応用数学

本日の目標

- 第一章　線形代数
  1) 固有値・固有ベクトルの求め方を確認する。
  2) 固有値分解について理解を深める。
  3) 特異値・特異ベクトルの概要を知る
  4) 特異値分解の概要を知る。
- 第二章　確率・統計
  1) 条件付き確率について理解を深める。
  2) ベイズ則の概要を知る。
  3) 期待値・分散の求め方を確認する。
  4) 様々な確率分布の概要を知る。
- 第三章　情報理論
  1) 自己情報量・シャノンエントロピーの定義を確認する。
  2) KLダイバージェンス・交差エントロピーの概要を知る。

第一章 線形代数

1) 固有値・固有ベクトルの求め方を確認する。
2) 固有値分解について理解を深める。
3) 特異値・特異ベクトルの概要を知る
4) 特異値分解の概要を知る。

スカラーとベクトルの違い (1-1-1)

スカラー
- だいたい、いわゆる普通の数
- ＋－×÷の演算が可能
- ベクトルに対する係数になれる

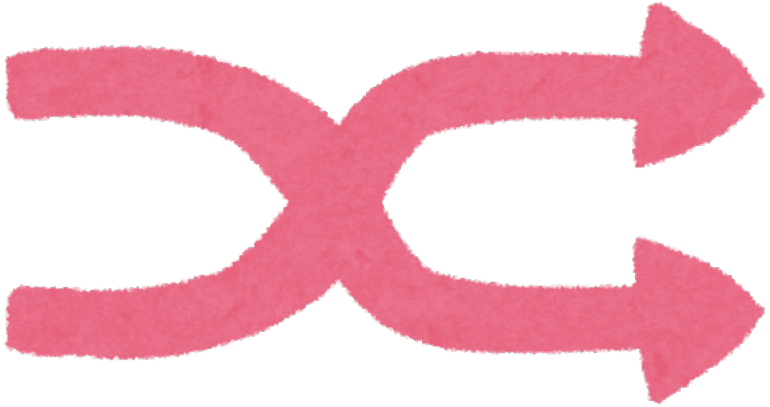
ベクトル
- 「大きさ」と「向き」を持つ
- 矢印で図示される
- スカラーのセットで表示される

行列 (1-1-2)

- スカラーを表にしたもの
- ベクトルを並べたもの
  （ベクトルのベクトル）

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→何に使うのか？
ベクトルの変換！



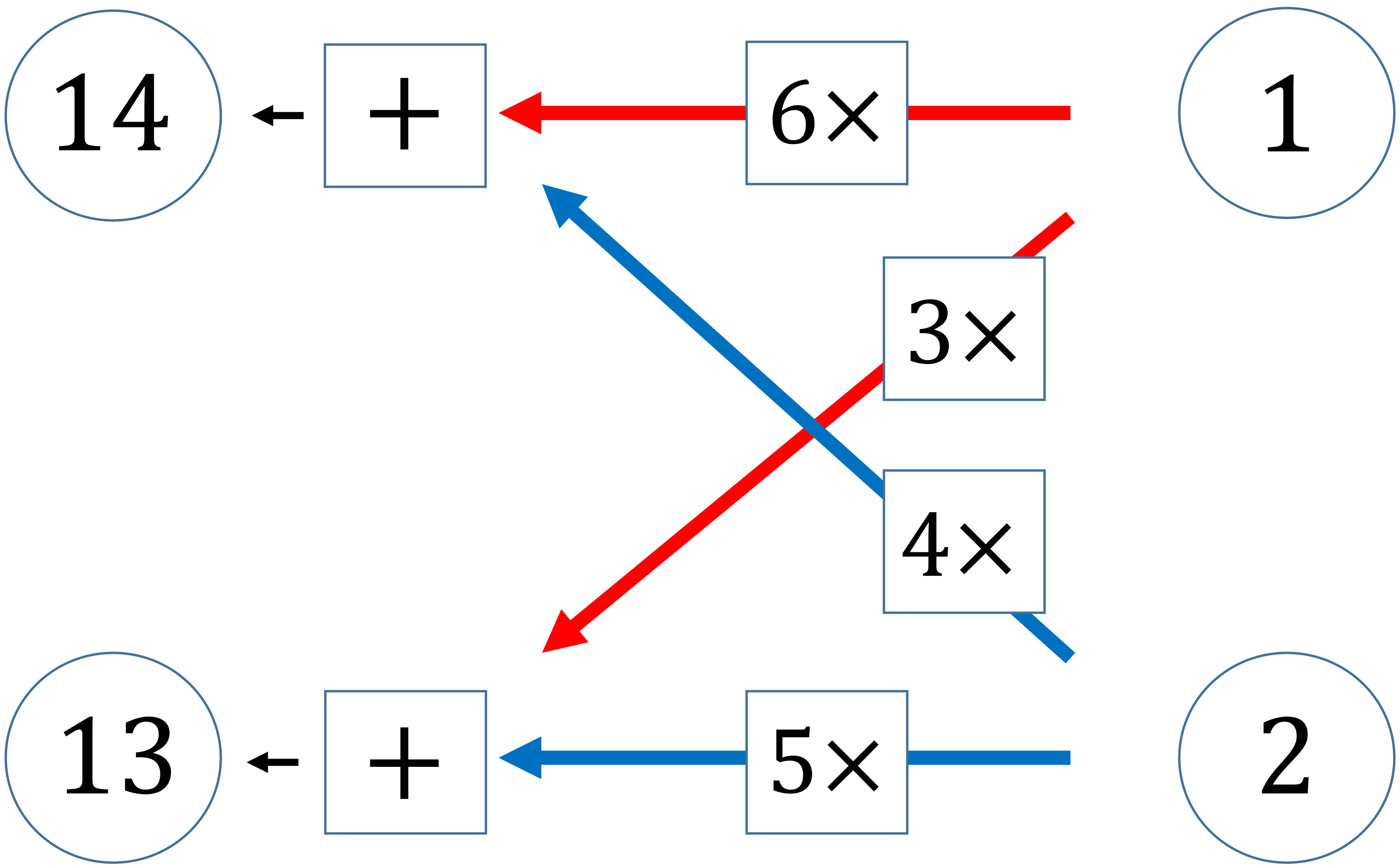
行列とベクトルの積 (1-1-3-1)

