Université Abderrahmane Mira de Bejaia

Faculté de Technologie

Département de Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Cours et exercices d'analyse I

Matière : Analyse I

Conformément au Programme de Première Année Parcours Ingénieur

Domaine Sciences de Technologie

Rédigé par :

Dr. BOUKOUCHA Rachid

Année universitaire

2022-2023

Table des matières

Préface

Ce polycopié "**Cours et exercices d'analyse I**" est destiné aux étudiants de première année du Domaine Sciences et Technique, Parcours Ingénieur. Le manuscrit couvre le programme officiel de la matière Analyse I du premier semestre. Dans ce polycopié on a inclus de nombreux exemples typiques d'applications et on a mis une série d'exercices avec solutions à la fin de chaque chapitre. J'espère que ce support de cours aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Analyse I qui constituent la base des mathématiques à l'université.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance aux deux spécialistes qui ont expertisé ce polycopié. Nous les remercions pour leur travail consciencieux et professionnel et pour leurs remarques toujours pertinentes. Comme toute première version de tout manuscrit, ce recueil peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, nous invitons le lecteur à nous les signaler afin d'améliorer la présentation et le contenu du présent manuscrit, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (rachid_boukecha@yahoo.fr) ou (rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz).

Le programme officiel de la matière Analyse I est :

Chapitre 1 : Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Partie majorée, minorée et bornée. Élément maximum, élément minimum. Borne supérieure, borne inférieure. Valeur absolue, partie entière.

Chapitre 2 : Suites numériques réelles.

Suites convergentes, théorèmes de comparaison. Théorème de convergence monotone. Suites extraites. Suites adjacentes. Suites particulières (arithmétiques, géométriques, récurrentes)

Chapitre 3 : Fonctions réelles à une variable réelle.

Limites et continuité des fonctions. Dérivée et différentielle d'une fonction. Applications aux fonctions élémentaires (puissance, exponentielle, logarithmique hyperbolique et trigonométrique).

Chapitre 4 : Développement limité

Développement limité. Formule de Taylor. Développement limité des fonctions.

Chapitre 5 : Intégrales simples

Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.

Chapitre 1

Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$.

1.1 Introduction

En mathématiques, les nombres réels, représentés par $\mathbb{R}$, sont tous les nombres qui appartiennent à l'ensemble des nombres rationnels ou à l'ensemble des nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné et il satisfait en plus la propriété de la borne supérieure qui fonde l'analyse réelle.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soient a, b deux réels. On définit les ensembles suivants, dits intervalles de $\mathbb{R}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$, $\quad [a, b[\ = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$, $\quad]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$

$[a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$, $\quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$

$]a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$, $\quad]-\infty, b[\ = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$

$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\quad \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $\quad \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle.

1.3 Partie majorée, minorée et bornée

Définition 1.1 *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1) Un élément M de $\mathbb{R}$ est dit majorant de l'ensemble E si et seulement si

$$\forall x \in E : x \leq M.$$

On dit que E est majorée.

2) Un élément m de $\mathbb{R}$ est dit minorant de l'ensemble E si et seulement si

$$\forall x \in E : x \geq m.$$

On dit que E est minorée.

3) On dit que E est bornée si E est à la fois majorée et minorée c'est à dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : m \leq x \leq M.$$

Exemple 1.1 *Soit* $E =]1,4[$, $A = [0,+\infty[$, *déterminer (s'ils existent) les majorants et les minorants de* E *et* A.

On a :

Les majorants de $]1,4[$ *sont :* $[4,+\infty[$

Les minorants de $]1,4[$ *sont :* $]-\infty,1]$

Les majorants de $[0,+\infty[$ *n'existent pas.*

Les minorants de $[0,+\infty[$ *sont :* $]-\infty,0]$

1.4 Élément maximum, élément minimum

Définition 1.2 *Soit* E *une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

1) Un élément a *de* E *est dit maximum de* E *si et seulement si*

$$\forall x \in E : x \leq a.$$

Et on écrit : $\max E = a$.

2) Un élément b *de* E *est dit minimum de* E *si et seulement si*

$$\forall x \in E : b \leq x.$$

Et on écrit : $\min E = b$.

Exemple 1.2 *Soit* $A = [0,1[$, $B = \{-3,2,5,8\}$

Le plus grand élément de A *n'existe pas.*

Le plus petit élément de A *est :* $\min A = 0$

Le plus grand élément de B *est :* $\max(B) = 8$

Le plus petit élément de B *est :* $\min B = -3$

1.5 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.3 *Soit* E *une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

1) On appelle borne supérieure de E le minimum de l'ensemble des majorants de E.

2) On appelle borne inférieure de E le maximum de l'ensemble des minorants de E.

Théorème 1.3 *(Théorème de la borne supérieure,inférieure)*

1) Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

2) Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Exemple 1.4 *Soit* $A = [-1, 1]$

Les majorants de A sont : $[1, +\infty[$

Les minorants de A sont : $]-\infty, -1]$

La borne supérieure de A est : $\sup(A) = 1$

La borne inférieure de A est : $\inf(A) = -1$

Le plus grand élément de A est : $\max(A) = 1$

Le plus petit élément de A est : $\min A = 1$

Exercice Soit E l'ensemble défini comme suit :

$$E = \left\{ \frac{1}{x^2+1} / x \in]0, 1] \right\}.$$

Montrer que E est bornée.

On a :

$$\begin{aligned} x \in]0,1] \quad &\Rightarrow \quad 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad 0 < x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 < 1 + x^2 \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} < 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall a \in E \text{ on a : } \frac{1}{2} \leq a < 1, \text{ d'où } E \text{ est bornée.}$$

De plus on a :

$$\text{Les majorants de } E \text{ sont : } [1, +\infty[$$

$$\text{Les minorants de } E \text{ sont : } \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{La borne supérieure de } E \text{ est : } \sup(E) = 1$$

$$\text{La borne inférieure de } E \text{ est : } \inf(E) = \frac{1}{2}$$

Le plus grand élément de E n'existe pas.

$$\text{Le plus petit élément de } E \text{ est : } \min E = \frac{1}{2}$$

1.6 Valeur absolue

Définition 1.4 *On appelle valeur absolue du réel x le réel positif noté $|x|$ défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 1.5 $|7| = 7, \quad |-3| = -(-3) = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ \\ -x+1 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Propriétés :

1) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{-x, x\}$ 2) $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : (|x| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ 4)$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x.y| = |x| . |y|$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : |x^n| = |x|^n$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$ ($1^{\text{ère}}$inégalité triangulaire)

7) $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$ ($2^{\text{ère}}$inégalité triangulaire)

1.6.1 Distance usuelle sur $\mathbb{R}$

Définition 1.5 *On appelle distance usuelle sur $\mathbb{R}$, l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} d & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longrightarrow & d(x, y) \end{array}$$

où $d(x, y) = |x - y|$, le réel $d(x, y)$ est appelé distance de x et y.

Propriétés

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = d(y, x)$

3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.7 Partie entière

Proposition 1.1 *(Définition)*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha \leq x < \alpha + 1$.

L'entier relatif α est appelé partie entière du réel x et est noté par $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple 1.6

$$[1,5] = 1 \qquad [4] = 4 \qquad [\pi] = 3$$

$$[-1,5] = -2 \qquad [1,9] = 1 \qquad [-\pi] = -4$$

Propriétés
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$1) \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \qquad 2) \quad x - 1 < E(x) \leq x$$

$$3) \quad (E(x) = x) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z}) \qquad 4) \quad \forall n \in \mathbb{Z} : E(x+n) = n + E(x)$$

1.8 Exercices

Exercise 1.7 *Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :*

$$1) \quad [-1,3], \quad]0,1[, \quad [-1,3] \cap \mathbb{Z}, \quad]0,1] \cap \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N}.$$

$$2) \quad A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2}, \; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

$$3) \quad B = \left\{ \frac{1}{2x+1}, \; x \in [0,1] \right\}.$$

Solution.

Déterminons (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

Pour l'ensemble $[-1,3]$. *On a :*

Les majorants de $[-1,3]$ *sont :* $[3,+\infty[$.

Les minorants de $[-1,3]$ *sont :* $]-\infty,-1]$.

La borne supérieure de $[-1,3]$ *est :* $\sup([-1,3]) = 3$.

La borne inférieure de $[-1,3]$ *est :* $\inf([-1,3]) = -1$.

Le plus grand élément de $[-1,3]$ *est :* $\max([-1,3]) = 3$.

Le plus petit élément de $[-1,3]$ *est :* $\min([-1,3]) = -1$.

Pour l'ensemble $]0,1[$. *On a :*

Les majorants de $]0,1[$ *sont :* $[1,+\infty[$.

Les minorants de $]0,1[$ *sont :* $]-\infty,0]$.

