

2025 年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 卒業研究

# Homomorphic Expansions for Knotted Trivalent Graphs

2264246 宮路 宙澄

指導教員：野崎 雄太 准教授（2026 年 1 月 30 日）

指導教員印	受理印

## Abstract

【保留】KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]. KTGs において “edge unzip” という操作のみ準同型にならず, 補正項が現れる. dotted Knotted Trivalent Graphs において  $Z^{old}$  が準同型となるように  $Z$  を 2 通りで構成することが目的.

It has been known since old times [MO97, CL07, Dan10] that there exists a universal finite type invariant  $Z^{old}$  for Knotted Trivalent Graphs. While the behavior of  $Z^{old}$  under edge unzip is well understood, it is not plainly homomorphic as some “correction factors” appear.

In this paper we modify  $Z^{old}$  into a new expansion  $Z$ , defined on “dotted Knotted Trivalent Graphs”, which is homomorphic with respect to a large set of operations.

## Contents

I	Introduction	3
II	Preliminaries	4
1	KTGs and $Z^{old}$	4
2	Algebraic structures and expansions	11

## Part I

# Introduction

結び目理論とは位相幾何学の分野の一つであり，物理学とも関係する分野である．その中でも，結び目同士が異なるかどうかを区別する際に手段として使われるものとして結び目の不変量というものがある．

## 謝辞



## Part II

# Preliminaries

## 1 KTGs and $Z^{old}$

全ての辺は向きづけられているものとし、頂点は反時計回りに向きを与える。ループや円などの辺を許すこととする。 All edges are oriented, and the vertices are given a counterclockwise orientation. Loops are allowed.

**Definition 1.1.** *Surface*(曲面) とは第2可算公理<sup>1</sup>を満たす2次元多様体という。 A *surface* is a 2-dimensional manifold that satisfies the second-countable axiom.

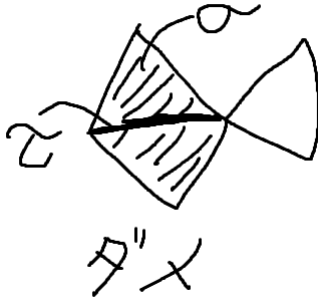
**Definition 1.2.**  $K$  を単体複体,  $\sigma, \tau \in K$  を以下の条件を満たすとする。

- $\tau \not\preceq \sigma$ ,
- $\sigma$  は  $K$  の最大の面単体で, 他の最大面単体は  $\tau$  を含まない. このような  $\tau$  を *free face* という.

このとき,  $K$  の *collapse* とは,  $\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$  となる  $\gamma$  をすべて取り除くことをいう。 Let  $K$  be a simplicial complex, and let  $\sigma, \tau \in K$  satisfy the following conditions:

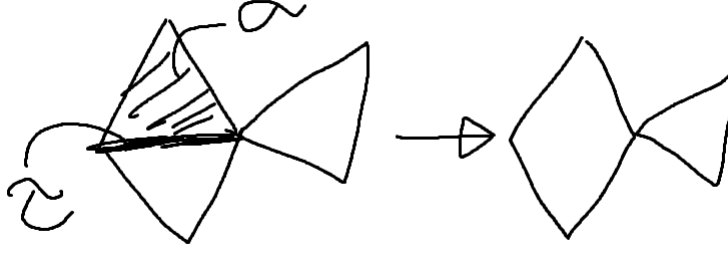
- $\tau \not\preceq \sigma$ ,
- $\sigma$  is a maximal face simplex of  $K$ , and no other maximal face simplex contains  $\tau$ . Such a  $\tau$  is called a *free face*.

Then, a *collapse* of  $K$  is the removal of all  $\gamma$  such that  $\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$ .



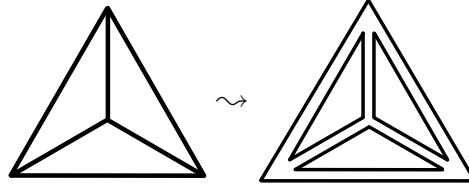
---

<sup>1</sup>高々可算な開基を持つ。



**Definition 1.3.** 単体複体  $K$  における *spine*(スパイン) とは,  $K$  の部分単体複体  $K'$  であって,  $K$  を collapse して  $K'$  となるものをいう. A *spine* of a simplicial complex  $K$  is a sub-simplicial complex  $K'$  such that  $K$  collapses to  $K'$ .

