

# タイトル未定

2264246 宮路 宙澄

指導教員：野崎 雄太 准教授 (2026 年 1 月 30 日)

指導教員印	受理印

## 概要

【保留】KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]. KTGs において “edge unzip” という演算のみ準同型にならず, 補正項が現れる. dotted Knotted Trivalent Graphs において  $Z^{old}$  が準同型となるように  $Z$  を 2 通りで構成することが目的.

## 目次

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Acknowledgements</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Preliminaries</b>	<b>4</b>
3.1	KTGs and $Z^{old}$ . . . . .	4
3.2	Algebraic structures and expansions . . . . .	14
付録 A	<b>Proof of Theorem 3.14</b>	<b>19</b>

## 1 Introduction

結び目理論とは位相幾何学の分野の一つであり，物理学とも関係する分野である．その中でも，結び目同士が異なるかどうかを区別する際に手段として使われるものとして結び目の不変量というものがある．

## 2 Acknowledgements

### 3 Preliminaries

#### 3.1 KTGs and $Z^{old}$

グラフにおいて、全ての辺は向きづけられているものとし、ループや円などの辺を許す.

**Definition 3.1.** 向き付けられた滑らかな曲面 (oriented smooth surface) とはコンパクトで第 2 可算公理<sup>\*1</sup>を満たす向き付けられた境界付き 2 次元  $C^\infty$  級多様体をいう.

**Definition 3.2.** 単体複体  $Y$  の **spine**  $X$  とは,  $Y$  の部分複体  $X$  であって,  $Y$  を  $X$  へ潰すことができるものをいう. ここで潰す (collapse) とは,  $k$ -単体  $\Delta^k$  と  $(k+1)$ -単体  $\Delta^{k+1}$  の対を取り除いていく操作のことをいう. ただし,  $\Delta^{k+1}$  はその境界上に  $\Delta^k$  を持つような唯一の  $(k+1)$ -単体でなければならない.

**Definition 3.3.** グラフ  $\Gamma$  に対し **枠付きグラフ (framed graph)**  $\Gamma$  とは, 1 次元単体複体  $\Gamma$  と,  $\Gamma$  を向き付けられた滑らかな曲面  $\Sigma$  に spine となるように埋め込む写像  $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$  の組  $(\Gamma, \Sigma)$  のことである. ここで,  $\Gamma$  から  $\Sigma$  への埋め込みは各辺の内部において滑らかであるものとし, blackboard framing を用いることで各頂点において辺の反時計周りの順序を定める. 特に  $\Gamma$  が 3 価グラフのとき,  $\Gamma$  を **枠付き 3 価グラフ (framed trivalent graph)** という.

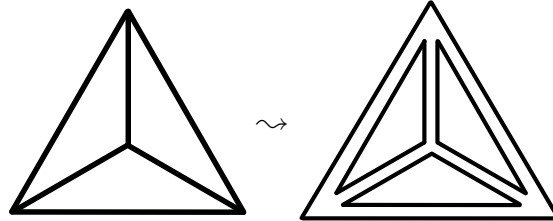


図 1: 枠付き 3 価グラフの例

2 つの枠付きグラフ  $\Gamma = (\Gamma, \Sigma), \Gamma' = (\Gamma', \Sigma')$  が同値であるとは,  $\Sigma$  から  $\Sigma'$  への向きを保つ  $C^\infty$  級微分同相写像  $h: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  が存在し,  $h(\Gamma) = \Gamma'$  となることをいう. このとき,  $h$  はグラフ同型  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  を誘導し, 各頂点において辺の反時計周りの順序を保つ. 以下では枠付きグラフはこの同値関係のもとで考える. また, 3 価グラフ  $\Gamma$  に対し, 枠付き 3 価グラフ  $\Gamma$  はこの同値関係のもとで一意に定まる.

<sup>\*1</sup> 高々可算な開基を持つ.

**Definition 3.4.** 枠付き 3 価グラフ  $\Gamma = (\Gamma, \Sigma)$  に対し, **knotted trivalent graph (KTG)**  $\gamma$  とは, 枠付き 3 価グラフ  $\Gamma = (\Gamma, \Sigma)$  と滑らかな埋め込み写像  $g: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  の組  $(\Gamma, \Sigma, g)$  のことである. また, KTG  $\gamma = (\Gamma, \Sigma, g)$  の**骨格 (skeleton)** とは,  $\Gamma$  のことである.

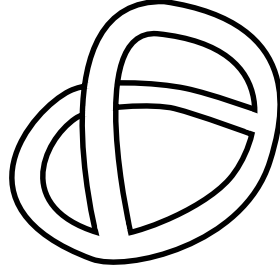


図 2: Knotted trivalent graph の例

**Remark 3.5.** Knotted trivalent graph を書く際には blackboard framing を用い, 曲面を省略し骨格のみを描く. また, knotted trivalent graph は向きづけられているため, 表裏の情報が含まれていることに注意されたい.

**Definition 3.6.** 枠付き 3 価グラフを  $\Gamma = (\Gamma, \Sigma)$  とする. このとき, 2 つの knotted trivalent graphs  $\gamma_1 = (\Gamma, \Sigma, g), \gamma_2 = (\Gamma, \Sigma, h)$  が**枠付きイソトピック (framed isotopic)** であるとは, 滑らかな埋め込み

$$\Phi: \Sigma \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I \quad (I = [0, 1])$$

が存在し, 次の条件を満たすことをいう:

- (i) 任意の  $x \in \Sigma$  と  $t \in I$  に対し,  $\Phi(x, t) = (\varphi_t(x), t)$  となる滑らかな埋め込み  $\varphi_t: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  が存在する,
- (ii)  $\varphi_0 = g$  かつ  $\varphi_1 = h$  である.

