

# 卒論（タイトル未定）

元論文: Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs

宮路 宙澄

October 9, 2025

## Abstract

KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]. KTGs において “edge unzip” という操作のみ準同型にならず, 補正項が現れる. dotted Knotted Trivalent Graphs において  $Z^{old}$  が準同型となるように  $Z$  を 2 通りで構成することが目的.

## Contents

I	Introduction	2
II	Preliminaries	2
1	KTGs and $Z^{old}$	2
III	付録	8
2	Vassiliev 不変量	8

## Part I

# Introduction

Knotted Trivalent Graphs(Knots や links を含む) のなす空間には良い構造がある．次の4つの操作がある: orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum. KTGs は有限生成である [Thu02]. KTGs は Knot genus(ザイフェルト曲面?) や ribbon property(ribbon knot? 自己交差あり) などの良い代数構造をもつため, それらを使うことが出来る [BN].

Knots の Kontsevich integral は universal Vassiliev invariant に拡張できる．その中でも unzip 以外が準同型になる．

- unzip, delete, connected sum を “tree connected sums” と呼ばれるより一般の操作へ変える．
- unzip が出来る edge を制限する．

簡単に  $Z^{old}$  を dKTGs で準同型にすることができ, dKTGs は KTGs の良い性質をすべて保つことを示す．有限生成や close connection to Drinfel'd associators (知らん) など．

## Part II

# Preliminaries

## 1 KTGs and $Z^{old}$

**Definition 1.1.** *Trivalent graph*(3価グラフ) とは, 各頂点が3つの辺をもつようなグラフをいう．

全ての辺は向きづけられているものとし, 頂点は反時計回りに向きを与える．ループや円などの辺を許すこととする．

**Definition 1.2.** *Surface*(曲面) とは第2可算公理<sup>1</sup>を満たす2次元多様体をいう．

**Definition 1.3.**  $K$  を単体複体,  $\sigma, \tau \in K$  を以下の条件を満たすとする．

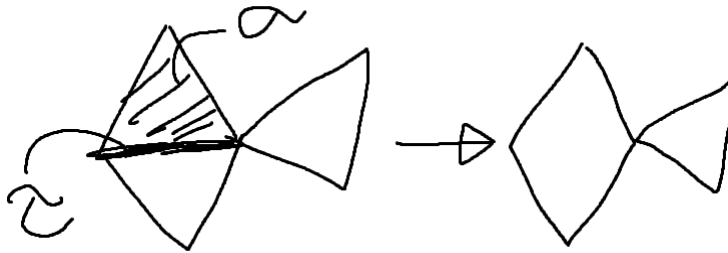
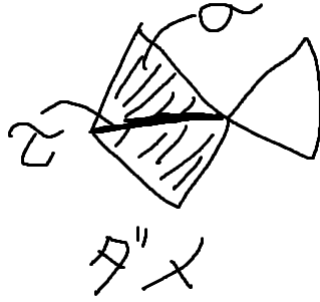
- $\tau \not\supset \sigma$ ,

---

<sup>1</sup>高々可算な開基を持つ．

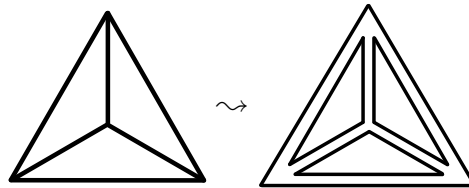
- $\sigma$  は  $K$  の最大の面単体で, 他の最大面単体は  $\tau$  を含まない. このよう  
な  $\tau$  を *free face* という.

このとき,  $K$  の *collapse* とは,  $\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$  となる  $\gamma$  をすべて取り除くことを  
いう.



