5. 過渡解析の基礎

回路解析の3類型

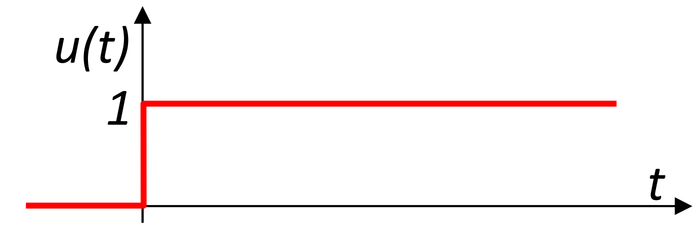
類型	解き方	電源の種類
定常解析/直流解析 (DC* analysis)	キルヒホッフの法則、テブナンの法則(時間によらない)	直流電源
過渡解析 (Transient analysis)	電流*i*(t)または電荷*q(t)*に関する**<u>微分方程式を解く</u>**。 特に電源が周期関数である場合は、周期解に限定して解く。 大抵の場合、解の形は、**<u>指数関数と三角関数</u>**の組み合わせ。	<u>関数型電源:</u> ステップ波(step function) 矩形波(square wave) 三角波(triangular wave) etc.
交流解析 (AC** analysis)	電源が単一の正弦波ならば、微分方程式の解が、複素数の四則演算で求まることを利用して、簡便に計算。	正弦波(sinusoidal wave)

* direct current , ** alternative current

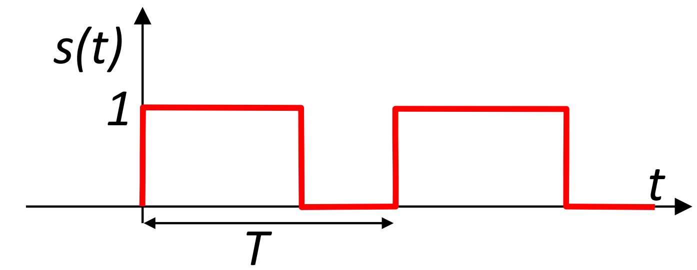
関数型電源の種類

- ステップ関数(step function)

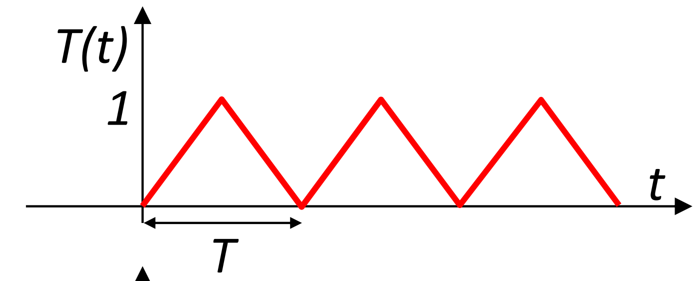
$$u(t)=\begin{cases}1 & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$



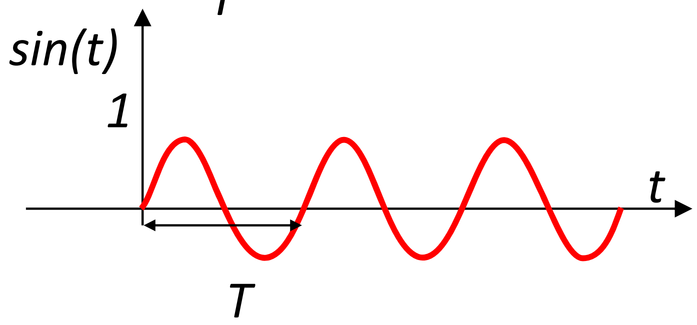
- 矩形波(Square wave)
  - ステップ関数が1の区間と、0の区間の過渡応答を繰り返す(周期解)



- 三角波(Triangular wave)
  - T(t)に対する微分方程式を愚直に解く。
  - 2-3回生でフーリエ級数、フーリエ変換を学ぶと、正弦波応答の重ね合わせでも求まることがわかる。