**Definition 1.4.** graph  $\Gamma$  に対し *framed graph* (枠付きグラフ)  $\Gamma$  とは,  $\Gamma$  と,  $\Gamma$  を spine として曲面  $\Sigma$  へ埋め込む<sup>2</sup>写像  $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$  の組をいう. 特に  $\Gamma$  が Trivalent graph のとき,  $\Gamma$  を *framed trivalent graph*<sup>3</sup>という. For a graph  $\Gamma$ , a *framed graph*  $\Gamma$  is a pair of  $\Gamma$  and an embedding  $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$  into a surface  $\Sigma$  such that  $\Gamma$  is a spine of  $\Sigma$ . In particular, when  $\Gamma$  is a trivalent graph,  $\Gamma$  is called a *framed trivalent graph*.



**Definition 1.5.** *Knotted trivalent graph (KTG)* を, framed trivalent graph  $\gamma$  から  $\mathbb{R}^3$  への埋め込み, KTG の *skeleton* を trivalent graph  $\Gamma$  とする. (framed knots や links も含む)

A *Knotted Trivalent graph (KTG)* is an embedding of a framed trivalent graph  $\gamma$  into  $\mathbb{R}^3$ . The *skeleton* of a KTG  $\gamma$  is the combinatorial object (trivalent graph  $\Gamma$ ) behind it.

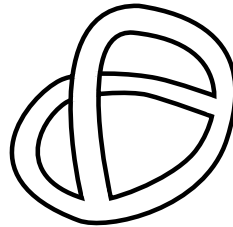


Figure 1: Knotted Trivalent Graph の例

<sup>2</sup>グラフを 1 次元 CW 複体とみなす.

<sup>3</sup>論文では thickened trivalent graph と書いてある.

KTGs において, skeleton が isotopy で移りあうものを同一視する. 特に, framed knots や links は KTGs の特別な場合である. Trivalent graph  $\Gamma$  に対し, すべての KTG の集合を  $\mathcal{K}(\Gamma)$  と書く. We identify KTGs whose skeletons are isotopic. For a trivalent graph  $\Gamma$ , we denote the set of all KTGs with skeleton  $\Gamma$  by  $\mathcal{K}(\Gamma)$ .

**Proposition 1.6.** *Framed links と, framed link の diagrams で 3つの Reidemeister 変形  $R1', R2, R3$  の操作で移りあうものを同一視したものは 1対1 に対応する. Two framed links are isotopic if and only if their diagrams are related by a finite sequence of Reidemeister moves  $R1', R2, R3$ .*

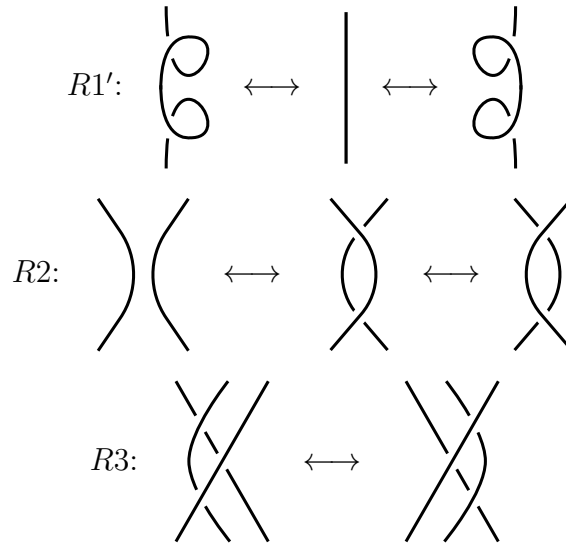


Figure 2: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

*Proof.* [Oht02] P15 Theorem 1.8 □

**Proposition 1.7.** *KTGs の isotopy class と graph diagrams (交点の上下の情報を残した射影) で  $R1', R2, R3, R4$  で移りあうものは 1対1 に対応する. Two KTGs are isotopic if and only if their graph diagrams are related by a finite sequence of Reidemeister moves  $R1', R2, R3, R4$ .*