**Definition 1.4.** 単体複体  $K$  における *spine*(スパイン) とは,  $K$  の部分単体  
複体  $K'$  であって,  $K$  を collapse して  $K'$  となるものをいう.

**Definition 1.5.** graph  $\Gamma$  に対し *framed graph* (枠付きグラフ)  $\Gamma$  とは,  $\Gamma$   
と,  $\Gamma$  を spine として曲面  $\Sigma$  へ埋め込む<sup>2</sup>写像  $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$  の組をいう. 特に  $\Gamma$  が  
Trivalent graph のとき,  $\Gamma$  を *framed trivalent graph*<sup>3</sup>という.



**Definition 1.6.** *Knotted trivalent graph (KTG)* を, framed trivalent graph  $\gamma$   
から  $\mathbb{R}^3$  への埋め込み, KTG の *skeleton* を trivalent graph  $\Gamma$  とする. (framed  
knots や links も含む)

<sup>2</sup>グラフを 1 次元 CW 複体とみなす.

<sup>3</sup>論文では thickened trivalent graph と書いてある.

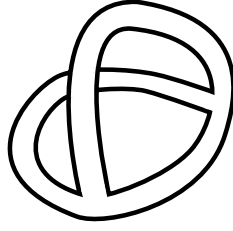


Figure 1: Knotted Trivalent Graph の例

KTGs において, skeleton が isotopy で移りあうものを同一視する. Trivalent graph  $\Gamma$  に対し,  $\Gamma$  を skeleton とする. すべての KTG の集合を  $\mathcal{K}(\Gamma)$  と書く.

**Proposition 1.7.** Framed knots と, framed knot の diagrams で 3 つの Reidemeister 変形  $R1', R2, R3$  の操作で移りあうものを同一視したものは 1 対 1 に対応する.

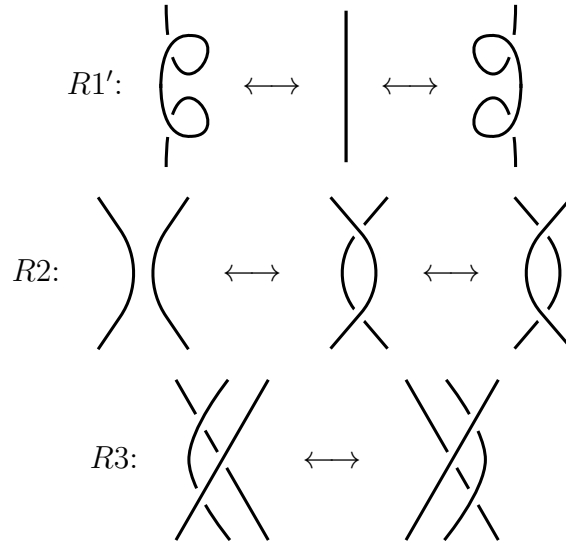


Figure 2: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

*Proof.* [Oht02] P15 Theorem 1.8

□

**Proposition 1.8.** KTGs の isotopy class と graph diagrams (交点の上下の情報を残した射影) で  $R1', R2, R3, R4$  で移りあうものは 1 対 1 に対応する.

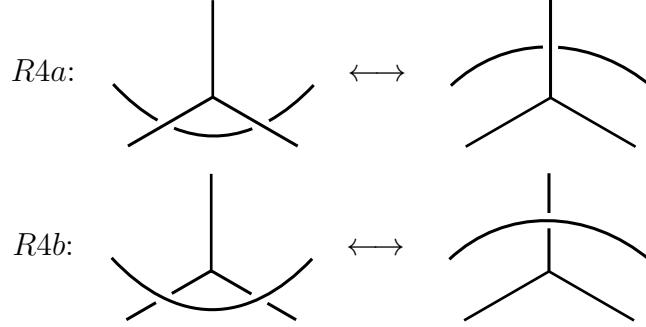


Figure 3: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

*Proof.* [Dan10] (p19 下部) で引用されている. [Yam87] の p3 の Lemma 1. 「 $\mathbb{R}^3$  に埋め込まれたグラフ (空間グラフ) が isotopic であることと, その diagrams が Reidemeister moves で変形できるということが同値.」  $\square$

KTGs には以下の 4 つの操作がある.