- 正弦波(Sinusoidal wave)
  - AC解析で詳しく扱うのでここは省略。



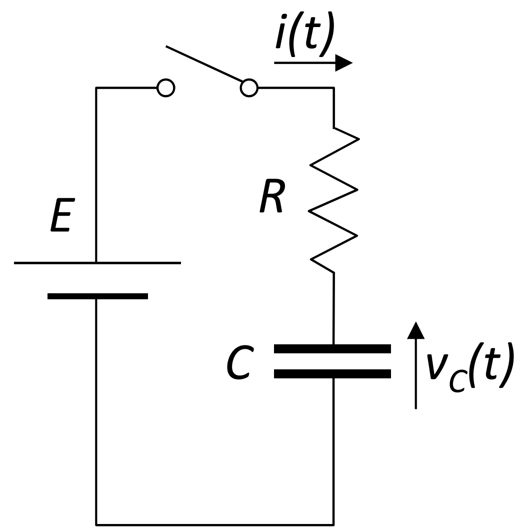
RC回路のステップ応答

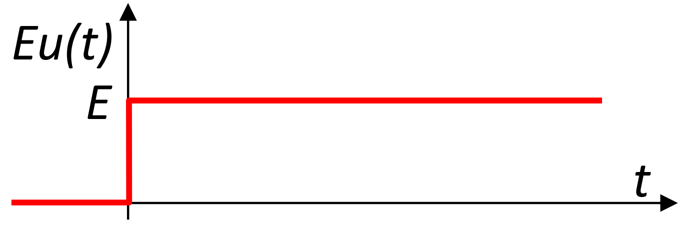
- 仮定
  - Cの初期電荷は0
  - $t = 0$でスイッチをON
- 直感的な理解
  - コンデンサはリアクタンス$\frac{1}{2\pi f C}$[Ω]の抵抗
  - $t = 0$で、RCの両端電圧は急激に増加
→高周波信号→リアクタンスほぼ0→$i(0)$はE/R
  - 時間が進むにつれてCに電荷qが貯まる
→$v_C(t)$はEと逆向き
→ $i(t)$は減少
→十分時間が経つと、$v_C(t)=E$で定常状態。
- 微分方程式とその$t \geq 0$における解

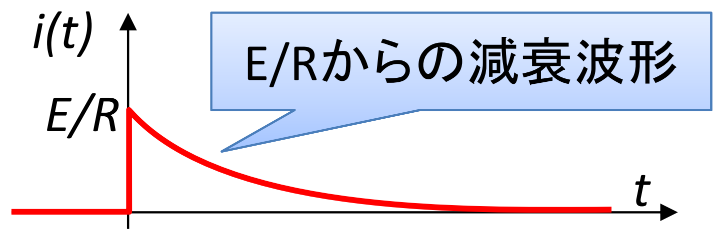
$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = Eu(t)$$

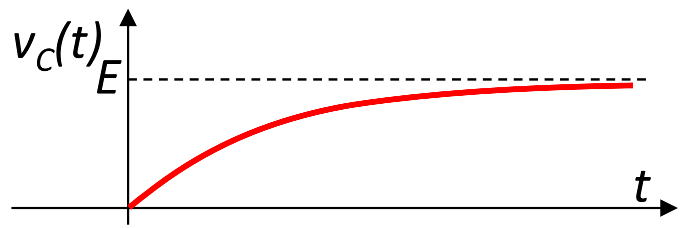
$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

