

باسمه تعالی

گزارش کار پروژه درس روباتیک پیشرفته

Self-balancing and Velocity Control of Two-Wheeled Mobile Robot

هیراد پژمان 9623411

استاد درس : دکتر خسروی

زمستان 99

چکیده :

در این گزارش به شبیه سازی مقاله مورد نظر پرداخته و سعی شده تا با استفاده از تکنیک ها و تئوری های مربوط سیستم را به پایدار ترین حالت ممکن آن تبدیل کنیم.

1 - کلیات و نحوه عملکرد سیستم فیزیکی:

این پروژه مربوط به موبایل ربات خود متعادل دو چرخ است.

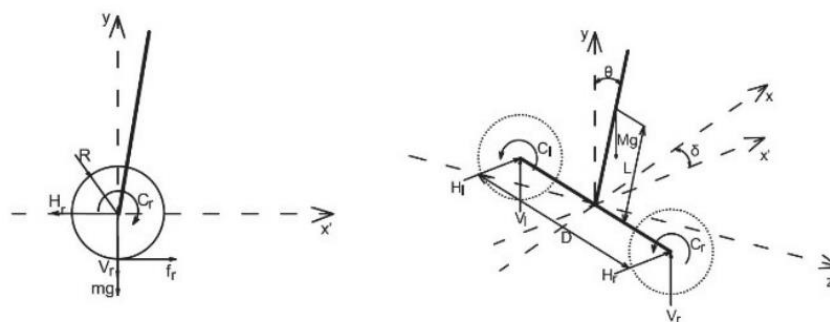


Fig. 1: Force Analysis of Robot Right Wheel and Body

ربات خود متعادل دو چرخ که به صورت ذاتی کاملاً ناپایدار است، بر اساس مدل آونگ معکوس ساخته شده است. از ویژگی های آن می توان به اندازه ی کوچک، ساختار ساده، اتصالات قوی، سیستم چند متغیر و غیرخطی اشاره داشت. این ربات به طور مستقل رانده می شود و بدنه آن در بالای محور چرخ ها قرار دارد. اساس کار این سیستم بدین گونه است که از طریق ژيروسکوپ، شتاب سنج، رمز گذار و سایر سنسورها؛ زاویه ی حرکت و سرعت زاویه ای، جابه جایی و سرعت بدنه را تشخیص می دهد و از طریق پردازشگر مرکزی دستورات حرکت موتور به جلو یا عقب محاسبه و صادر می شود تا حرکت به جلو و یا به عقب و یا به تعادل رسیدن سیستم میسر شود.

2 - استفاده از روش لاگرانژین برای به دست آوردن مدل غیر خطی:

به دلیل اینکه این ربات یک سیستم غیر خطی پیچیده است برای ساده سازی تحلیل ها، نیروی تداخل از خارج و اصطکاک بین بدنه ربات و دو محور چرخ را نادیده میگیریم و همچنین فرض میشود که هیچ اصطکاکی بین دو چرخ و زمین هم وجود ندارد.

لاگرانژین: \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

انرژی جنبشی سیستم را به قسمت های مختلف تقسیم و به صورت زیر میتوان نوشت:

1. انرژی جنبشی چرخ ها:

$$T_1 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2)$$

2. انرژی جنبشی چرخش چرخ ها:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_w (\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2)$$

3. انرژی جنبشی بدنه ی ربات:

$$T_3 = \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{R}{2} (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r) + \dot{\theta} L \cos \theta \right)^2 + (\dot{\theta} L \sin \theta)^2 \right]$$

4. انرژی جنبشی چرخشی بدنه حول محور Z:

$$T_4 = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2$$

5. انرژی جنبشی چرخشی بدنه حول محور Y:

$$T_5 = \frac{1}{2} J_{\delta} \dot{\delta}^2$$

پس انرژی جنبشی کل سیستم برابر هست با :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

چون چرخ ها كاملا در تماس با زمین هستند پس در جهت y حرکتی نداریم و به همین دلیل انرژی پتانسیل سیستم برابر هست با:

$$V = MgL \cos \theta$$

سه پارامتر θ_l و θ_r و θ را به عنوان generalized coordinate های سیستم انتخاب میکنیم پس داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_l} = c_l$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_r} = c_r$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} = -(c_r + c_l)$$

با حل معادلات بالا داریم:

$$\frac{1}{4} MR^2 (\ddot{\theta}_l + \ddot{\theta}_r) + (mR^2 + J_w) \ddot{\theta}_l + \frac{1}{2} RLM (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = c_l$$

$$\frac{1}{4} MR^2 (\ddot{\theta}_l + \ddot{\theta}_r) + (mR^2 + J_w) \ddot{\theta}_r + \frac{1}{2} RLM (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = c_r$$

$$RLM \cos \theta (\ddot{\theta}_l + \ddot{\theta}_r) - \frac{1}{2} RLM \dot{\theta} \sin \theta (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r) + (ML^2 \cos^2 \theta + J_p) \ddot{\theta} - ML^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - MgL \sin \theta = -(c_r + c_l)$$