**Definition 1.9.** Trivalent graph を  $\Gamma$ , KTG を  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  とし,  $\Gamma$  の edge を  $e$  とする.  $e$  の *switch the orientation* を, 向きを変えるものとして定め,  $S_e(\gamma)$  と書く.

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

図

**Definition 1.10.**  $\Gamma$  の edge であって, 両端に接続されている edge の向きが一致している  $e$  を *delete* するとは,  $e$  を削除し, 三価性を保つように  $e$  の両端の頂点を削除することをいう.

$$d_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(d_e(\Gamma)); \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$

図

**Definition 1.11.**  $\Gamma$  の edge  $e$  を *unzip* するとは,  $e$  を “限りなく近い” 2 つの edges に分け, 端点をなくすことをいう. 端点をなくしたとき, edge の向きが合っていることが必要である. 同様の議論で framed graph  $\Gamma$  に対し, unzip を定義できる.

$$u_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(u_e(\Gamma)); \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$

図

**Definition 1.12.** 2 つの trivalent graph とその edge のペア  $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$  の *connected sum*  $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$  とは  $e, f$  をつなぐ edge を新たに作ること. well-defined であるために, 新たな edge の向きは  $\Gamma$  から  $\Gamma'$  への向きとし, KTGs においてはねじれを許さず, 辺を付ける場合は  $e, f$  の右側に付けるとする. (2 次元では自由に動かさないため左右が重要)

図

KTGs の finite type invariants は, links へのものを単に拡張する. 同じ skeleton の KTGs の形式和を許し, 得られたベクトル空間を特異点の解消によってフィルター分けする.

**Definition 1.13.** *n-singular KTG* とは,  $n$  この特異点を持つ trivalent graph を  $\mathbb{R}^3$  に埋め込んだもの. 各特異点は横断的な 2 重点か, “ $F$ ” と書かれた線上の点である.

$n$ -singular KTG の解消は, 各 2 重点を上下の差とすることでとすることで得られる. また, “ $F$ -point” は, それを取り除いた framed graph と, 1-unit 分 twist させた framed graph の差として解消する.

図

Vassiliev invariant を構成する段階で現れる filtration<sup>4</sup>  $\mathcal{F}^n(\Gamma)$  は  $n$ -singular KTGs (skeleton は  $\Gamma$ ) を解消して得られたものの線形和で表される.

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n(\Gamma) / \mathcal{F}^{n+1}(\Gamma) \quad (\mathcal{F}^0(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma))$$

を (filtration に対する) *associated graded space* とし (vector space である. 要証明),  $\mathcal{A} := \bigcup_{\Gamma} \mathcal{A}(\Gamma)$  とする.

$\mathcal{A}(\Gamma)$  は chord diagram を用いて表すことができる.

**Definition 1.14.** skeleton graph  $\Gamma$  上の  $n$  次の *chord diagram* とは,  $\Gamma$  の辺上の  $2n$  この点のペアからなる組み合わせ的なものであり, 辺の向きを保つ同相写像で移りあうものを同一視する.

**Proposition 1.15.**  $\pi: \{\text{Chord diagrams of } \Gamma\} \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$  は well-defined であり surjective.

*Proof.* この論文だけ  $\mathcal{A}(\Gamma)$  の構成法が違うので一旦パス. (結局は  $\{\text{Chord diagrams}\} / (\text{VI}, 4\text{T}) \cong \mathcal{A}$  のはず)  $\square$

上記の写像の kernel に含まれる 2 つの関係式がある. (要証明 ← goodnote と Alge Knot Theory のノートでできたはず) (Ker が一致するとはまだ言っていない)

- (4T) Four term relation 図
- (VI) Vertex invariance relation 図

---

<sup>4</sup>付録にて解説

図に描かれていない部分には graph があるが、それらは全て同じでなければならない。4T では反時計回りの向きを与える (これ必要?). VI において,  $(-1)^\rightarrow$  は, chord の付いた edge が外向きなら -1, 内向きなら 1 をかける (つまり式は 8 つある).

