Kösystem [EITF95]

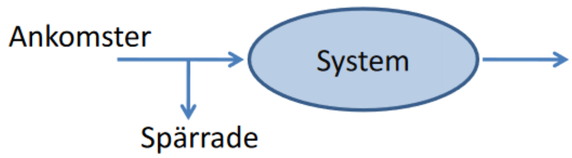
Version 1.1 - av Alfred Hirschfeld

VT 2019 - LP4 - 4.5 hp

Contents

1 Intro, sannolikhet

Kösystem behandlar betjäningssystem av olika slag. Om inga lediga betjänare finns väntar kunden i en kö. Tillämpningsområden: lagerproblem, tillverkningsprocesser, bagagesystem, vägtrafik, webbserver, mobilnät, etc.



Kund - människa, transaktion i databas, mobilsamtal som ska betjänas, mobilnät eller http-paket som kommer till webbserver.

Kösystem handlar om att optimera systemet eftersom det är begränsat. Gäller att kunna avgöra om resurserna räcker. Fullt system innebär att kund kan **spärras**. Om man försöker ringa när alla frekvenser och tidsluckor är upptagna i en cell i ett mobilnät blir man spärrad. Centrala frågor inom kursen:

1. Vad är snl. (sannolikhet) att kund spärras?
2. Hur lång tid tillbringar kund i systemet?
3. Hur många kunder kan systemet betjäna per tidsenhet och fortfarande uppfylla kraven på god kvalité?

Ofta är ankomster till system slumpmässiga, vi vet inte exakt när någon vill besöka en webbsida. Ibland går man in snabbt på sidan, ibland stannar man kvar. Därför måste modeller från sannolikhet användas för att besvara frågorna. Både ankomster och betjäningstider är i allmänhet slumpmässiga.

1.1 Kömodeller

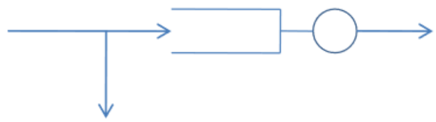
Köutrymme - kan vara oändligt (kön till baren), ändligt (webbservern) eller inte finnas alls (GSM-nätet).

Betjänare/server - kan finnas en eller fler.

Cirkeln i figuren är betjänaren och om betjänaren är upptagen lagras kunderna i kön. Är köutrymmet fullt avvisas de.

1.1.1 Webbserver

Till en webbserver kommer begäran om att hämta sidor. Dessa betjänas av servern som skickar tillbaka ett antal filer som kan innehålla text och bilder. Cirkeln är processorn i servern.



1.1.2 Mobilsystem

En basstation i ett GSM-nät har ett antal frekvenser. Om det inte finns några lediga frekvenser när någon vill ringa så spärras det nya samtalet. Här är varje radiokanal en betjänare. Kunderna är abonnenter som vill ringa ett telefonsamtal. Det finns inget köutrymme.

2 Enkla kösystem

Kunder hämtas på följande sätt:

- FIFO - First In First Out
- LIFO - Last In First Out
- SIRO - Service In Random Order

System betecknas ofta A/B/n där:

- A - fördelning mellan ankomster
- B - fördelning för betjäningar
- n - antal betjänare/servrar

Ofta används:

- M - exponentialfördelning
- D - deterministisk (konstant)
- G - godtycklig (men känd) fördelning

För enkelhetens skull kommer kursen ställa krav på fördelningarna för tiderna mellan ankomster och betjäningstider. Vi kommer räkna på M/M/1-köer, M/G/1-köer och markovska köer.

2.1 M/M/1

System som har en server/betjänare, där ankomster bestäms av en poissonprocess och betjäningstiderna har en exponentiell fördelning.

3 Markovska köer

Detta avsnitt behandlar markovska kösystem med begränsat antal buffertplatser och kunder. Tiden i ett tillstånd i en markovkedja är exponentialfördelad.

