

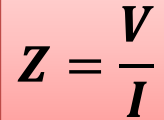
インピーダンスとアドミタンス

8. 交流回路 (2)

インピーダンスとアドミタンス

- インピーダンス(impedance)とは、正弦波交流電圧・電流の実効値の比と、位相差を表すベクトル。単位は[Ω](オーム)。
- インピーダンスも複素数表現とフェーザ表現の両方ができる。

$$Z = R + jX = |Z| \angle \theta_Z$$


$$Z = \frac{V}{I}$$

- Z の実部 R は直流抵抗、虚部 jX はリアクタンスに相当する。
- アドミタンス(admittance)とは、インピーダンスの逆数のこと。
単位は[S](ジーメンズ)
$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = |Y| \angle \theta_Y$$
- Y の実部 G はコンダクタンス(conductance)、虚部 jB はサセプタンス(susceptance)に相当する。
- 複素数/フェーザ表現された Z, Y は、とある角周波数 ω を仮定しているので、 ω が変わると Z, Y も変わることに注意。
- 電圧 V や電流 I とは異なり、 Z, Y に対応する正弦波はない。

コンデンサのインピーダンス

支配方程式: $v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$

瞬時値表現

- $i_C(t) = \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I)$
- $v_C(t) = -\frac{1}{\omega C} \sqrt{2}I_e \cos(\omega t + \theta_I)$
 $= \frac{1}{\omega C} \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I - 90^\circ)$

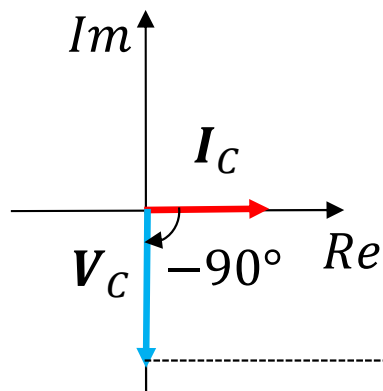
i に対して、 v は 90° 遅れ位相

電荷 Q

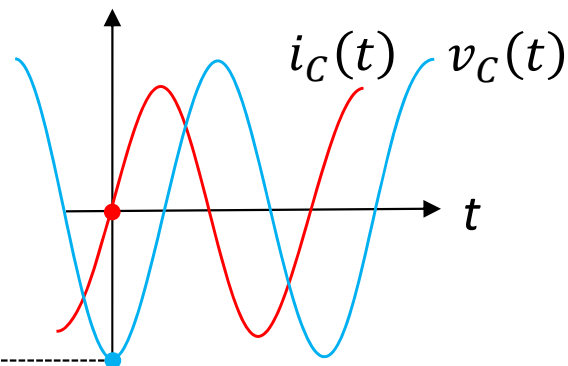
フェーザ表現

- $I_C = I_e \angle \theta_I$
- $V_C = \frac{1}{\omega C} I_e \angle (\theta_I - 90^\circ)$
- $Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$
 $= 0 - j \frac{1}{\omega C}$

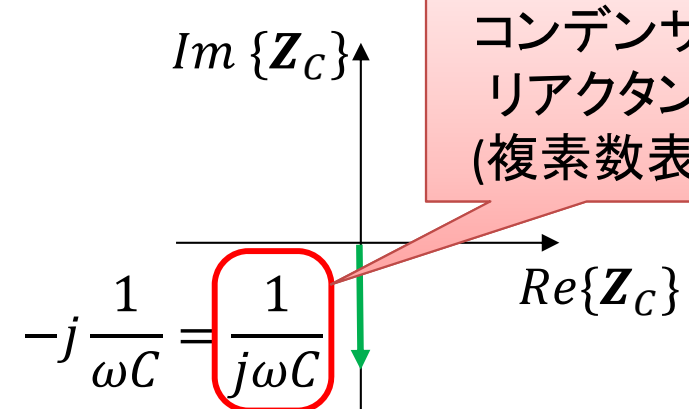
I_C, V_C のフェーザ図



I_C, V_C の瞬時値波形



Z_C のフェーザ図



コンデンサの
リアクタンス
(複素数表現)