4T, VI の relations が存在することは分かったが、これ以上の relation が存在 “しない” ことを示すのは困難である。これを示すには, universal finite type invariant  $\mathcal{QKTG} \rightarrow \mathcal{A}$  を構成するのが最善である (ここでは定義しないが、後で一般の文脈で定義する)。これは, T.Le, H.Murakami, J. Murakami, T.Ohtsuki の結果をもとに, また Drinfeld の associator の理論を用いて [KO, CD],[BN] での Kontsevich integral を拡張する形で [MO97] で初めて得られた。

KTGs の各 operation は  $\mathcal{A}$  上の operation を誘導する。 ( $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{K}(\Gamma)$  の associated graded space である。 )

## Part III

# 付録

## 2 Vassiliev 不変量

本章では2重に重なる点を許す特異結び目を用いて定義される Vassiliev 不変量を構成する．絡み目に対しても同様の定義が可能である．これは結び目に対するものであり，Trivalent graph に対するものではないので修正が必要．Trivalent graph に対するものの構成がどの文献に書いてあるのかは不明．

**Definition 2.1.** 結び目 (knot) とは， $S^1$  から  $\mathbb{R}^3$  への滑らかな埋めこみのことをいい，結び目の非交和を絡み目 (link) という．また，向き付けられた結び目 (oriented knot)，向き付けられた絡み目 (oriented link) とは，各  $S^1$  上の向きが定められた結び目，絡み目である．

**Definition 2.2** ([?]).  $I$  を単位区間とする． $F$  が結び目  $K$  と  $K'$  の間のイソトピー (isotopy) <sup>5</sup> であるとは，連続写像

$$F: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

であって，以下を満たすものをいう：

- (i) 各  $t \in I$  に対して， $F_t(x) = F(x, t)$  として定義される写像  $F_t: \mathbb{R}^3 \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  が同相写像，
- (ii)  $F_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ ，
- (iii)  $F_1 \circ K = K'$ ，つまり次の図式が可換であることをいう：

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^3 (\cong \mathbb{R}^3 \times \{1\}) & \xrightarrow{F_1} & \mathbb{R}^3 \\ & & \searrow K' & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

このとき， $K$  と  $K'$  はイソトピック (isotopic) であると言い， $K \simeq K'$  と書く．

イソトピックは結び目の同値関係であり，イソトピーを用いて結び目を同一視することができる．

---

<sup>5</sup>正確にはアンビエントイソトピー (ambient isotopy) という．



**Definition 2.3.** 結び目  $K$  が点  $x \in \mathbb{R}^3$  で **2 重点 (double point)** を持つとは,

$$K^{-1}(x) = \{t_1, t_2\} \quad (t_1 \neq t_2)$$

であり,  $t_1, t_2$  における微分  $K'(t_1)$  と  $K'(t_2)$  が線形独立であることをいう.

$\mathcal{K}$  を結び目のイソトピー類として以下のように定義する.

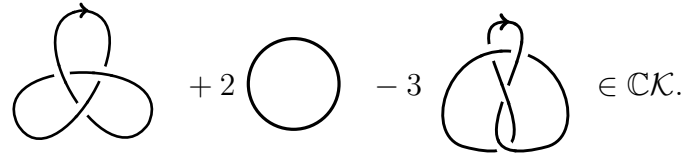
$$\mathcal{K} := \{K \mid K \text{ は向き付けられた結び目.}\} / \simeq.$$

次に,  $\mathcal{K}$  の元による有限な形式和の全体がなす  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間

$$\mathbb{C}\mathcal{K} := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{K}} a_i K_i \mid a_i \in \mathbb{C}, a_i \text{ は有限個を除いて } 0. \right\}$$

を考える.

