

# 卒論（タイトル未定）

元論文: Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs

宮路 宙澄

November 15, 2025

## Abstract

KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]. KTGsにおいて “edge unzip” という操作のみ準同型にならず、補正項が現れる. dotted Knotted Trivalent Graphs において  $Z^{old}$  が準同型となるように  $Z$  を 2通りで構成することが目的.

## Contents

I	Introduction	2
II	Preliminaries	2
1	KTGs and $Z^{old}$	2
2	Algebraic structures and expansions	7

# Part I

## Introduction

Knotted Trivalent Graphs(Knots や links を含む) のなす空間には良い構造がある。次の4つの操作がある: orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum. KTGs は有限生成である [Thu02]。KTGs は Knot genus(ザイフェルト曲面?) や ribbon property(ribbon knot? 自己交差あり)などの良い代数構造をもつため、それらを使うことが出来る [BN]。

Knots の Kontsevich integral は universal Vassiliev invariant に拡張できる。その中でも unzip 以外が準同型になる。

- unzip, delete, connected sum を “tree connected sums” と呼ばれるより一般的な操作へ変える。
- unzip が出来る edge を制限する。

簡単に  $Z^{old}$  を dKTGs で準同型にすることができ、dKTGs は KTGs の良い性質をすべて保つことを示す。有限生成や close connection to Drinfel'd associators (知らん) など。

# Part II

## Preliminaries

### 1 KTGs and $Z^{old}$

**Definition 1.1.** *Trivalent graph*(3価グラフ)とは、各頂点が3つの辺をもつようなグラフをいう。

全ての辺は向きづけられているものとし、頂点は反時計回りに向きを与える。ループや円などの辺を許すこととする。

**Definition 1.2.** *Surface*(曲面)とは第2可算公理<sup>1</sup>を満たす2次元多様体をいう。

**Definition 1.3.**  $K$ を単体複体、 $\sigma, \tau \in K$ を以下の条件を満たすとする。

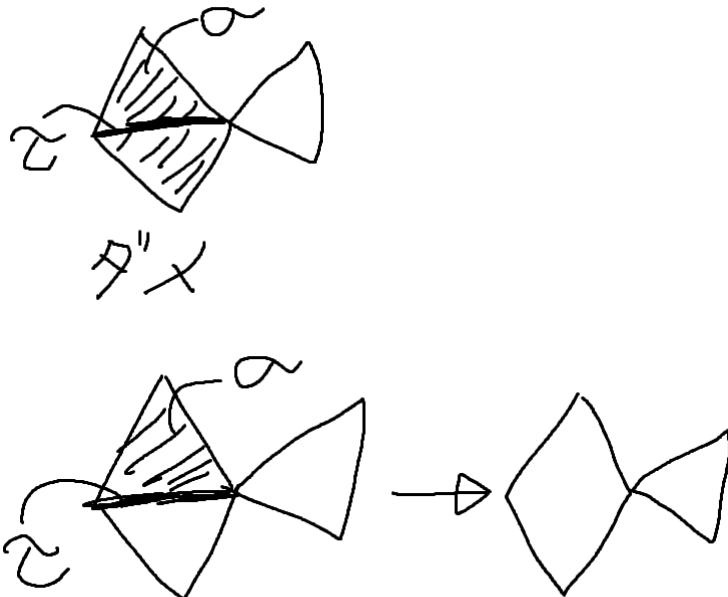
- $\tau \not\subset \sigma$ ,

---

<sup>1</sup>高々可算な開基を持つ。

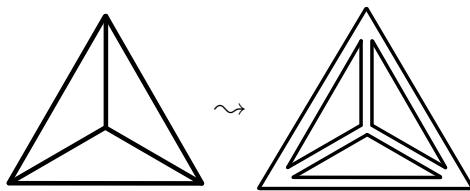
- $\sigma$  は  $K$  の最大の面単体で、他の最大面単体は  $\tau$  を含まない。このような  $\tau$  を free face という。

このとき、 $K$  の collapse とは、 $\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$  となる  $\gamma$  をすべて取り除くことをいう。



**Definition 1.4.** 単体複体  $K$  における spine(スパイン) とは、 $K$  の部分単体複体  $K'$  であって、 $K$  を collapse して  $K'$  となるものをいう。

**Definition 1.5.** graph  $\Gamma$  に対し framed graph (枠付きグラフ)  $\Gamma$  とは、 $\Gamma$  と、 $\Gamma$  を spine として曲面  $\Sigma$  へ埋め込む<sup>2</sup>写像  $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$  の組をいう。特に  $\Gamma$  が Trivalent graph のとき、 $\Gamma$  を framed trivalent graph<sup>3</sup> という。