コイルのインピーダンス

支配方程式: $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

瞬時値表現

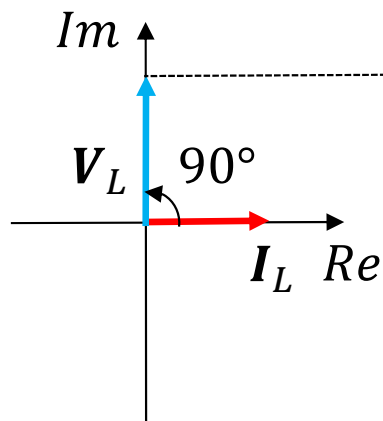
- $i_L(t) = \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I)$
- $v_L(t) = \omega L \sqrt{2}I_e \cos(\omega t + \theta_I)$
 $= \omega L \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I + 90^\circ)$

i に対して、 v は 90° 進み位相

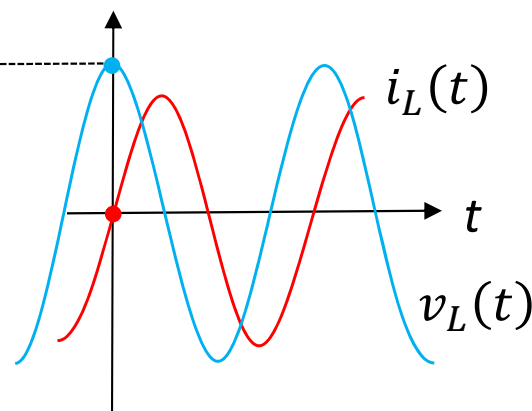
フェーザ表現

- $I_L = I_e \angle \theta_I$
- $V_L = \omega L I_e \angle (\theta_I + 90^\circ)$
- $Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \omega L \angle 90^\circ$
 $= 0 + j\omega L$

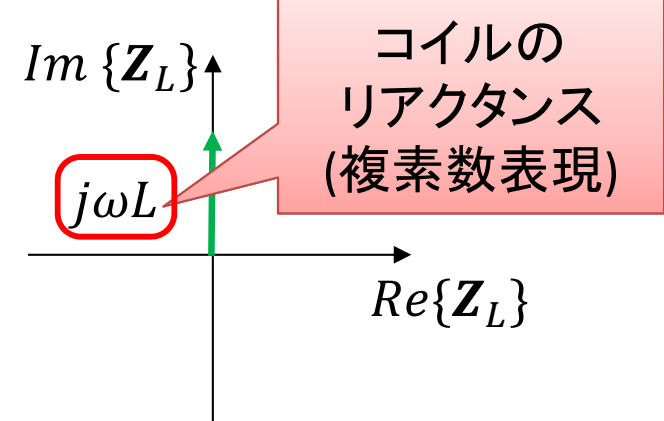
I_L, V_L のフェーザ図



I_L, V_L の瞬時値波形



Z_L のフェーザ図



抵抗のインピーダンス

支配方程式: $v_R(t) = Ri_R(t)$

瞬時値表現

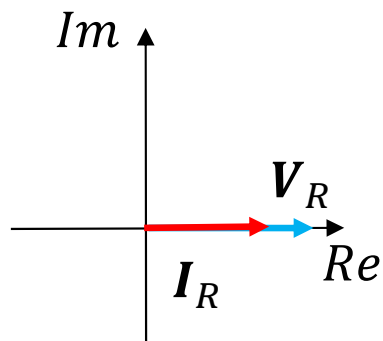
- $i_R(t) = \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I)$
- $v_R(t) = R\sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I)$
 $= R\sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta_I)$

i に対して、 v は同位相

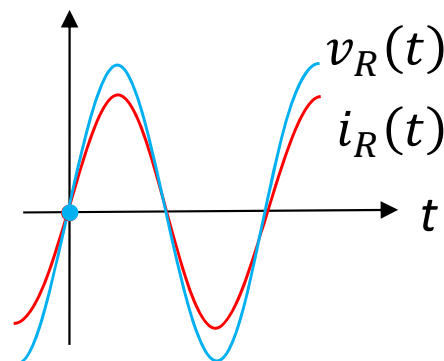
フェーザ表現

- $I_R = I_e \angle \theta_I$
- $V_R = RI_e \angle \theta_I$
- $Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R \angle 0^\circ$
 $= R - j0$

