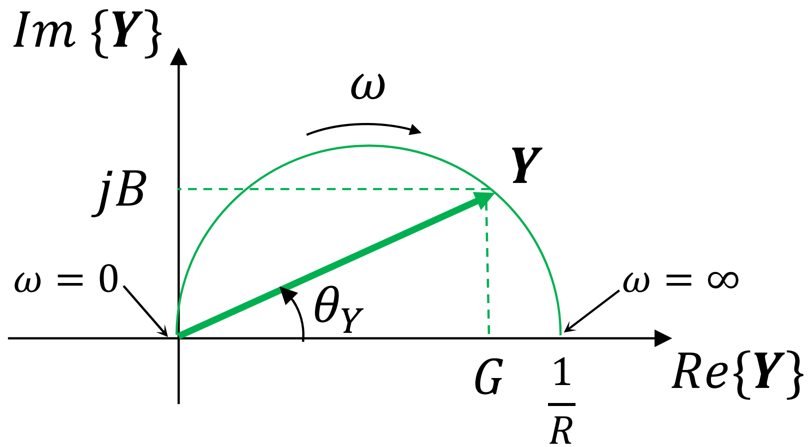


- $\boldsymbol{Y} = \frac{R}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = G + jB$
  - $\boldsymbol{Y}$の軌跡は、上半分の半円
  - $\omega = 0$のとき、$\boldsymbol{Y}$は最小。最小値は0
  - $\omega = \infty$のとき、$\boldsymbol{Y}$は最大。最大値は$\frac{1}{R}$

$\boldsymbol{Z}$のインピーダンス図



$\boldsymbol{Y}$のアドミタンス図



$\boldsymbol{Y}$の軌跡の導出

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$G = \frac{R}{R^2+X^2}, \quad \therefore R^2 + X^2 = \frac{R}{G}$$

$$B = \frac{-X}{R^2+X^2}$$

G, Bの式の両辺を2乗して加え, $R^2 + X^2 = \frac{R}{G}$を用いてXを消去。

左辺: $G^2 + B^2$

右辺: $\frac{R^2+X^2}{(R^2+X^2)^2} = \frac{1}{R^2+X^2} = \frac{G}{R}$

$$\therefore G^2 - \frac{G}{R} + B^2 = 0$$

整理して、

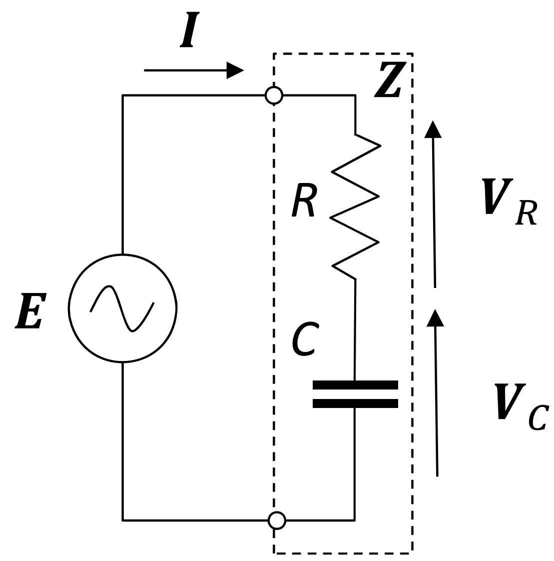
$\left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$ ……… 半径$\frac{1}{2R}$, 中心$\left(\frac{1}{2R}, 0\right)$の円

RC直列回路の正弦波応答

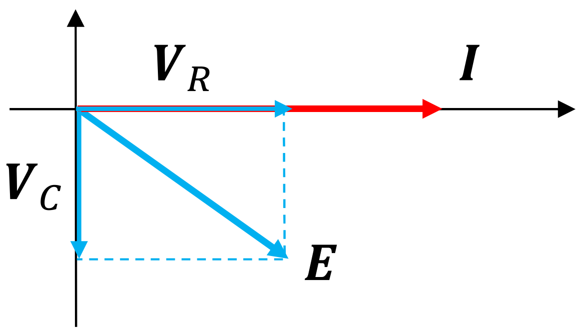
- $\boldsymbol{E} = |\boldsymbol{E}|\angle\theta_E$

