卒論（タイトル未定）

元論文: Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs

宮路 宙澄

September 29, 2025

Abstract

KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]．KTGs において “edge unzip” という操作のみ準同型にならず，補正項が現れる．dotted Knotted Trivalent Graphs において Z^{old} が準同型となるように Z を 2 通りで構成することが目的.

Contents

Part I
Introduction

Knotted Trivalent Graphs のなす空間にはいい構造がある (Knots や links を含む). 4 つの操作がある: orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum. KTGs は有限生成である [Thu02]. KTGs は Knot genus(ザイフェルト曲面？) や ribbon property(ribbon knot？自己交差あり) などの良い代数構造をもつため，それらを使うことが出来る [BN].

Knots の Kontsevich integral は universal Vassiliev invariant に拡張できる．その中でも unzip 以外が準同型になる．

- unzip, delete, connected sum を “tree connected sums” と呼ばれるより一般の操作へ変える．
- unzip が出来る edge を制限する．

簡単に Z^{old} を dKTGs で準同型にすることができ，dKTGs は KTGs の良い性質をすべて保つことを示す．有限生成や close connection to Drinfel’d associators (知らん) など.

Part II
Preliminaries

1 KTGs and Z^{old}

Definition 1.1. *Trivalent graph* とは，各頂点が 3 つの辺をもつグラフ.

全ての辺は向きづけられているものとし，頂点は回転するように向きを与える．ループや円などの辺を許すこととする．

Definition 1.2. *Surface* とは第 2 可算公理（高々可算な開基を持つ）を満たす 2 次元多様体をいう.

Definition 1.3. K を単体複体，σ, τ を以下の条件を満たす K の単体とする．

- $\tau \subsetneqq \sigma$,
- σ は K の最大の面単体で，他の最大面単体は τ を含まない．このような τ を *free face* という.

このとき，K の *collapse* とは，$\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$ となる γ をすべて取り除くことをいう．

Definition 1.4. 単体複体 Y における *spine* とは，Y の部分単体複体 X であって，Y を collapse して X となるものをいう．

Definition 1.5. Trivalent graph Γ に対し，*thickened trivalent graph* or *framed trivalent graph*[Thu02] $\boldsymbol{\Gamma}$ とは，頂点を太らせたもの．参照先の定義では，1 次元単体複体 Γ と，surface Σ に対しその spine となるように Γ を埋め込んだもの (なめらか？) の組．

Definition 1.6. *Knotted trivalent graph (KTG)* を，framed trivalent graph γ から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み，KTG の *skeleton* を trivalent graph Γ とする．(framed knots や links も含む)

KTGs において，skeleton が isotopy で移りあうものを同一視する．Trivalent graph Γ に対し，Γ を skeleton とする．すべての KTG の集合を $\mathcal{K}(\Gamma)$ と書く．

Proposition 1.7. Framed knots と， knot diagrams で $R1', R2, R3$ の操作で移りあうものを同一視したものは 1 対 1 に対応する．

証明. Quantum Invariants by 大槻 Theorem 1.8 p15 □

Proposition 1.8. KTGs の isotopy class と graph diagrams (交点の上下の情報を残した射影) で $R1', R2, R3, R4$ で移りあうものは 1 対 1 に対応する．

証明. [Dan10] (p19 下部) の [Y] An invariant of spatial graphs by Yamada, [Y] の p3 の Lemma 1. □

KTGs には以下の 4 つの操作がある．

Definition 1.9. Trivalent graph Γ，KTG を $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$ とし，Γ の edge を e とする．e の *switch the orientation* を，向きを変えるものとして定め，$S_e(\gamma)$ と書く．

$$S_e\colon \mathcal{K}(\Gamma) \to \mathcal{K}(S_e(\Gamma))\,;\, \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

Definition 1.10. Γ の edge であって，両端に接続されている edge の向きが一致している e を *delete* するとは，e を削除し，三価性を保つように e の両端の頂点を削除することをいう．

$$d_e\colon \mathcal{K}(\Gamma) \to \mathcal{K}(d_e(\Gamma))\,;\, \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$

Definition 1.11. Γ の edge e を *unzip* するとは，e を “限りなく近い”2 つの edges に分け，端点をなくすことをいう．端点をなくしたとき，edge の向きが合っていることが必要である．同様の議論で framed graph $\mathbf{\Gamma}$ に対し，unzip を定義できる．

$$u_e\colon \mathcal{K}(\Gamma) \to \mathcal{K}(u_e(\Gamma))\,;\, \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$

Definition 1.12. 2 つの trivalent graph とその edge のペア $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$ の *connected sum* $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$ とは e, f をつなぐ edge を新たに作ること．well-defined であるために，新たな edge の向きは Γ から Γ' への向きとし，KTGs においてはねじれを許さず，辺を付ける場合は e, f の右側に付けるとする．(2 次元では自由に動かせないため左右が重要)

KTGs の finite type invariants は，links へのものを単に拡張する．同じ skeleton の KTGs の形式和を許し，得られたベクトル空間を特異点の解消によってフィルター分けする．

Definition 1.13. *n-singular KTG* とは，n この特異点を持つ trivalent graph を $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだもの．各特異点は横断的な 2 重点か，“F” と書かれた線上の点である．

n-singular KTG の解消は，各 2 重点を上下の差とすることでとすることで得られる．また，“F-point” は，それを取り除いた framed graph と，1-unit 分 twist させた framed graph の差として解消する．

Vassiliev invariant を構成する段階で現れる filtration $\mathcal{F}^n(\Gamma)$ は n-singular KTGs (skeleton は Γ) を解消して得られたものの線形和で表される．

References

[BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.

[CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.

[Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.

[MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.

[Thu02] Dylan P Thurston. The algebra of knotted trivalent graphs and turaev ' s shadow world. *Geometry & Topology Monographs*, 4:337–362, 2002.