La borne supérieure de $]0,1[$ *est :* $\sup(]0,1[) = 1$.

La borne inférieure de $]0,1[$ *est :* $\inf(]0,1[) = 0$.

Le plus grand élément de $]0,1[$ *: n'existe pas.*

Le plus petit élément de $]0,1[$ *: n'existe pas.*

Pour l'ensemble $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$. *On a :* $[-1,3]\cap\mathbb{Z}=\{-1,0,1,2,3\}$, *donc :*

Les majorants de $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$ *sont :* $[3,+\infty[$.

Les minorants de $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$ *sont :* $]-\infty,-1]$.

La borne supérieure de $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\sup([-1,3]\cap\mathbb{Z})=3$.

La borne inférieure de $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\inf([-1,3]\cap\mathbb{Z})=-1$.

Le plus grand élément de $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\max([-1,3]\cap\mathbb{Z})=3$.

Le plus petit élément de $[-1,3]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\min([-1,3]\cap\mathbb{Z})=-1$.

Pour l'ensemble $]0,1]\cap\mathbb{Z}$. *On a :* $]0,1]\cap\mathbb{Z}=\{1\}$, *donc,*

Les majorants de $]0,1]\cap\mathbb{Z}$ *sont :* $[1,+\infty[$.

Les minorants de $]0,1]\cap\mathbb{Z}$ *sont :* $]-\infty,1]$.

La borne supérieure de $]0,1]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\sup(]0,1]\cap\mathbb{Z})=1$.

La borne inférieure de $]0,1]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\inf(]0,1]\cap\mathbb{Z})=1$.

Le plus grand élément de $]0,1]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\max(]0,1]\cap\mathbb{Z})=1$.

Le plus petit élément de $]0,1]\cap\mathbb{Z}$ *est :* $\min(]0,1]\cap\mathbb{Z})=1$.

Pour l'ensemble $\mathbb{N}$. *On a :*

Les majorants de $\mathbb{N}$*, n'existent pas.*

Les minorants de $\mathbb{N}$ *sont :* $]-\infty, 0]$.

La borne supérieure de $\mathbb{N}$*, n'existe pas.*

La borne inférieure de $\mathbb{N}$ *est :* $\inf(\mathbb{N}) = 0$.

Le plus grand élément de $\mathbb{N}$*, n'existe pas.*

Le plus petit élément de $\mathbb{N}$ *est :* $\min(\mathbb{N}) = 0$.

Pour l'ensemble $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (-1)^n \in \{-1, 1\}$ *et* $n \mapsto \frac{1}{n^2}$ *est décroissante, alors on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : -1 < (-1)^n + \frac{1}{n^2} \leq \frac{5}{4}$$

Alors,

Les majorants de A *sont :* $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$.

Les minorants de A *sont :* $]-\infty, -1]$.

La borne supérieure de A *est :* $\sup(A) = \frac{5}{4}$.

La borne inférieure de A *est :* $\inf(A) = -1$.

Le plus grand élément de A *est :* $\max(A) = \frac{5}{4}$.

Le plus petit élément de A *n'existe pas.*

Pour l'ensemble $B = \left\{ \dfrac{1}{2x+1},\ x \in [0,1] \right\}$. *On a :*

$$\begin{aligned} x \in [0,1] &\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq 2x+1 \leq 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2x+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Alors,

Les majorants de B sont : $[1, +\infty[$.

Les minorants de B sont : $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$.

La borne supérieure de B est : $\sup(B) = 1$.

La borne inférieure de B est : $\inf(B) = \dfrac{1}{3}$.

Le plus grand élément de B est : $\max(B) = 1$.

Le plus petit élément de B est : $\min(B) = \dfrac{1}{3}$.

Exercise 1.8 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$.*

1) Ecrire les expressions suivantes sans valeur absolue :

1) $f(x) = 3 + |x-1|$ 2) $g(x) = |x-2| + |2x+3|$

3) $h(x,y) = |x-y|$

2) Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad et \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Solution.

1) Ecrivons l'expression de : $f(x) = 3 + |x-1|$ sans valeur absolue.

On a :

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \in [1, +\infty[\\ \\ -x+1 & si \quad x \in]-\infty, 1] \end{cases}$$

donc,

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \in [1, +\infty[\\ \\ -x+4 & si \quad x \in]-\infty, 1] \end{cases}$$

Ecrivons l'expression de : $g(x) = |x-2| + |2x+3|$ *sans valeur absolue.*
On a :

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \in [2, +\infty[\\ \\ -x+2 & si \quad x \in]-\infty, 2] \end{cases}$$

et

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & si \quad x \in \left[\frac{-3}{2}, +\infty\right[\\ \\ -2x-3 & si \quad x \in \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right] \end{cases}$$

donc,

$$f(x) = \begin{cases} -3x-1 & si \quad x \in \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right] \\ \\ x+5 & si \quad x \in \left[\frac{-3}{2}, 2\right] \\ \\ 3x+1 & si \quad x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

Ecrivons l'expression de : $h(x, y) = |x-y|$ *sans valeur absolue.*
On a :

$$h(x,y) = \begin{cases} x-y & si \quad x \geq y \\ \\ -x+y & si \quad x \leq y \end{cases}$$

2) Démontrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *:*

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad et \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Si $x \geq y$, *on a :* $\max(x,y) = x$ *et* $\min(x,y) = y$ *et*

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x \\ \text{et} & \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y. \end{aligned}$$

Si $x \leq y$, *on a :* $\max(x,y) = y$ *et* $\min(x,y) = x$ *et*

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y \\ \text{et} & \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x. \end{aligned}$$

Alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Exercise 1.9 *1) Evaluer les expressions suivantes :*

$$E\left(\frac{1}{2}\right), \qquad E(\pi) \qquad E\left(\frac{-3}{2}\right) \qquad E\left(\frac{-19}{10}\right)$$

2) Résoudre les équations suivantes :

$$1) \quad E(x) = 3, \qquad\qquad 2) \quad E(2x-1)+1 = 0$$

Solution.

1) Evaluons les expressions :

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = E(0,5) = 0 \qquad\qquad E\left(\frac{-3}{2}\right) = E(-1,5) = -2$$

$$E(\pi) = E(3,14..) = 3 \qquad\qquad E\left(\frac{-19}{10}\right) = E(-1,9) = -2$$

2) Résolvons l'équations : $E(x) = 3$.

On a :

$$\begin{aligned} E(x) = 3 &\Leftrightarrow 3 \leq x < 3+1 \\ &\Leftrightarrow 3 \leq x < 4. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble de solutions est : $[3,4[$.

Résolvons l'équations suivante : $E(2x-1)+1=0$
On a :

$$\begin{aligned} E(2x-1)+1=0 &\Leftrightarrow E(2x-1)=-1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 2x-1 < -1+1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 2x-1 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2x < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble de solutions est : $\left[0, \frac{1}{2}\right[$.

Chapitre 2

Suites Numériques

2.1 Introduction

Les suites servent principalement à étudier des phénomènes répétitifs et l'évolution de séquences de nombres. Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne par exemple, si on veut savoir quel montant sera présent sur un livret d'épargne si on effectue ni retrait ni dépôt et que des intérêts s'accumulent tous les ans pendant 50 ans (il ne suffit pas de calculer 50 fois les intérêts de la première année).

2.2 Suites Numériques

Définition 2.1 *Soit I une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$. On appelle suite numérique (ou suite réelle) toute application U de I dans l'ensemble $\mathbb{R}$. On note :*

$$\begin{array}{cccc} U & I \subseteq \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & U_n \end{array}$$

n : est appelé indice de la suite.

On note la suite U par : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou par (U_n)) .

U_n : est appelée terme d'indice n, ou terme général, de la suite (U_n), et U_0 en est le terme initial.

L'ensemble des termes de la suite est représente par $\{U_1, U_1, ..., U_n, ...\}$ mais aussi par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $I = \mathbb{N}$, la suite est dite infinie dénombrable.

On note par : $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles.

Exemple 2.1

$$\begin{array}{cccc} U_n & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & 2n-3 \end{array} , \qquad \begin{array}{cccc} V_n & I \subseteq \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & 1+\dfrac{1}{n} \end{array}$$

(U_n) et (V_n) sont deux suites réelles.

2.2.1 Suites bornées

Définition 2.2 *Soit* (U_n) *une suite réelle.*

On dit que la suite (U_n) *est majorée si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M.$$

On dit que la suite (U_n) *est minorée si et seulement si :*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq m.$$

On dit que la suite (U_n) *est bornée si et seulement si* (U_n) *à la fois majorée et minorée c'est à dire :*

$$\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : m \leq U_n \leq M.$$

Exemple 2.2

$$\begin{array}{cccc} U_n & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & 2n+3 \end{array}$$

Cette suite (U_n) *est minorée car on a :* $3 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq 3$.