- 例題

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times{\color{red}1} & + & 4\times{\color{blue}2} \\ 3\times{\color{red}1} & + & 5\times{\color{blue}2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+8 \\ 3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

計算の手順を図示するなら・・・ (1-1-3-2)



$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times{\color{red}1} + 4\times{\color{blue}2} \\ 3\times{\color{red}1} + 5\times{\color{blue}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

変換後の要素のある「ひとつ」は

元の要素の「すべて」から
影響を受けている

行列の積 (1-1-4-1)

「行」

「列」

新たな成分

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

「行」×「列」で新たな
行列の成分を求める！

行列の積　例題 (1-1-4-2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1+1\times3 & 2\times3+1\times1 \\ 4\times1+1\times3 & 4\times3+1\times1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

行列はどこからやってきた？

行列の「積」は少々不思議な計算方法…

どこからやってきた発想？

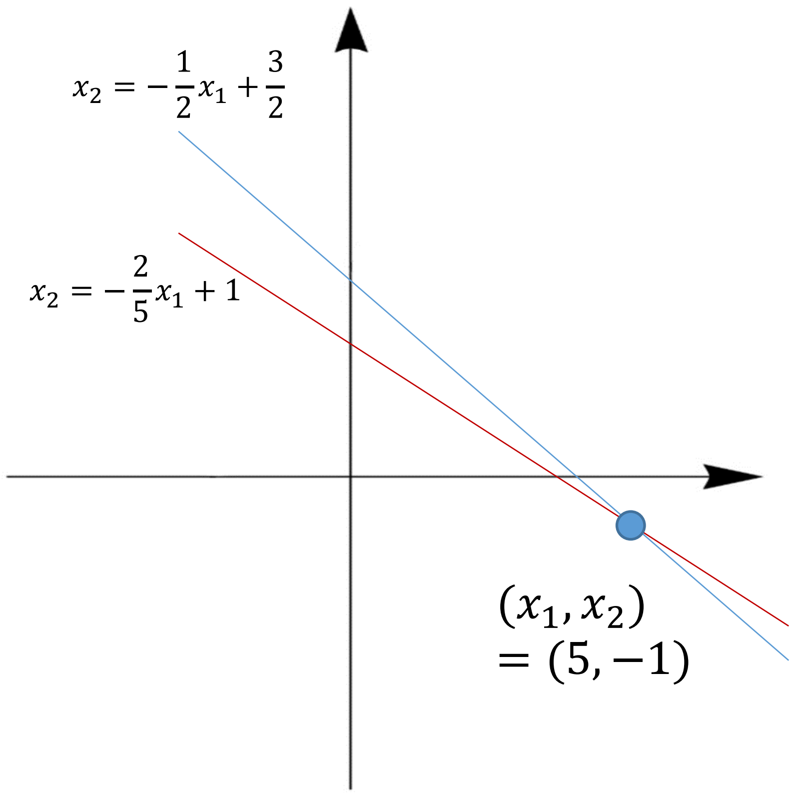
連立方程式の研究の中から生まれた！らしい

連立1次方程式(1-1-5-1)

未知数が2つ！これでは当てはまる数が
１つには決定できない…

しかしx$_1$とx$_2$の
関係はわかる

$$\boxed{x_1 + 2x_2} = 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$$



もし、似たような関係式が
もう1つあったなら…

$$2x_1 + 5x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{5}x_1 + 1$$

従って $x_1 = 5, \quad x_2 = -1$

このような関係式のセットを連立方程式という！

行列を用いた表示(1-1-5-2)

連立方程式は複雑…もっとシンプルに
表現できないか？

$$ax = b$$ みたいに…

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\vec{x}} = \boxed{\vec{b}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

この係数をまとめて
「表」のようにした部分
を「行列」と呼ぶ

連立1次方程式の解き方(1-1-5-3)

例えば・・・

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

行基本変形という

i行目をc倍する

s行目にt行目の
c倍を加える

p行目とq行目を
入れ替える

2行目を1/2倍する

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

2行目に1行目の-3倍を加える

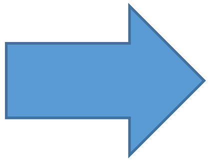
$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

解けた！

行列を使った形式
で表すと・・・



行基本変形は
行列の変形と
言い換えることができる

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

手順自体も計算として表現する方法(1-1-5-4)

i行目をc倍する

$$Q_{i,c} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

s行目にt行目のc倍を加える

$$R_{s,t,c} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

p行目とq行目を入れ替える

$$P_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

行基本変形は行列を左からかけることで表現できる！

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times$ 2行目を1/2倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times$ 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times$ 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$ 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

行列の「逆数」のようなもの(1-1-6-1)

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

行基本変形に対応する行列をかけたなら･･･

$$\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

変形に対応する行列の部分を先に計算

$$\boxed{\boxed{\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

まるで逆数のような働きをするので、
逆行列と呼ぶ

変形に対応する行列と係数の行列をかけ算すると

$$\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}}$$

かけても、かけられても相手が変化しない、
「1」のような行列･･･
単位行列という

変形に対応する行列と右辺の縦ベクトルをかけ算する

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$$

解けた！

cf.