以下では knotted trivalent graphs を枠付きイソトピックで同一視する. ここで, 骨格が  $\Gamma$  である全ての knotted trivalent graphs の線形結合からなる  $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間を

$$\mathcal{K}(\Gamma) := \text{span}_{\mathbb{Q}} \{ \gamma \mid \gamma \text{ は } \Gamma \text{ を骨格とする KTG} \}.$$

とし,  $\mathcal{K} := \sum_{\Gamma'} \mathcal{K}(\Gamma')$  とする.

**Definition 3.7.** 3 価グラフ  $\Gamma$  に対し,  $\Gamma$  を台とする**次数  $n$  のコード図 (chord diagram of order  $n$ )** とは,  $\Gamma$  と,  $\Gamma$  の辺上の頂点を除いた相異なる  $2n$  個の点の組をいい, 各 2

点の組を結ぶ線をコード (chord) という．ここで，コードは骨格とは区別された点線として視覚化され，コード図は辺の向きを保つ同相写像により同一視する．

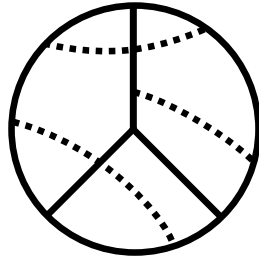
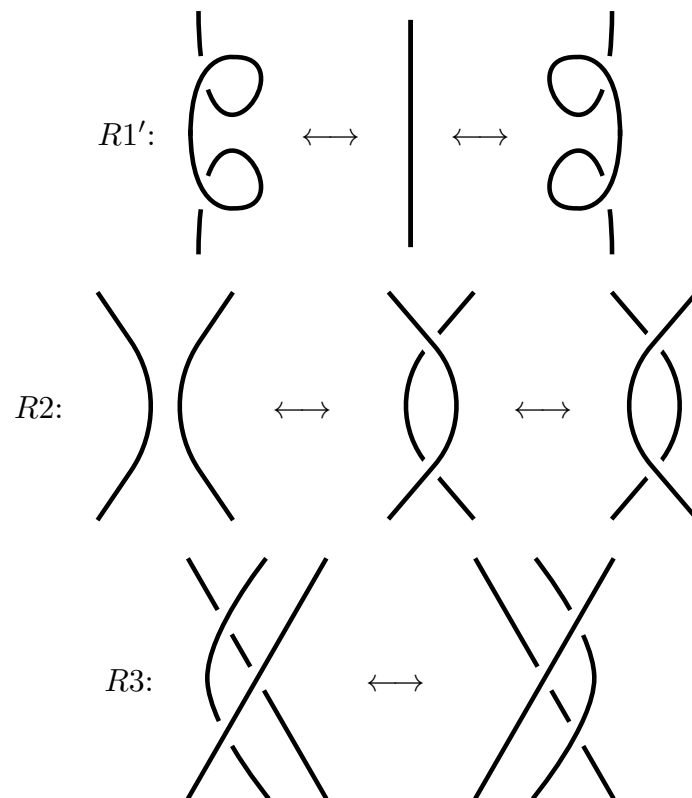


図 3: 3 価グラフ  $\Gamma$  を台とする次数 3 のコード図の例

**Proposition 3.8.** 2 つの knotted trivalent graphs が枠付きイソトピックであることと，それらのコード図が有限回の Reidemeister 変形  $R1', R2, R3$  で移り合うことは同値である．



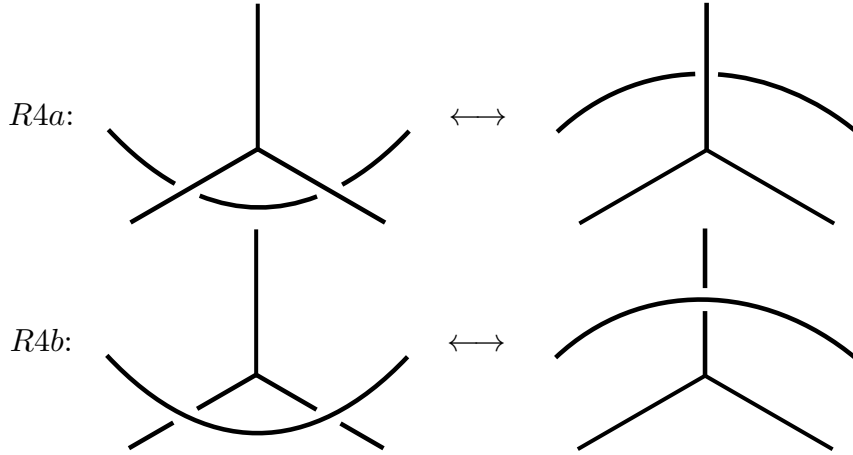


図 4: Knotted trivalent graphs における Reidemeister 変形

ここでは証明を省略する．詳細は [MO97, Theorem 1.4] を参照されたい．空間グラフに対して定義された拡張 Reidemeister 変形 [Yam87] に関して不変であることを示せば十分である．ここでは blackboard framing を考えているため，頂点周りの辺の順序を変える変形は考慮しなくてよいことに注意されたい．