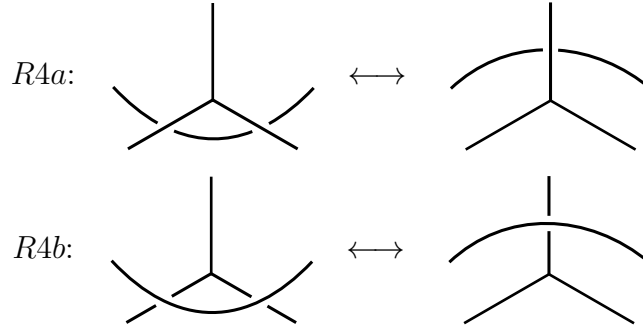


Figure 3: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

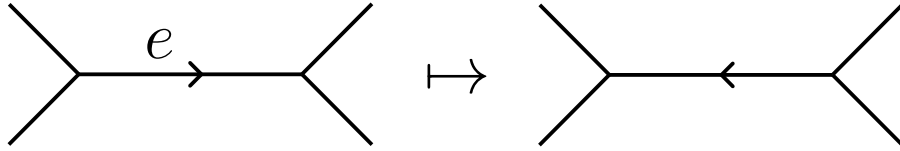
*Proof.*

□

There are four operations on KTGs:

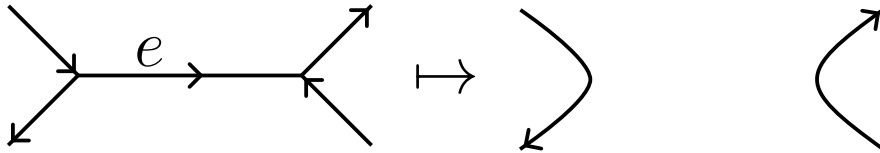
**Definition 1.8.** KTG を  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  とし,  $\Gamma$  の edge を  $e$  とする.  $e$  の *switch the orientation* を, 向きを変えるものとして定め,  $S_e(\gamma)$  と書く. Let  $\Gamma$  be a trivalent graph and let  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  be a KTG, and  $e$  be an edge of  $\Gamma$ . The *switch the orientation* of  $e$  is defined as reversing its orientation, and is denoted by  $S_e(\gamma)$ .

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$



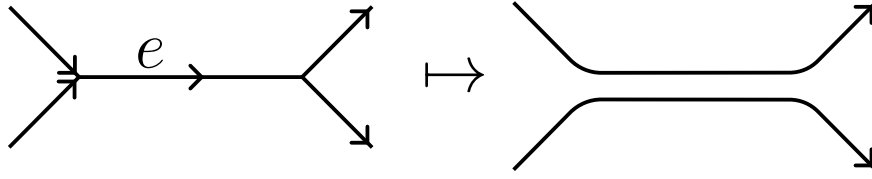
**Definition 1.9.**  $\Gamma$  の edge であって, 両端に接続されている edge の向きが一致している  $e$  を *delete* するとは,  $e$  を削除し, 三価性を保つように  $e$  の両端の頂点を削除することをいう. Let  $\Gamma$  be a trivalent graph and let  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  be a KTG, and let  $e$  be an edge of  $\gamma$ . *Delete* of  $e$  is defined as removing  $e$  and the two vertices at the ends of  $e$  also cease to exist to preserve the trivalence. To do this, it is required that the orientations of the two edges connecting to  $e$  at either end match.

$$d_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(d_e(\Gamma)); \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$



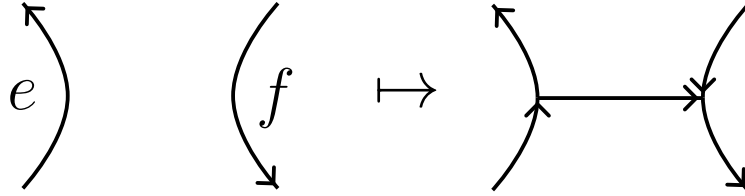
**Definition 1.10.**  $\Gamma$  の edge  $e$  を *unzip* するとは,  $e$  を “限りなく近い” 2 つの edges に分け, 端点をなくすことをいう. 端点をなくしたとき, edge の向きが合っていることが必要である. 同様の議論で framed graph  $\Gamma$  に対し, unzip を定義できる. Let  $\Gamma$  be a trivalent graph and let  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  be a KTG, and let  $e$  be an edge of  $\gamma$ . *Unzip* the edge  $e$  is replacing it by two edges that are “very close to each other”. The two vertices at the ends of  $e$  will disappear. Again the edges at the vertex where  $e$  begins have to both be incoming, while the edges at the vertex where  $e$  ends must both be outgoing.