このとき、

- $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{Z}|}\angle(\theta_E - \theta_Z)$
- $\boldsymbol{V}_R = R\boldsymbol{I}$ ……… $\boldsymbol{I}$と同位相
- $\boldsymbol{V}_C = \frac{\boldsymbol{I}}{j\omega C}$ ………. $\boldsymbol{I}$より90°遅れる

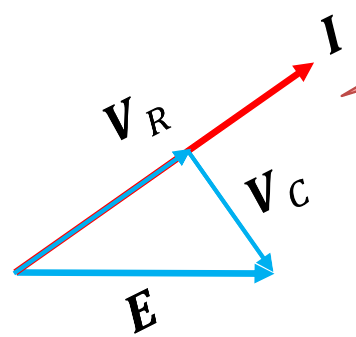


$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{V}_R, \boldsymbol{V}_C$のフェーザ図
($\boldsymbol{I}$基準)



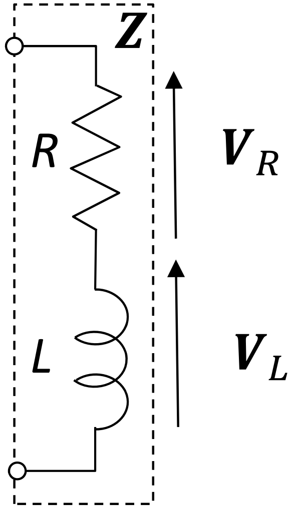
フェーザ図の別の描き方
($\boldsymbol{E}$基準)

容量性負荷なので、
$\boldsymbol{I}$は$\boldsymbol{E}$に対して進み位相。



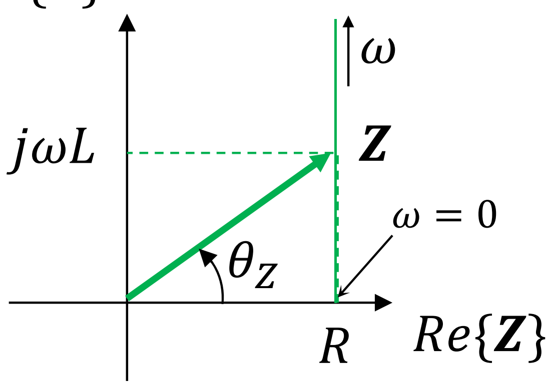
RL直列回路

- $\boldsymbol{Z} = R + j\omega L = |\boldsymbol{Z}|\angle\theta_Z,\ \theta_Z = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$
  - $\boldsymbol{Z}$の軌跡は、$Re\{\boldsymbol{Z}\} = R, Im\{\boldsymbol{Z}\} > 0$の半直線
  - $\omega = 0$のとき(つまりωLは低)、$\boldsymbol{Z}$は最小。最小値はR
  - $\omega = \infty$のとき(つまりωLは高)、$\boldsymbol{Z}$も∞に発散