ここにつなぎの文が欲しい

$\mathcal{K}$  における演算を 4 つ定義する:

**Definition 3.9.**  $\Gamma$  を 3 価グラフ,  $e$  を  $\Gamma$  の辺とする． $e$  の向きを反転させる演算を **orientation switch** といい，得られる 3 価グラフを  $S_e(\Gamma)$  と表す．同様に,  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  に対し, 辺  $e$  の **orientation switch** を,  $e$  の向きを反転させることによって定義し,  $S_e$  と表す．

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

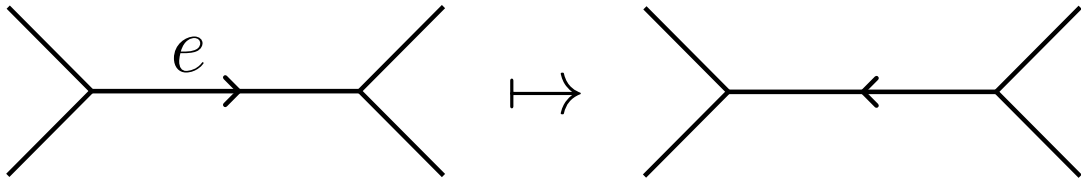


図 5:  $\mathcal{K}(\Gamma)$  における orientation switch の例

**Definition 3.10.**  $\Gamma$  を 3 価グラフ,  $e$  を  $\Gamma$  の辺とする． $e$  を取り除き, さらにその両端に生じる 2 価頂点を取り除き 1 本の辺にする演算を **delete** といい, 得られる 3 価グラフを  $d_e(\Gamma)$  と表す．この演算を行うためには,  $e$  の両端に接続する 2 つの辺の向きが一致し

ていることが必要である．また， $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  に対しても同様に辺  $e$  の **delete** を定義し， $d_e$  と表す．

$$d_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(d_e(\Gamma)); \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$

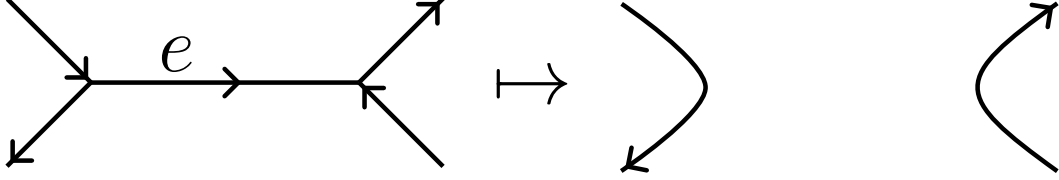


図 6:  $\mathcal{K}(\Gamma)$  における delete の例

**Definition 3.11.**  $\Gamma$  を 3 価グラフ， $e$  を  $\Gamma$  の辺とする． $e$  を十分近い 2 つの辺に置き換え，さらに両端の頂点を取り除く演算を **unzip** といい，得られる 3 価グラフを  $u_e(\Gamma)$  と表す．このとき， $e$  の始点に接続する 2 つの辺は両方とも  $e$  に入る向きであり，終点に接続する 2 つの辺は両方とも  $e$  から出る向きでなければならない．ここで，3 価グラフに対し blackboard framing を用いている<sup>\*2</sup>ため，2 つに分割する方法は一意に定まることに注意されたい．また， $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  に対し辺  $e$  の **unzip** を同様に定義し， $u_e$  と表す．

$$u_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(u_e(\Gamma)); \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$

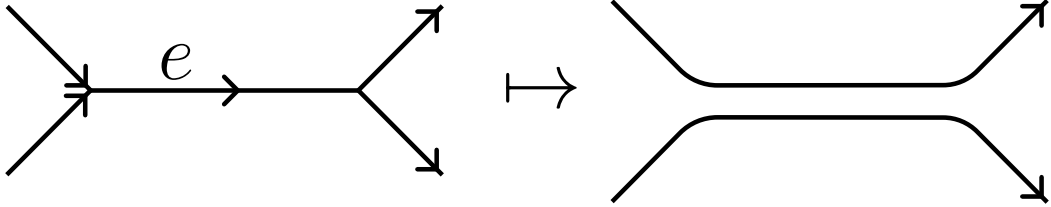


図 7:  $\mathcal{K}(\Gamma)$  における unzip の例

**Definition 3.12.**  $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$  をそれぞれ 3 価グラフとその辺の組とする．辺  $e$  と  $f$  を新たな辺で結ぶ演算を **connected sum** といい，得られる 3 価グラフを  $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$  と表す．Well-defined であるために，新たな辺は  $\Gamma$  から  $\Gamma'$  へ向かう向きとし，頂点では反時計周りの向きを与える．また， $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma), \gamma' \in \mathcal{K}(\Gamma')$  とし，2 つの組  $(\gamma, e), (\gamma', f)$  に対

<sup>\*2</sup> 本来 blackboard framing は枠付きグラフに対して用いるものであるが，ここでは便宜上グラフに対しても用いている．



し **connected sum** を同様に定義し,  $\#_{e,f}$  と表す. ここで, 新たな辺はねじれを持たず,  $e$  と  $f$  の向きに対し右側に接続されるものとする.

$$\#_{e,f}: \mathcal{K}(\Gamma) \times \mathcal{K}(\Gamma') \rightarrow \mathcal{K}(\Gamma \#_{e,f} \Gamma')$$