با قرار دادن $x_r = R\theta_r$ و $x_l = R\theta_l$ و $\delta = \frac{x_l - x_r}{D}$ و $X = \frac{x_l + x_r}{2}$ روابط بالا را میتوان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left(\frac{1}{2}MR + \frac{(mR^2 + J_w)}{R}\right)\ddot{X} + \left(\frac{D(mR^2 + J_w)}{2R}\right)\ddot{\delta} + \frac{1}{2}RLM(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = c_l$$

$$\left(\frac{1}{2}MR + \frac{(mR^2 + J_w)}{R}\right)\ddot{X} - \left(\frac{D(mR^2 + J_w)}{2R}\right)\ddot{\delta} + \frac{1}{2}RLM(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = c_r$$

$$(2LM \cos \theta)\ddot{X} - (LM\dot{\theta} \sin \theta)\dot{X} + (ML^2 \cos^2 \theta + J_p)\ddot{\theta} - ML^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - MgL \sin \theta = -(c_r + c_l)$$

با توجه به روابط موتور استفاده شده درمقاله :

State space control using LQR method for a cart-inverted pendulum linearised model

و همچنین با توجه به رابطه بین ولتاژ موتور و گشتاور چرخ های ربات میتوانیم بنویسیم:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{X}}{R} \quad K_r = \frac{K_t}{R_a}$$

$$c_r = K_r(v_r - K_b\dot{\theta})$$

$$c_l = K_r(v_l - K_b\dot{\theta})$$

$$-(c_r + c_l) = -\left(K_r(v_r - K_b\dot{\theta}) + K_r(v_l - K_b\dot{\theta})\right) = -K_r v_r - K_r v_l + 2K_r K_b \dot{\theta}$$

با جایگذاری روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}MR + \frac{(mR^2 + J_w)}{R}\right)\ddot{X} + \left(\frac{D(mR^2 + J_w)}{2R}\right)\ddot{\delta} + \left(\frac{1}{2}RLM \cos \theta\right)\ddot{\theta} \\ &= K_r v_l - K_r K_b \dot{\theta} - \frac{1}{2}RLM\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}MR + \frac{(mR^2 + J_w)}{R}\right)\ddot{X} - \left(\frac{D(mR^2 + J_w)}{2R}\right)\ddot{\delta} + \left(\frac{1}{2}RLM \cos \theta\right)\ddot{\theta}$$

$$= K_r v_r - K_r K_b \dot{\theta} - \frac{1}{2}RLM \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$(2LM \cos \theta)\ddot{X} + (ML^2 \cos^2 \theta + J_p)\ddot{\theta}$$

$$= (LM \dot{\theta} \sin \theta)\dot{X} + MgL \sin \theta + ML^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - K_r v_r - K_r v_l + 2K_r K_b \dot{\theta}$$

پس فرم ماتریسی معادلات غیر خطی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR + \frac{(mR^2 + J_w)}{R} & \frac{1}{2}RLM \cos \theta & \frac{D(mR^2 + J_w)}{2R} \\ \frac{1}{2}MR + \frac{(mR^2 + J_w)}{R} & \frac{1}{2}RLM \cos \theta & \frac{-D(mR^2 + J_w)}{2R} \\ 2LM \cos \theta & ML^2 \cos^2 \theta + J_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_r v_l - K_r K_b \dot{\theta} - \frac{1}{2}RLM \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ K_r v_r - K_r K_b \dot{\theta} - \frac{1}{2}RLM \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ (LM \dot{\theta} \sin \theta)\dot{X} + MgL \sin \theta + ML^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - K_r v_r - K_r v_l + 2K_r K_b \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

جواب ماتریس $\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}$ در متلب به دست آمده است و گزارش مربوط به آن در فایل گزارش کد ها موجود می باشد.

پارامترها:

parameter	description	values	units
M	جرم بدنه ربات	0.881	Kg
m	جرم چرخ چپ و راست	0.015	Kg
R	شعاع چرخ چپ و راست	0.025	m
L	فاصله مرکز جرم بدنه ربات از محور Z	0.040	m
D	فاصله چرخ چپ و راست	0.137	m
J_w	اینرسی چرخ چپ و راست	$4.6875 \cdot 10^{-6}$	Kg.m^2
J_p	اینرسی بدنه ربات حول محور Z	$4.698667 \cdot 10^{-4}$	Kg.m^2
J_δ	اینرسی بدنه ربات حول محور Y	$1.37796 \cdot 10^{-4}$	Kg.m^2
\mathcal{L}	لاگرانژین	-	J
V	انرژی پتانسیل	-	J
T	انرژی جنبشی	-	J
δ	زاویه بدنه ربات و محور X	-	°
$c_l \cdot c_r$	گشتاور محرک چرخ چپ و راست	-	N.m
$\theta_l \cdot \theta_r$	زاویه چرخش چرخ چپ و راست	-	°
θ	زاویه بدنه ربات و محور Y	-	°
$x_l \cdot x_r$	جا به جایی چرخ چپ و راست	-	m
X	جا به جایی ربات	-	m
R_a	مقاومت آرمیچر	1	Ω
K_t	ثابت گشتاور موتور	0.02	N.m/A
K_r	K_t / R_a	0.02	N.m/A. Ω
K_b	ثابت emf	0.02	V.s/rad
$v_l \cdot v_r$	ولتاژ آرمیچر	-	V