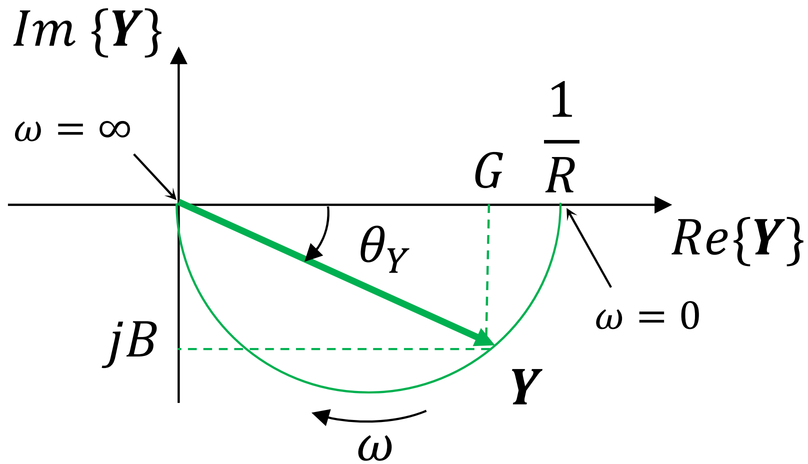


- $\boldsymbol{Y} = \frac{R}{R^2+(\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2} = G + jB$
  - $\boldsymbol{Y}$の軌跡は、下半分の半円
  - $\omega = 0$のとき、$\boldsymbol{Y}$は最大。最大値は$\frac{1}{R}$
  - $\omega = \infty$のとき、$\boldsymbol{Y}$は最小。最小値は0

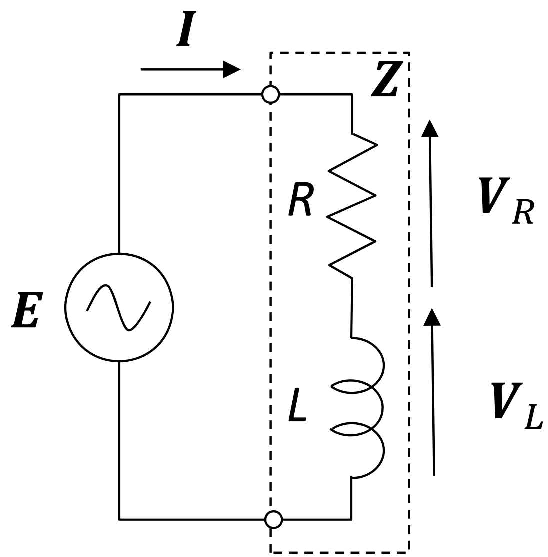
$\boldsymbol{Z}$のインピーダンス図



$\boldsymbol{Y}$のアドミタンス図



RL直列回路の正弦波応答

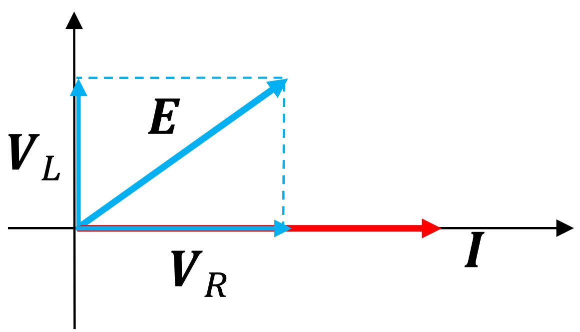


- $\boldsymbol{E} = |\boldsymbol{E}|\angle\theta_E$

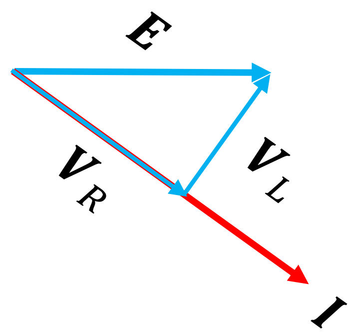
このとき、

- $\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{Z}} = \dfrac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{Z}|}\angle(\theta_E - \theta_Z)$
- $\boldsymbol{V}_R = R\boldsymbol{I}$ ……… $\boldsymbol{I}$と同位相
- $\boldsymbol{V}_L = j\omega L\boldsymbol{I}$ ………. $\boldsymbol{I}$より90° 進む

$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{V}_R, \boldsymbol{V}_C$のフェーザ図
($\boldsymbol{I}$基準)