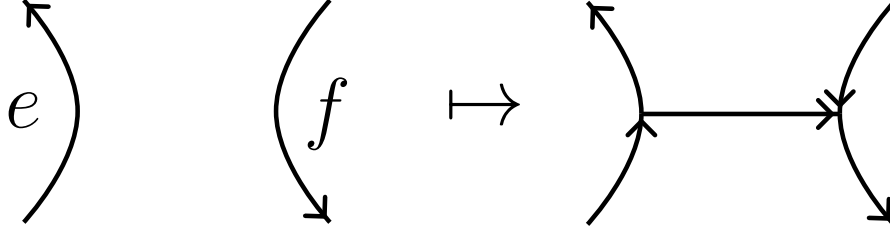


図 8:  $\mathcal{K}(\Gamma) \times \mathcal{K}(\Gamma')$  における connected sum の例

これら 4 つの演算はベクトル空間  $\mathcal{K}(\Gamma)$  上の線形写像を誘導する.

結び目と同様の手順により KTGs の有限型不変量を定義する. 具体的には, “特異点” の解消によって得られるベクトル空間でフィルトレーションを構成する.

**Definition 3.13.** 3 価グラフ  $\Gamma$  に対し,  $\Gamma$  を骨格とする **n-特異 KTG (n-singular KTG)** とは,  $\Gamma$  から  $\mathbb{R}^3$  へのはめ込みであって  $n$  個の特異点を持つものをいう. ここで特異点とは, 互いに交差する 2 本の辺の横断的な 2 重点, または辺上に “ $F$ ” と記された  $F$  点のことである.  **$F$  とは何者かを書く.**

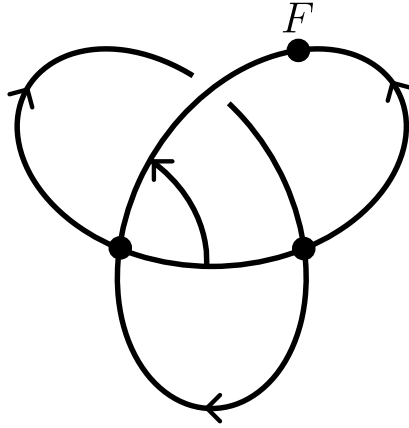
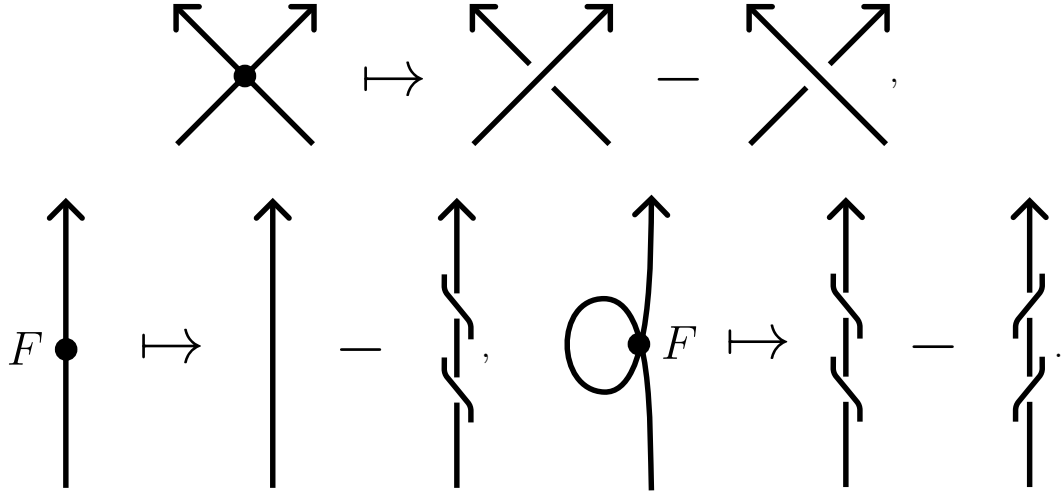


図 9:  $n$ -特異 KTG の例

$n \geq 0$  に対し, 次のベクトル空間を考える:

$$\mathcal{F}'_n(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \gamma'_i \mid \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z}_{>0}, a_i \in \mathbb{Q}, \gamma'_i: \Gamma \text{ を骨格とし} \\ \text{少なくとも } n \text{ 個の特異点を持つ特異 KTG} \end{array} \right\}$$

全ての特異点を同時に解消する写像  $\rho: \mathcal{F}'_*(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}_0(\Gamma)$  を以下のように定める:



ひねりを表す図の説明未完

$\mathcal{F}'_n(\Gamma)$  ( $n \geq 0$ ) に対し,  $\mathcal{F}_n(\Gamma)$  を  $\mathcal{F}_n(\Gamma) := \rho(\mathcal{F}'_n(\Gamma))$  と定義すると, 明らかに  $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{F}_0(\Gamma)$  であり,

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{F}_0(\Gamma) \supset \mathcal{F}_1(\Gamma) \supset \mathcal{F}_2(\Gamma) \supset \mathcal{F}_3(\Gamma) \cdots$$

というフィルトレーションが得られる. このフィルトレーションにおいて隣合う 2 つのベクトル空間から得られる商ベクトル空間を  $\mathcal{A}_n(\Gamma) := \mathcal{F}_n(\Gamma)/\mathcal{F}_{n+1}(\Gamma)$  とし, 次数付きベクトル空間 (associated graded space) を以下のように定義する:

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(\Gamma) \left( = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(\Gamma)/\mathcal{F}_{n+1}(\Gamma) \right)$$

次数  $n$  のコード図を基底とする  $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間を  $\mathcal{D}_n(\Gamma)$  と書き,  $\mathcal{D}(\Gamma) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n(\Gamma)$  とする.  $\mathcal{A}(\Gamma)$  における 2 重点を,  $\mathcal{D}(\Gamma)$  におけるコードに対応させることで,  $\mathcal{D}(\Gamma)$  から  $\mathcal{A}(\Gamma)$  への自然な全射  $\pi$  が存在する.  $\mathcal{D}(\Gamma)$  において, 以下の関係式を 4T, VI 関係式という:

- (4T) Four-term relation

The diagram shows the four-term relation (4T) for the four-term relation. It consists of four terms with dashed lines and arrows, summed together and set equal to zero.