یک سیستم مرتبه شش داریم که جابه جایی ، انحراف ، زاویه چرخشی ، سرعت ، سرعت زاویه ای و سرعت زاویه چرخش ربات را نمایش میدهد. و با آن ها وضعیت حرکت به جلو و عقب ماشین و همچنین وضعیت ماشین هنگام چرخش توصیف میشود.

برای به دست آوردن ماتریس C ، در مقاله منتخب ما برای هر متغیر حالت یک سنسور در نظر گرفته شده بود به همین علت ماتریس را به صورت زیر می نویسیم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 - خطی سازی

خطی سازی حول نقطه کار صفر انجام شده است. و معادلات حالت سیستم به صورت زیر است. در این حالت مقدار θ میتواند بین $5+$ و $5=-$ تغییر کند و سیستم همچنان خطی باقی بماند، پس مقدار θ در این محدوده معتبر است.

داریم:

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$\dot{Y} = CX + DU$$

متغیر های حالت را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$ در نظر میگیریم پس:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + B \times \begin{bmatrix} v_l + v_r \\ v_l - v_r \end{bmatrix}$$

$$y = C \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.0457 & -1.0236 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41.9119 & 0.1798 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1607 & 0.1607 \\ 0 & 0 \\ -0.3121 & -0.3121 \\ 0 & 0 \\ 9.782 & 9.782 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 - بررسی کنترل پذیری و رویت پذیری

با استفاده از دستورات در متلب رنک ماتریس کنترل پذیری را به دست می آوریم (M1). مشاهده میکنیم که مقدار آن برابر با مقدار فول رنک یعنی 6 است. پس نتیجه میگیریم که سیستم خطی به دست آمده کنترل پذیر است.

برای بررسی رویت پذیری، مجدداً از دستورات متلب استفاده کرده، و مقدار رنک M2 را به دست می آوریم. مشاهده میکنیم که مقدار رنک ماتریس برابر 6 است یعنی رنک کامل است. پس سیستم خطی به دست آمده رویت پذیر است.

به این دلیل که سیستم ما، در تمامی حالت ها رویت پذیر بوده، پس آشکار پذیر است.

در مورد پایداری سیستم چون سیستم دارای چهار مقدار ویژه ی صفر می باشد در مورد پایداری آن نمی توان اظهار نظر کرد پس با دستور place در متلب به دنبال k مناسب می گردیم تا با قرار گیری در فرمول رو به رو مقادیر ویژه را به ماتریس زیر ببرد.

$$\dot{x} = Ax + B(u - kx)$$

$$[-1.7, -1.8, -1.2, -1.3, -1.4, -1.5]$$

که مقدار به شکل زیر بدست می آید :

k =

$$\begin{bmatrix} 0.0088 & -2.0531 & -0.0042 & 0.0231 & 0.0165 & -0.0058 \\ 0.0034 & -2.0869 & 0.0042 & 0.0108 & 0.0080 & 0.0058 \end{bmatrix}$$

(کد تمامی مراحل در فایل متلب پیوست شده است.)

5 - زیر سیستم کاهش ناپذیر سیستم خطی شده :

سیستم خطی سازی شده ، هم کنترل پذیر هم رویت پذیر است. پس سیستم مینیمال است.

6 - طراحی فیدبک حالت :

در قسمت های قبلی، مدل کلی سیستم به دست آورده شد. اما برای تحلیل بهتر سیستم، سیستم را به دو زیر سیستم تقسیم میکنیم با دو دسته معادله مستقل از یکدیگر.

یک سیستم مربوط به توصیف حالت خود متعادل بودن ربات و سیستم دیگر مربوط به توصیف حالت چرخشی ربات است.