3.1 Poissonprocess

Process där tiden mellan händelser är exponentialfördelade. Beskriver slumpmässiga händelser som sker med en viss intensitet/frekvens. Processen används i tillämpningar när man ska beskriva till exempel dynamiken i en kö. Om man hela tiden har samma ankomstintensitet, kallas en ankomstprocess för poissonprocess.

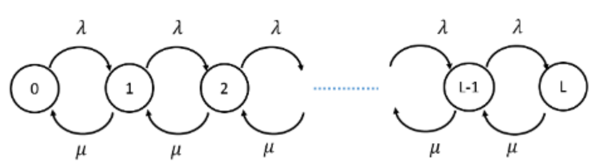
3.2 Varianter av markovska kösystem, markovkedjor

Finns många varianter och alla använder samma mall. Markovkedjor beskriver de olika tillstånden i ett system, där sannolikhet kan tas fram för de olika tillstånden. Tillstånden är cirklarna i figurerna.

1. Tillstånd 0 = ingen i systemet
2. Tillstånd 1 = 1 kund i systemet osv...

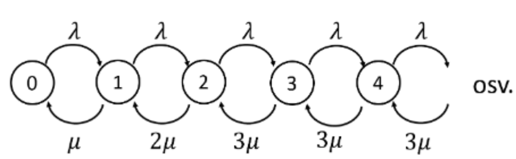
3.2.1 Ändlig buffert, en betjänare

μ ändras aldrig i de olika tillstånden, alltså har vi en betjänare.



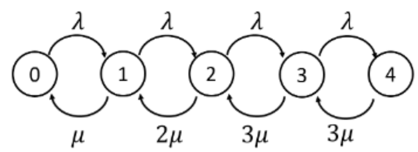
3.2.2 Flera betjänare

μ ökar upp till 3, alltså har vi 3 betjänare.



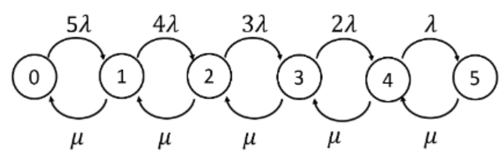
3.2.3 Flera betjänare, ändligt antal platser

μ ökar upp till 3, alltså har vi 3 betjänare. Sista cirkeln (4) är sista tillståndet i systemet då det är fullt. I 4:e tillståndet jobbar alla 3 betjänarna och en kund står i kö, dvs. 3 betjänare + 1 i kö = 4, alltså 4 tillstånd för helvete.



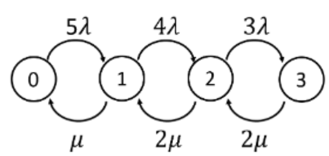
3.2.4 Ändligt antal kunder

När ändligt antal kunder anges, går λ "baklänges". I detta fall har vi 5 kunder.



3.2.5 Ändligt antal kunder, ändligt antal köplatser, fler än en betjänare

2 betjänare (μ), 5 kunder (5λ) och 3 platser i systemet totalt.



4 Upptagetsystem

Upptagetsystem har inga köplatser, finns bara en betjänare. Innebär att tiden i systemet enbart är betjäningstid, inte någon väntetid i buffertar/köplats.

4.1 Erlangsystemet

- m betjänare, inga köplatser
- Ankomsterna är en poissonprocess, med ankomstintensitet λ
- Betjäningstid är exponentialfördelade med medelvärdet $1/\mu$
- Bra approximation om vi har många kunder i förhållande till antalet betjänare

5 M/G/1

Kan ej beskrivas med markovkedjor. En "extension" av M/M/1. Skillnaden är att i M/M/1 måste betjäningstiden vara exponentialfördelad. Har följande egenskaper:

- Ankomsterna är en poissonprocess med intensiteteten λ som är konstant och inte beror på antalet kunder i systemet
- Det finns en betjänare och betjäningstiden har en godtycklig känd fördelning
- Det finns oändligt många buffertplatser

6 Beteckningar

P(spärr) - snl. att kund spärras.