- (VI) Vertex invariance relation

$$(-1) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + (-1) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + (-1) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = 0$$

それぞれの関係式において，図に描かれていない部分にはグラフがあるがそれらは全て同じである必要がある．4T では反時計回りの向きが与えられており，VI において， $(-1)^{\rightarrow}$  は，コードの付いた辺が外向きなら  $-1$ ，内向きなら  $1$  をかけるという表記法である．

**Theorem 3.14.** 4T, VI 関係式は  $\ker \pi$  に含まれる．

この定理の証明は 付録 A で与える．

4T, VI が  $\ker \pi$  に含まれることは分かるが，これ以上の relations が存在 “しない” ことを示すのは困難である．これを示すには，universal finite type invariant  $\mathbb{Q}\text{KTG} \rightarrow \mathcal{A}$  を構成するのが最善である．これは，T.Le, H.Murakami, J. Murakami, T.Ohtsuki の結果をもとに，また Drinfeld の associator の理論を用いて [KO, CD](一旦手書き), [BN] での Kontsevich integral を拡張する形で [MO97] で初めて得られた．

$\mathcal{K}$  上の各演算は  $\mathcal{A}$  上の演算を誘導する．

**Definition 3.15.**  $\Gamma$  を 3 価グラフ， $e$  を  $\Gamma$  の辺とする．このとき，**orientation switch** はコード図  $D \in \mathcal{A}(\Gamma)$  に対し，次のように定義される線形写像である．

$$S_e: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(S_e(\Gamma)); D \mapsto (-1)^k D$$

ここで， $k$  は辺  $e$  に端点を持つコードの本数である．

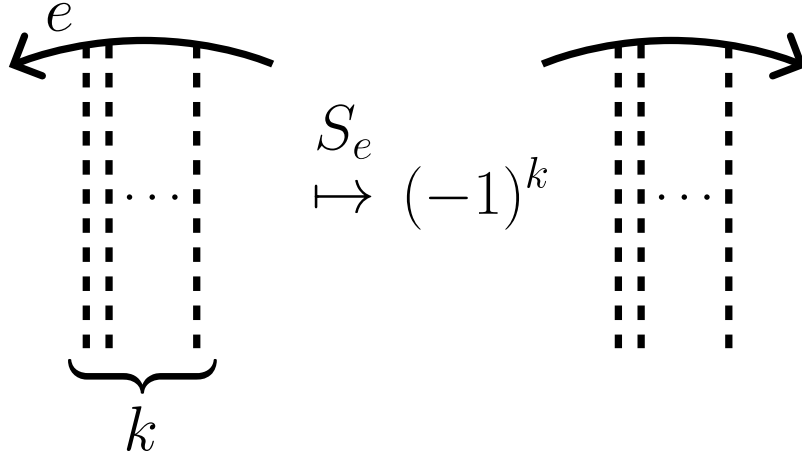


図 10: 辺  $e$  に端点を持つコードが  $k$  本の場合の orientation switch の例

**Definition 3.16.**  $\Gamma$  を 3 価グラフ,  $e$  を  $\Gamma$  の辺とする. このとき, **delete**  $d_e: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(d_e(\Gamma))$  はコード図  $D \in \mathcal{A}(\Gamma)$  に対し, 次のように定義される線形写像である.

$$d_e(D) = \begin{cases} 0 & (\text{辺 } e \text{ に端点を持つコードが存在する場合}) \\ D \setminus e & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ここで,  $D \setminus e$  はコード図  $D$  から辺  $e$  を取り除いたものを表す.

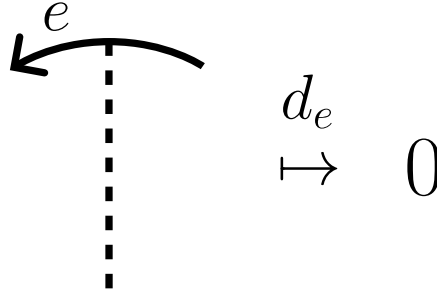


図 11: 辺  $e$  に端点を持つコードが存在する場合の edge delete の例

**Definition 3.17.**  $\Gamma$  を 3 価グラフ,  $e$  を  $\Gamma$  の辺とする. このとき, **edge unzip**  $u_e: \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(u_e(\Gamma))$  はコード図  $D \in \mathcal{A}(\Gamma)$  に対し, 次のように定義される線形写像である.

$$u_e(D) = \sum_{\sigma: C_e(D) \rightarrow \{e_1, e_2\}} D_\sigma$$

ここで  $u_e(\Gamma)$  において辺  $e$  は 2 本の辺  $e_1, e_2$  に分割されているものとし, 辺  $e$  上に端点を持つコードの端点の集合を  $C_e(D)$  とし, 各写像  $\sigma$  に対して  $D_\sigma$  は各端点  $p \in C_e(D)$

を辺  $\sigma(p)$  上に配置して得られるコード図を表す.  $k = |C_e(D)|$  とすると,  $u_e(D)$  は  $2^k$  個の項の和となる.