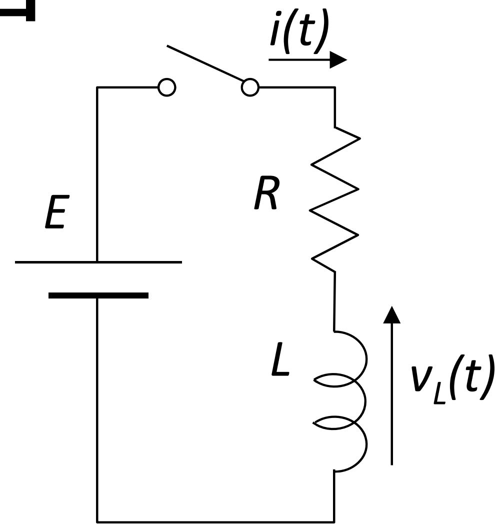








RL回路のステップ応答



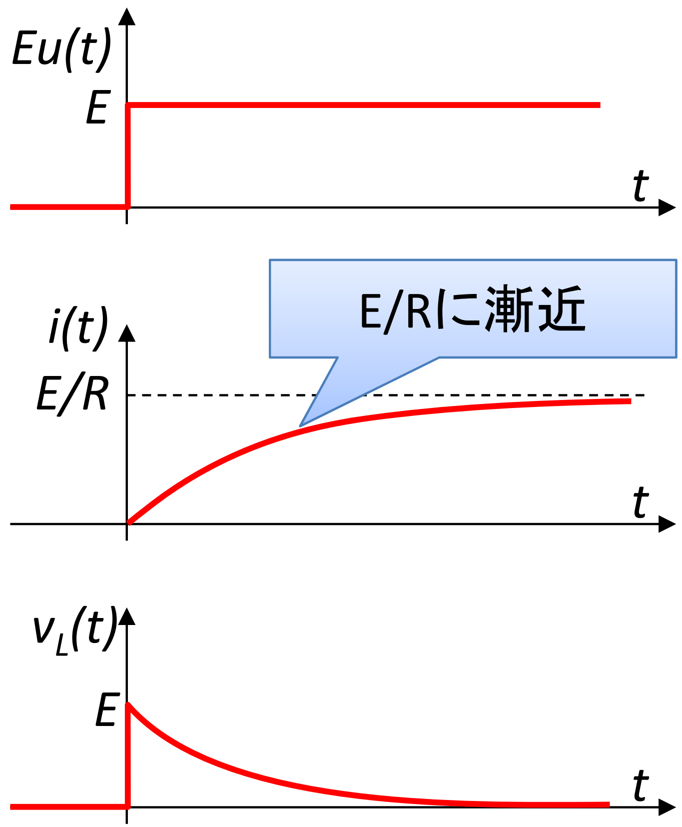
- 仮定
  - Lは帯磁0
  - $t = 0$でスイッチをON
- 直感的な理解
  - コイルはリアクタンス$2\pi f L$ [Ω]の抵抗
  - $t = 0$で、RLの両端電圧は急激に増加
    →高周波信号→リアクタンス大
    →$i(0)$は0 → Rで電圧降下しないので、$v_L(t)=E$
  - 時間が進むにつれてLのリアクタンス減少
    → $i(t)$は増加
    →十分時間が経つと、$i(t)=E/R$で定常状態。
- 微分方程式とその$t \geq 0$における解

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = Eu(t)$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$v_L(t) = Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

RC回路と双対になっていることに注意。



時定数

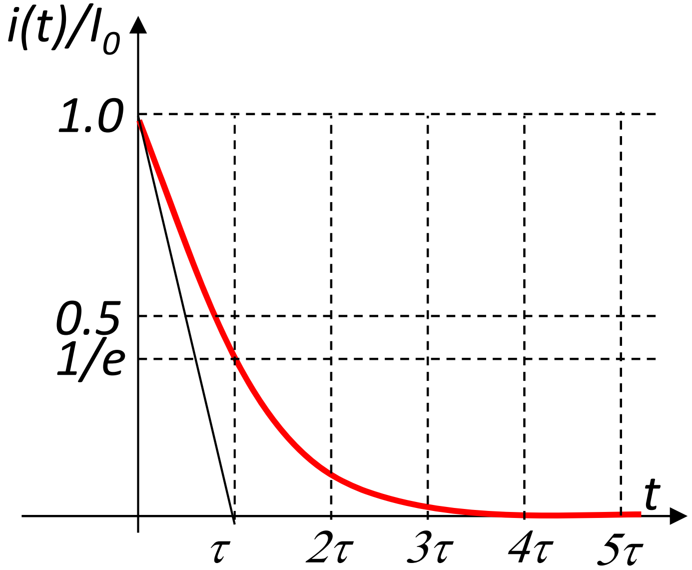
- RC, LC回路の過渡応答に含まれる指数関数の比例定数
- 記号はτ [タウ], 単位は時間[sec]
- 過渡応答が、t=0の傾きで変化し続けた場合に、定常状態に達するまでの時間を意味する。
- 実際には、$t=\tau$では$i(t)$ はI_0の1/e≒0.368くらい。
  $t=5\tau$では$i(t)$≒0.007×I_0となり、定常状態とみなせる。

- RC回路の時定数

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}} \qquad \tau_{RC} = RC$$

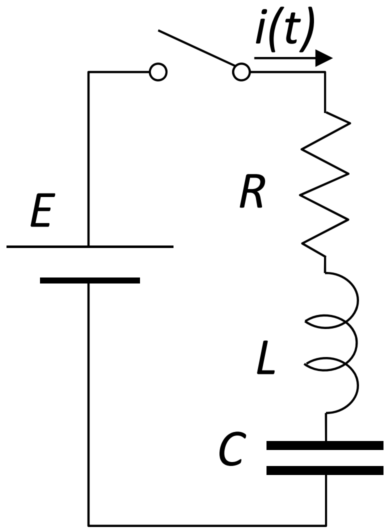
- RL回路の時定数

$$v_L(t) = E e^{-\frac{R}{L}t} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{RL}}} \qquad \tau_{RL} = \frac{L}{R}$$