Mais cette suite (U_n) *n'est pas majorée car* $\nexists M \in \mathbb{R}$ *tel que* $U_n = 2n+3 \leq M$, *puisque* $2n+3$ *tend vers* $+\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$, *donc cette suite n'est pas bornée.*

Exemple 2.3

$$\begin{array}{cccc} V_n & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Cette suite (V_n) *est bornée car on :* $0, 1 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < V_n \leq 1$.

2.2.2 Suites monotones

Définition 2.3 *Soit* (U_n) *une suite réelle.*

On dit que la suite (U_n) *est croissante si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_{n+1}.$$

On dit que la suite (U_n) est décroissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq U_{n+1}.$$

On dit que la suite (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

La monotonie se met en évidence en étudiant le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Si l'inégalité est stricte, on dira que la suite (U_n) est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Exemple 2.4

$$\begin{array}{cccc} U_n & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & 2n+1, \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} V_n & I \subseteq \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & \dfrac{1}{n}. \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (2(n+1)+1) - (2n+1) \\ &= 2 > 0, \end{aligned}$$

donc, la suite (U_n) est strictement croissante.

et on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \left(\frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-n-1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \end{aligned}$$

donc, la suite (V_n) est strictement décroissante.

2.3 Suites convergentes

Définition 2.4 *Soit (U_n) une suite réelle.*

On dit que la suite (U_n) est convergente si et seulement si : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

Si : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty$, on dit que la suite (U_n) est divergente.

Théorème 2.5 *La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.*

Exemple 2.6 *Soient*

$$U_n = \frac{2n+1}{n+3},\ n \in \mathbb{N}. \qquad V_n = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

$$W_n = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n}\right) = 2.$$

Donc, la suite (U_n) *est convergente et converge vers* 2.
et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

Donc, la suite (V_n) *est convergente et converge vers* 0.
et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty}(3n-2) = +\infty$$

Donc, la suite (W_n) *est divergente.*

Théorème 2.7 *(sur les suites convergentes)*

Soient (U_n) *et* (V_n) *deux suites convergentes :* $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} V_n = l'$ *où* $l \in \mathbb{R}, l' \in \mathbb{R}^*$. *Alors on a :*

- *La suite* (λU_n), $\lambda \in \mathbb{R}$ *converge vers* λl.
- *La suite* $(U_n + V_n)$ *converge vers* $l + l'$.
- *La suite* $(|U_n|)$ *converge vers* $|l|$.
- *La suite* $(U_n.V_n)$ *converge vers* $l.l'$.
- *La suite* $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ *(avec* $V_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$*) converge vers* $\frac{l}{l'}$.

Théorème 2.8 *1) Toute suite réelle* (U_n) *croissante et majorée est convergente, plus précisément, elle converge vers le* $\sup\{U_n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$.

2) Toute suite réelle (U_n) *décroissante et minorée est convergente, plus précisément, elle converge vers le* $\inf\{U_n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$.

3) Toute suite réelle (U_n) *convergente vers* l *(fini) est bornée.*

Remarque

La réciproque est fausse :

La suite $(U_n) = (-1)^n$ est bornée car, $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \in \{-1, 1\}$ (c-à-d : $-1 \leq U_n \leq 1$), mais la suite (U_n) est divergente.

Théorème 2.9 *(Théorème d'encadrement)*

Soient (U_n) , (V_n) *et* (W_n) *trois suites réelles telles que :*

$$U_n \leq W_n \leq V_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si : (U_n) *et* (V_n) *convergent vers la même limite* l*, c'est à dire :*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l.$$

Alors on a : la suite (W_n) *converge également vers la même limite* l*.*

Exemple 2.10 *Soient*

$$U_n = 3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*. \qquad V_n = 3 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

$$W_n = 3 + \frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\underbrace{\left(3 - \frac{1}{n}\right)}_{U_n} \leq \underbrace{\left(3 + \frac{\sin n}{n}\right)}_{W_n} \leq \underbrace{\left(3 + \frac{1}{n}\right)}_{V_n}$$

De plus, on a : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = 3$*, donc* $\lim_{n\to+\infty} W_n = 3$*.*

Proposition 2.1 *Toute suite* (U_n) *convergente possède la propriété suivante :*

$\forall \varepsilon > 0$*, il existe un entier* n_0 *tel que pour tout entiers* p *et* q *supérieurs à* n_0*, on ait :* $|U_p - U_q| < \varepsilon$*.*

2.4 Suites adjacentes

Définition 2.5 *Soient* (U_n) *et* (V_n) *deux suites réelles.*

On dit que (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes si et seulement si :*

1) La suite (U_n) *est croissante,*

2) La suite (V_n) *est décroissante,*

3) $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$*.*

Exemple 2.11 *Soient*

$$U_n = 2 - \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N}. \qquad V_n = 2 + \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \left(2 - \frac{1}{2+n}\right) - \left(2 - \frac{1}{1+n}\right) = -\frac{1}{2+n} + \frac{1}{1+n} \\ &= \frac{1}{(2+n)(1+n)} > 0, \end{aligned}$$

donc, la suite (U_n) *est croissante, et on a :*

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \left(2 + \frac{1}{2+n}\right) - \left(2 + \frac{1}{1+n}\right) = \frac{1}{2+n} - \frac{1}{1+n} \\ &= \frac{-1}{(2+n)(n+1)} < 0, \end{aligned}$$

donc, la suite (V_n) *est décroissante.*
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(2 - \frac{1}{1+n}\right) - \left(2 + \frac{1}{1+n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-2}{1+n}\right) = 0.$$

Alors, (U_n) *et* (V_n) *sont deux suites adjacentes.*

Théorème 2.12 *Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite* $l \in \mathbb{R}$, *qui vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_{n+1} \leq V_{n+1} \leq V_n.$$

2.5 Suites extraites (Sous-suites)

Définition 2.6 *Soient* (U_n) *une suite réelle et* (n_k) *une suite strictement croissante d'entiers naturels.*

La suite (U_{n_k}) *est dite sous-suite (ou suite extraite) de la suite* (U_n).

Propriété

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite.

La réciproque est fausse c'est à dire : Une suite divergente peut admettre des sous-suites convergentes.

Exemple 2.13 *Soit (U_n) la suite réelle suivante :*

$$U_n = (-1)^n + \frac{1}{2+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prenons :

$$\begin{array}{lcl} V_{2k} & = & (-1)^{2k} + \dfrac{1}{2+2k} = 1 + \dfrac{1}{2+2k}, \\ et & & \\ W_{2k+1} & = & (-1)^{2k+1} + \dfrac{1}{3+2k} = -1 + \dfrac{1}{3+2k}. \end{array}$$

Les suite (V_{2k}) et (W_{2k+1}) sont deux sous suites de la suite (U_n).

2.6 Suites de Cauchy

Définition 2.7 *On dit qu'une suite (U_n) est une suite de Cauchy si elle possède la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : (p, q > n_0 \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon).$$

Théorème 2.14 *Toute suite réelle de Cauchy est convergente.*

Théorème 2.15 *Pour qu'une suite des nombres réels converge dans $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle soit une suite de Cauchy.*

Théorème 2.16 *(Théorème de Bolzano-Weierstrass) :*

Toute suite bornée des nombres réels admet une sous-suite convergente.

2.7 Suites particulières

2.7.1 Suites récurrentes

Définition 2.8 *Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.*

On dit que la suite (U_n) est une suite récurrente si (U_n) est définie par :
- La donnée de son terme initial $U_p \in D$.
- La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$.
Si : $f(D) \subset D$, on dit que f est bien définie.

Exemple 2.17 *Soient*

$$\begin{cases} U_0 & = & 1 \\ \\ U_{n+1} & = & \sqrt{2+U_n}, \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 & = & 0 \\ \\ V_{n+1} & = & 3+\frac{1}{2}(V_n)^2. \end{cases}$$

Définition 2.9 *(U_n) et (U_n) sont deux suites récurrentes.*

2.7.2 Monotonie des suites récurrentes

L'étude de la monotonie de la suite récurrente revient à celle de la fonction f. On vérifie aisément par récurrence, en utilisant :

$$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1}).$$

- Si f est croissante, (U_n) est monotone, de plus :

$$\text{si} \quad f(U_1) - U_1 \geq 0 \quad (U_n) \text{ est croissante}$$

$$\text{si} \quad f(U_1) - U_1 \leq 0 \quad (U_n) \text{ est décroissante}$$

- Si f est décroissante, $U_{n+1} - U_n$ est alternativement positif et négatif.

