

# 卒論（タイトル未定）

元論文: Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs

宮路 宙澄

September 26, 2025

## Abstract

KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]. KTGs において “edge unzip” という操作のみ準同型にならず, 補正項が現れる. dotted Knotted Trivalent Graphs において  $Z^{old}$  が準同型となるように  $Z$  を 2 通りで構成することが目的.

## Contents

I	Introduction	2
II	Preliminaries	2
1	KTGs and $Z^{old}$	2

## Part I

# Introduction

Knotted Trivalent Graphs のなす空間にはいい構造がある (Knots や links を含む). 4 つの操作がある: orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum. KTGs は有限生成である [Thu02]. KTGs は Knot genus(ザイフェルト曲面?) や ribbon property(ribbon knot? 自己交差あり) などの良い代数構造をもつため, それらを使うことが出来る [BN].

Knots の Kontsevich integral は universal Vassiliev invariant に拡張できる. その中でも unzip 以外が準同型になる.

- unzip, delete, connected sum を “tree connected sums” と呼ばれるより一般の操作へ変える.
- unzip が出来る edge を制限する.

簡単に  $Z^{old}$  を dKTGs で準同型にすることができ, dKTGs は KTGs の良い性質をすべて保つことを示す. 有限生成や close connection to Drinfel'd associators (知らん) など.

## Part II

# Preliminaries

## 1 KTGs and $Z^{old}$

**Definition 1.1.** *Trivalent graph* とは, 各頂点が 3 つの辺をもつグラフ.

全ての辺は向きづけられているものとし, 頂点は回転するように向きを与える. ループや円などの辺を許すこととする.

**Definition 1.2.** *Surface* とは第 2 可算公理 (高々可算な開基を持つ) を満たす 2 次元多様体をいう.

**Definition 1.3.**  $K$  を単体複体,  $\sigma, \tau$  を以下の条件を満たす  $K$  の単体とする.

- $\tau \not\preceq \sigma$ ,
- $\sigma$  は  $K$  の最大の面単体で, 他の最大面単体は  $\tau$  を含まない. このような  $\tau$  を *free face* という.

このとき,  $K$  の *collapse* とは,  $\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$  となる  $\gamma$  をすべて取り除くことをいう.

**Definition 1.4.** 単体複体  $Y$  における *spine* とは,  $Y$  の部分単体複体  $X$  であって,  $Y$  を collapse して  $X$  となるものをいう.

**Definition 1.5.** Trivalent graph  $\Gamma$  に対し, *thickened trivalent graph* or *framed trivalent graph* [Thu02]  $\Gamma$  とは, 頂点を太らせたもの. 参照先の定義では, 1 次元単体複体  $\Gamma$  と, surface  $\Sigma$  に対しその spine となるように  $\Gamma$  を埋め込んだもの (なめらか?) の組.

**Definition 1.6.** *Knotted trivalent graph (KTG)* を, framed trivalent graph  $\gamma$  から  $\mathbb{R}^3$  への埋め込み, KTG の *skeleton* を trivalent graph  $\Gamma$  とする. (framed knots や links も含む)

KTGs において, skeleton が isotopy で移りあうものを同一視する. Trivalent graph  $\Gamma$  に対し,  $\Gamma$  を skeleton とする. すべての KTG の集合を  $\mathcal{K}(\Gamma)$  と書く.

**Proposition 1.7.** Framed knots と, knot diagrams で  $R1', R2, R3$  の操作で移りあうものを同一視したものは 1 対 1 に対応する.

証明. Quantum Invariants by 大槻 Theorem 1.8 p15 □

**Proposition 1.8.** KTGs の isotopy class と graph diagrams (交点の上下の情報を残した射影) で  $R1', R2, R3, R4$  で移りあうものは 1 対 1 に対応する.

証明. [Dan10] (p19 下部) の [Y] An invariant of spatial graphs by Yamada, [Y] の p3 の Lemma 1. □

KTGs には以下の 4 つの操作がある.

**Definition 1.9.** Trivalent graph  $\Gamma$ , KTG を  $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$  とし,  $\Gamma$  の edge を  $e$  とする.  $e$  の *switch the orientation* を, 向きを変えるものとして定め,  $S_e(\gamma)$  と書く.

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

## References

- [BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.
- [CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.
- [Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.
- [MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Thu02] Dylan P Thurston. The algebra of knotted trivalent graphs and turaev ’s shadow world. *Geometry & Topology Monographs*, 4:337–362, 2002.