T - svarstid, tid i systemet för en kund som inte spärrats (stokastisk variabel).

λ - ankomstintensitet, hur många kunder per tidsenhet som kommer till systemet (**både** de som avvisas och som får komma in). Antal kunder per sek.

$\lambda_e ff$ - effektiv ankomstintensitet, **endast** de λ som kommer in i systemet och blir betjänade.

Littles sats - se formelsamling, används vid jämvikt av system.

Stokastisk variabel - en variabel vars värde bestäms av utfallet av ett slumpmässigt försök. Betecknas ofta med X, Y eller Z.

ρ - service rate, percentage of time a device is in a use, snl. att betjänare är upptagen?

Stabilitetskriteriet - om $\lambda > \mu$ är könät/nod instabil.

N - antal kunder i kösystemet (stokastisk variabel).

T - tiden som en kund tillbringar i systemet (stokastisk).

X - en betjäningstid (stokastisk).

E(X) eller E(S) - medelbetjäningstiden.

E(N) - medelvärdet i **hela** systemet, definitionen av medelvärde.

7 Tips till tentafrågorna

- När medeltid efterfrågas används **nästan alltid** Littles sats E(T). Går dock inte att använda Littles sats i ett system där **kunder lämnar** (betecknat β) eftersom systemet ej är i jämvikt.
- Flöde-in-flöde-ut (se tenta 2015 uppg. 6).
- Om $\lambda \to \infty$ så är man automatiskt i det sista tillståndet.
- Det kan bara komma ut så mycket λ som μ kan hantera. OM $\lambda = \infty$ och $\mu = 2$ i en nod, blir $\lambda = 2$.
- Totala tiden i sys: E(T) = E(Tvänta) + E(X)

Hur många betjänare är i medeltal upptagna? Beräkna hur många som i medeltal blir betjänade per tidsenhet:
E(N) = μ_0 * p_0 + μ_1 * p_1...

Medeltid i systemet för en kund som ej spärras? λ är ∞.
E(S) = $1/\mu$

Kösystemet är fullt vid tiden 20. Vid just den tidpunkten upphör plötsligt ankomsterna. I medeltal, hur lång tid tar det innan kösystemet är tomt?
Från sista tillståndet till första, E(S) = $1/\mu$

Medeltid i systemet för kund som inte spärras?
Littles sats

Hur många betjänas per timme?
Betjäning per timme = $\lambda_e ff$ * 60 min (funkar bara i jämvikt?)

Hur många spärras per timme?
Spärras per timme = $\lambda_e ff$ * 60 min * P(spärr)

Hur lång tid tillbringar en kund i medeltal i könätet?
Littles sats

Vad är medeltiden i könätet för en kund som lämnar könätet via nod 5?
Ta fram alla vägar som leder till nod 5, ta fram λ, E(N), E(T) och summera allt.

Hur lång tid tillbringar en godtycklig kund i medeltal med att vänta under sin tid i könätet?
Littles sats, fast med ρ (2014 3c)

Vad är sannolikheten att en kund lämnar könätet i punkten A respektive B?
$\lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$
$\lambda_B/(\lambda_A + \lambda_B)$

M/G/1: Sannolikhet att betjänare är upptagen?
$N_s = \lambda * E(X)$

Beräkna hur många kunder som i medeltal ger upp per tidsenhet
$E(N) = \beta_0 * p_0 + \beta_1 * p_1 ...$

Beräkna medeltiden i systemet för en kund som har betjänats och som anlände när det redan fanns tre kunder i kösystemet
E(T) = 3 kunder i sys. (betjäning) + 2 kunder i sys. (betjäning) + egen betjäning

Beräkna medelvärdet av tiden en kund tillbringar i nod 2 från det att kunden kommer till könätet tills den lämnar könätet.
$\lambda_2 / \lambda * E(T_2)$

Beräkna medelvärdet av antal betjäningar som en godtycklig kundfår under sin tid i könätet
E(antal besök i nod k) = λ_k / λ