Posons : $g = f \circ f$, la fonction g est croissante, les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) définies par :

$$\begin{cases} U_{2n+2} & = f(f(U_{2n})) = g(U_{2n}) \\ \\ U_2 & = f(U_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_{2n+1} & = f(f(U_{2n-1})) = g(U_{2n-1}) \\ \\ U_1 & \text{est donné,} \end{cases}$$

sont donc toutes les deux monotones et variaient en sens inverse puisque :

$$\begin{array}{lcl} g(U_1) - U_1 & = & f(f(U_1)) - U_1 \\ \text{et} & & \\ g(f(U_1)) - f(U_1) & = & f(f(f(U_1))) - f(U_1) \end{array}$$

ont des signes opposés.

Convergences des suites récurrentes

Si f monotone et continue sur D, si la suite (U_n) converge vers $l \in D$, cette limite vérifiée : $l = f(l)$.

2.7.3 Suites arithmétiques

Définition 2.10 *Une suite (U_n) est une suite arithmétique, s'il existe un nombre r tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = U_n + r.$$

Le nombre r est appelé raison de la suite (U_n).
(Dans la pratique on calcule $U_{n+1} - U_n$)

Exemple 2.18 *Soient*

$$U_n = 7n + 1, \ n \in \mathbb{N}. \qquad V_n = 5 - 2n, \ n \in \mathbb{N}.$$

$$W_n = n^2 + 3, \ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$U_{n+1} - U_n = (7(n+1) + 1) - (7n + 1) = 7,$$

donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 7$.
Et

$$V_{n+1} - V_n = (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) = -2,$$

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.
Et

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \left((n+1)^2 + 3\right) - (n^2 + 3) \\ &= 2n + 1 \text{ (quantité variable)}, \end{aligned}$$

donc la suite (W_n) n'est pas une suite arithmétique.

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p, pour tout $n \geq p$ on a :

$$U_n = U_p + (n - p)\, r$$

donc,

si le premier terme est U_0, on aura : $U_n = U_0 + nr$,

si le premier terme est U_1, on aura : $U_n = U_1 + (n - 1)\, r$.

Monotonie des suites arithmétiques

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p, donc on a :

$$\text{si } r > 0, \quad \text{alors la suite } (U_n) \text{ est croissante.}$$

$$\text{si } r < 0, \quad \text{alors la suite } (U_n) \text{ est décroissante.}$$

$$\text{si } r = 0, \quad \text{alors la suite } (U_n) \text{ est stationnaire (constante).}$$

Limites des suites arithmétiques

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p, donc on a :

Si $r > 0$ on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_p + (n-p)\,r) = +\infty$, d'où la suite (U_n) est divergente.

Si $r < 0$ on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_p + (n-p)\,r) = -\infty$, d'où la suite (U_n) est divergente.

Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soient (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_1 et

$$S = U_1 + U_2 + \ldots.. + U_n = \frac{n}{2}\,(U_1 + U_n)\,.$$

En général,

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme+dernier terme}}{2}.$$

Exemple 2.19

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

2.7.4 Suites géométriques

Définition 2.11 *Une suite (U_n) est une suite géométrique, s'il existe un nombre q tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = q.U_n.$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemple 2.20 *Soit*

$$U_n = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}U_n,$$

donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p, pour tout $n \geq p$ on a :

$$U_n = U_p q^{n-p}$$

donc,

si le premier terme est U_0, on aura : $U_n = U_0 q^n$,

si le premier terme est U_1, on aura : $U_n = U_1 q^{n-1}$.

Monotonie des suites géométriques

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 . Pour étudier la monotonie (U_n) il suffit d'étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$, on a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= U_0 q^{n+1} - U_0 q^n \\ &= U_0 q^n (q-1). \end{aligned}$$

Si $U_0 q^n (q-1) > 0$, alors la suite (U_n) est croissante.

Si $U_0 q^n (q-1) < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.

Si $U_0 q^n (q-1) = 0$, alors la suite (U_n) est stationnaire (constante).

Limites des suites géométriques

Soit (U_n) une suite géometrique de raison q et de premier terme U_0, donc on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n)$.

Si $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n) = 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$),
d'où la suite (U_n) est convergente.

Si $q = 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n) = U_0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$), d'où la suite (U_n) est constante.

Si $q > 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n) = \pm\infty$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$),
d'où la suite (U_n) est divergente.

Si $q \leq -1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n)$ n'existe pas, d'où la suite (U_n) est divergente.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique

Soient (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1 et

$$S = U_1 + U_2 + ... + U_1 = U_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

En général,

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}.$$

Exemple 2.21

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \quad = \quad \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2.8 Exercices

Exercise 2.22 *On considère la suite (U_n), définie par*

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ \\ U_{n+1} = \dfrac{1 + 3U_n}{3 + U_n}, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.

2) Montrer que (U_n) *est décroissante. En déduire que la suite* (U_n) *converge vers un réel* λ.

3) Déterminer limite λ.

Solution.

1) Montrons que : $P(n) : [\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1]$.

On utilise le raisonnement par récurrence :

- Pour $n = 0$, *on a :* $U_0 = 2 > 1$, *donc* $P(0)$ *est vraie.*

- On démontre que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}$ *fixé, c'est à dire :*

$$U_n > 1, \text{ (l'hypothèse de la récurrence),}$$

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire :* $U_{n+1} > 1$.

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1+3U_n}{3+U_n} = \frac{(3+U_n)+2(U_n-1)}{3+U_n} \\ &= 1 + \frac{2\overbrace{(U_n-1)}^{(+)}}{3+U_n} > 1 \\ &\quad \textit{car, } (U_n - 1) \textit{ est positif d'après hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.

2) Montrons que (U_n) *est décroissante.*

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1+3U_n}{3+U_n} - U_n \\ &= \frac{(1+3U_n)-(3+U_n)U_n}{3+U_n} = \frac{1-U_n^2}{3+U_n} \\ &= \frac{(1+U_n)\overbrace{(1-U_n)}^{(-)}}{3+U_n} < 0 \qquad (\textit{car, } U_n > 1). \end{aligned}$$

Donc, la suite (U_n) *est décroissante.*

Déduisons que la suite (U_n) *converge vers un réel* λ.

On a : La suite (U_n) *est décroissante est minorée par* 1*, donc la suite* (U_n) *converge vers un réel* λ.

3) Déterminons λ *la limite de la suite* (U_n) *:*

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lambda.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+3U_n}{3+U_n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \frac{1+3\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right)}{3+\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1+3\lambda}{3+\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ ou \\ \lambda = -1 \text{ rejeté car : } U_n > 1. \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1.$

Exercise 2.23 *Soient* (U_n) *et* (V_n) $n \in \mathbb{N}$ *deux suite définies par :*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad et \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{k!}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 3.$

2) Montrer que la suite (U_n) *est croissante. Déduire que* (U_n) *est convergente.*

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 3U_n + 2U_{n-1}$*. Puis déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 5 \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Solution.

1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 3.$

On a : $U_n > 0$*, car* U_n *est une somme de termes positifs.*

Montrons que : $U_n < 3$.

Remarquons :

$$\frac{1}{2!} \le \frac{1}{2^1}, \qquad \frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} \le \frac{1}{2^2}, \qquad \frac{1}{4!} = \frac{1}{4.3!} \le \frac{1}{2^3}, \quad \cdots \quad \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots\ldots + \frac{1}{n!} \\
&\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{n \text{ termes d'une suite géométrique}} \\
&\leq 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\
&\leq 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 3, \text{ donc, } U_n < 3.
\end{aligned}$$

Alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 3.$

2) Montrons que la suite (U_n) *est croissante.*

On a :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

d'où la suite (U_n) *est croissante.*

Déduisons que (U_n) *est convergente.*

On a : La suite (U_n) *est croissante est majorée par* 3, *donc la suite* (U_n) *est convergente.*

3) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 3U_n + 2U_{n-1}.$

On a :

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 2\left(\frac{0}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} \ldots\ldots + \frac{n}{n!}\right) + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 2\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \underbrace{2\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)}_{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 3U_n + 2U_{n-1}
\end{aligned}$$

Déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 5 \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
On a :

$$\begin{aligned}
V_n = 3U_n + 2U_{n-1} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} V_n = 3\lim_{n\to+\infty} U_n + 2\lim_{n\to+\infty} U_{n-1} \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} V_n = 5\lim_{n\to+\infty} U_n \ , \quad (car : \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n-1})
\end{aligned}$$

Remarque. *Quand* $n \to +\infty$, *on aura :* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n-1}$.

Exercise 2.24 *On considère les suites* (U_n) *et* (V_n), $n \in \mathbb{N}$ *définies par :*

$$\begin{cases} U_0 = 2, \ U_1 = \dfrac{4}{9}, \\ \\ U_{n+2} = \dfrac{1}{27}(12U_{n+1} - U_n) \end{cases}$$

et $V_n = U_n - \dfrac{1}{3^n}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \dfrac{1}{9}U_n + \dfrac{2}{3^{n+2}}$.

2) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique puis exprimer U_n en fonction n.

3) Exprimer en fonction de n la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

Solution.

1) Montrons que : $P(n) : \left[\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{1}{9}U_n + \frac{2}{3^{n+2}}\right]$.

On utilise raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, *on a :*

$$U_1 = \frac{1}{9}U_0 - \frac{2}{3^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{9}.2 + \frac{2}{9}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

donc $P(0)$ *est vraie.*

- On démontre que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie pour* $n \geq 0$, *c'est à dire :*

$$U_{n+1} = \frac{1}{9}U_n + \frac{2}{3^{n+2}} \text{ (hypothèse de la récurrence)}$$

S'écrit aussi : $U_n = 9U_{n+1} - \frac{2}{3^n}$.

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire :*

$$U_{n+2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}U_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= \frac{1}{27}(12U_{n+1} - U_n) = \frac{4}{9}U_{n+1} - \frac{1}{27}U_n \\ &= \frac{4}{9}U_{n+1} - \frac{1}{27}U_n = \frac{4}{9}U_{n+1} - \frac{1}{27}\underbrace{\left(9U_{n+1} - \frac{2}{3^n}\right)}_{d'\text{après } l'\text{hypothèse}} \\ &= \frac{4}{9}U_{n+1} - \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}} = \frac{1}{9}U_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{1}{9}U_n + \frac{2}{3^{n+2}}.$$

2) Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} = \left(\frac{1}{9}U_n + \frac{2}{3^{n+2}}\right) - \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{9}U_n - \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\left(U_n - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{9}V_n, \end{aligned}$$

on a : $V_{n+1} = \frac{1}{9}V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$ et de premier terme :

$$V_0 = U_0 - \frac{1}{3^0} = 2 - 1 = 1$$

Exprimons U_n en fonction n.

On a : (V_n) est une suite géométrique donc,

$$\begin{aligned} V_n = V_0 q^n \quad &\Rightarrow \quad V_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n, n \in \mathbb{N}. \\ &\Rightarrow \quad V_n = \frac{1}{3^{2n}}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} V_n = U_n - \frac{1}{3^n} \quad &\Rightarrow \quad U_n = V_n + \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}. \\ &\Rightarrow \quad U_n = \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}. \\ &\Rightarrow \quad U_n = \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}. \\ &\Rightarrow \quad U_n = \frac{3^n + 1}{3^{2n}}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3) Exprimons en fonction de n la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n}\left(V_k + \frac{1}{3^k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} V_k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} = V_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{9}\right)} + \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{\frac{8}{9}} + \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\\
&= \frac{21}{8} - \frac{1}{8.3^{2n}} - \frac{1}{2.3^n} = \frac{7.3^{2n+1} - 4.3^n - 1}{8.3^{2n}}
\end{aligned}$$

Remarque.

$\sum_{k=0}^{n} V_k$: *est une somme de* $(n+1)$ *termes d'une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{9}$ *et premier terme* 1.

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$: *est une somme de* $(n+1)$ *termes d'une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{3}$ *et premier terme* 1.

Exercise 2.25 *1) Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

2) On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = 2U_n + n + 1. \end{cases}$$

a) Calculer U_1 *et* U_2.

b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 2^n\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right).$$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 3.2^n - n - 2.$

Solution.

1) Montrons par récurrence que :

$$P(n) : \left[\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\right].$$

- Pour $n = 1$*, on a :*

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad et \qquad 2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$$

donc $P(1)$ *est vraie.*

- On démontre que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé, c'est à dire :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \text{ (hypothèse de la récurrence).}$$

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire :*

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \stackrel{?}{=} 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}}_{d'après\ l'hypothèse} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

2) On considère la suite $(U_n)\,, n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ \\ U_{n+1} = 2U_n + n + 1. \end{cases}$$

a) Calculons U_1 et U_2.

On a :

$$U_1 = 2U_0 + 0 + 1 = 3 \qquad et \quad U_2 = 2U_1 + 1 + 1 = 8$$

b) Montrons par récurrence que :

$$P(n) : \left[\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)\right].$$

- Pour $n = 1$, on a :

$$U_1 \;=\; 2^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{1} \tfrac{k}{2^k}\right) = 2^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{1} \tfrac{k}{2^k}\right) = 2^1 \left(1 + \tfrac{1}{2^1}\right) = 3$$

donc $P(1)$ est vraie.

- On démontre que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

On suppose que $P(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, c'est à dire :

$$U_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) \text{ (hypothèse de la récurrence).}$$

et on démontre que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire :

$$U_{n+1} \stackrel{?}{=} 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2U_n + n + 1 = 2\Big(\underbrace{U_n}_{d'après\ l'hypothèse}\Big) + n + 1 \\
&= 2\left(2^n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right)\right) + n + 1 = 2^{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right) + n + 1 \\
&= 2^{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) + n + 1 \\
&= 2^{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k}\right) + 2^{n+1}\left(-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) + n + 1 = 2^{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k}\right).
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 2^n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right).$$

c) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 3.2^n - n - 2.$

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\begin{aligned}
U_n &= 2^n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right) = 2^n\left(1+2-\frac{n+2}{2^n}\right) \\
&= 3.2^n - 2^n\frac{n+2}{2^n} = 3.2^n - n - 2
\end{aligned}$$

Exercise 2.26 *On considère la suite* (U_n), $n \in \mathbb{N}$ *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{3}{U_n}\right). \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}$.

2) Montrer que (U_n) *est décroissante.*

3) Déduire que la suite (U_n) *converge vers un réel.*

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

5) Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ensemble suivant :

$$E = \{U_n \ , \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Solution.

1) Montrons que : $P(n) : \left[\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}\right]$.

On utilise raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, *on a :* $U_0 = 2 > \sqrt{3}$, *donc* $P(0)$ *est vraie.*

- On démontre que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}$ *fixé, c'est à dire :*

$$U_n > \sqrt{3}, \text{ (hypothèse de la récurrence).}$$

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire :* $U_{n+1} > \sqrt{3}$.

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right) = \frac{U_n^2+3}{2U_n} = \frac{\left(U_n - \sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}U_n}{2U_n} \\ &> \frac{2\sqrt{3}U_n}{2U_n}, \text{ car } U_n > \sqrt{3} \\ &> \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}$.

2) Montrons que (U_n) *est décroissante.*

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right) - U_n = \frac{3 - U_n^2}{2U_n} = \frac{\left(\sqrt{3}+U_n\right)\left(\sqrt{3}-U_n\right)}{2U_n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{3}+U_n\right)\overbrace{\left(\sqrt{3}-U_n\right)}^{(-)}}{2U_n}, \ \left(\left(\sqrt{3}-U_n\right) < 0, car : \ U_n > \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Alors, la suite (U_n) *est décroissante.*

3) Déduisons que la suite (U_n) converge vers un réel.

On a : La suite (U_n) est décroissante est minorée par $\sqrt{3}$, donc la suite (U_n) converge vers un réel λ.

4) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} U_n + \frac{3}{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{3}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda^2 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt{3} \\ ou \\ \lambda = -\sqrt{3} \text{ rejeté car : } U_n > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3}$.

5) Déterminons (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ensemble suivant :

$$E = \{U_n \ , \quad n \in \mathbb{N}\} .$$

On a :

$$E = \{U_n \ , \quad n \in \mathbb{N}\} = \{U_0 \ , U_1 \ , U_2 \ , ... \ , U_n \ \} .$$

La suite (U_n) est décroissante est converge vers $\sqrt{3}$, donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \underbrace{2}_{U_0} \geq U_n > \sqrt{3}.$$

Donc,

$$\textit{Les majorants de } E \textit{ sont : } [2, +\infty[$$

$$\textit{Les minorants de } E \textit{ sont : }]-\infty, \sqrt{3}]$$

$$\textit{La borne supérieure de } E \textit{ est : } \sup E = 2$$

$$\textit{La borne inférieure de } E \textit{ est : } \inf E = \sqrt{3}$$

$$\textit{Le plus grand élément de } E \textit{ est : } \max E = 2$$

Le plus petit élément de E : n'existe pas.

Exercise 2.27 *Soient (U_n) et (V_n), $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ deux suites définies par :*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad V_n = U_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Solution.

Montrons que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Cela revient à montrer que l'une des suites est croissante et l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$.

***La monotonie de** (U_n).*

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0, \end{aligned}$$

donc la suite (U_n) est croissante.