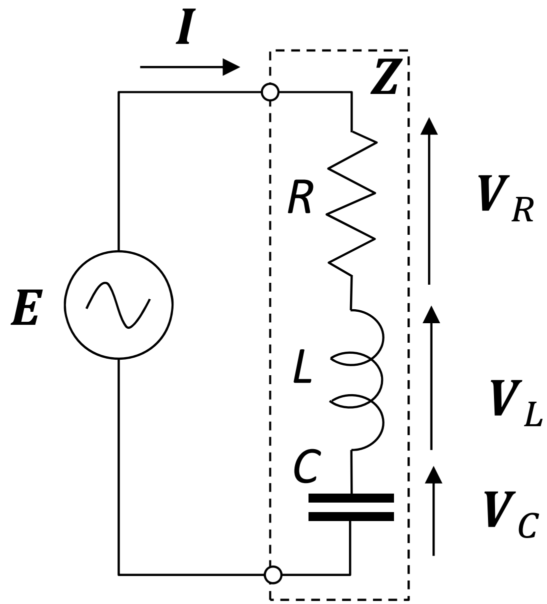
フェーザ図の別の描き方
($\boldsymbol{E}$基準)



誘導性負荷なので、
$\boldsymbol{I}$は$\boldsymbol{E}$に対して遅れ位相。

RLC直列回路

- $\boldsymbol{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |\boldsymbol{Z}|\angle\theta_Z,\ \theta_Z = \tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$
  - $\boldsymbol{Z}$の軌跡は、$Re\{\boldsymbol{Z}\} = R$の直線
  - $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$のとき、L, Cのリアクタンスが打ち消しあって0となるので、$\boldsymbol{Z}$は最小値Rをとる。この現象を共振(resonance)といい、このときの周波数ω_0を共振角周波数という。

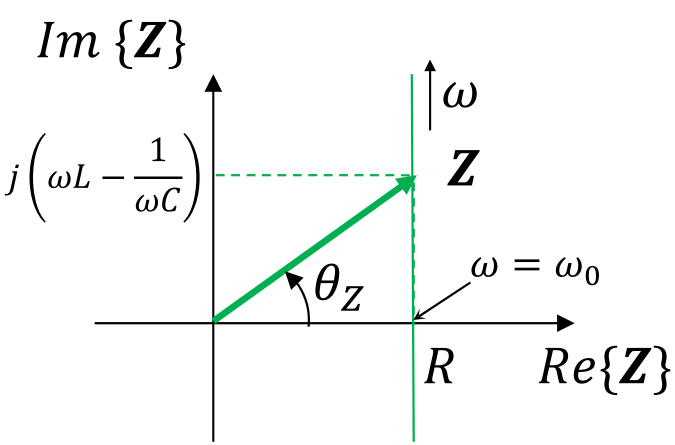


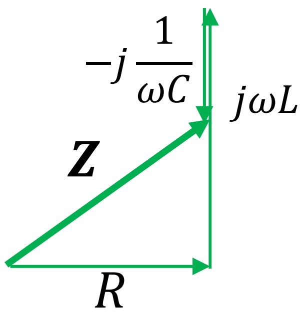
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0$$

$$\therefore f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

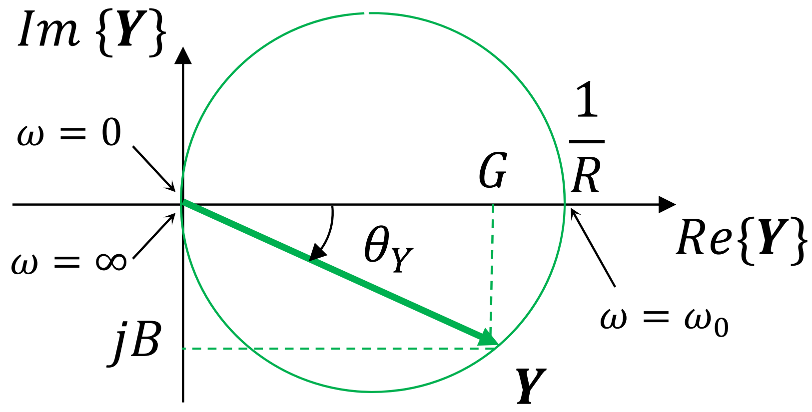
- $\boldsymbol{Y} = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - j\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = G + jB$
  - $\boldsymbol{Y}$の軌跡は円を描く