$$ax=b$$
$$\frac{1}{a}\times ax=\frac{1}{a}\times b$$
$$1\times x=\frac{1}{a}\times b$$
$$x=\frac{b}{a}$$

単位行列と逆行列　　(1-1-6-2)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

具体例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

具体例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の求め方(1-1-6-3)

どのような行基本変形をしたのかを記録し
それを行列と対応させ、かけ算していけば求まるが・・・

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$ と考える

左右の係数の行列に同じ行基本変形を
実行したと考えてみれば・・・

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2行目を1/2倍する

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

1行目に2行目の-1倍を加える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

2行目に1行目の-3倍を加える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

1行目と2行目を入れ替える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

逆行列が求まった！

これを**掃き出し法**という

問題(1-1-6-4)

$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \text{1行目に2行目の-4倍を加える}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \text{2行目に1行目の2倍を加える}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \text{1行目を-1倍する}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \text{1行目と2行目を入れ替える}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

逆行列が存在しない条件(1-1-7-1)

逆数が存在しない数があるのと同様に
逆行列が存在しない行列というものもある

解がない、解が１組に定まらないタイプの連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 8x_2 = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

など･･･

これらの係数を抜き出したような行列は、逆行列をもたない！

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{実際に確かめてみよう！}}$$

など･･･

形式的には･･･

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列があったとき

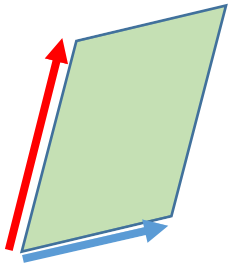
$a{:}b \neq c{:}d$ のとき逆行列を持ち

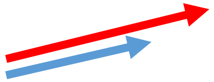
$a{:}b = c{:}d$ のとき逆行列を持たない

$ad = bc$

$ad - bc = 0$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}$ と考えたとき
二つのベクトルに囲まれる
平行四辺形の面積＝0
だと逆行列が存在しない



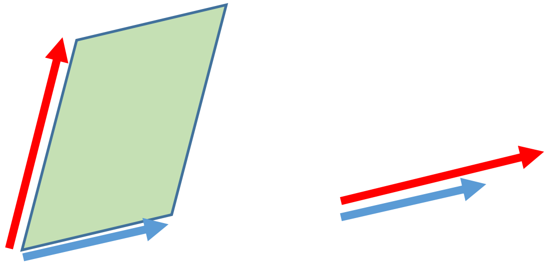


傾きが同じなので面積ゼロ

行列式の特徴(1-1-7-2)

ある行列が２つの横ベクトルの組み合わせだと考えたとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$



でつくられる平行四辺形の面積が、逆行列の有無を判別する

この「面積」を $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{vmatrix}$ と表し**行列式**と呼ぶ

$$\vec{v}_1 = (a\,,b\,,c)$$
$$\vec{v}_2 = (d\,,e\,,f)$$
$$\vec{v}_3 = (g\,,h\,,i)$$

３つ以上のベクトルからできている行列式は展開できる！

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

n個のベクトルからできているならば・・・
行列式はどんな特徴を持つのだろう？

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = 0$$

同じ行ベクトルが含まれていると
行列式はゼロ

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \lambda\vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

１つのベクトルが λ
倍されると
行列式は λ 倍される

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i + \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

他の成分が全部同じでi番目の
ベクトルだけが違った場合・・・
行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

行を入れ替えると
符号が変わる

なぜだろう？
証明してみよう！

問題(1-1-7-3)

行を入れ替えると行列式の符号は入れ替わる。

次の関係を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

ヒント
→の関係を使って
証明しよう

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i + \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

もとの行列式とs行目とt行目を入れ替えた
行列式を足し合わせる

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \boxed{\vec{v}_s + \vec{v}_t} \\ \vdots \\ \boxed{\vec{v}_t + \vec{v}_s} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = 0$$

したがって

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_t \\ \vdots \\ \vec{v}_s \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

(証明終)

行列式の求め方(1-1-7-4)

ある一つの正方行列に，ある一つの数値が対応する

→正方行列の「大きさ」みたいなもの

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

具体例

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5\times(1-0) - 4\times(2-1) + 3\times(0-(-1)) = 4$$

複雑な場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

別解

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times(-4-3) - 0\times(-5-6) + 1\times(5-8) = 4$$

問題(1-1-7-5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ を求めよ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times(1-0) - 3\times(0-1) + 2\times\bigl(0-(-1)\bigr) = 6$$

固有値と固有ベクトル(1-1-8-1)

ある行列Aに対して，以下のような式が成り立つような，特殊なベクトル$\vec{x}$と，右辺の係数λがある。

$$\mathrm{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

行列Aとその特殊なベクトル$\vec{x}$の積は，ただのスカラーの数λとその特殊なベクトル$\vec{x}$との積と同じ値になる！

この特殊なベクトル$\vec{x}$とその係数λを，行列Aに対する，固有ベクトル，固有値という。

固有値・固有ベクトル　具体例 (1-1-8-2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値$\lambda = 5$

固有ベクトル（の うちの一つ）$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトル　求め方（1-1-8-3）

$$\mathrm{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \neq \vec{0}$$ より

$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot 2 = 0$$
$$\lambda = 5 \text{ or} -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ よって $x_1 = x_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ よって $x_1 = -2x_2$

したがって

$\lambda = 5$ のとき $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = -1$ のとき $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍

問題(1-1-8-4)

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$の固有値，固有ベクトルを求めよ

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \neq \vec{0} \text{ より}$$
$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 3 \text{ or } 2 \text{ or } 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ よって} x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ よって} x_1 = -2x_2, \quad x_3 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ よって} x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