***La monotonie de** (V_n).*

On a :

$$\begin{aligned}
V_{n+1} - V_n &= \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n!}\right) \\
&= (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\
&= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1-n}{n+1}\right) < 0, \ \textit{car} : n \in \mathbb{N}^* - \{1\},
\end{aligned}$$

donc la suite (V_n) est décroissante.
On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) &= \lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(U_n + \frac{1}{n!} - U_n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Alors, les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercise 2.28 *Soit la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{cccc}
f & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longrightarrow & \dfrac{2x+1}{x+1}
\end{array}$$

On considère les deux suites réelles (U_n) et (V_n), $n \in \mathbb{N}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = f(U_n), \ \textit{pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} V_0 = 2, \\ V_{n+1} = f(V_n), \ \textit{pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1) Etudier la monotonie des deux suites (U_n) et (V_n).

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $|U_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|U_n - V_n|$.

3) Montrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $|U_n - V_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4) En déduire que les deux suites (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes.*

5) Calculer la limite de chacune des suites (U_n) *et* (V_n).

Solution.

1) Etudions la monotonie des deux suites (U_n) *et* (V_n).

On a : $D_f = [0, +\infty[$ *et* $f(D_f) \subset D_f$.

En effet :

$$\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

Donc, la fonction f *est strictement croissante sur* D_f, *d'où les deux suites* (U_n) *et* (V_n) *sont monotones.*

- La suite (U_n) *est croissante ssi :* $U_1 - U_0 > 0$ *et* (U_n) *est décroissante ssi :* $U_1 - U_0 < 0$ *et de même pour la monotonie de la suite* (V_n).

On a :

$$\begin{aligned} U_0 = 1 \quad &\Rightarrow \quad U_1 = f(U_0) \\ &\Rightarrow \quad U_1 = \frac{2U_0 + 1}{U_0 + 1} \\ &\Rightarrow \quad U_1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

d'où, $U_1 - U_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$, *donc la suite* (U_n) *est croissante.*

On a :

$$\begin{aligned} V_0 = 2 \quad &\Rightarrow \quad V_1 = f(V_0) \\ &\Rightarrow \quad V_1 = \frac{2V_0 + 1}{V_0 + 1} \\ &\Rightarrow \quad U_1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

d'où, $V_1 - V_0 = \frac{5}{3} - 2 = \frac{-1}{3} < 0$, *donc la suite* (V_n) *est décroissante.*

2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $|U_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|U_n - V_n|$.

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1}-V_{n+1} &= f(U_n)-f(V_n)=\frac{2U_n+1}{U_n+1}-\frac{2V_n+1}{V_n+1} \\ &= \frac{(2U_n+1)(V_n+1)-(2V_n+1)(U_n+1)}{(U_n+1)(V_n+1)} \\ &= \frac{U_n-V_n}{(U_n+1)(V_n+1)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |U_{n+1}-V_{n+1}| &= \frac{|U_n-V_n|}{(U_n+1)(V_n+1)} \text{ car : } U_n>0 \text{ et } V_n>0 \\ &\le \frac{|U_n-V_n|}{U_n+1} \text{ car : } V_n>0, \text{ donc } \frac{1}{V_n+1}<1 \\ &\le \frac{1}{2}|U_n-V_n|, \end{aligned}$$

car : (U_n) *est croissante et* $U_0=1$ *d'où* $U_n>1$ *donc :* $\dfrac{1}{U_n+1}\le\dfrac{1}{2}$
Alors,

$$\forall n\in\mathbb{N} : |U_{n+1}-V_{n+1}|\le\frac{1}{2}|U_n-V_n|.$$

3) Montrons par récurrence que : $P(n) : \left[\forall n\in\mathbb{N} : |U_n-V_n|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.
- Pour $n=0$, *on a :*

$$\begin{aligned} |U_0-V_0|\le\left(\frac{1}{2}\right)^0 &\Rightarrow |1-2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &\Rightarrow 1\le 1 \end{aligned}$$

donc $P(0)$ *est vraie.*

- On démontre que : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n\in\mathbb{N}$ *fixé, c'est à dire :*

$$|U_n-V_n|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ (hypothèse de la récurrence).}$$

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire :* $|U_{n+1}-V_{n+1}|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a :

$$\begin{aligned}
|U_{n+1}-V_{n+1}| &\leq \frac{1}{2}|U_n-V_n| \quad \textit{(d'après la réponse 2)}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \textit{(d'après l'hypothèse de la récurrence)}\\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N} : |U_n - V_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4) Déduisons que les deux suites (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes.*

On a :

$$0 \leq |U_n - V_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où :

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{n\to+\infty}|U_n - V_n| = 0$ *et de plus, la suite* (U_n) *est croissante et la suite* (V_n) *est décroissante, alors les deux* (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes.*

5) Calculons la limite de chacune des suites (U_n) *et* (V_n).

On pose : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lambda$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \frac{2\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right)+1}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right)+1} \quad &\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\\
&\Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0
\end{aligned}$$

On a : $\triangle = 5 > 0$, *donc,*

$$\begin{cases}
\lambda = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ \textit{rejeté car } U_n > 0 \textit{ et } V_n > 0\\[2ex]
\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0.
\end{cases}$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercise 2.29 *Soit la suite* (U_n), $n \in \mathbb{N}^*$ *définie par*

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On considère deux suites extraites (V_n) *et* (W_n), $n \in \mathbb{N}$ *définies par :* $V_n = U_{2n}$ *et* $W_n = U_{2n+1}$

1) Montrer que les deux suites (V_n) *et* (W_n) *sont adjacentes.*

2) En déduire que la suite (U_n) *converge.*

Solution.

1) Montrons que les deux suites (V_n) *et* (W_n) *sont adjacentes.*

La monotonie de la suite (V_n)

On a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{2(n+1)} - U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} \right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{-1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

On a :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

donc la suite (V_n) *est croissante.*

La monotonie de la suite (W_n)

On a :

$$\begin{aligned}
W_{n+1}-W_n &= U_{2(n+1)+1}-U_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3}\right)-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3}=\frac{-1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\\
&= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}<0
\end{aligned}$$

On a : $W_{n+1}-W_n=\dfrac{-1}{(2n+3)(2n+2)}<0$, *donc la suite* (W_n) *est décroissante.*

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n-V_n)=?$
On a :

$$\begin{aligned}
W_n-V_n &= \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}(W_n-V_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)=0.$$

Alors, (V_n) *et* (W_n) *sont deux suites adjacentes.*

2) Déduisons que la suite (U_n) *converge.*

On a : (U_{2n}) *et* (U_{2n+1}) *sont deux suites extraites de la suite* (U_n) *de plus elle sont convergent vers la même limite* $\lambda=0$, *donc la suite* (U_n) *converge aussi vers la même limite* $\lambda=0$.

Chapitre 3

Fonctions réelles à une seule variable

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les fonctions réelles d'une variable réelle, c'est-à-dire les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou sous-ensemble de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$, ces fonctions modélisent souvent des phénomènes physiques, chimiques, mécaniques,..

3.2 Fonction réelle à une variable réelle

Définition 3.1 *On appelle fonction réelle à une variable, toute relation f qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f forment l'ensemble de définition (domaine de définition) de f, noté D_f . On écrit :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=y. \end{array} \quad ou \quad \begin{array}{rccc} f: & D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=y. \end{array}$$

L'ensemble des valeurs de f ou bien ensemble image de f est :

$$f(D_f)=\operatorname{Im} f=\{y\in\mathbb{R},\exists x\in D_f: f(x)=y\}$$

Définition 3.2 *On appelle graphe d'une fonction f, l'ensemble des points $M(x,y)$ où $x\in D_f$ et $y=f(x)$ et on écrit*

$$G_f=\{(x,y)/x\in D_f \quad et \quad y=f(x)\}.$$

3.2.1 Opérations sur les fonctions réelles

Définition 3.3 *Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g: D\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions.*

1) On dit que f est égale à g et on écrit : $f=g$ si et seulement si :

$$\forall x\in D: f(x)=g(x).$$

2) On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit : $f\leq g$ si et seulement si :

$$\forall x\in D: f(x)\leq g(x).$$

3) On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit : $f\geq g$ si et seulement si : $\forall x\in D: f(x)\geq g(x)$.

Définition 3.4 *4) La somme :* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,,\ \forall x \in D.$

5) Le produit : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\,,\ \forall x \in D.$

6) Le rapport $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D$ *avec* $g(x) \neq 0.$

3.2.2 Composition de fonctions

Soient E, F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(D) \subset F$.

On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur D par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,,\ \forall x \in D.$$

Exemple 3.1 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x. \end{array} \quad ou \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+3}{1+x^2}. \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(e^x) \\ &= \frac{(e^x)+3}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x+3}{1+e^{2x}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x+3}{1+e^{2x}}. \end{array}$$

Remarque. Il est clair que $f \circ g \neq g \circ f$.