$$u_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(u_e(\Gamma)); \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$



**Definition 1.11.** 2 つの trivalent graph とその edge のペア  $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$  の *connected sum*  $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$  とは  $e, f$  をつなぐ edge を新たに作ること. well-defined であるために, 新たな edge の向きは  $\Gamma$  から  $\Gamma'$  への向きとし, KTGs においてはねじれを許さず, 辺を付ける場合は  $e, f$  の右側に付けるとする. (2次元では自由に動かさないため左右が重要) Let  $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$  be two pairs of trivalent graphs and their edges. The *connected sum*  $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$  is obtained by joining  $e$  and  $f$  by a new edge. For this to be well-defined, we also need to specify the direction of the new edge, the cyclic orientations at each new vertex, and in the case of KTGs, the framing on the new edge. To compress notation, let us declare that the new edge be oriented from  $\Gamma$  towards  $\Gamma'$ , have no twists, and, using the blackboard framing, be attached to the right side of  $e$  and  $f$ .

$$\#_{e,f}: \mathcal{K}(\Gamma) \times \mathcal{K}(\Gamma') \rightarrow \mathcal{K}(\Gamma \#_{e,f} \Gamma')$$



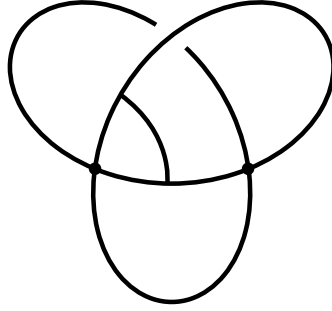
KTGs の finite type invariants は, links におけるものと同様に定義する. 同じ skeleton の KTGs の形式和を許し, 得られたベクトル空間を特異点の解消によってフィルター分けする.



$$\mathcal{F}_0(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \gamma_i \in \mathcal{K}(\Gamma) \right\}$$

を KTGs の有限な形式和全体がなす  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間とする.

**Definition 1.12.** *n-singular KTG* とは,  $n$  この特異点を持つ trivalent graph の  $\mathbb{R}^3$  へのはめ込み. 各特異点は横断的な 2 重点か, “ $F$ ” と書かれた線上の点である.



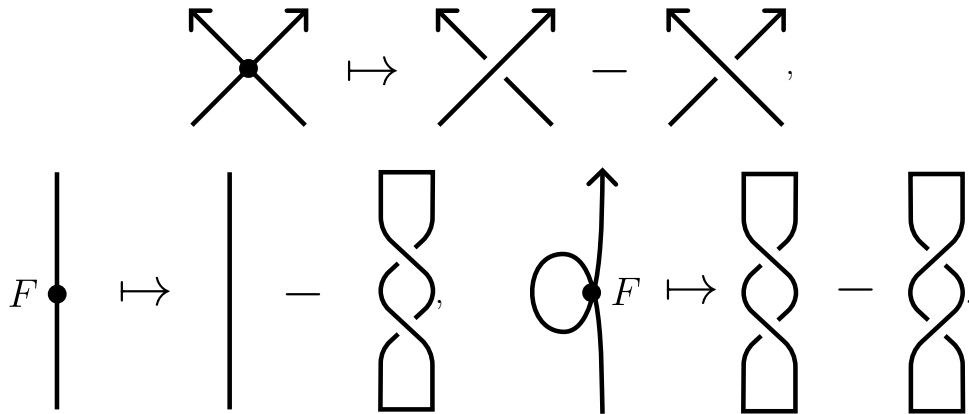
$n \geq 1$  に対し以下のようなベクトル空間を考える.

$$\mathcal{F}'_n(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \gamma'_i: \Gamma \text{ を骨格とし少なくとも } n \text{ この特異点を持つ KTG} \right\}$$

特異点を解消する写像として,

$$\rho: \mathcal{F}'_* \rightarrow \mathcal{F}_0,$$

であって, 以下のように定めるものを考える:



$\mathcal{F}'_n$  ( $n \geq 1$ ) に対し,  $\rho$  の像  $\rho(\mathcal{F}'_n)$  を  $\mathcal{F}_n$  と定義すると,

$$\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \cdots$$

という filtration が得られる. この filtration において隣合う 2 つのベクトル空間から得られる商ベクトル空間を  $\mathcal{A}_n(\Gamma) := \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1}$  とし, associated graded space として,

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i(\Gamma) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i(\Gamma) / \mathcal{F}_{i+1}(\Gamma)$$

とする.