8 Tenta med lösningar

https://www.eit.lth.se/kurs/eitf95

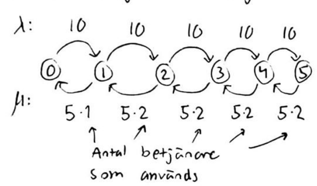
8.1 Tenta 2014

1 (2014)

- × 2 betjänare
- × 3 köplatser
- × Poissonprocess
- × $\lambda = 10\ s^{-1}$
- × exponentialfördelad
- × $E(X) = 0{,}2\,s \Rightarrow \frac{1}{0{,}2} = \mu \qquad \mu = 5\ s^{-1}$

  medelbetjäningstid

a) Markovkedja: 2 betjänare + 3 köplatser = 5 tillstånd!



b) Tillståndssnl. fås ur snittmetoden:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot p_0 &= \mu \cdot p_1\\ \lambda \cdot p_1 &= 2\mu \cdot p_2\\ \lambda \cdot p_2 &= 2\mu \cdot p_3\\ \lambda \cdot p_3 &= 2\mu \cdot p_4\\ \lambda \cdot p_4 &= 2\mu \cdot p_5\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}10p_0 &= 5p_1\\ 10p_1 &= 10p_2\\ 10p_2 &= 10p_3\\ 10p_3 &= 10p_4\\ 10p_4 &= 10p_5\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}p_1 &= 2p_0\\ p_2 &= p_1\\ p_3 &= p_2\\ p_4 &= p_3\\ p_5 &= p_4\end{aligned}$$

$p_5 = p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = 2p_0$

Bestäm p_0: $\boxed{1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k} \Leftrightarrow 1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$

Kom ihåg formeln!

$\Leftrightarrow 1 = p_0 + 2p_0 + 2p_0 + 2p_0 + 2p_0 + 2p_0 \quad \Leftrightarrow 1 = 11p_0$

$p_0 = \frac{1}{11} \qquad p_1 = 2p_0 = \frac{2}{11} \qquad p_i = \frac{2}{11}$ där $1 \le i \le 5$

c) Snl. att kund spärras?

I tillstånd 5 är kön full & 2 betjänare används ⇒ kunder som anländer spärras, alltså $p_5 = \frac{2}{11}$, dvs. tillstånd 5

d) Hur många betjänare är i medeltal busy?

Formeln för medelvärde: $\boxed{E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k}$

medelvärde i hela systemet

Frågan gäller bara för betjänare, dvs. 2 st.

$$E(N) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 2 \cdot p_5$$

antal betjänare som "jobbar" i varje tillstånd

$$E(N) = 2 \cdot p_0 + 4p_0 + 4 \cdot p_0 + 4p_0 + 4p_0 \iff E(N) = 18 \cdot p_0 = \frac{18}{11}$$

---

e) $\lambda \to \infty$ (ankomstintensitet är oändlig). Medeltid i systemet för en kund som ej spärras?

Ur F.S: $\boxed{E(s) = \frac{1}{\mu}}$

betjäningstid

Om $\lambda \to \infty$ befinner vi oss i tillstånd 5 där kunder spärras. 2 betjänas åt gången & 3 väntar i kön. ooo → |o o|

kön betjänas

E(S) = tiden för 3 före i kön + tiden att bli betjänad

$$E(s) = 3 \cdot \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} \qquad E(S) = \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

② × Ändligt antal kunder   × $\beta = 1$ per min

× 5 kunder   × $E(X) = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{1} = 1$

× 1 betjänare

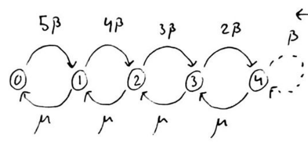
× 3 köplatser

---

a) Snl. att kund spärras? Använd formeln för anropsspärr:

$P(\text{spärr}) = \dfrac{\lambda_M p_M}{\sum_{i=0}^{M} \lambda_i p_i}$ given, där M är antal platser i sys.