3.2.3 Parité d'une fonction

Fonction paire

Définition 3.5 *Soit la fonction* f

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f *est paire sur* D *si et seulement si :*

$$\forall x \in D, (-x) \in D : f(-x) = f(x).$$

Remarque *Si* $x \in D \Longrightarrow -x \in D, \forall x \in D$, *l'ensemble* D *est dit symétrique par rapport à l'origine.*

Exemple 3.2 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^4-3}{x^2+1}. \end{array}$$

Cette fonction est paire car :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: \quad f(-x) &= \frac{(-x)^4-3}{(-x)^2+1} \\ &= \frac{x^4-3}{x^2+1} = f(x). \end{aligned}$$

Fonction impaire

Définition 3.6 *Soit la fonction* f

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f *est impaire sur* D *si et seulement si :*

$$\forall x \in D, (-x) \in D: f(-x) = -f(x).$$

Exemple 3.3 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Cette fonction est impaire car :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: \quad f(-x) &= \frac{e^{-x}-e^x}{2} \\ &= -\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

3.2.4 Fonctions périodiques

Définition 3.7 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que f est une fonction période si et seulement si

$$\exists T > 0, \forall x \in D: \; f(x+T) = f(x),$$

le plus petit nombre positif T s'appelle la période de la fonction f.

Exemple 3.4 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont $2\pi-$périodique en effet :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}: \; \sin(x+2\pi) = \sin x, \\ \textit{et} \\ \forall x \in \mathbb{R}: \; \cos(x+2\pi) = \cos x. \end{array}$$

3.2.5 Monotonie d'une fonction

Définition 3.8 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

1) On dit que f est croissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

2) On dit que f est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

3) On dit que f est décroissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

4) On dit que f est strictement décroissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

3.2.6 Fonctions bornées

Définition 3.9 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

1) On dit que f est majorée sur D si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in D.$$

2) On dit que f est minorée sur D si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in D.$$

3) On dit que f est bornée sur D si f à la fois majorée et minorée, c'est à dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in D.$$

Ou encore

$$\exists k > 0 : |f(x)| \leq k,\ \forall x \in D.$$

Exemple 3.5 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont des fonctions bornées, en effet :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \\ \textit{et} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1. \end{array}$$

3.3 Limite d'une fonction

3.3.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 3.10 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0, le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 et on écrit $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

Limite à droite, limite à gauche

Définition 3.11 *1) On dit que $l \in \mathbb{R}$ est limite de f à droite de x_0 si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \ \ (x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

On écrit : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l$

2) On dit que $l \in \mathbb{R}$ est limite de f à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

On écrit : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$

Théorème 3.6 *On a :*

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x).$$

3.3.2 Limite à l'infini

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, (x < -A \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon))$$

et

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, (x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

3.3.3 Limite infinie

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\right) \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A),$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right) \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A),$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right) \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x, (x > B \Longrightarrow f(x) > A).$$

Théorème 3.7 *Si une fonction f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.*

Théorème 3.8 *(Théorème d'encadrement)*

Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telles que :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x\to x_0} g(x) = l.$$

Exemple 3.9 *Etudier la limite de $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ en 0.*

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad -1 \leq \sin \tfrac{1}{x} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} (-x^2) \leq \lim_{x\to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) \leq \lim_{x\to 0} (x^2) \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Opérations sur les limites :

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telles que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$.

On a :

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + l'$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)(x) = l.l'$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda.f)(x) = \lambda.l, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ 4) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{l'}$ $(g(x) \neq 0$ et $l' \neq 0)$

Exercise 3.10 *Déterminer les limites suivantes :*

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$; *b)* $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Solution

Déterminons les limites :

a) On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3}-\sqrt{x} &= \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0.$$

b) On a

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1-\cos x.$$

Donc

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi}(1-\cos x) = 2.$$

b) On a

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1} = (\ln)'(x)\big|_{x=1} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1.$$

3.4 Exercices

Exercise 3.11 *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = \sqrt{1-x}.$

2) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-5x+6}.$

3) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}.$

4) $f(x) = \ln(\sin x).$

5) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}-2\right).$

6) $f_\lambda(x) = \sqrt{x^2-\lambda^2},\ \lambda\in\mathbb{R}.$

Solution.

1) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } 1-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1.$$

Alors, $D_f = \left]-\infty, 1\right]$.

2) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-5x+6}.$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } x^2-5x+6 \neq 0$$

$$\text{on } a : x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=3$$

$$\text{donc, } x^2-5x+6 \neq 0 \text{ si } x \neq 2 \text{ et } x \neq 3$$

Alors, donc, $D_f = \mathbb{R} - \{2,3\}$.

3) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } x^2+x+1 \geq 0$$

On a: $x^2+x+1=0$ *et* $\triangle = -3 < 0$, *donc,* $x^2+x+1=0$ *n'admet pas de racine dans* $\mathbb{R}$, *d'où* $x^2+x+1>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors, $D_f = \mathbb{R}$.

4) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

$$\begin{aligned} f \text{ est définie si et seulement si : } & \sin x > 0 \\ & \Rightarrow x \in \left]2k\pi, \pi+2k\pi\right[, \; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Alors, $D_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]2k\pi, \pi+2k\pi\right[\right)$.

5) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}-2\right)$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \left\{\begin{array}{c} 1-x \geq 0 \\ et \\ \sqrt{1-x}-2>0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \leq 1 \\ et \\ \sqrt{1-x}>2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \leq 1 \\ et \\ 1-x>4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \leq 1 \\ et \\ x<-3 \end{array}\right.$$

donc, $x \in \left]-\infty, -3\right[$.

Alors, $D_f =]-\infty, -3[$.

6) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f_\lambda(x) = \sqrt{x^2 - \lambda^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

f_λ *est définie si et seulement si :* $x^2 - \lambda^2 \geq 0$

On a : $x^2 - \lambda^2 = 0$ *si* $x = \lambda$ *ou* $x = -\lambda$

Si : $\lambda \geq 0$: *donc,* $D_f =]-\infty, -\lambda] \cup [\lambda, +\infty[$

Si : $\lambda \leq 0$: *donc,* $D_f =]-\infty, \lambda] \cup [-\lambda, +\infty[$

On peut écrire aussi : $D_f =]-\infty, -|\lambda|] \cup [|\lambda|, +\infty[$

Exercise 3.12 *Soit* f *la fonction définie comme suit :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos x}{1+x^2} \end{array} \qquad et \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1) Montrer que la fonction f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

2) Étudier la parité des fonctions f *et* h.

Solution.

1) Montrons que la fonction f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos x}{1+x^2} \end{array}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + x^2 \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 1 + x^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \ \ et \ \ -1 \leq \frac{-1}{1+x^2} < 0 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}:-1\leq\cos x\leq 1 \quad&\Rightarrow\quad \frac{-1}{1+x^2}\leq\frac{\cos x}{1+x^2}\leq\frac{1}{1+x^2}\ \textit{(car :}\frac{1}{1+x^2}>0\textit{)}\\ &\Rightarrow\quad -1\leq\frac{-1}{1+x^2}\leq\frac{\cos x}{1+x^2}\leq\frac{1}{1+x^2}\leq 1\\ &\Rightarrow\quad -1\leq\frac{\cos x}{1+x^2}\leq 1,\end{aligned}$$

donc, $\forall x\in\mathbb{R}:-1\leq f(x)\leq 1$.

Alors, la fonction f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

2) Étudions la parité des fonctions f *et* h.

Parité de la fonction f.

On a : $D_f=\mathbb{R}$, *donc* $\forall x\in\mathbb{R}$, $(-x)\in\mathbb{R}$ *et*

$$f(-x)\ =\ \frac{\cos(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{\cos x}{1+x^2}=f(x)\quad \textit{(car } \cos(-x)=\cos x\textit{)}.$$

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},(-x)\in\mathbb{R}:f(-x)=f(x),$$

donc la fonction f *est paire.*

Parité de la fonction h.

On a :

$$\begin{aligned}h:\ \mathbb{R}&\rightarrow\ \mathbb{R}\\ x&\mapsto\ \frac{e^x-e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

$D_h=\mathbb{R}$, *donc* $\forall x\in\mathbb{R}$, $(-x)\in\mathbb{R}$ *et*

$$h(-x)\ =\ \frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=-h(x)$$

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},(-x)\in\mathbb{R}:h(-x)=-h(x),$$

donc la fonction h *est impaire.*

Exercise 3.13 *Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point ce qui suit :*

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

Solution.