したがって

$$\lambda = 3 \text{のとき} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の定数倍}$$
$$\lambda = 2 \text{のとき} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の定数倍}$$
$$\lambda = 1 \text{のとき} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{の定数倍}$$

固有値分解 (1-2-1)

ある実数を正方形にならべて作られた行列Aが固有値$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$と固有ベクトル$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots$を持ったとする。この固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分は0）

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と，それに対応する固有ベクトルを並べた行列

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

を用意したとき，それらは

$$AV = V\Lambda$$

と関係付けられる。したがって

$$A = V\Lambda \mathrm{V}^{-1}$$

と変形できる。このように正方形の行列を上述の様な 3 つの行列の積に変換することを固有値分解という。この変換によって行列の累乗の計算が容易になる等の利点がある。

固有値分解 具体例 (1-2-2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

問題(1-2-3)

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$を固有値分解せよ

$$\mathrm{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \neq \vec{0} \text{ より}$$
$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)(6-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 2 \text{ or } 6$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ よって} x_2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ よって} 4x_1 = x_2$$

したがって

$$\lambda = 2\text{のとき}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{の定数倍}$$
$$\lambda = 6\text{のとき}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\text{の定数倍}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

特異値分解 (1-3-1)

- 正方行列以外は固有値分解できないの？→似たことは出来る。

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$
$$M^{\top}\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

- このような特殊な単位ベクトルがあるならば特異値分解できる。

$$M = US\mathrm{V}^{-1}$$

特異値の求め方 (1-4-1)

$$MV = US \qquad M^\top U = VS^\top$$

$$M = USV^{-1} \qquad M^\top = VS^\top U^{-1}$$

これらの積は

$$MM^\top = USV^{-1}VS^\top U^{-1} = USS^\top U^{-1}$$

つまり$MM^\top$を固有値分解すれば，その左特異ベクトル（ただし単位ベクトルから作らなければならないことに注意）と特異値の2乗が求められることがわかる。

特異値の求め方 具体例 (1-4-2)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MM^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解して

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M^\top M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解して

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1}$$

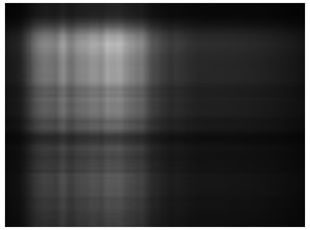
特異値分解 具体例(1-4-3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

特異値分解の利用例

k=1

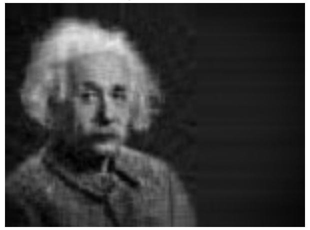


k=2

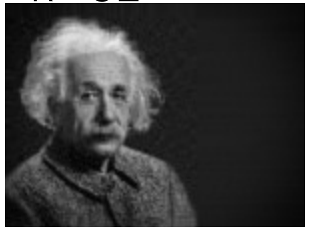
k=4

k=8

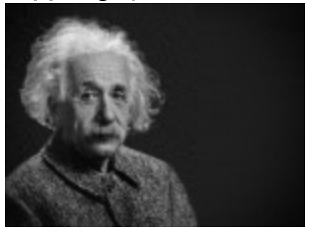
k=16



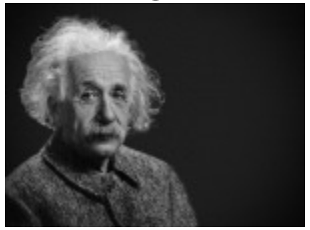
k=32



k=64

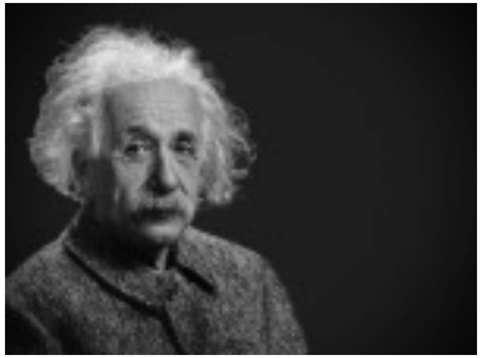


k=128



統計用言語Rによるコードの例

```
A <- read.table(“einstein.csv”)   # 読み込み

svd_A <- svd(A)                 # 特異値分解


for (k in c(1,2,4,8,16,32,64,128)){

 s <- diag(svd_A$d)[1:k, 1:k, drop=F]       # 近似行列の計算
 u <- svd_A$u[,1:k, drop=F]                 # u行列の代入
 v <- svd_A$v[,1:k, drop=F]                 # v行列の代入


   k_ch <- as.character(k)

   write.table(round(u %*% s %*% t(v)),
             paste( "C:/work/" , k_ch , ".csv" , sep="" ),
             sep=“,”, row.names=F, col.names=F
               )                                       # 出力
                                   }
```



元画像は960×720

特異値分解した画像データの行列から
成分の小さい部分を取り除いていくと・・・

画像はぼやけて行く＝データ量を小さくできる

第二章　確率・統計

1) 条件付き確率について理解を深める。
2) ベイズ則の概要を知る。
3) 期待値・分散の求め方を確認する。
4) 様々な確率分布の概要を知る。

確率（２章-１-1）

頻度確率(客観確率)

- 発生する頻度
- 例:「10本のうち一本だけ当たりのクジを引いて当選する確率を調べたところ10%であった」という事実

ベイズ確率(主観確率)