Rita Markovkedja:



ritas såhär när det är ändligt antal kunder

Snittmetoden:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot p_0 &= \mu \cdot p_1 & & 5\beta \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 & & 5p_0 = p_1 & & p_1 = 5p_0 \\
\lambda \cdot p_1 &= \mu \cdot p_2 & \Leftrightarrow\ & 4\beta \cdot p_1 = \mu \cdot p_2 & \Leftrightarrow\ & 4p_1 = p_2 & \Leftrightarrow\ & p_2 = 4p_1 = 20p_0 \\
\lambda \cdot p_2 &= \mu \cdot p_3 & & 3\beta \cdot p_2 = \mu \cdot p_3 & & 3p_2 = p_3 & & p_3 = 3p_2 = 12p_1 = 60p_0 \\
\lambda \cdot p_3 &= \mu \cdot p_4 & & 2\beta \cdot p_3 = \mu \cdot p_4 & & 2p_3 = p_4 & & p_4 = 2p_3 = 120p_0
\end{aligned}$$

($\beta = 1$, $\mu = 1$)

Formeln för p_0: $\boxed{1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k} \Leftrightarrow 1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \Leftrightarrow 1 = p_0(1 + 5 + 20 + 60 + 120)$

$$p_0 = \frac{1}{206} \qquad p_1 = \frac{5}{206} \qquad p_2 = \frac{20}{206} \qquad p_3 = \frac{60}{206} \qquad p_4 = \frac{120}{206}$$

$$P(\text{spärr}) = \frac{\lambda_M p_M}{\sum_{i=0}^{M} \lambda_i p_i} \Leftrightarrow \frac{\overset{=\beta}{\lambda_4} \cdot p_4}{\underset{5\beta}{\lambda_0 p_0} + \underset{4\beta}{\lambda_1 p_1} + \underset{3\beta}{\lambda_2 p_2} + \underset{2\beta}{\lambda_3 p_3} + \underset{\beta}{\lambda_4 p_4}} = \frac{\beta \cdot \frac{120}{206}}{\beta\left(\frac{5}{206} + \frac{20}{206} + \frac{60}{206} + \frac{120}{206} + \frac{120}{206}\right)}$$

$$\Leftrightarrow P(\text{spärr}) = \frac{\cancel{\beta} \cdot \frac{120}{\cancel{206}}}{\cancel{\beta} \cdot \frac{325}{\cancel{206}}} = \frac{120}{325} = 0{,}37$$

b) Medeltid : sys. för en kund som inte spärras?

När tid efterfrågas går det att använda Little's sats ur F.S:

$$\boxed{E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}}}$$

$$\boxed{E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k} \Leftrightarrow 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = 705\,p_0$$

$\boxed{\lambda_{eff} = \sum_{k \in A} \lambda_k \cdot p_k}$ summera upp till tillstånd 3 eftersom i tillstånd 4 spärras kunderna!

ur F.S.

$$\lambda_{eff} = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 \Leftrightarrow 5\beta \cdot p_0 + 4\beta \cdot \overbrace{5p_0}^{p_1} + 3\beta \cdot \overbrace{20p_0}^{p_2} + 2\beta \cdot \overbrace{60p_0}^{p_3}$$

$$\lambda_{eff} = 5p_0 + 20p_0 + 60p_0 + 120p_0 = 205\,p_0$$

$$E(T) = \frac{705\cancel{p_0}}{205\cancel{p_0}} = 3{,}44$$

---

c) Hur många betjänas per timme?

$$\boxed{\text{Betjäning per } h = \lambda_{eff} \cdot 60 \text{ min}} = 205p_0 \cdot 60 = \frac{205}{206} \cdot 60 = 59{,}71$$

Kom ihåg!