فضای حالت مربوط به هر سیستم را به صورت زیر در نظر میگیریم:

سیستم خودمتعادل:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0457 & -1.0236 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 41.9119 & 0.1789 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1607 \\ 0 \\ -0.3121 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

سیستم چرخش:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

از آنجایی که هدف ما کنترل یک ربات خود متعادل دو چرخ است، باید میزان فرجهش را به نحوی قرار دهیم که باعث چپ شدن سیستم نشود از این رو میزان فرجهش را کمتر از 15٪ در نظر گرفتیم. همچنین میخواهیم این ربات برای همیشه تعادل خود را حفظ کند پس به طور نسبی، زمان نشست کمتر از 10 ثانیه برای ما بسیار مطلوب خواهد بود. با انتخاب معیارهای خود به صورتیکه گفته شد قطب های ما بصورت زیر بدست خواهد آمد.

به همین ترتیب قطب های مطلوب مربوط به هر سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می شوند.

سیستم خود متعادل:

$$P1 = [-1+1.5i \ -1-1.5i \ -2.5+1.5i \ -2.5-1.5i];$$

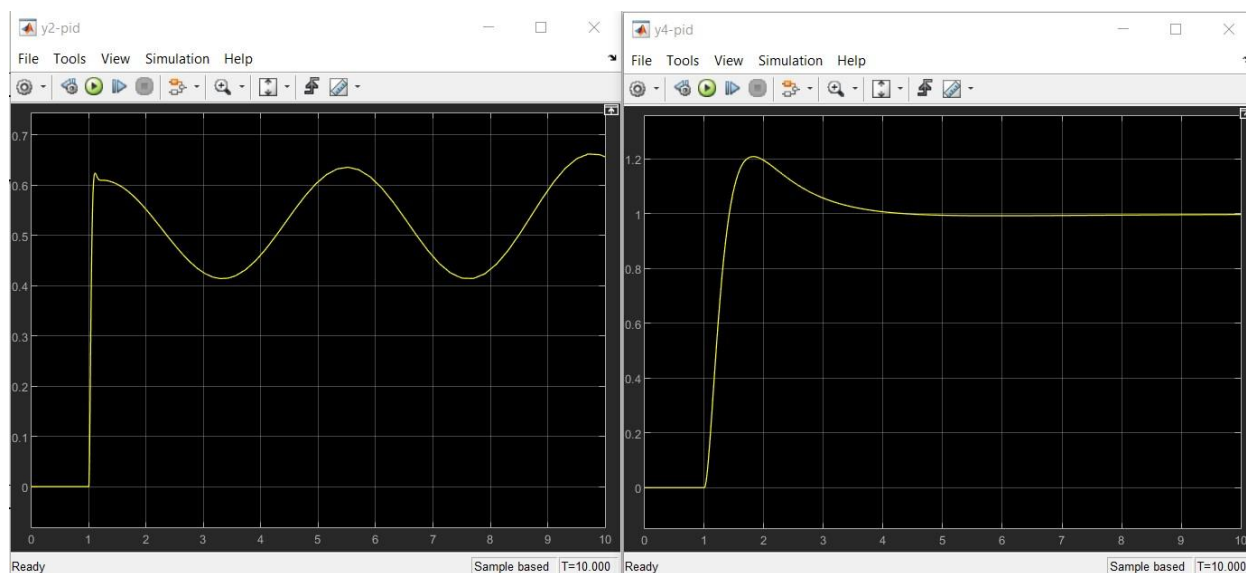
سیستم چرخش:

$$P2 = [-8-10i \ -8+10i];$$

. در ادامه با استفاده از دستور place متلب مقدار بردار k را به دست می آوریم.

7 - شبیه سازی سیستم خطی و غیر خطی با فیدبک حالت :

در قسمت شبیه سازی در ابتدا سعی شد تا با کنترلر PID شبیه سازی انجام شود اما در بهترین حالت پاسخ ها صورت زیر بودند :



همانطور که مشاهده می کنید کنترلر PID فقط در ساب سیستم دو جوابی مطلوب خواهد داشت ولی در ساب سیستم یک که مربوط به تعادل سیستم می باشد دارای نوسان های شدید می باشد، به این ترتیب روش فیدبک حالت را جایگزین کنترلر PID خواهیم کرد.

شبیه سازی را با فیدبک حالت انجام دادیم. سپس فیدبک حالت را به حالت غیرخطی سیستم اعمال کرده و مشاهده میکنیم، در صورتیکه این فیدبک حالت برای سیستم خطی سازی شده جواب مطلوبی داشت، برای سیستم غیرخطی جواب مطلوبی نخواهد داشت.