- 信念の度合い
- 例:「あなたは40%の確率でインフレンザです」という診断

条件付き確率（２章-1-2）

- ある事象X=xが与えられた下で，Y=yとなる確率
  - 例:雨が降っている条件下で交通事故に遭う確率

$$P(Y = y | X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

独立な事象の同時確率 （２章-1-3）

- お互いの発生には因果関係のない事象X=xと事象Y=yが同時に発生する確率

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$= P(Y = y, X = x)$$

ベイズ則　（２章-２-1）

- ある街の子どもたちは毎日1/4の確率で飴玉をもらうことができ，飴玉をもらうと1/2の確率で笑顔になるという。その街の，笑顔な子どもが飴玉をもらっている確率を求めよ。(ただし，この街の子どもたちが笑顔でいる確率は1/3である。)

- 一般的に事象X=xと事象Y=yに対して…

$$P(X = x|Y = y)P(Y = y)$$
$$= P(Y = y|X = x)P(X = x)$$

ベイズ則の利用　（２章-２-1）

例題の内容を整理すると

$P(飴玉) = 1/4$　　$P(笑顔|飴玉) = 1/2$　　$P(笑顔) = 1/3$

$P(笑顔|飴玉) \times P(飴玉) = P(笑顔，飴玉)$　　$1/2 \times 1/4 = 1/8$

$P(笑顔，飴玉) = P(飴玉，笑顔)$

$P(飴玉，笑顔) = P(飴玉|笑顔) \times P(笑顔)$　　$1/8 = P(飴玉|笑顔) \times 1/3$

したがって答えは

$$P(飴玉|笑顔) = 3/8$$

確率変数と確率分布（２章-２-2）

確率変数

- 事象と結び付けられた数値
- 事象そのものを指すと解釈する場合も多い

確率分布

- 事象の発生する確率の分布
- 離散値であれば表に示せる

事象	裏が0枚, 表が4枚	裏が1枚, 表が3枚	裏が2枚, 表が2枚	裏が3枚, 表が1枚	裏が4枚, 表が0枚
確率変数（裏を0, 表を1と対応させ和をとった）	4	3	2	1	0
事象が発生した回数	75	300	450	300	75
事象と対応する確率	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

期待値（２章-３-1）

- その分布における，確率変数の…

平均の値 or 「ありえそう」な値

事象X	x_1	x_2	…	x_n
確率変数$f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$
確率$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_n)$

連続する値なら…

期待値$\mathrm{E}(f)$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) f(X = x_k)$$

期待値$\mathrm{E}(f)$
$$= \int P(X = x) f(X = x) dx$$

分散と共分散 （２章- ３ -2）

分散

- データの散らばり具合
- データの各々の値が，期待値からどれだけズレているのか平均したもの

共分散

- ２つのデータ系列の傾向の違い
  - 正の値を取れば似た傾向
  - 負の値を取れば逆の傾向
  - ゼロを取れば関係性に乏しい

$$
\text{分散}\mathrm{Var}(f) \\
= \mathrm{E}\left(\left(f_{(X=x)} - \mathrm{E}_{(f)} \right)^2 \right) \\
= \mathrm{E}\left(f_{(X=x)}^2 \right) - \left(\mathrm{E}_{(f)} \right)^2
$$

$$
\text{共分散}\mathrm{Cov}(f, g) \\
= \mathrm{E}\left(\left(f_{(X=x)} - \mathrm{E}(f) \right) \left(g_{(Y=y)} - \mathrm{E}(g) \right) \right) \\
= \mathrm{E}(fg) - \mathrm{E}(f)\mathrm{E}(g)
$$

分散と標準偏差（２章- ３ -3）

分散は２乗してしまっているので元のデータと単位が違う

↓

2乗することの逆演算（つまり平方根を求める）をすれば元の単位に戻る

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(f)}$$
$$= \sqrt{\mathrm{E}\left(\left(f_{(X=x)} - \mathrm{E}_{(f)}\right)^2\right)}$$

様々な確率分布Ｉ （２章-4-1）

ベルヌーイ分布

- コイントスのイメージ
- 裏と表で出る割合が等しくなくとも扱える

マルチヌーイ（カテゴリカル）分布

- さいころを転がすイメージ
- 各面の出る割合が等しくなくとも扱える

$$P(x|\mu) = \mu^x(1-\mu)^{1-x}$$

様々な確率分布 II　（２章-4-2）

二項分布

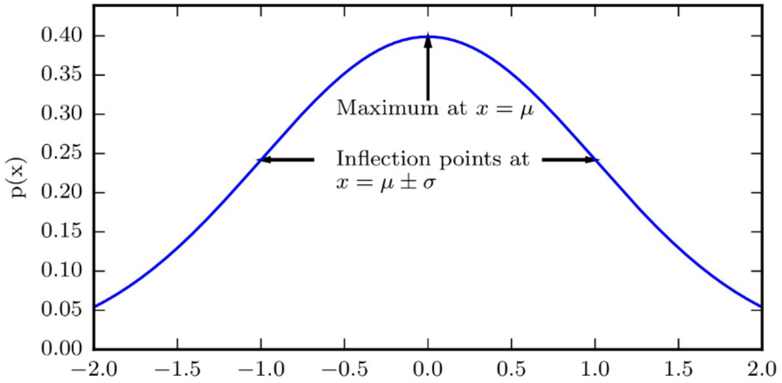
- ベルヌーイ分布の多試行版

$$P(x|\lambda, n) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\lambda^x (1-\lambda)^{n-x}$$