**Definition 1.6.** Knotted trivalent graph (KTG) を、framed trivalent graph  $\gamma$  から  $\mathbb{R}^3$  への埋め込み、KTG の skeleton を trivalent graph  $\Gamma$  とする。(framed knots や links も含む)

---

<sup>2</sup> グラフを 1 次元 CW 複体とみなす。

<sup>3</sup> 論文では thickened trivalent graph と書いてある。

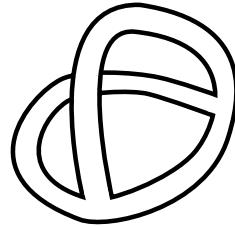


Figure 1: Knotted Trivalent Graph の例

KTGsにおいて, skeleton が isotopy で移りあうものを同一視する. 特に, framed knots や links は KTGs の特別な場合である. Trivalent graph  $\Gamma$  に対し, すべての KTG の集合を  $\mathcal{K}(\Gamma)$  と書き,  $\mathcal{K} := \bigcup_{\Gamma} \mathcal{K}(\Gamma)$  とする.

**Proposition 1.7.** Framed knots と, framed knot の diagrams で 3つの Reidemeister 変形  $R1', R2, R3$  の操作で移りあうものを同一視したものは 1 対 1 に対応する.

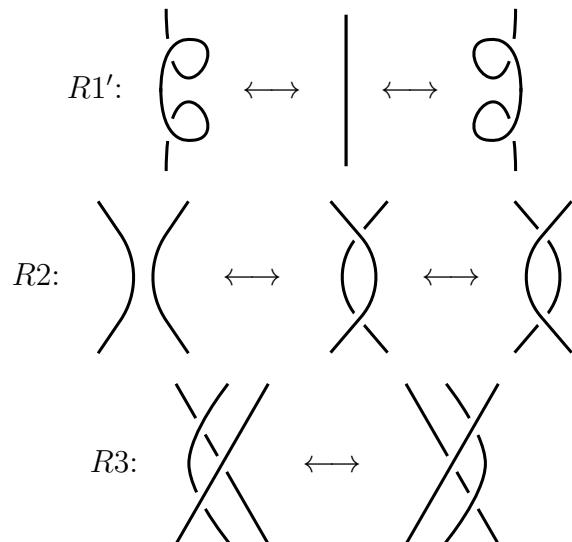


Figure 2: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

*Proof.* [Oht02] P15 Theorem 1.8

□

**Proposition 1.8.** KTGs の isotopy class と graph diagrams (交点の上下の情報を残した射影) で  $R1', R2, R3, R4$  で移りあうものは 1 対 1 に対応する.

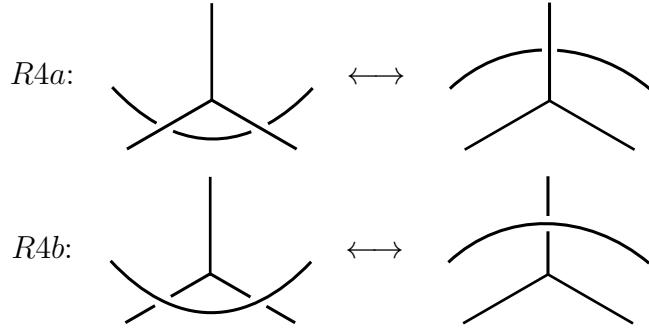


Figure 3: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

*Proof.*

□

KTGs には以下の 4 つの操作がある.

**Definition 1.9.** Trivalent graph を  $\Gamma$ , KTG を  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  とし,  $\Gamma$  の edge を  $e$  とする.  $e$  の *switch the orientation* を, 向きを変えるものとして定め,  $S_e(\gamma)$  と書く.

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

図

**Definition 1.10.**  $\Gamma$  の edge であって, 両端に接続されている edge の向きが一致している  $e$  を *delete* するとは,  $e$  を削除し, 三価性を保つように  $e$  の両端の頂点を削除することをいう.

$$d_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(d_e(\Gamma)); \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$

図

**Definition 1.11.**  $\Gamma$  の edge  $e$  を *unzip* するとは,  $e$  を “限りなく近い” 2 つの edges に分け, 端点をなくすことをいう. 端点をなくしたとき, edge の向きが合っていることが必要である. 同様の議論で framed graph  $\Gamma$  に対し, unzip を定義できる.

$$u_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(u_e(\Gamma)); \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$