$\mathcal{A}(\Gamma)$  は chord diagram を用いて表すことができる.

**Definition 1.13.** skeleton graph  $\Gamma$  上の  $n$  次の *chord diagram* とは,  $\Gamma$  の辺上の  $2n$  の点のペアからなる組み合わせ的なものであり, 辺の向きを保つ同相写像で移りあうものを同一視する. 特に, 次数  $n$  の chord diagram を基底とする  $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間を  $\mathcal{D}_n(\Gamma)$  と書く.

**Proposition 1.14.**  $\pi: \mathcal{D}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$  は *well-defined* であり *surjective*.

*Proof.* この論文だけ  $\mathcal{A}(\Gamma)$  の構成法が違うので一旦パス. (結局は {Chord diagrams} / (VI, 4T)  $\cong \mathcal{A}$  のはず)  $\square$

上記の写像の kernel に含まれる 2 つの関係式がある. (要証明 ← goodnote と Alge Knot Theory のノートでできたはず) (Ker が一致するとはまだ言っていない)

- (4T) Four term relation

- (VI) Vertex invariance relation

図に描かれていない部分には graph があるが、それらは全て同じでなければならない。4T では反時計回りの向きを与える (これ必要?)。VI において,  $(-1)^\rightarrow$  は, chord の付いた edge が外向きなら -1, 内向きなら 1 をかける (つまり式は 8 つある)。

4T, VI の relations が存在することは分かったが、これ以上の relation が存在 “しない” ことを示すのは困難である。これを示すには, universal finite type invariant  $\mathbb{Q}KTG \rightarrow \mathcal{A}$  を構成するのが最善である (ここでは定義しないが、後で一般の文脈で定義する)。これは, T.Le, H.Murakami, J. Murakami, T.Ohtsuki の結果をもとに, また Drinfeld の associator の理論を用いて [KO, CD],[BN] での Kontsevich integral を拡張する形で [MO97] で初めて得られた。

KTGs の各 operation は  $\mathcal{A}$  上の operation を誘導する。 ( $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{K}(\Gamma)$  の associated graded space である。 )

- orientation switch
- edge delete
- edge unzip
- connected sum well-defined である。 Introduction to Vassiliev knot invariants(Chmutov) の Lemma4.2.9

**Theorem 1.15.** *KTGs は trivially embedded tetrahedron と twisted tetrahedron の列により有限生成。*

## 2 Algebraic structures and expansions

$\mathcal{K}$  において, orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum を linear に拡張し,  $\mathbb{Q}$  係数の形式和を許すように拡張することで,  $\mathcal{K}$  は vector space となる。

**Definition 2.1.**  $\Gamma$  を KTG とする。  $\mathcal{K}(\Gamma)$  において, 係数の和が 0 となるような形式和全体から生成される集合を  $\mathcal{I}(\Gamma)$  と書き,  $\mathcal{I} := \bigoplus_{\Gamma'} \mathcal{I}(\Gamma')$  とする。

**Example 2.2.** Let  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  be KTGs with skeleton  $\Gamma$ . Then,  $\gamma_1 - \gamma_2, \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3 \in \mathcal{I}(\Gamma)$ .

**Definition 2.3.**  $\mathcal{I}^m$  を,  $\mathcal{I}$  の元を少なくとも  $m$  個含むようなものから任意の演算の合成で得られる元が生成する  $\mathcal{K}$  の部分空間とする。つまり,

$$\mathcal{I}^m := \left\{ \gamma \in \mathcal{K} \left| \begin{array}{l} \text{There exist } n, f: \prod_{i=1}^n \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{K} \\ \text{such that } \gamma = f(x_1, \dots, x_n), \#\{i \mid x_i \in \mathcal{I}\} \geq m \end{array} \right. \right\}.$$

さらに,  $\mathcal{I}^n(\Gamma) := \mathcal{I} \cap \mathcal{I}(\Gamma)$  とする。

ここで、 $\mathcal{I}^m$  は明らかに filtration の構造をもつ。

**Lemma 2.4.**  $\mathcal{I}(\Gamma) = \{\sum_i c_i(\gamma_{1_i} - \gamma_{2_i}) \mid \gamma_{1_i}, \gamma_{2_i}: \text{generators of } \mathcal{K}(\Gamma), c_i \in \mathbb{Q}\}.$

*Proof.* (⊃) This is obvious.