ガウス分布

- 釣鐘型の連続分布

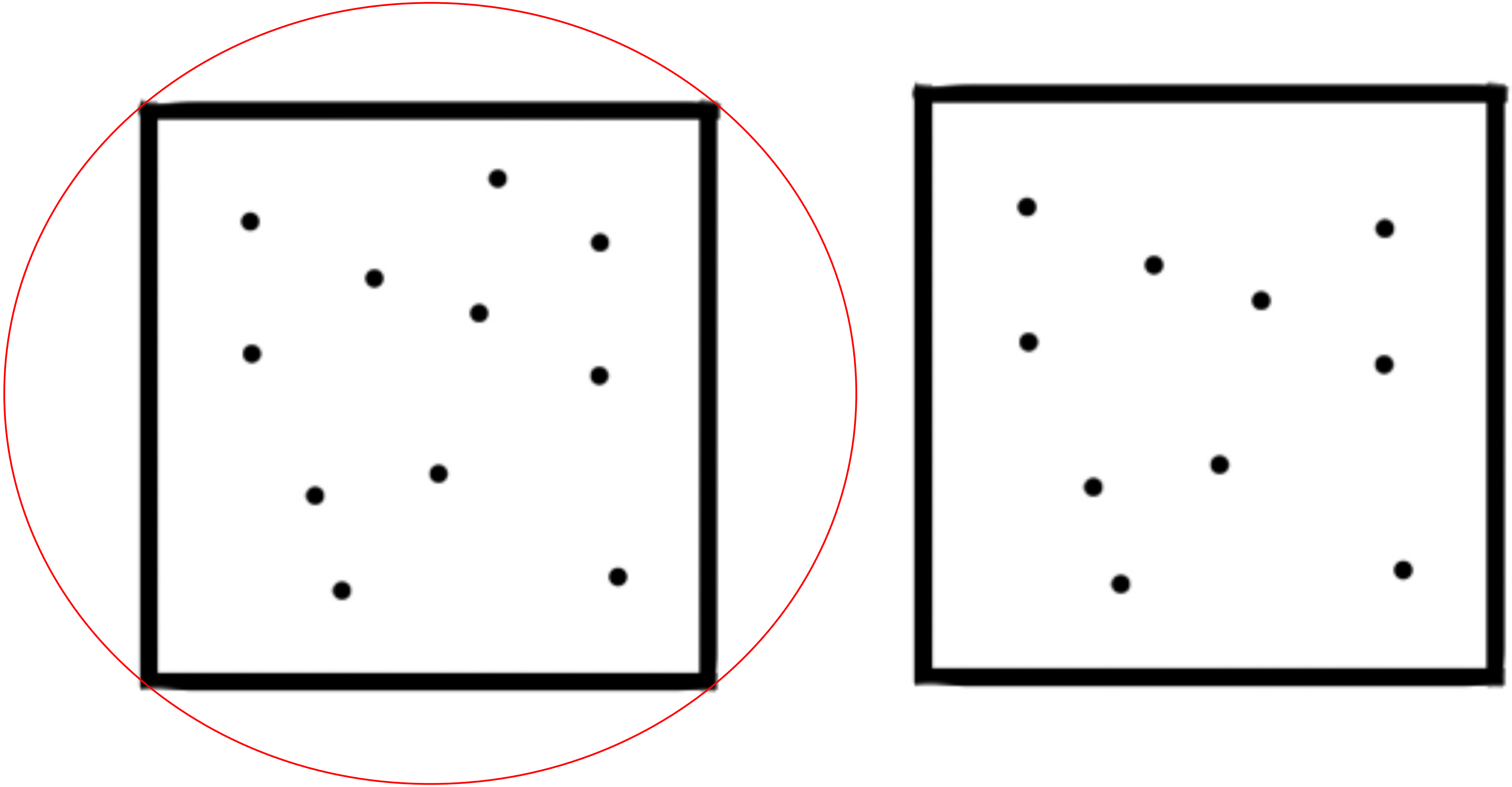
$$\mathcal{N}(x;\mu,\sigma^2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$



