

卒論（タイトル未定）

元論文: Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs

宮路 宙澄

November 15, 2025

Abstract

KTGs に対し a universal Vassiliev invariant が存在することは知られていた [MO97, CL07, Dan10]. KTGs において “edge unzip” という操作のみ準同型にならず, 補正項が現れる. dotted Knotted Trivalent Graphs において Z^{old} が準同型となるように Z を 2 通りで構成することが目的.

Contents

I	Introduction	2
II	Preliminaries	2
1	KTGs and Z^{old}	2

Part I

Introduction

Knotted Trivalent Graphs(Knots や links を含む) のなす空間には良い構造がある．次の4つの操作がある: orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum. KTGs は有限生成である [Thu02]. KTGs は Knot genus(ザイフェルト曲面?) や ribbon property(ribbon knot? 自己交差あり) などの良い代数構造をもつため, それらを使うことが出来る [BN].

Knots の Kontsevich integral は universal Vassiliev invariant に拡張できる．その中でも unzip 以外が準同型になる．

- unzip, delete, connected sum を “tree connected sums” と呼ばれるより一般の操作へ変える．
- unzip が出来る edge を制限する．

簡単に Z^{old} を dKTGs で準同型にすることができ, dKTGs は KTGs の良い性質をすべて保つことを示す．有限生成や close connection to Drinfel'd associators (知らん) など．

Part II

Preliminaries

1 KTGs and Z^{old}

Definition 1.1. *Trivalent graph*(3価グラフ) とは, 各頂点が3つの辺をもつようなグラフをいう．

全ての辺は向きづけられているものとし, 頂点は反時計回りに向きを与える．ループや円などの辺を許すこととする．

Definition 1.2. *Surface*(曲面) とは第2可算公理¹を満たす2次元多様体をいう．

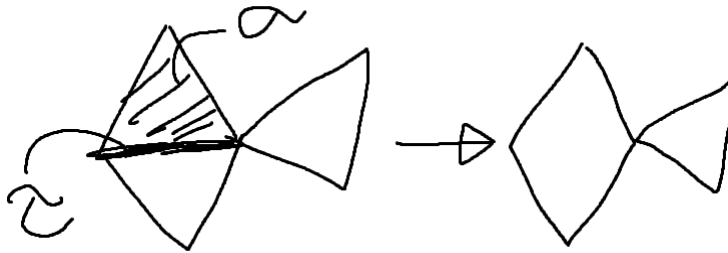
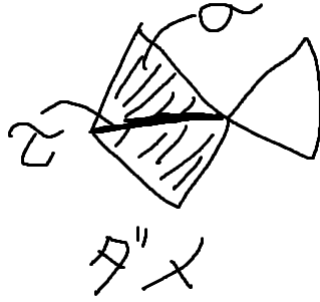
Definition 1.3. K を単体複体, $\sigma, \tau \in K$ を以下の条件を満たすとする．

- $\tau \not\supset \sigma$,

¹高々可算な開基を持つ．

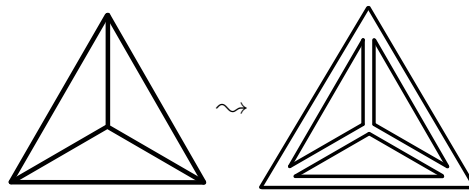
- σ は K の最大の面単体で, 他の最大面単体は τ を含まない. このような τ を *free face* という.

このとき, K の *collapse* とは, $\tau \preceq \gamma \preceq \sigma$ となる γ をすべて取り除くことをいう.



Definition 1.4. 単体複体 K における *spine*(スパイン) とは, K の部分単体複体 K' であって, K を collapse して K' となるものをいう.

Definition 1.5. graph Γ に対し *framed graph* (枠付きグラフ) Γ とは, Γ と, Γ を spine として曲面 Σ へ埋め込む²写像 $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$ の組をいう. 特に Γ が Trivalent graph のとき, Γ を *framed trivalent graph*³という.



Definition 1.6. *Knotted trivalent graph (KTG)* を, framed trivalent graph γ から \mathbb{R}^3 への埋め込み, KTG の *skeleton* を trivalent graph Γ とする. (framed knots や links も含む)

²グラフを 1 次元 CW 複体とみなす.

³論文では thickened trivalent graph と書いてある.