RLC回路のステップ応答

1. t=0では、Cは低抵抗、Lは高抵抗。
   - 電流は高抵抗で決まるので、最初はRL回路に似て増加。
   - そのうちCが高抵抗になり、途中からRC回路に似て減少。
2. R, L, Cの値の組み合わせによっては、i(t)は**減衰振動**
   - ある周波数で増加と減少を繰り返しながら、0に近づく

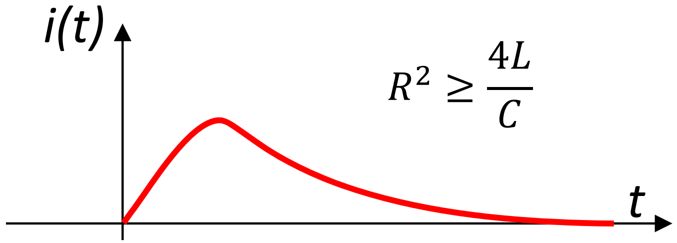


- 微分方程式とその$t \geq 0$における解

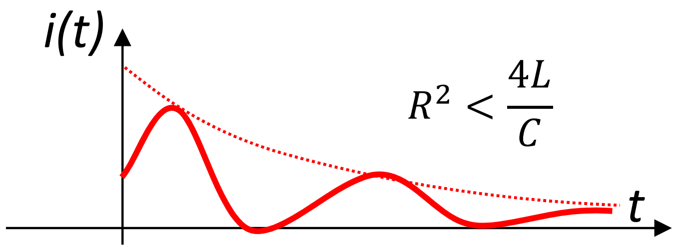
$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = Eu(t)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \beta = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \gamma = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

1. $R^2 \geq \frac{4L}{C}$のとき　$i(t) = Ee^{-\alpha t}\frac{\sinh \beta t}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{L}{C}}}$



2. $R^2 < \frac{4L}{C}$のとき　$i(t) = Ee^{-\alpha t}\frac{\sin \gamma t}{\sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{R}{2}\right)^2}}$



まとめ

- 回路解析の3類型のうち、過渡解析〔　　　　　　　　　　　　　〕は、ステップ波や矩形波などの関数型電源を印加したときの回路の応答を、微分方程式を解くことによって求める。
- RC回路のステップ波応答では、t=0付近でCのリアクタンスが〔　　　　　〕であることから、i(t)は〔　　　　　〕波形となる。
- RL回路のステップ波応答では、t=0付近でLのリアクタンスが〔　　　　　　　　　〕ことから、i(t)は、時間経過と共にE/Rに〔　　　　　〕する波形となる。
- RC/LC回路の過渡応答i(t)に出現する指数関数中の比例定数を〔　　　　　　〕と呼ぶ。これは、t=0の傾きで変化し続けた場合に〔　　　　　　　〕に達するまでの時間を意味する。
- RC回路では、i(τ)/i(0)＝〔　　　　　　　　　〕程度で、定常状態にはならない。定常状態とみなせる目安は t=〔　　　〕くらい。

5. 演習問題

1. $R=1k\Omega$, $C=10\mu F$のRC回路に、$E=3V$のステップ波を加えた。回路の電流$i(t)$の式を導き、$i(0)$の値を求めよ。また、本回路の時定数τと、$i(\tau)$の値をそれぞれ求めよ。
2. $R=100\Omega$, $L=2mH$のRL回路に、$E=10V$のステップ波を加えた。回路の電流$i(t)$の式を導き、tが十分経過した後に、$i(t)$が漸近する値を求めよ。
3. $R=100\Omega$, $C=1\mu F$, $L=10mH$のRLC回路に、$E=5V$のステップ波を加えたところ、減衰振動した。回路の電流$i(t)$の式を導き、振動の角周波数γを求めよ。
4. 3の問で、Rを別の値に変えたところ、このRLC回路が減衰振動しなくなった。このときのRの最小値はいくらか。また、そのときの時定数はいくらか。