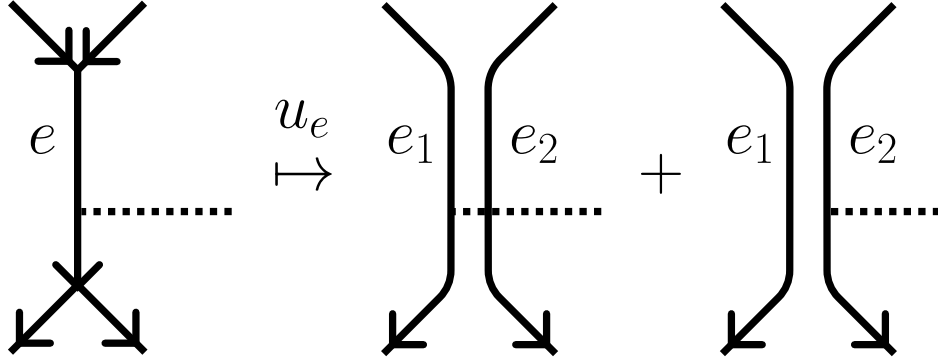


図 12: 辺  $e$  に端点を持つコードが 1 本の場合の edge unzip の例

**Definition 3.18.**  $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$  をそれぞれ 3 価グラフとその辺の組とする. このとき, **connected sum**  $\#_{e,f}: \mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma') \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma \#_{e,f} \Gamma')$  はコード図  $D \in \mathcal{A}(\Gamma), D' \in \mathcal{A}(\Gamma')$  に対し, 次のように定義される線形写像である. 骨格  $\Gamma, \Gamma'$  に対して辺  $e, f$  の connected sum によって得られる 3 価グラフ  $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$  上において,  $D, D'$  のコードをその位置関係を変更することなくそのまま配置して得られるコード図を与える.

これは Kirchhoff law により well-defined である. Kirchhoff law の引用を丁寧に書く.

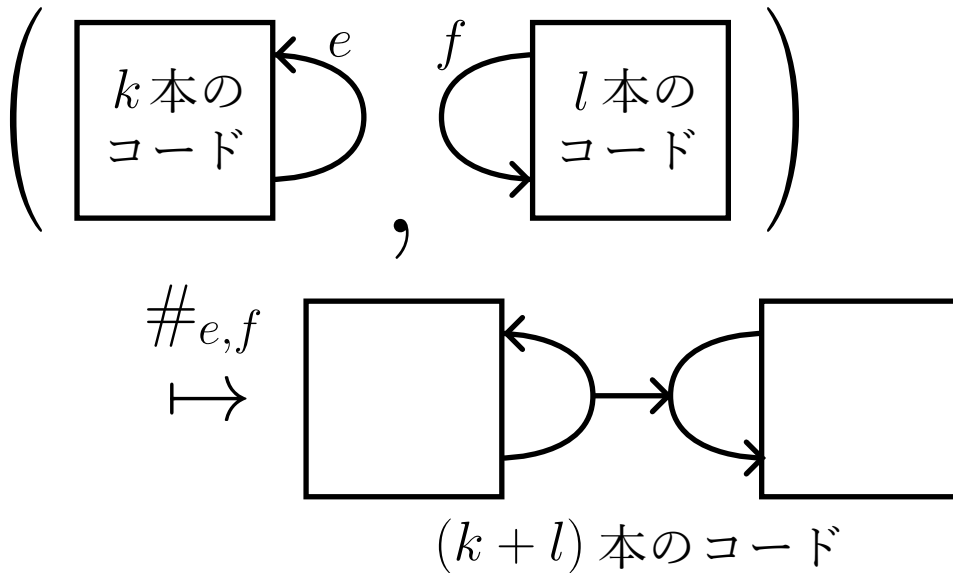


図 13: 辺  $e, f$  による connected sum の例

**Theorem 3.19.** 任意の KTG は、自明に埋め込まれた枠付き四面体と、ねじられた枠付き四面体から 4 つの演算を有限回適用することで得られる. とっとと引用文献書け

*Proof.* aa



□

**Theorem 3.20.** 任意の  $n$  特異 KTG は、自明に埋め込まれた枠付き四面体、ねじられた枠付き四面体、および特異なねじられた枠付き四面体から 4 つの演算を有限回適用することで得られる.

*Proof.* Same as Theorem 3.19.

□

### 3.2 Algebraic structures and expansions

$\mathcal{K}$  において、orientation switch, delete, edge unzip, connected sum を線形に拡張し、 $\mathbb{Q}$  係数の形式和を許すように拡張することで、 $\mathcal{K}$  はベクトル空間となる.

**Definition 3.21.**  $\Gamma$  を 3 価グラフとする.  $\mathcal{K}(\Gamma)$  の部分集合であって係数の和が 0 となるような形式和全体から生成される集合を  $\mathcal{I}(\Gamma)$  と書き、 $\mathcal{I} := \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{I}(\Gamma)$  とする.