図

**Definition 1.12.** 2 つの trivalent graph とその edge のペア  $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$  の *connected sum*  $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$  とは  $e, f$  をつなぐ edge を新たに作ること. well-defined であるために, 新たな edge の向きは  $\Gamma$  から  $\Gamma'$  への向きとし, KTGs においてはねじれを許さず, 辺を付ける場合は  $e, f$  の右側に付けるとする. (2 次元では自由に動かせないため左右が重要)

$$\#_{e,f}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K};$$

図

KTGs の finite type invariants は, links へのものを単に拡張する. 同じ skeleton の KTGs の形式和を許し, 得られたベクトル空間を特異点の解消によってフィルター分けする.

$$\mathcal{F}^0(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \Gamma \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \Gamma_i \in \mathcal{K}(\Gamma) \right\}$$

を KTGs の有限な形式和全体がなす  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間とする.

**Definition 1.13.** *n-singular KTG* とは,  $n$  この特異点を持つ trivalent graph の  $\mathbb{R}^3$  へのめ込み. 各特異点は横断的な 2 重点か, “F” と書かれた線上の点である.

$n \geq 1$  に対し以下のようなベクトル空間を考える.

$$\mathcal{F}^n(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \Gamma \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \Gamma'_i: \Gamma \text{を骨格とし少なくとも } n \text{ この特異点を持つ KTG} \right\}$$

特異点を解消する写像として,

$$\rho: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^0,$$

であって, 以下のように定めるものを考える:

図

$\mathcal{F}^n(n \geq 1)$  に対し,  $\rho$  で送ると,

$$\mathcal{F}^0 \supset \rho(\mathcal{F}^1) \supset \rho(\mathcal{F}^2) \cdots.$$

という filtration が得られる. この filtration に対する associated graded space として,

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \prod_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i(\Gamma) / \mathcal{F}^{i+1}(\Gamma)$$

とする.

$\mathcal{A}(\Gamma)$  は chord diagram を用いて表すことができる.

**Definition 1.14.** skeleton graph  $\Gamma$  上の  $n$  次の *chord diagram* とは,  $\Gamma$  の辺上の  $2n$  この点のペアからなる組み合わせ的なものであり, 辺の向きを保つ同相写像で移りあうものを同一視する. 特に, 次数  $n$  の chord diagram を基底とする  $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間を  $\mathcal{D}_n(\Gamma)$  と書く.

**Proposition 1.15.**  $\pi: \mathcal{D}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$  は well-defined であり surjective.

aaaaasadafa

*Proof.* この論文だけ  $\mathcal{A}(\Gamma)$  の構成法が違うので一旦パス. (結局は  $\{\text{Chord diagrams}\}/(\text{VI}, \text{4T}) \cong \mathcal{A}$  のはず)  $\square$

上記の写像の kernel に含まれる 2 つの関係式がある. (要証明  $\leftarrow$  goodnote と Alge Knot Theory のノートでできたはず)(Ker が一致するとはまだ言ってない)

- (4T) Four term relation 図
- (VI) Vertex invariance relation 図

図に描かれていない部分には graph があるが, それらは全て同じでなければならぬ. 4T では反時計回りの向きを与える(これ必要?). VI において,  $(-1)^{\rightarrow}$  は, chord の付いた edge が外向きなら -1, 内向きなら 1 をかける(つまり式は 8 つある).

4T, VI の relations が存在することは分かったが, これ以上の relation が存在“しない”ことを示すのは困難である. これを示すには, universal finite type invariant  $\mathbb{Q}\text{KTG} \rightarrow \mathcal{A}$  を構成するのが最善である(ここでは定義しないが, 後で一般の文脈で定義する). これは, T.Le, H.Murakami, J. Murakami, T.Ohtsuki の結果をもとに, また Drinfeld の associator の理論を用いて [KO, CD],[BN] での Kontsevich integral を拡張する形で [MO97] で初めて得られた.

KTGs の各 operation は  $\mathcal{A}$  上の operation を誘導する. ( $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{K}(\Gamma)$  の associated graded space である. )

- orientation switch
- edge delete
- edge unzip
- connected sum well-defined である. Introduction to Vassiliev knot invariants(Chmutov) の Lemma4.2.9

**定理 1.16.** KTGs は trivially embedded tetrahedron と twisted tetrahedron の列により有限生成.

## 2 Algebraic structures and expansions

## References

- [BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.
- [CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.
- [Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.
- [MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Oht02] T. Ohtsuki. *Quantum Invariants: A Study of Knots, 3-manifolds, and Their Sets*. K & E series on knots and everything. World Scientific, 2002.
- [Thu02] Dylan P Thurston. The algebra of knotted trivalent graphs and turaev’s shadow world. *Geometry & Topology Monographs*, 4:337–362, 2002.