معادلات غیرخطی سیستم:

طبق نتایج به دست آمده از فاز اول پروژه برای معادلات غیر خطی داریم:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

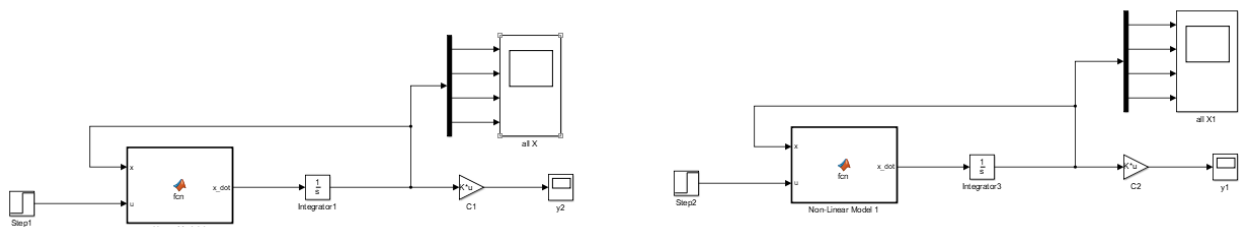
$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_5(t) = x_6(t)$$

$$X = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}$$

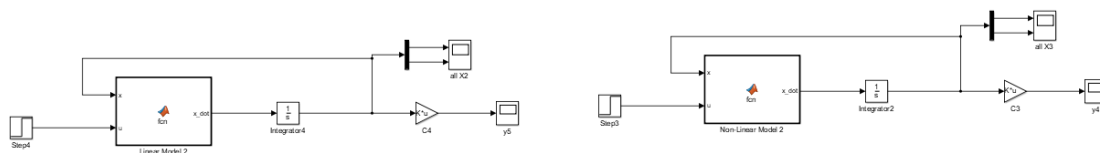
که X از رابطه ی $A * X = B$ به دست آمده است.

describes the state of self-balancing



بلوک دیاگرام سیستم خودمتعادل _ خطی و غیر خطی

describes the state of turn round



بلوک دیاگرام سیستم چرخشی _ خطی و غیر خطی

نتایج :

علت ناپایداری سیستم غیرخطی با فیدبک حالت خطی

از تفاوت‌های ابتدایی میان سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیر خطی موضوع پایداری محلی است. در سیستم‌های خطی اگر نقطه تعادل سیستم پایدار باشد، به ازای همه شرایط اولیه سیستم پاسخ پایدار خواهد بود و اگر ناپایدار باشد، به ازای همه شرایط اولیه پاسخ سیستم این ویژگی را خواهد داشت. اما در سیستم‌های غیر خطی مفهوم دیگری یا به عبارتی بهتر، پدیده دیگری به چشم می‌خورد که آن عبارت از پایداری محلی است. در این حالت هرچند که نقطه تعادل سیستم پایدار است، ولی صرفاً به- ازای بعضی از شرایط اولیه سیستم، پاسخ سیستم به نقطه تعادل همگرا می‌شود و به ازای برخی دیگر از شرایط اولیه پاسخ سیستم واگرا خواهد شد. در اینجا اولین سوالی که پیش می‌آید این است که به ازای کدام شرایط اولیه سیستم پایدار خواهد بود. سوالی ساده که پاسخ گفتن به آن اگر ناممکن نباشد، بسیار دشوار است و گواه این مدعا تلاش‌های دامنهداری است که در این زمینه انجام شده است. عنوان‌هایی از قبیل ناحیه جذب، منطقه جذب، بستر جذب، ناحیه پایداری و ... همگی به این موضوع اشاره دارند. هر سیستم دینامیکی غیر خطی که مفاهیم پایداری در آن موضوعیت داشته باشد، می‌تواند با این مسئله مرتبط شود. در یک نگاه کلی، از اطلاعات ناحیه جذب در تحلیل سیستم‌های دینامیکی و طراحی کنترلرهای غیر خطی استفاده می‌شود.

8 - بررسی پایداری سیستم :

در این بخش قصد داریم پایداری سیستم را بر اساس روش لیاپانوف بدست آوریم.

در بررسی پایداری به روش اول لیاپانوف، لازم است که مقادیر ویژه ی سیستم در زمانی که سیستم حول نقطه کار خطی شده است، بررسی کنیم.

ما سیستم خود را به دو زیرسیستم تقسیم کرده ایم. مشاهده میکنیم که مقادیر ویژه ی هر زیرسیستم به صورت زیر است. از آن جایی که مقادیر ویژه، دارای قسمت حقیقی مثبت هستند، جهت به این نکته پی میبریم که سیستم حول نقطه کار ناپایدار است.

ans =

```
0.0000 + 0.0000i
-15.2308 + 0.0000i
0.0925 + 1.6222i
0.0925 - 1.6222i
```

ans =

```
0
0
```

هم چنین پایداری را بعد از اعمال فیدبک حالت نیز بررسی میکنیم. در این حالت مشاهده میکنیم که فیدبک حالت با تغییر قطب های سیستم، باعث مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی و ایجاد پایداری شده است.

ans =

```
-2.5000 + 1.5000i
-2.5000 - 1.5000i
-1.0000 + 1.5000i
-1.0000 - 1.5000i
```

ans =

```
-8.0000 +10.0000i
-8.0000 -10.0000i
```

روش اول لیاپانوف فقط درباره ی پایداری سیستم حول یک نقطه به ما اطلاع میدهد، ازین رو به بررسی پایداری با روش دوم میپردازیم.