**Example 3.22.**  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  を、 $\Gamma$  を骨格とする KTGs とする. このとき、 $\gamma_1 - \gamma_2, \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3 \in \mathcal{I}(\Gamma)$  である.

**Definition 3.23.**  $\mathcal{I}$  の元を少なくとも  $m$  個含むようなものから、 $\mathcal{K}$  上の演算 (orientation switch, delete, unzip, connected sum) の有限回の合成で得られる元全体で張られる部分空間を  $\mathcal{I}^m$  とする. つまり,

$$\mathcal{I}^m := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \left| \begin{array}{l} f: \mathcal{K} \text{ 上の演算の有限回の合成,} \\ x_1, \dots, x_n \in \mathcal{K}, \#\{i \mid x_i \in \mathcal{I} \subset \mathcal{K}\} \geq m \end{array} \right. \right\}.$$

さらに、 $\mathcal{I}^m(\Gamma) := \mathcal{I}^m \cap \mathcal{I}(\Gamma)$  とする.

ここで、 $\mathcal{I}^m$  は明らかにフィルトレーションの構造をもつ.

**Lemma 3.24.**  $\mathcal{I}(\Gamma) = \{\sum_i c_i(\gamma_i - \gamma'_i) \mid \gamma_i, \gamma'_i \in \mathcal{K}(\Gamma), c_i \in \mathbb{Q}\}.$

*Proof.* (⊃) 各  $c_i(\gamma_i - \gamma'_i)$  の係数の和は 0 であるため、係数の総和も 0 である。

(⊂) 任意に  $\gamma \in \mathcal{I}(\Gamma)$  をとる。このとき  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{K}(\Gamma)$  と総和が 0 となる  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Q}$  を用いて  $\gamma = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i$  と表せる。  $\sum_{i=1}^n c_i = 0$  より、  $c_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i$  となる。よって、

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \dots + \left( -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \right) \gamma_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (\gamma_i - \gamma_n).$$

□

**Theorem 3.25.** 任意の  $n \geq 0$  と骨格  $\Gamma$  に対し、  $\mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$  が成り立つ。

*Proof.* (i)  $\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{F}_1(\Gamma)$

(⊃) 任意の  $\gamma \in \mathcal{F}_1(\Gamma)$  は少なくとも 1 つの特異点を持つため、正負の交差の差、または  $F$  点に対応するねじれの差として書ける。つまり、ある  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}(\Gamma)$  が存在して、  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  と書ける。よって、  $\mathcal{F}_1(\Gamma) \subset \mathcal{I}(\Gamma)$ 。

(⊂) 任意の  $\gamma \in \mathcal{I}(\Gamma)$  は Lemma 3.24 より  $\sum_i c_i(\gamma_i - \gamma'_i)$  と表すことができる。  $\mathcal{F}_1(\Gamma)$  において、同じ骨格を持つ任意の 2 つの KTG は交差の上下の変更により移りあうため、  $\gamma_i - \gamma'_i$  を 1 点における正負の交差の差  $\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}'_i$  となるようにできる。よって

$$\gamma = \sum_i c_i(\gamma_i - \gamma'_i) = \sum_i c_i(\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}'_i) \in \mathcal{F}_1(\Gamma).$$

(ii)  $\mathcal{I}^n(\Gamma) \subset \mathcal{F}_n(\Gamma)$

$\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{F}_1(\Gamma)$  より、任意の元  $\gamma \in \mathcal{I}^n(\Gamma)$  は  $\mathcal{F}_1(\Gamma)$  の元を少なくとも  $n$  個含むものから 4 つの演算を有限回行うことで得られる。よって、4 つの演算が特異点の数を保存することを示せば十分である。

Orientation switch の場合、

$$\gamma = \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \begin{array}{c} e \quad f \end{array} = \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \quad \quad \quad \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \begin{array}{c} e \quad f \end{array} - \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \quad \quad \quad \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \begin{array}{c} e \quad f \end{array}$$

$e$  が  $f$  に接続していない場合、

$$S_e \mapsto \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \quad \quad \quad \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} - \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \quad \quad \quad \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} = (-1) \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}.$$

$e$  が  $f$  に接続している場合,

$$S_e \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} .$$

いずれの場合も, double points の数は変わらない.

Delete の場合,

$$\gamma = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ d_e \mapsto \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = 0$$

$e$  が  $f$  に接続しているかどうかにかかわらず,  $d_e(\Gamma) = 0$  である.  $0$  は全ての  $n \geq 0$  に対して  $\mathcal{F}_n$  に含まれるため, 特異点の数は変わらない.

edge unzip の場合,

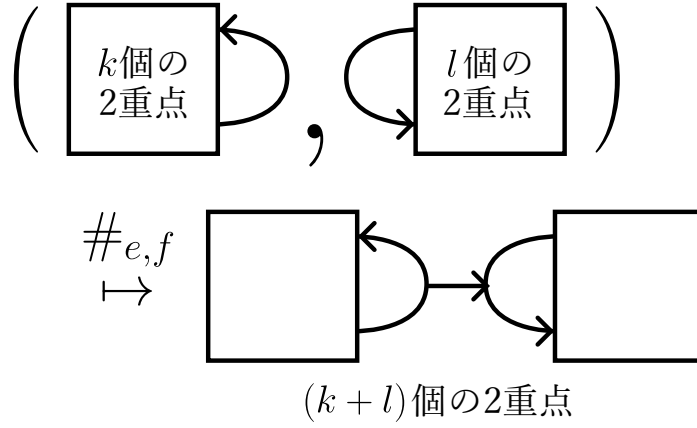
同じ KTG を足し引きすることで特異点の個数が保存されることを示す.  $=$  と  $+$  が縦に並ぶのは読みにくいので適度に indent する.

$$\gamma = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \end{array}$$



$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{u_e} \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \\
& = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\
& + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} \\
& = \text{Diagram 7} - \text{Diagram 8}
\end{aligned}$$

connected sum の場合,



(iii)  $\mathcal{F}_n(\Gamma) \subset \mathcal{I}^n(\Gamma)$

任意の  $\mathcal{F}_n(\Gamma)$  の元は Theorem 3.20 より,  $n$  個の 1-特異 KTG に 4 つの演算を有限回適用することで得られるため明らかに成り立つ.