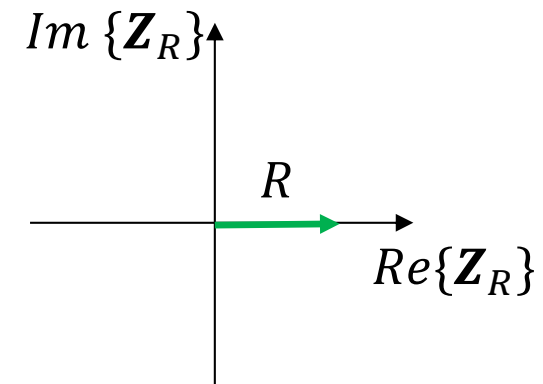
I_R, V_R のフェーザ図



I_R, V_R の瞬時値波形



Z_R のフェーザ図

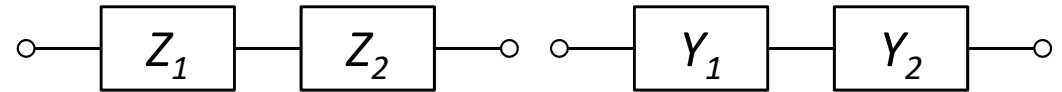


インピーダンス・アドミタンスの性質

- 直列接続

$$Z = Z_1 + Z_2$$

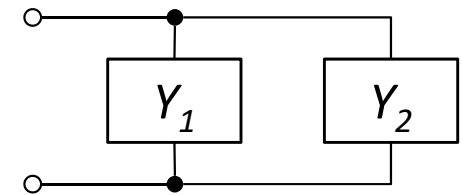
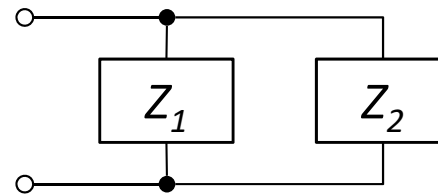
$$Y = Y_1 // Y_2 = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$$



- 並列接続

$$Z = Z_1 // Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$



- インピーダンスとアドミタンスの変換

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} + \frac{-jX}{R^2 + X^2}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{(G + jB)(G - jB)} = \frac{G}{G^2 + B^2} + \frac{-jB}{G^2 + B^2}$$

インピーダンスを用いたAC解析

Q1:

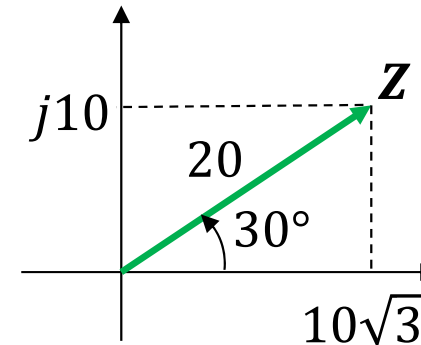
$Z = 10\sqrt{3} + j10 [\Omega]$,
 $V = 100\angle 0^\circ [\text{V}]$ のとき、 I を求めよ。

A1:

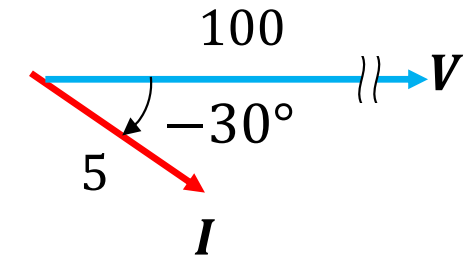
$$|Z| = 20, \theta_Z = 30^\circ, \therefore Z = 20\angle 30^\circ$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{20\angle 30^\circ} = 5\angle -30^\circ [\text{A}]$$