در پایداری به روش دوم لیاپانوف لازم است یک تابع مثبت معین را پیدا کنیم و در صورتی که مشتق آن منفی معین باشد، سیستم به صورت مجانبی پایدار است. همچنین باید تابع لیاپانوف را به گونه ای تعیین کنیم که مقدار آن در نقطه تعادل مبدا برابر صفر باشد. در این حالت انرژی کاهشی شدید بود، پس سیستم پایدار خواهد بود.

برای بررسی سیستم، ابتدا تابع لیپانوف زیر را در نظر میگیریم و از معادلات غیر خطی سیستم که در قسمت اول پروژه محاسبه شده اند، استفاده میکنیم.

$$V = \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \delta^2$$

مشاهده میکنیم که به ازای این تابع، مشتق آن دارای علامت مشخصی نخواهد بود، پس نمیتوانیم درباره ی پایداری آن اظهار نظری بکنیم.

از آنجایی که یافتن تابع لیپانوف مناسب برای یک سیستم امری سخت و دشوار است، نتوانستیم تابع لیپانوف مناسبی را برای این سیستم پیدا کنیم. همچنین میدانیم سیستم غیرخطی و حتی خطی در این پروژه ناپایدار هستند که مربوط به ماهیت سیستم است.

9 - بهینه سازی و شبیه سازی آن :

در بهینه سازی هدف ما رساندن نوسانات پارمتر مخم و حساس سیستم به حداقل میزان نوسان می باشد، این عمل نوعی Trade-Off است یعنی بر حسب مهم بودن پارامتر ها برای ما باید هزینه بیشتری بر روی آن بکنیم . (Punishment)

در نتیجه پارمتر ها را بر اساس اولویت بندی بگونه ای دسته بندی میکنیم که ضریب با اهمیت پارامتر رابطه ای مستقیم داشته باشد. (هر چه اهمیت بیشتر ضریب بیشتر)

با توجه به مدل سیستم در نظر گرفته شده، مهم ترین عامل در ربات های تعادلی زاویه آنها می باشد که باید همواره بیشتر از بقیه موارد در نظر گرفته شده کنترل شود، در نتیجه پارامتر های δ و θ باید بیشترین میزان کنترل را داشته باشند، سپس مکان و در نهایت سرعت و تغییرات شتاب زاویه ای مورد کنترل قرار گیرند. لازم به ذکر است که انرژی اولویت آخر است زیرا بهتر است تا روبات از حداکثر انرژی برای تعادل بهتر استفاده کند.

طبق گزارشات قبلی سیستم ما به دو ساب-سیستم تقسیم شده، برای هر یک پارمتر های هزینه (Q) را مشخص کرده سپس با استفاده از دستور care در متلب مقدار K جدید را بدست آورده و آنقدر آزمون و خطا انجام میدهیم تا پارامتر های مورد نظرممان به حداقل سرعت تغییرات دامنه برسند. (دستورات مطلب هر کدام در فولدر مربوطه قرار دارد)

بدین ترتیب مقدار k جدید را داخل سیستم قرار داده و به گراف های زیر میرسیم:

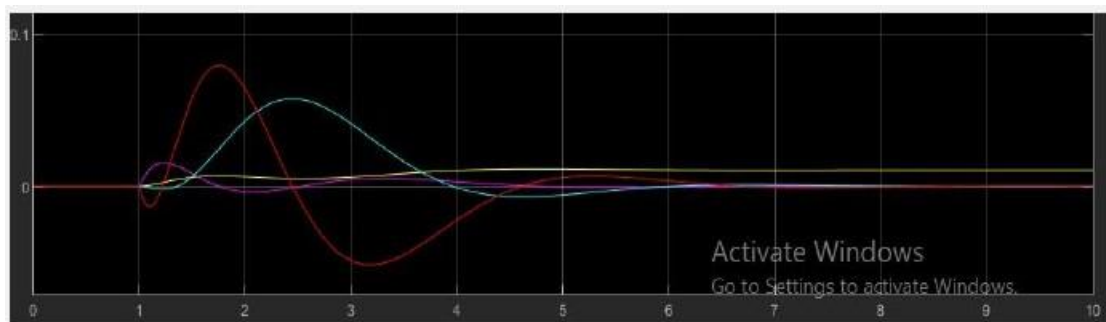
$$\text{SubSys_1} : K_{1.\text{new}} = [14.1421 \quad 49.3269 \quad 5.7663 \quad 17.6827]$$