よって任意の  $n \geq 0$  と 骨格  $\Gamma$  に対して  $\mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$  が成り立つ. □

**Definition 3.26.** この定義の前で終わらせるかも？ Let  $\Gamma, \mathcal{K}(\Gamma)$  be a skeleton and the set of KTGs with skeleton  $\Gamma$ . An **expansion**  $Z$  for  $\mathcal{K}(\Gamma)$  is a map  $Z: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \hat{\mathcal{A}}(\Gamma) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(\Gamma)$  such that

- (i) If  $\gamma \in \mathcal{I}^n(\Gamma) = \mathcal{F}_n(\Gamma)$ , then  $Z(\gamma) \in \prod_{n \geq m} \mathcal{I}^n(\Gamma) / \mathcal{I}^{n+1}(\Gamma)$ ,
- (ii)  $\text{gr } Z: \text{gr } \mathcal{K}(-) \rightarrow \text{gr proj } \mathcal{K}(-)$  is the identity map, where  $\text{proj } \mathcal{K}(\Gamma) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n(\Gamma) / \mathcal{I}^{n+1}(\Gamma)$ .

## 付録 A Proof of Theorem 3.14

$\mathcal{A}(\Gamma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(\Gamma) / \mathcal{F}_{n+1}(\Gamma)$  において, 本来は特異点は存在しないが, 証明を分かりやすくするために以下の図では特異点を描く. 証明の準備として, 以下の関係式が成り立つことを確認する.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \\
 & \stackrel{R3}{=} \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} = \text{Diagram 6}
 \end{aligned}$$

同じ図式を足し引きすることで, 4T 関係式を導出する.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 & = \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}
 \end{aligned}$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}$$

2重点を2つ持つものについて以下の関係式を得る．また，辺を順序に沿って接続する．

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0$$

接続して得られた関係式から2重点をコードと見なす．

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0$$

最後に，骨格を円周のようになるように変形すると4T関係式を得る．

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} \stackrel{R4}{=} \text{Diagram 2} \stackrel{R2}{=} \text{Diagram 3} \\
& \text{Diagram 1} = \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
& = \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \\
& = \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} - \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} \\
& = \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15}
\end{aligned}$$

The diagrams are Feynman diagrams for a three-point vertex with a vertical incoming line and two outgoing lines (one diagonal down-left, one diagonal down-right). The diagrams are related by the following transformations:

- Diagram 1**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 2**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-right line to the diagonal down-left line.
- Diagram 3**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 4**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 5**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-right line to the diagonal down-left line.
- Diagram 6**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 7**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 8**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-right line to the diagonal down-left line.
- Diagram 9**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 10**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-right line to the diagonal down-left line.
- Diagram 11**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 12**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-right line to the diagonal down-left line.
- Diagram 13**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.
- Diagram 14**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-right line to the diagonal down-left line.
- Diagram 15**: A vertex with a vertical incoming line, a diagonal down-left outgoing line, and a diagonal down-right outgoing line. A curved line connects the two outgoing lines, with an arrow pointing from the diagonal down-left line to the diagonal down-right line.

$$\begin{aligned}
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\
&\quad - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}
\end{aligned}$$

The diagrams are variations of a three-legged vertex with a central asterisk. Each leg has an arrow pointing away from the vertex. Diagram 1: A dot on the left leg. Diagram 2: A dot on the top leg. Diagram 3: A dot on the right leg. Diagram 4: A dot on the top leg, with a curved line connecting it to the left leg. Diagram 5: A dot on the top leg, with a curved line connecting it to the right leg.

$$\begin{aligned}
&= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
&\quad - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} = 0
\end{aligned}$$

The diagrams are variations of a three-legged vertex with a central asterisk. Each leg has an arrow pointing away from the vertex. Diagram 1: A dot on the left leg. Diagram 2: A dot on the top leg. Diagram 3: A dot on the right leg. Diagram 4: A dot on the top leg, with a curved line connecting it to the left leg. Diagram 5: A dot on the top leg, with a curved line connecting it to the right leg. Diagram 6: A dot on the top leg, with a curved line connecting it to the left leg, and a dot on the right leg.

$$\text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + (-1) \text{Diagram 9} = 0$$

The diagrams are variations of a three-legged vertex with a central asterisk. Each leg has an arrow pointing away from the vertex. Diagram 7: A dot on the left leg. Diagram 8: A dot on the top leg. Diagram 9: A dot on the right leg.

Bibtex のエクスポートはゴミなので自分で書け

## 参考文献

- [BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.
- [CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.
- [Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.
- [MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Yam87] Shuji Yamada. An invariant of spatial graphs. *数理解析研究所講究録*, 636:16–41, 1987.