Z のフェーザ図



I, V のフェーザ図

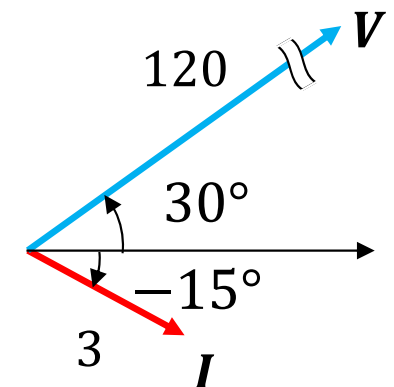
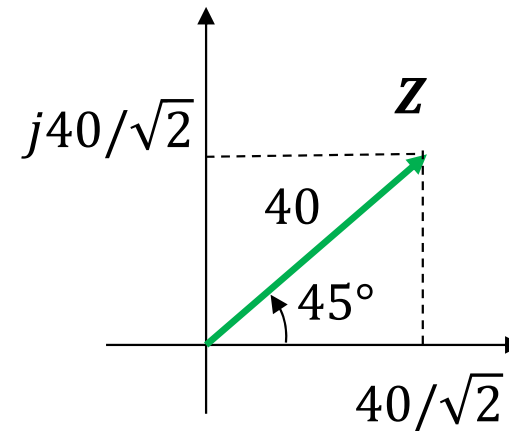


Q2:

$Z = 40\angle 45^\circ [\Omega]$,
 $I = 3\angle -15^\circ [\text{A}]$ のとき、 V を求めよ。

A2:

$$V = ZI = (40 \times 3)\angle (45^\circ - 15^\circ) \\ = 120\angle 30^\circ [\text{V}]$$



直流解析と同様にオームの法則をたて、ベクトルの加減乗除で波形が求まる！

まとめ

- インピーダンス $[Z]$ とは、正弦波交流電圧・電流の $[V]$ と、 $[I]$ を表すベクトル。
- インピーダンスの $[Z]$ 部 jX は $[X]$ といい、コンデンサ C では $[-1/\omega C]$ $[\Omega]$, コイル L では $[\omega L]$ $[\Omega]$
- アドミタンス $[Y]$ とはインピーダンス Z の逆数で、単位は $[1/Z]$ 。 Y の実部 G はコンダクタンス $[G]$ 、虚部 jB はサセプタンス $[B]$ という。
- 受動回路のAC解析は、 $[Z]$ と同様にオームの法則やキルヒホッフの法則を用いて V, I, Z の方程式をたてれば、微分方程式を解かなくても、ベクトル(フェーザ)の $[Z]$ で求まる。

8. 演習問題

- 以下の素子に周波数50Hzの正弦波電圧 $V = 100\angle 0^\circ$ [V]を加えた時のインピーダンス Z_R, Z_C, Z_L を複素数(極形式)で求めよ。
さらに、各素子に流れる複素電流 I_R, I_C, I_L をフェーザで求め、フェーザ図を描け。
 - 抵抗 $R=25\Omega$
 - コンデンサ $C=100\mu\text{F}$
 - コイル $L=20\text{mH}$
- インピーダンス $Z = 30 + j40$ [Ω]の受動回路に、交流電源 $E = 100 + j0$ [V]を加えたとき、回路に流れる電流 I を求めよ。
- 電圧 $V = 100\angle 30^\circ$, 電流 $I = 5\angle -30^\circ$ のとき、インピーダンス $Z = V/I$ をフェーザおよび直交形式の両方で求めよ。
- インピーダンス $Z_1 = 20 + j30$ [Ω], $Z_2 = 15 + j25$ [Ω]の直列回路の合成インピーダンス Z および合成アドミタンス Y を求めよ。