SubSys_2 : $K_{2.new} = [24.4949 \ 2.2381]$

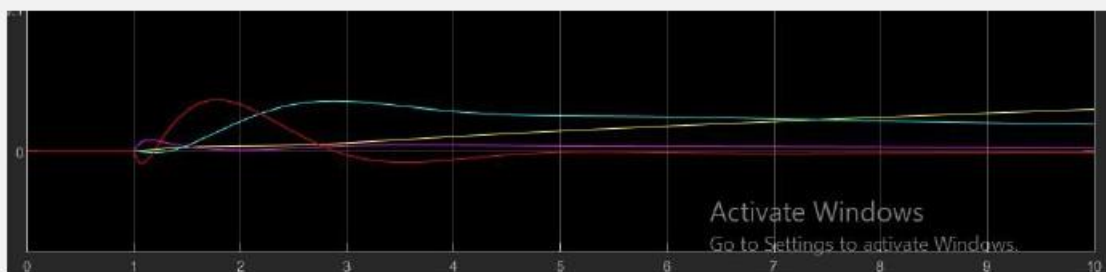
برای SubSys_1 :

Graph Info. :

Yellow: x / Purple: \dot{x} / Blue: θ / Green : $\ddot{\theta}$



Unoptimized

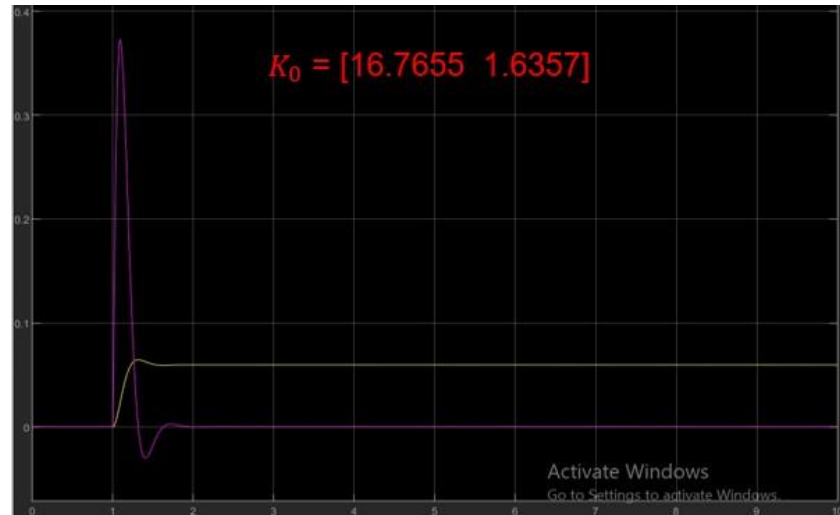


Optimized

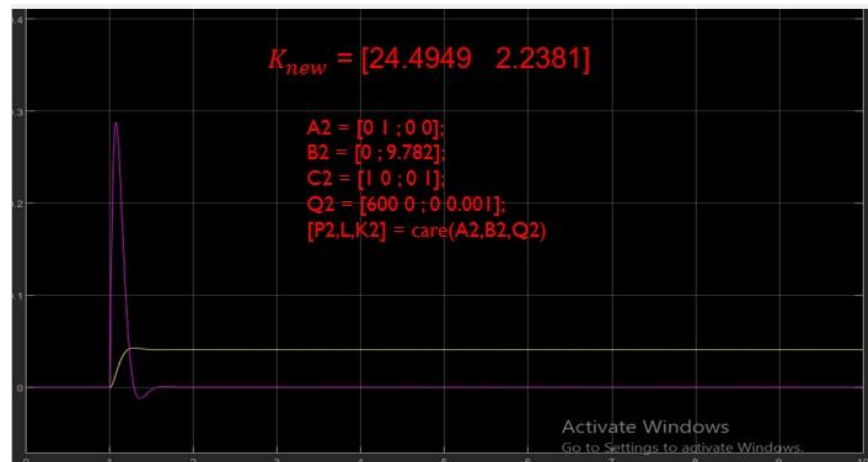
برای SubSys_2 :

Graph Info. :