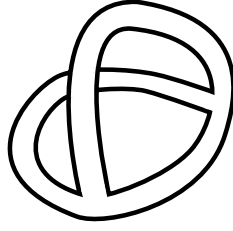


Figure 1: Knotted Trivalent Graph の例

KTGs において, skeleton が isotopy で移りあうものを同一視する. 特に, framed knots や links は KTGs の特別な場合である. Trivalent graph Γ に対し, すべての KTG の集合を $\mathcal{K}(\Gamma)$ と書き, $\mathcal{K} := \bigcup_{\Gamma} \mathcal{K}(\Gamma)$ とする.

Proposition 1.7. Framed knots と, framed knot の diagrams で 3 つの Reidemeister 変形 $R1', R2, R3$ の操作で移りあうものを同一視したものは 1 対 1 に対応する.

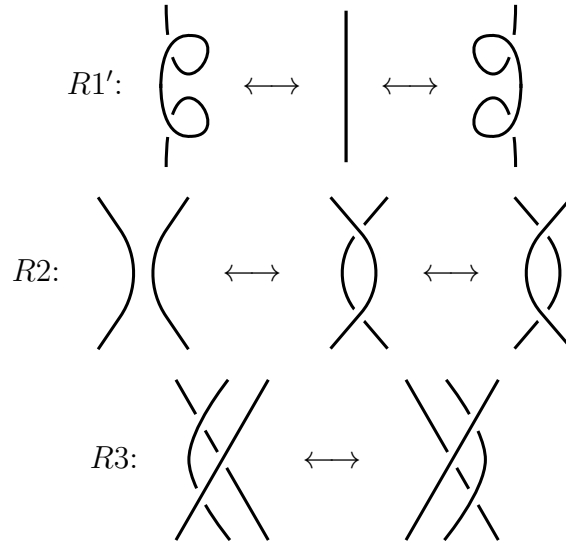


Figure 2: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

Proof. [Oht02] P15 Theorem 1.8

□

Proposition 1.8. KTGs の isotopy class と graph diagrams (交点の上下の情報を残した射影) で $R1', R2, R3, R4$ で移りあうものは 1 対 1 に対応する.

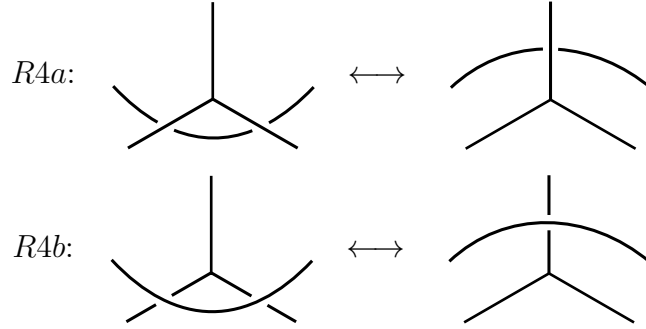


Figure 3: Framed knots における 3 種類の Reidemeister 変形

Proof.

□

KTGs には以下の 4 つの操作がある.

Definition 1.9. Trivalent graph を Γ , KTG を $\gamma \in \mathcal{K}(\Gamma)$ とし, Γ の edge を e とする. e の *switch the orientation* を, 向きを変えるものとして定め, $S_e(\gamma)$ と書く.

$$S_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(S_e(\Gamma)); \gamma \mapsto S_e(\gamma)$$

図

Definition 1.10. Γ の edge であって, 両端に接続されている edge の向きが一致している e を *delete* するとは, e を削除し, 三価性を保つように e の両端の頂点を削除することをいう.

$$d_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(d_e(\Gamma)); \gamma \mapsto d_e(\gamma)$$

図

Definition 1.11. Γ の edge e を *unzip* するとは, e を “限りなく近い” 2 つの edges に分け, 端点をなくすことをいう. 端点をなくしたとき, edge の向きが合っていることが必要である. 同様の議論で framed graph Γ に対し, unzip を定義できる.

$$u_e: \mathcal{K}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{K}(u_e(\Gamma)); \gamma \mapsto u_e(\gamma)$$

図

Definition 1.12. 2 つの trivalent graph とその edge のペア $(\Gamma, e), (\Gamma', f)$ の *connected sum* $\Gamma \#_{e,f} \Gamma'$ とは e, f をつなぐ edge を新たに作ること. well-defined であるために, 新たな edge の向きは Γ から Γ' への向きとし, KTGs においてはねじれを許さず, 辺を付ける場合は e, f の右側に付けるとする. (2次元では自由に動かせないため左右が重要)

$$\#_{e,f}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K};$$

図

KTGs の finite type invariants は, links へのものを単に拡張する. 同じ skeleton の KTGs の形式和を許し, 得られたベクトル空間を特異点の解消によってフィルター分けする.

$$\mathcal{F}^0(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \Gamma_i \middle| m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \Gamma_i \in \mathcal{K}(\Gamma) \right\}$$

を KTGs の有限な形式和全体がなす \mathbb{Q} -ベクトル空間とする.