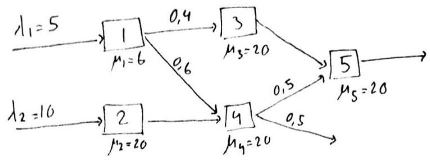
---

d) Hur stor är belastningen på betjänaren? Belastning = P(en betjänare busy)

$$P(\text{en betjänare busy}) = 1 - \underbrace{P(\text{ingen busy})}_{= p_0} \Leftrightarrow 1 - p_0 = 1 - \frac{1}{206} = \frac{205}{206} = 99{,}5\,\%$$

---

③ M/M/1 system:



a) Hur lång tid tillbringar i medeltal en kund i könätet?

Tid i medeltal ⇒ Littles sats $\boxed{E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}}}$

● ① Hitta alla λ:

$$\lambda_1 = 5$$
$$\lambda_2 = 10$$
$$\lambda_3 = 0{,}4 \cdot \lambda_1 = 2$$
$$\lambda_4 = 0{,}6\lambda_1 + \lambda_2 = 13$$
$$\lambda_5 = 0{,}5\lambda_4 + \lambda_3 = 8{,}5$$

⇒

$$\lambda_1 = 5,\quad \lambda_2 = 10,\quad \lambda_3 = 2,\quad \lambda_4 = 13,\quad \lambda_5 = 8{,}5$$

② Bestäm $E(N)$ i varje nod:

Ur F.S. för M/M/1 system gäller $\boxed{E(N) = \frac{\rho}{1-\rho}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{5}{6-5} = 5$$

$$E(N_2) = \frac{10}{20-10} = 1$$

$$E(N_3) = \frac{1}{9}$$

$$E(N_4) = \frac{13}{7}$$

$$E(N_5) = \frac{17}{23}$$

③ Hitta $\lambda_{eff} = \lambda_A + \lambda_B = \lambda_1 + \lambda_2$ ← Det som kmr in i systemet!

$$\lambda_{eff} = 5 + 10 = 15$$

④ Slutligen. $E(T) = \sum_{k=0}^{5} \frac{E(N_k)}{\lambda_{eff}} = \frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) + E(N_4) + E(N_5)}{\lambda_{eff}} = 0{,}58$

③ b) Medeltid i könät för kund som lämnar via nod 5?

1. Ta fram vägarna som leder till nod 5:

$A: 1 \to 3 \to 5 \quad \lambda_A = \lambda_1 \cdot 0,4 = 2$ ← Avläses ur figuren!

$B: 1 \to 4 \to 5 \quad \lambda_B = \lambda_1 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 1,5$

$C: 2 \to 4 \to 5 \quad \lambda_C = \lambda_2 \cdot 0,5 = 5$

2. Kom ihåg: $\boxed{T_i = \frac{N_i}{\lambda_i}}$ medeltid i varje nod

$T_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} = \frac{5}{5} = 1 \quad T_2 = \frac{1}{16} \quad T_3 = \frac{1}{18} \quad T_4 = \frac{1}{7} \quad T_5 = \frac{2}{23}$

3. Medeltid i könät fås genom: $\frac{\lambda_A \overbrace{(T_1 + T_3 + T_5)}^{\text{väg } A} + \lambda_B \overbrace{(T_1 + T_4 + T_5)}^{\text{väg } B} + \lambda_C \overbrace{(T_2 + T_4 + T_5)}^{\text{väg } C}}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}$

$= 0,68$

③ c) Hur lång tid tillbringar kund i medeltal med att vänta?

$E(T)$ = medeltid i hela systemet

$\boxed{E(T) = \underbrace{E(T_{\text{vänta}})}_{\text{Medeltiden att vänta}} + \underbrace{E(X)}_{\text{Medeltid att bli betjänad}}}$ ← kom ihåg!! $\Leftrightarrow E(T_{\text{vänta}}) = \overset{0,58}{E(T)} - E(X)$

$E(X) = \frac{1}{\mu}$ MEN μ är olika i de olika tillstånden! Alltså kan vi inte använda denna formeln

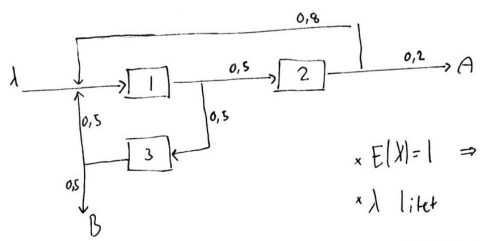
Kom ihåg formeln ur fact: $\boxed{\frac{\sum N_i - \sum \rho_i}{\lambda_1 + \lambda_2}} = 0,41$

③ d) $\lambda_1 \to \infty$, medelantal kunder i nod 3?