Yellow : δ / Purple : $\dot{\delta}$

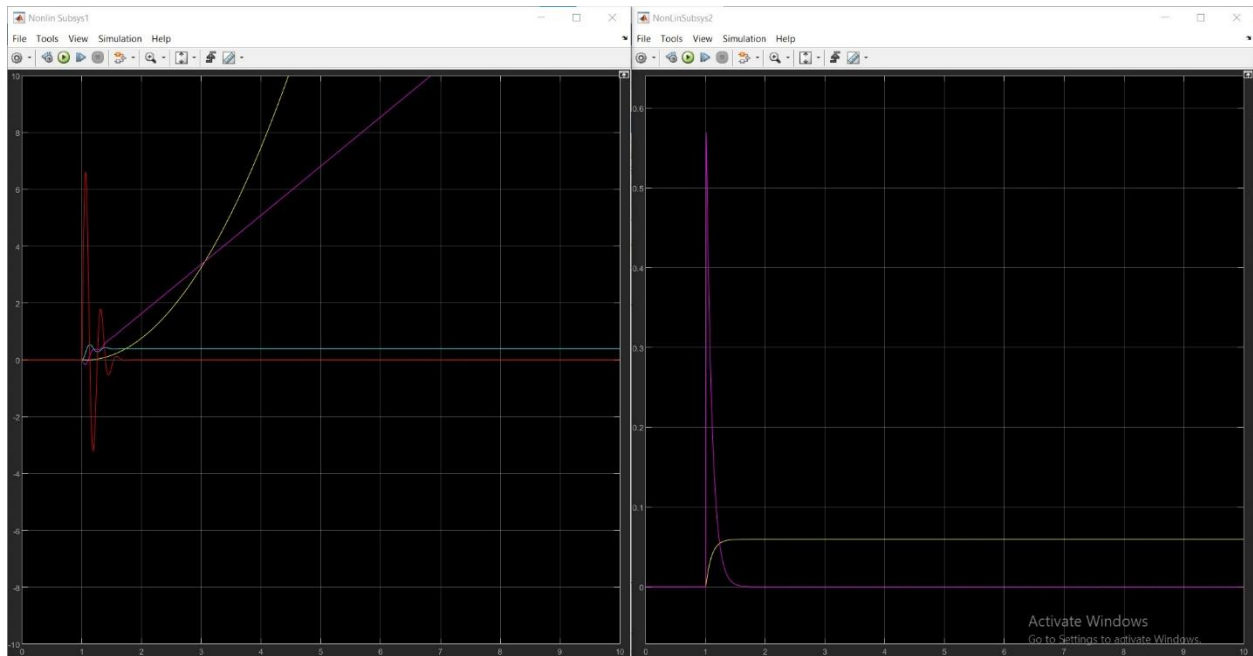


Unoptimized

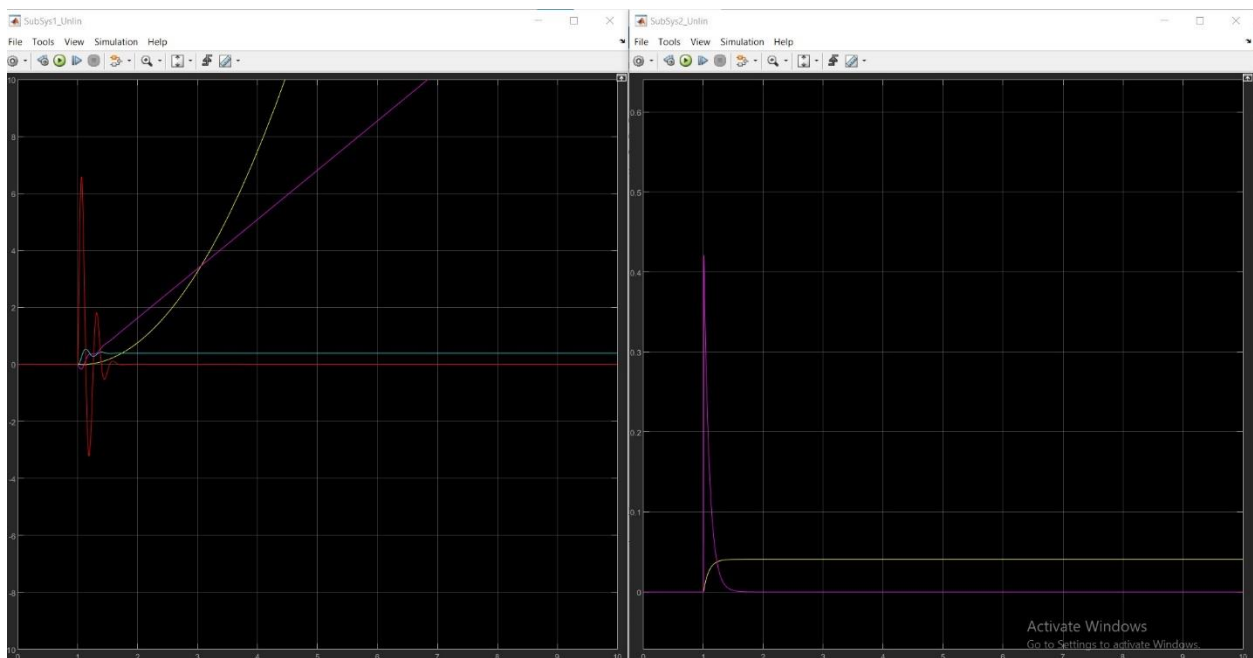


Optimized

در نهایت این مقادیر را در سیستم های غیر خطی قرار می دهیم که نتایج زیر را میدهد:



Non-Lin before K feedback



Non-Lin After feedback

مشاهد می شود که در ساب-سیستم اول تغییری رخ نمیدهد ولی در ساب سیستم دوم هر دو خروجی به مقدار خوبی بهینه میشوند.