(⊂) For any element of  $\mathcal{I}$ , it can be written as  $\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i$ . Since  $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ , we have  $c_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i$ . Thus

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \cdots + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} c_i\right) \gamma_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (\gamma_i - \gamma_n).$$

□

**Theorem 2.5.**  $\mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$  for all  $n \geq 0$  and skeleton  $\Gamma$ .

*Proof.* (i)  $\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{F}_1(\Gamma)$

(⊃) 任意の  $\mathcal{F}_1(\Gamma)$  の元は少なくとも 1 つの double point を持つような 1-singular KTG の交点の正負の差を元を持つため、 $\mathcal{F}_1(\Gamma) \subset \mathcal{I}(\Gamma)$ .

(⊂) 任意の  $\mathcal{I}(\Gamma)$  の元は、 $\sum_i c_i(\gamma_i - \gamma'_i)$  と書ける。  $\mathcal{F}_1(\Gamma)$  において、同じ skeleton を持つ任意の 2 つの KTG は crossing change により移りあうため、 $\gamma_i - \gamma'_i$  を 1 点における正負の交差の差  $\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}'_i$  となるようにできる。 よって

$$\sum_i c_i(\gamma_i - \gamma'_i) = \sum_i c_i(\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}'_i) \in \mathcal{F}_1(\Gamma).$$

(ii)  $\mathcal{I}^n(\Gamma) \subset \mathcal{F}_n(\Gamma)$

By  $\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{F}_1(\Gamma)$ , any element  $\gamma \in \mathcal{I}^n(\Gamma)$  is generated by at least  $n$  elements of  $\mathcal{F}_1(\Gamma)$ . we check that the four operations preserve number of double points.

- orientation switch of an edge with double point. 定義より, switch



する edge につく chord の数だけ  $-1$  倍するため, double point の数は変わらない.

- edge delete. edge に chord が接続されている場合, 定義より diagram は 0 になるため, double point の数は変わらない. edge に接続されていない場合, double point の数は変わらない.



- connected sum.
- edge unzip. Unzip を行う edge に chord が接続されている場合, chord は 2 つに分かれるため, double point の数は変わらない.

(iii)  $\mathcal{F}_n(\Gamma) \subset \mathcal{I}^n(\Gamma)$

**Lemma 2.6.** *Any  $n$ -singular KTG can be obtained from the trivially embedded tetrahedron, twisted tetrahedron and singular twisted tetrahedron using the four operations.*

*Proof.* Same as Theorem 1.15. □

Since any  $n$ -singular KTG can be obtained from  $n$  pieces of 1-singular KTGs by Lemma 2.6 and the four operations,  $\mathcal{F}_n(\Gamma) \subset \mathcal{I}^n(\Gamma)$ .

Therefore,  $\mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$  for all  $n \geq 0$  and skeleton  $\Gamma$ . □

**Definition 2.7.** Let  $\Gamma, \mathcal{K}(\Gamma)$  be a skeleton and the set of KTGs with skeleton  $\Gamma$ . An *expansion*  $Z$  for  $\mathcal{K}(\Gamma)$  is a map  $Z: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \hat{\mathcal{A}}(\Gamma) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(\Gamma)$  such that if  $\gamma \in \mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$ , then  $Z(\gamma) \in \prod_{n \geq m} \mathcal{I}^n(\Gamma) / \mathcal{I}^{n+1}(\Gamma)$  and  $\text{gr } Z: \text{gr } \mathcal{K}(-) \rightarrow \text{gr proj } \mathcal{K}(-)$  is the identity map, where  $\text{proj } \mathcal{K}(\Gamma) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n(\Gamma) / \mathcal{I}^{n+1}(\Gamma)$ .



## References

- [BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.
- [CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.
- [Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.
- [MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Oht02] T. Ohtsuki. *Quantum Invariants: A Study of Knots, 3-manifolds, and Their Sets*. K & E series on knots and everything. World Scientific, 2002.