この集合は, 特異結び目の 2 重点を解消するために必要な形式和を扱えるように導入されるものである. 例えば, これらの和は  $\mathbb{C}\mathcal{K}$  の元である.



$$\text{trefoil} + 2 \text{ circle} - 3 \text{ figure-eight} \in \mathbb{C}\mathcal{K}.$$

**Definition 2.4.** **特異結び目 (singular knot)** とは,  $S^1$  から  $\mathbb{R}^3$  へのなめらかな写像について有限個の 2 重点を除いてはめ込みであるもので, **向き付けられた特異結び目 (oriented singular knot)** とは, 定義域  $S^1$  に向きが与えられている特異結び目のことをいう.

特異結び目は, 通常結び目と異なり 2 重点を許したものである. この 2 重点の個数が少ないものから順に分けることで, 不変量を構成することができる. そこで, 2 重点の個数が少なくとも  $n$  個である特異結び目から生成されるベクトル空間  $\mathcal{F}_n$  を以下のように定義する:

$$\mathcal{F}_n := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i K_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, K_i \text{ は向き付けられた特異結び目で少なくとも } n \text{ 個の 2 重点を持つ.} \right\}.$$

2 重点を解消する写像  $\rho: \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}$  ([?]) を, 図 4 のように向き付けられた特異結び目の各 2 重点を正の交点と負の交点の差によって解消することで与える.



Figure 4: 特異結び目の 2 重点の解消法.

写像  $\rho$  により特異結び目を結び目の線形結合として見なすことが出来るため、各  $\rho^{(n)}(\mathcal{F}_n)$  は  $\mathbb{CK}$  の部分空間となる。

**例 2.5.** 写像  $\rho$  を用いた例として以下のようなものがあげられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 \ni \text{ (図: 2重点の結び目)} &\mapsto \text{ (図: 2重点の結び目)} - \text{ (図: 3葉結び目)} \\ &= (\text{自明な結び目}) - (\text{三葉結び目}) \in \mathcal{F}_0 = \mathbb{CK}. \end{aligned}$$

**Definition 2.6.**  $A$  が体  $\mathbb{F}$  上の **フィルター付きベクトル空間 (filtered vector space)** であるとは、 $A$  の部分空間  $F_i$  で以下のような列

$$A = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$$

を持つベクトル空間のことをいう。特にこの列  $\{F_i\}$  を  $A$  の **フィルター (filtration)** と呼ぶ。

$\{\rho^{(n)}(\mathcal{F}_n)\}$  は 2 重点の数が増えるにつれて空間が小さくなっていく。これは  $\mathbb{CK}$  が  $\{\rho^{(n)}(\mathcal{F}_n)\}$  を列に持つフィルター付きベクトル空間であることを意味する。

$$\mathbb{CK} = \mathcal{F}_0 \supset \rho(\mathcal{F}_1) \supset \rho^{(2)}(\mathcal{F}_2) \supset \dots$$

2 重点が  $d+1$  個以上ある特異結び目の線形和は  $\mathcal{F}_{d+1}$  の元である。この階層構造を利用し Vassiliev 不変量を定義する。この不変量は、ある一定の複雑さを超える結び目は全て区別せず 0 と見なすという線形写像で定義される。

**Definition 2.7.**  **$d$  次の Vassiliev 不変量 ( $d$ -th Vassiliev invariants) [?]** とは線形写像

$$v: \mathbb{CK} \rightarrow \mathbb{C}$$

であって、任意の  $x \in \mathcal{F}_{d+1}$  に対し  $v(x) = 0$  となるものをいう。

## References

- [BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.
- [CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.
- [Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.
- [MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Oht02] T. Ohtsuki. *Quantum Invariants: A Study of Knots, 3-manifolds, and Their Sets*. K & E series on knots and everything. World Scientific, 2002.
- [Thu02] Dylan P Thurston. The algebra of knotted trivalent graphs and turaev ’s shadow world. *Geometry & Topology Monographs*, 4:337–362, 2002.
- [Yam87] Shuji Yamada. An invariant of spatial graphs. **数理解析研究所講究録**, 636:16–41, 1987.