Det kan bara komma ut så mkt som μ kan betjäna. Alltså ur nod 1 där $\mu_1 = 6$ kmr det ut $\lambda_1 = 6$.

$\lambda_3 = 0,4 \cdot 6 = 2,4 \qquad E(N_3) = \frac{\lambda_3}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{2,4}{20 - 2,4} = 0,14$

④ (2014)



M/M/1

× $E(X)=1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{1} = 1$

× λ litet

a) Snl. att kund lämnar könät : A resp. B?

1. Ekv. sys. för λ: $\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}8\lambda_2 + \lambda + 0{,}5\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0{,}5\lambda_1 \\ \lambda_3 = 0{,}5\lambda_1 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\lambda_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}5\lambda_1 + \lambda + 0{,}5 \cdot 0{,}5\lambda_1$

$\downarrow$

$\lambda_1 = 0{,}4\lambda_1 + \lambda + 0{,}25\lambda_1$

$\lambda_1 = \frac{\lambda}{0{,}35}$

$\lambda_1 = \frac{\lambda}{0{,}35}$ $\quad \lambda_2 = \frac{0{,}5\lambda}{0{,}35}$ $\quad \lambda_3 = \frac{0{,}5\lambda}{0{,}35}$

2. Beräkna λ_A & λ_B:

$\lambda_A = 0{,}2\lambda_2 = \frac{0{,}1\lambda}{0{,}35}$ $\qquad \lambda_B = 0{,}5\lambda_3 = \frac{0{,}25\lambda}{0{,}35}$

3. Snl. att lämna A blir: $\boxed{\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}}$ ← Delen / Det totala $= \frac{\frac{0{,}1\lambda}{0{,}35}}{\frac{0{,}35\lambda}{0{,}35}} = \frac{0{,}1}{0{,}35} = \frac{2}{7}$

↗ Kom ihåg $\frac{P}{B}$

B: $\boxed{\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}} = \frac{5}{7}$

b) Hur lång tid tillbringas i medel en kund i nätet?

Medeltid ⇒ Littles sats $\boxed{E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}}} = \frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)}{\lambda}$

Ur F.S: $\boxed{E(N) = \frac{\overset{=\frac{\lambda}{\mu}}{\rho}}{1-\rho}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $\qquad E(N_1) = \frac{20\lambda}{7-20\lambda}$ $\qquad E(N_2) = \frac{10\lambda}{7-10\lambda}$ $\qquad E(N_3) = \frac{10\lambda}{7-10\lambda}$

Sätt in: $E(T) = \frac{20}{7-20\lambda} + \frac{20}{7-10\lambda}$

(4) c) I medeltal, hur många ggr besöker kund nod 1, 2 & 3 under tiden i könätet?

Medelantal besök : nod 1: $\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{0{,}35}}{\frac{\lambda}{1}} = \frac{1}{0{,}35} = \frac{20}{7}$

Nod 2: $\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{10}{7}$ Nod 3: $\frac{\lambda_3}{\lambda} = \frac{10}{7}$

(5) M/G/1 system $N = \rho + \dfrac{\lambda^2 \cdot E(X^2)}{2(1-\rho)}$

medelantal kunder i hela sys.

$V(X) = 0{,}01\ s^2$

$E(X) = 0{,}1\ s \Rightarrow \frac{1}{E(X)} = \mu \quad \mu = 10\ s^{-1}$

$\lambda = 8$

---

a) Medeltid för kund i sys? Använd formeln vi fick!