$\boldsymbol{Z}$のインピーダンス図



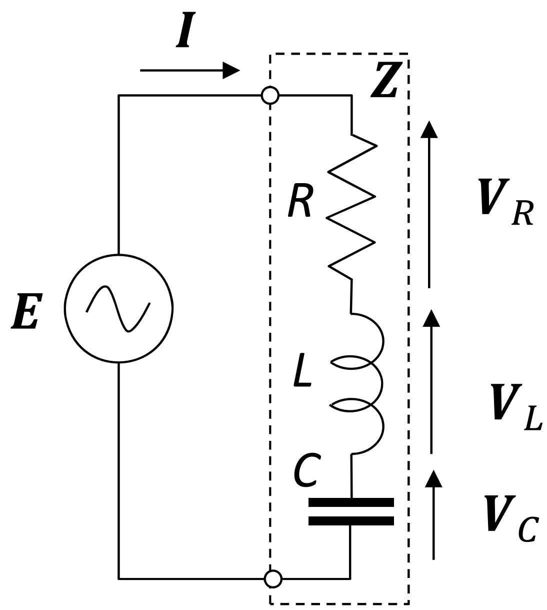


$\boldsymbol{Y}$のアドミタンス図



RLC直列回路の正弦波応答

- $\boldsymbol{Z}$はω_0で極小なので、$\boldsymbol{I}$は極大。この極大値をI_0とする。



- 共振曲線(ωと$\boldsymbol{I}$のグラフ)が鋭いほど、
  ある周波数の正弦波だけを取り出せる、
  つまり周波数選択性が高い。

- 共振曲線の鋭さは、
  共振周波数に対する半値幅の割合 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$で表す。

比帯域幅と呼ぶ

- 共振時は、CとLのリアクタンスは絶対値が等しくなる。
  このとき、リアクタンスと直流抵抗の比をQ値(quality factor)と呼ぶ。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

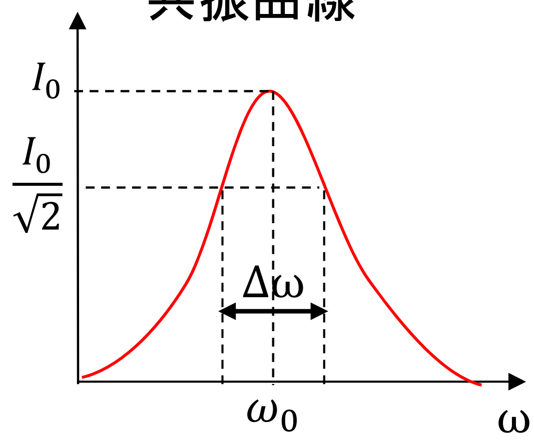
Qの定義

- 比帯域幅はQ値に反比例する

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Qの性質(導出は省略)

共振曲線

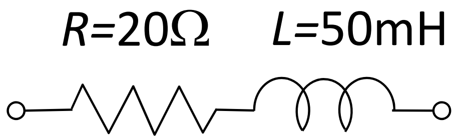


半値幅Δωとは
$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$となるωの幅

10. 演習問題

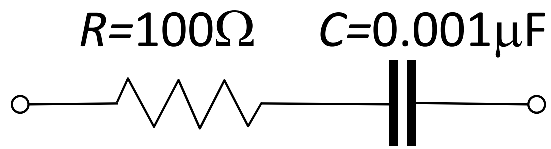
1. 下図の回路(a),(b)の合成インピーダンス$\boldsymbol{Z}$ を複素数で求め、複素平面上に作図せよ。ただし、$f = 50Hz$とする。

(a)



$f = 50Hz$

(b)



$f = 1MHz$

2. 上図(a)の回路に、$f = 60Hz$の電流$\boldsymbol{I} = 2\angle 0°$ [A] が流れているとき、$\boldsymbol{V}_R, \boldsymbol{V}_L$ および端子間電圧$\boldsymbol{V}$のフェーザ表示を求め、フェーザ図を描け。

3. *R*=10Ω, *C*=0.001μF, *L*=1mHのRLC直列回路について、共振周波数f_0と、共振時のインピーダンス$\boldsymbol{Z}_0$、比帯域幅$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$を求めよ。