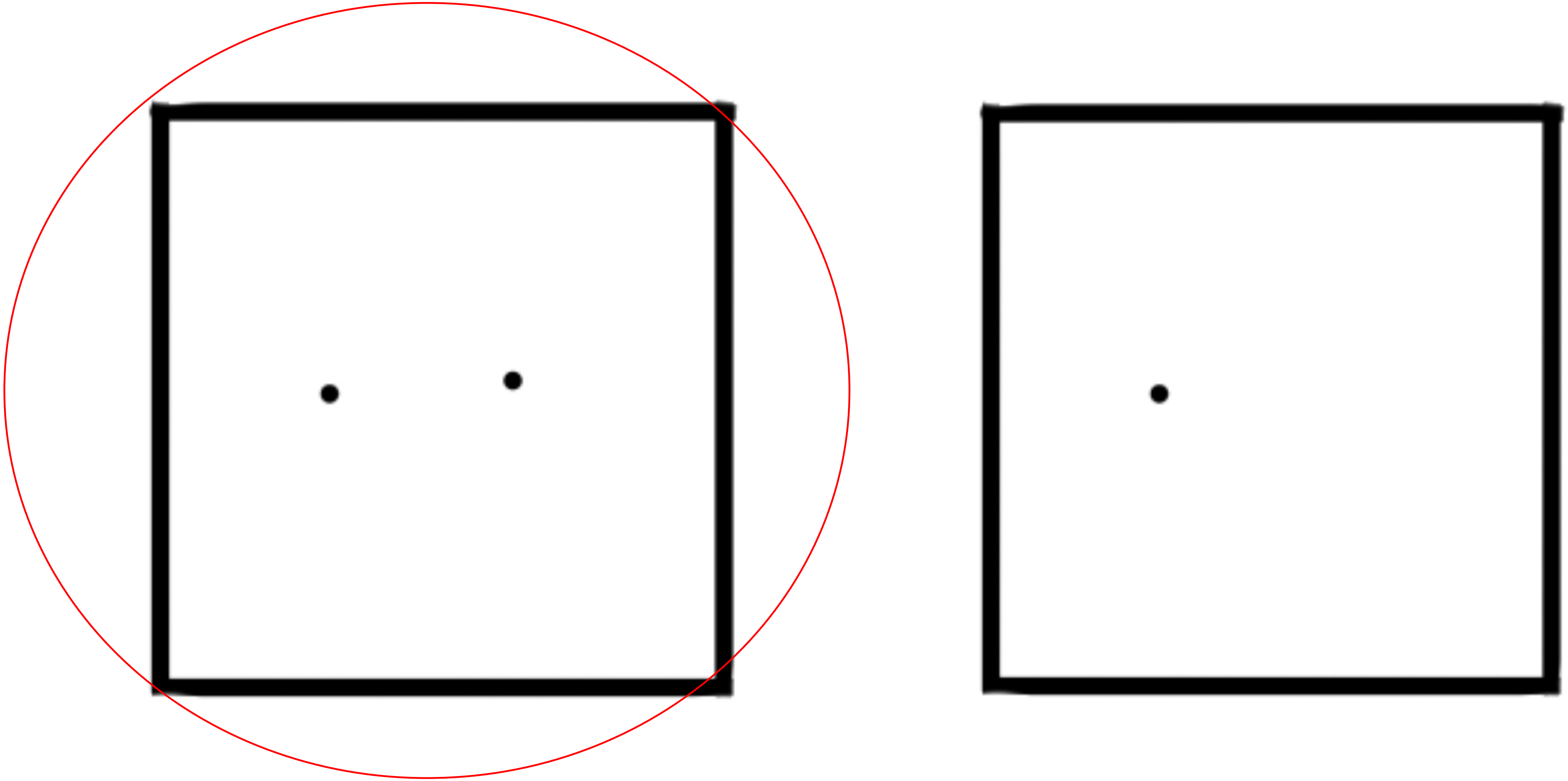
第3章　情報理論

1) 自己情報量・シャノンエントロピーの定義を確認する。
2) KLダイバージェンス・交差エントロピーの概要を知る。

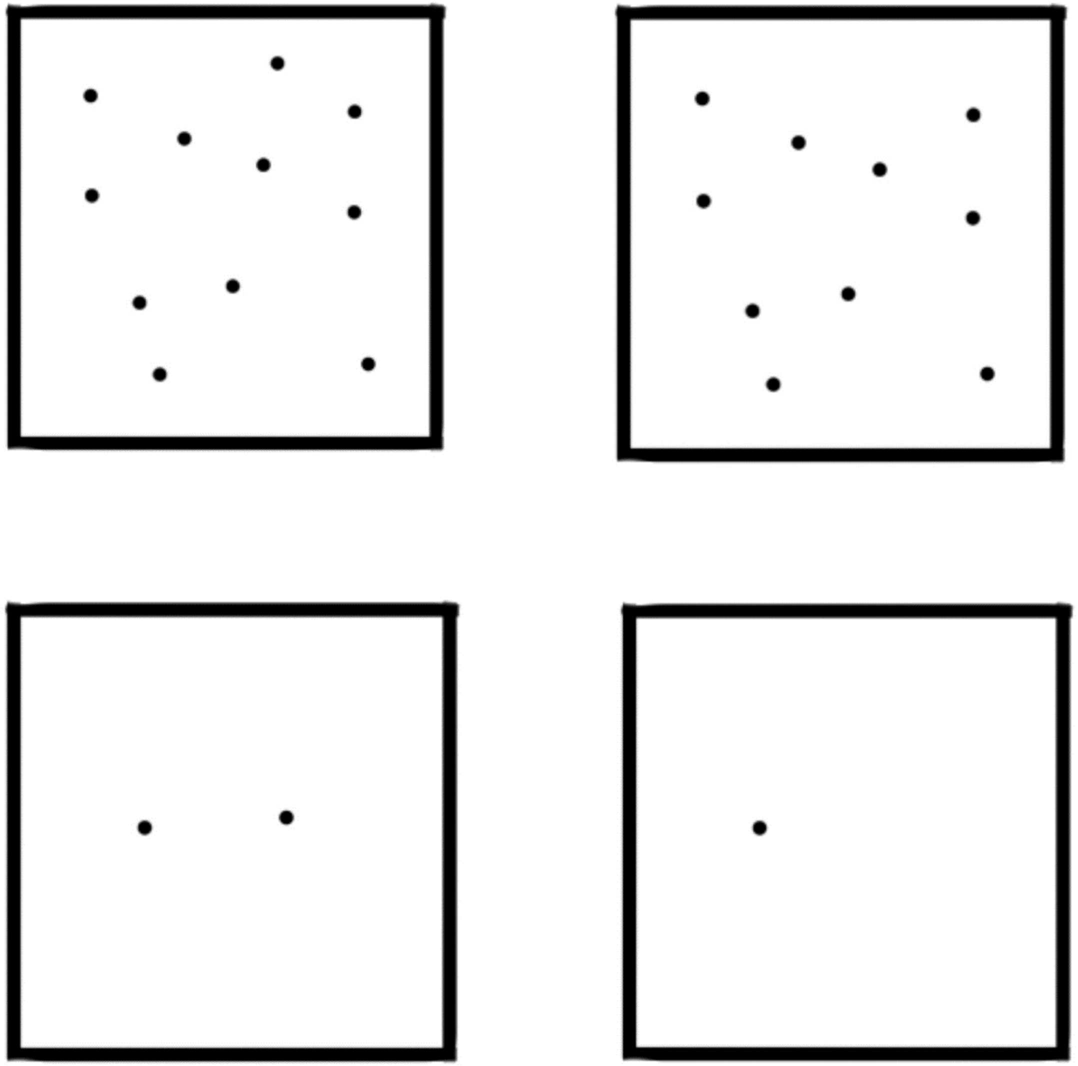
どちらが多い？



どちらが多い？



増えた量は同じなのに、何が違う？



どちらも…　$\Delta \mathrm{w} = 1$

$$\frac{\Delta \mathrm{w}}{\mathrm{w}} = \frac{1}{10}$$

増加の「比率」
がちがう！

$$\frac{\Delta \mathrm{w}}{\mathrm{w}} = \frac{1}{1}$$

自己情報量（3章-1-1）

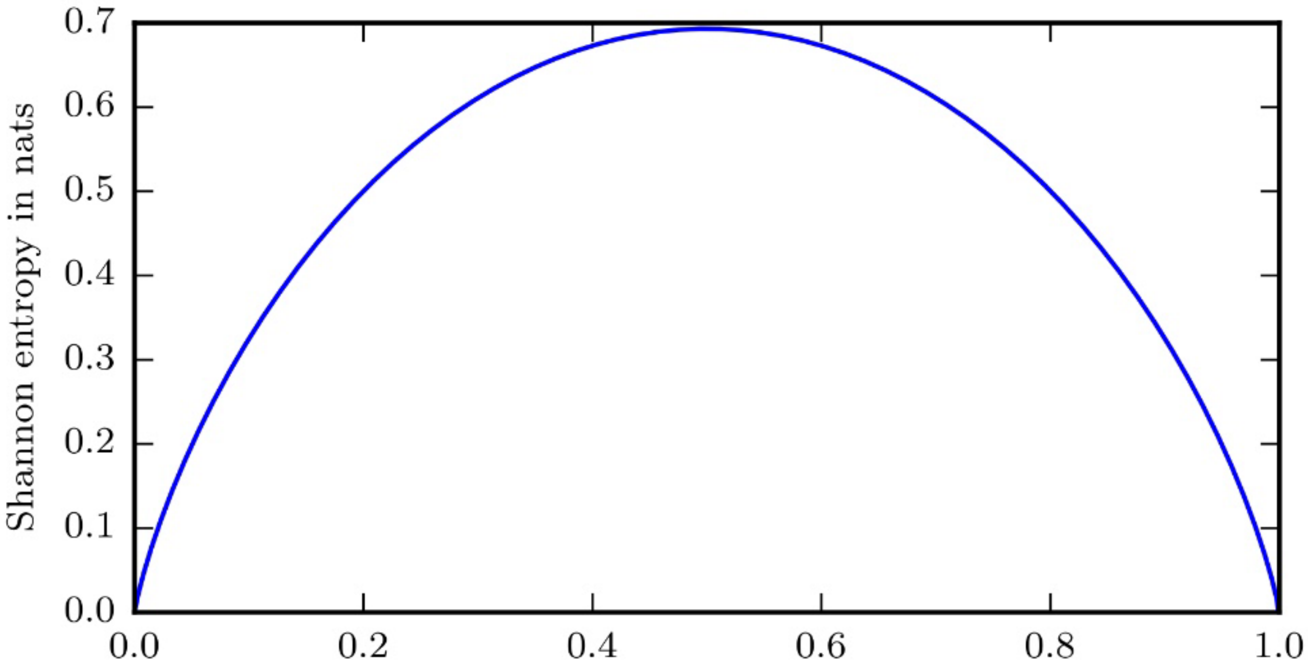
- 対数の底が2のとき，単位はビット(bit)
- 対数の底がネイピアのeのとき，単位は(nat)

$$I(x) = -\log\big(P(x)\big) = \log\big(W(x)\big)$$

シャノンエントロピー（3章-1-2）

- 微分エントロピーともいうが，微分しているわけではない（differentialの誤訳か？）
- 自己情報量の期待値

$$H(x) = E\big(I(x)\big)$$
$$= -E\Big(\log\big(P(x)\big)\Big)$$
$$= -\sum\Big(P(x)\log\big(P(x)\big) \Big)$$



カルバック・ライブラー　ダイバージェンス（3章-2-1）

- 同じ事象・確率変数における異なる確率分布P,Qの違いを表す

$$D_{\mathrm{KL}}(P \| Q) = \mathbb{E}_{\mathrm{x} \sim P}\left[\log \frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \mathbb{E}_{\mathrm{x} \sim P}\left[\log P(x) - \log Q(x)\right]$$

交差エントロピー　（3章-2-2）

- KLダイバージェンスの一部分を取り出したもの
- Qについての自己情報量をPの分布で平均している

$$H(P, Q) = H(P) + D_{\mathrm{KL}}(P \| Q)$$

$$H(P, Q) = -\mathbb{E}_{\mathrm{x} \sim P} \log Q(x)$$

カルバック・ライブラー　ダイバージェンス

- 同じ事象・確率変数における異なる確率分布P,Qの違いを表す

$$E\big(f(x)\big) = \sum_{x} P(x) f(x)$$

$$D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) = \mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P}\left[\log \frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P}\left[\log P(x) - \log Q(x)\right]$$

$$I\big(Q(x)\big) - I\big(P(x)\big)$$
$$= \big(-\log\big(Q(x)\big)\big) - \big(-\log\big(P(x)\big)\big) = \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) = \sum_{x} P(x)\left(\big(-\log\big(Q(x)\big)\big) - \big(-\log\big(P(x)\big)\big)\right) = \sum_{x} P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

交差エントロピー

- KLダイバージェンスの一部分を取り出したもの
- Qについての自己情報量をPの分布で平均している

$$D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) = \sum_x P(x)\left(-\log(Q(x))\right) - \left(-\log(P(x))\right)$$

$$\boxed{H(P,Q)} = \boxed{H(P)} + D_{\mathrm{KL}}(P\|Q)$$

$$H(P,Q) = -\mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P}\log Q(x) = -\sum_x P(x)\log Q(x)$$