Ur F.S: $\boxed{V(N) = E(N^2) - E(N)^2}$

I vårt fall: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Leftrightarrow E(X^2) = V(X) + E(X^2)$

$E(X^2) = 0{,}01 + 0{,}01$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

Sätt in allt i formeln: $E(N) = \dfrac{\rho + \lambda^2 \cdot E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0{,}8 + \dfrac{64 \cdot 0{,}02}{2(1-0{,}8)} = 4$

Medeltid $\Rightarrow$ Littles sats $E(T) = \dfrac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \dfrac{4}{\lambda} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

---

b) Sol. att betjänare upptagen?

Kom ihåg formeln: $\boxed{N_s = \lambda \cdot E(X)} = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \rho$

served

$\frac{1}{\mu}$

$\rho = \frac{8}{10} = 0{,}8$

---

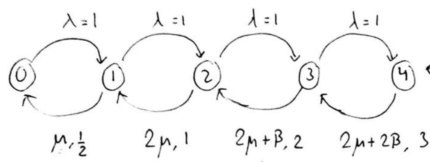
⑥ 2 betjänare
2 köplatser

$\lambda = 1$ per min
$E(X) = 2$ min $\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$ min^{-1}
$\beta = 1$ min

---

a) Rita Markovkedja:

2 betjänare + 2 köplatser = upp till 4 tillstånd



← 2 betjänare jobbar & 2 kunder i kön. Systemet är nu fullt & resten avvisas

1 betjänare jobbar

2 jobbar

2 jobbar + kö bildas! Risk finns att kunder lämnar

---

b) Medelantal upptagna betjänare?

Snittmetoden: $\lambda_0 \cdot p_0 = \mu_1 \cdot p_1$ $\quad 1 \cdot p_0 = \frac{1}{2} \cdot p_1 \quad \Rightarrow$
$\lambda_1 \cdot p_1 = \mu_2 \cdot p_2 \cdots$

$$\begin{cases} p_1 = 2p_0 \\ p_2 = 2p_0 \\ p_3 = \frac{p_2}{2} = p_0 \\ p_4 = \frac{p_0}{3} \end{cases}$$

Bestäm p_0: $\boxed{1 = \sum_{k=0}^{4} p_k}$ $\quad 1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$

$$1 = p_0 + 2p_0 + 2p_0 + p_0 + \frac{p_0}{3}$$

$$1 = p_0 \cdot \frac{19}{3} \quad \boxed{p_0 = \frac{3}{19}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = \frac{6}{19} \\ p_2 = \frac{6}{19} \\ p_3 = \frac{3}{19} \\ p_4 = \frac{1}{19} \end{cases}$$

Medelantal: $\boxed{E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k}$

Ur F.S. antal upptagna betjänare!

$$E(N) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 = \frac{26}{19} = 1{,}37$$

⑥ c) Medeltal för betjäning per tidsenhet?

Betjäning pågår i tillstånd 1, 2, 3 & 4 (ej i 0).

$$\mu \cdot p_1 + 2\mu p_2 + 2\mu p_3 + 2\mu p_4 = \frac{13}{19} = 0{,}68$$

betjäningsnl. i tillstånd 1

2 betjänare jobbar

1 betjänare jobbar

---

d) Medeltal för kunder som ger upp per tidsenhet?

Samma logik som i c), fast i tillstånd 3 & 4 enbart eftersom då finns det risk att kunder lämnar (när det bildas kö).

$$\beta \cdot p_3 + 2\beta \cdot p_4 = \frac{5}{19} = 0{,}26$$

---

e) Medeltid i sys. för kund som har betjänats & som anlände när det redan fanns 3 kunder i sys?

Här kan Littles sats ej användas eftersom kunder lämnar systemet (ej jämvikt).

$$E(T) = \underbrace{2\mu+\beta}_{\text{3 kunder i systemet}} + \underbrace{2\mu}_{\text{2 kunder i sys}} + \underbrace{\mu}_{\text{egen betjäning}} =$$