Definition 1.13. *n-singular KTG* とは, n この特異点を持つ trivalent graph の \mathbb{R}^3 へのはめ込み. 各特異点は横断的な 2 重点か, “ F ” と書かれた線上の点である.

$n \geq 1$ に対し以下のようなベクトル空間を考える.

$$\mathcal{F}^n(\Gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \Gamma_i \middle| m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \Gamma_i: \Gamma \text{ を骨格とし少なくとも } n \text{ この特異点を持つ KTG} \right\}$$

特異点を解消する写像として,

$$\rho: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^0,$$

であって, 以下のように定めるものを考える:

図

$\mathcal{F}^n (n \geq 1)$ に対し, ρ で送ると,

$$\mathcal{F}^0 \supset \rho(\mathcal{F}^1) \supset \rho(\mathcal{F}^2) \cdots$$

という filtration が得られる. この filtration に対する associated graded space として,

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \prod_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i(\Gamma) / \mathcal{F}^{i+1}(\Gamma)$$

とする.

$\mathcal{A}(\Gamma)$ は chord diagram を用いて表すことができる.

Definition 1.14. skeleton graph Γ 上の n 次の *chord diagram* とは, Γ の辺上の $2n$ この点のペアからなる組み合わせ的なものであり, 辺の向きを保つ同相写像で移りあうものを同一視する. 特に, 次数 n の chord diagram を基底とする \mathbb{Q} 上のベクトル空間を $\mathcal{D}_n(\Gamma)$ と書く.

Proposition 1.15. $\pi: \mathcal{D}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$ は well-defined であり surjective.

aaaaasadafa

Proof. この論文だけ $\mathcal{A}(\Gamma)$ の構成法が違うので一旦パス. (結局は $\{\text{Chord diagrams}\}/(\text{VI}, 4\text{T}) \cong \mathcal{A}$ のはず) \square

上記の写像の kernel に含まれる 2 つの関係式がある. (要証明 ← goodnote と Alge Knot Theory のノートでできたはず)(Ker が一致するとはまだ言っていない)

- (4T) Four term relation 図
- (VI) Vertex invariance relation 図

図に描かれていない部分には graph があるが, それらは全て同じでなければならない. 4T では反時計回りの向きを与える (これ必要?). VI において, $(-1)^{\rightarrow}$ は, chord の付いた edge が外向きなら -1, 内向きなら 1 をかける (つまり式は 8 つある).

4T, VI の relations が存在することは分かったが, これ以上の relation が存在 “しない” ことを示すのは困難である. これを示すには, universal finite type invariant $\text{QKTG} \rightarrow \mathcal{A}$ を構成するのが最善である (ここでは定義しないが, 後で一般の文脈で定義する). これは, T.Le, H.Murakami, J. Murakami, T.Ohtsuki の結果をもとに, また Drinfeld の associator の理論を用いて [KO, CD],[BN] での Kontsevich integral を拡張する形で [MO97] で初めて得られた.

KTGs の各 operation は \mathcal{A} 上の operation を誘導する. (\mathcal{A} は $\mathcal{K}(\Gamma)$ の associated graded space である.)

- orientation switch
- edge delete
- edge unzip
- connected sum well-defined である. Introduction to Vassiliev knot invariants(Chmutov) の Lemma 4.2.9

References

- [BN] D Bar-Natan. Algebraic knot theory-a call for action. 898(10.1016):0040–9383.
- [CL07] Dorin Cheptea and Thang TQ Le. A tqft associated to the lmo invariant of three-dimensional manifolds. *Communications in mathematical physics*, 272(3):601–634, 2007.
- [Dan10] Zsuzsanna Dancso. On the kontsevich integral for knotted trivalent graphs. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(3):1317–1365, 2010.
- [MO97] Jun Murakami and Tomotada Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):501–520, 1997.
- [Oht02] T. Ohtsuki. *Quantum Invariants: A Study of Knots, 3-manifolds, and Their Sets*. K & E series on knots and everything. World Scientific, 2002.
- [Thu02] Dylan P Thurston. The algebra of knotted trivalent graphs and turaev ’s shadow world. *Geometry & Topology Monographs*, 4:337–362, 2002.