Montrons en utilisant la définition de la limite que : $\lim_{x\to 3}(2x-4)=2$

On a :

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x)=l\right] \Leftrightarrow [\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall x,(0<|x-x_0|<\eta\Longrightarrow|f(x)-l|<\epsilon)]$$

donc,

$$\left[\lim_{x\to 3}(2x-4)=2\right] \Leftrightarrow [\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall x,(0<|x-3|<\eta\Longrightarrow|(2x-4)-2|<\epsilon)]$$

Soit $\epsilon>0,\exists?\eta>0,\forall x:0<|x-3|<\eta\Longrightarrow|(2x-4)-2|<\epsilon$

On a :

$$\begin{aligned}|(2x-4)-2|<\epsilon &\Rightarrow |2x-6|<\epsilon\\ &\Rightarrow |2(x-3)|<\epsilon\\ &\Rightarrow 2|x-3|<\epsilon\\ &\Rightarrow |x-3|<\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre : $\eta=\dfrac{\epsilon}{2}$.

Montrons en utilisant la définition de la limite que : $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

On a :

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x)=l\right] \Leftrightarrow [\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall x,(0<|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-l|<\epsilon)]$$

donc,

$$\begin{gathered}\left[\lim_{x\to 3}(x^2+x+1)=3\right]\Leftrightarrow\\ [\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall x,(0<|x-1|<\eta\Longrightarrow|(x^2+x+1)-3|<\epsilon)]\end{gathered}$$

Soit $\epsilon>0,\exists?\eta>0,\forall x:0<|x-1|<\eta\Longrightarrow|(x^2+x+1)-3|<\epsilon$

On a :

$$\begin{aligned}|(x^2+x+1)-3|<\epsilon &\Rightarrow |x^2+x-2|<\epsilon\\ &\Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\epsilon\\ &\Rightarrow |x-1||x+2|<\epsilon\\ &\Rightarrow |x-1|<\frac{\epsilon}{|x+2|}\leq\frac{\epsilon}{2}\ \textit{(car : x il est au voisinage de 1)}\\ &\Rightarrow |x-1|<\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre : $\eta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Exercise 3.14 *Déterminer les limites suivantes :*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{xe^x}{x^2-4x+4}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^2-(1+a)x+a}{x^2-a^2}\right), a\in\mathbb{R}$

Solution.

Déterminons les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=?$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) &= \infty-\infty, \quad \textit{(forme indéterminée)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\right)=0
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}\right)=?$

On a :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}\right)=\frac{0}{0},\quad \textit{(forme indéterminée)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)(1-\cos x)(1+\cos x)}{(\sin x)(1+\cos x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)(1-\cos^2 x)}{(\sin x)(1+\cos x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)\sin^2 x}{(\sin x)(1+\cos x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)\sin x}{1+\cos x}\right)=\frac{(e^0-1)\sin 0}{1+\cos 0}=\frac{0}{2}=0$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}\right)=0.$$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)=?$

On a :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)=\frac{0}{0},\quad \textit{(forme indéterminée)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}\right)=(\ln x)'_{x=1}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}=1$$

Donc,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)=1.$$

4) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=?$

On a :

$$-1\le \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\le 1 \;\Rightarrow\; -\sqrt{x}\le\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\le\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}(-\sqrt{x})\le\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\le\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow\; 0\le\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\le 0.$$

Donc,

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

5) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right) =?$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right) &= \frac{0}{0}, \quad \textit{(forme indéterminée)} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\sin x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\sin x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\sin x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x(1+\cos x)}{\sin x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)\lim_{x\to 0}(1+\cos x) \\
&= \left(\frac{1}{1}\right)(1+\cos 0) = 2, \quad \left(\textit{car } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right) = 2.$$

6) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{xe^x}{x^2-4x+4}\right) =?$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{xe^x}{x^2-4x+4}\right) &= \frac{2e^2}{0} \quad ? \\
&= \lim_{x\to 2}\left(\frac{xe^x}{(x-2)^2}\right) = \frac{2e^2}{0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{xe^x}{x^2-4x+4}\right) = +\infty.$$

7) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}\right) =?$

On a :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}\right)=\frac{0}{0},\quad \textit{(forme indéterminée)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(x^2+3-4x^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(x+3-(2x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(-3x^2+3\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(-x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}\right)=\frac{0}{0},\quad \textit{(forme indéterminée)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3\left(x+1\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}{\sqrt{x^2+3}+2x}\right)=\left(\frac{6\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{4}+2}\right)=6$$

Donc,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}\right)=6.$$

8) $\lim_{x\to a}\left(\frac{x^2-(1+a)\,x+a}{x^2-a^2}\right),\, a\in\mathbb{R}$

Si $a\neq 0$, *on a :*

$$\textit{Si } a\neq 0,\quad \lim_{x\to a}\left(\frac{x^2-(1+a)\,x+a}{x^2-a^2}\right)=\frac{0}{0},\quad \textit{(forme indéterminée)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)\,(x-1)}{(x-a)\,(x+a)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{x-1}{x+a}\right)=\frac{a-1}{2a}$$

$$\textit{Si } a=0,\quad \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{x^2-x}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{x^2-x}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{x^2-x}{x^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

3.5 Continuité d'une fonction

3.5.1 Continuité d'une fonction en un point

Définition 3.12 *Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.*

On dit que f est continue au point x_0 de D si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ \ (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

On dit que f est continue sur D si elle est continue en chaque point x de D.

Remarque 3.1 *Si f n'est pas définie en x_0, elle ne peut être continue en x_0.*

3.5.2 Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 3.13 *Soit f une fonction définie en x_0 et à droite de x_0.*

On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

Définition 3.14 *Soit f une fonction définie en x_0 et à gauche de x_0.*

On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque f est continue en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque On dit f est discontinue en x_0 dans les cas suivants :

1) f n'est pas définie en x_0
2) La limite existe mais différente de $f(x_0)$,
(ou la limite à droite est différente de la limite à gauche).
3) La limite n'existe pas.

Proposition 3.1 *(Opérations sur les fonctions continues)*

Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors on a :

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha f + \beta g$ *est une fonction continue en* x_0.
2) $f.g$ *est une fonction continue en* x_0.
3) *Si* $g(x_0) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est une fonction continue en* x_0.
4) $|f|$ *est une fonction continue en* x_0.

Proposition 3.2 *(Continuité des fonctions composées)*

Soient $f : D \longrightarrow D'$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0.

3.5.3 Prolongement par continuité

Définition 3.15 *Soit f une fonction définie sur $D - \{x_0\}$.*

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est prolongeable par continuité et sa fonction prolongée est $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \ \ si\ x \in I - \{x_0\} \\ \\ l\ \ si\ x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 3.15 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x}. \end{array}$$

Domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^*$.

On a :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

donc, f est prolongeable par continuité en 0 est la fonction prolongée est :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \ \ si\ x \neq 0 \\ \\ 1\ \ si\ x = 0. \end{cases}$$

3.5.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.16 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *$f(a) . f(b) < 0$.*

Alors

$$\exists x_0 \in \left]a, b\right[: f(x_0) = 0.$$

De plus, si f est strictement monotone, alors le x_0 est unique.

Exemple 3.17 *Montrer que* $\ln x - \dfrac{1}{x} = 0$ *admet une unique solution sur* $[1, 2]\ ]1, 2[$.

On pose : $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $[1, 2]$.

On a : la fonction f est continue sur $]1, 2[$.

et $f(1) = \ln 1 - 1 = -1,\ f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = 0,19$.

Donc, f est continue sur $]1, 2[$ *et* $f(1) f(2) < 0$. *D'après le TVI,* $\exists x_0 \in]1, 2[:$ $f(x_0) = 0,$ *c'est à dire*

$$\exists x_0 \in]1, 2[: \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0.$$

De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$, *donc f est strictement croissante sur* $]1, 2[$, *d'où cette solution x_0 est unique.*

3.6 Dérivabilité d'une fonction

3.6.1 Nombre dérivé en un point

Définition 3.16 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et finie.*

Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

On écrit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 3.18 *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 5x + 3. \end{array}$$

Calculer la dérivée de f en un point x_0 de $\mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + 5x + 3) - (x_0^2 + 5x_0 + 3)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + 5(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0 + 5) = 2x_0 + 5. \end{aligned}$$

3.6.2 Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche

Définition 3.17 *On définit la dérivée à droite de f en x_0 par*

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

De même, on définit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Et

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Exemple 3.19 *Soit la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \geq 0 \\ \\ 1 - 2x \text{ si } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

on a $f(0) = 0 + 1$, f est-elle dérivable en 0 ? On a

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x + 1 - 1}{x} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x}{x} = 1,$$

et

$$f'_g(0) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{1 - 2x - 1}{x} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{-2x}{x} = 2.$$

Finalement, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

3.6.3 Fonction dérivée

Définition 3.18 *f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I et l'application*

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$.

Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse en général.

Exemple : $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0 car

$$f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_g(0).$$

3.6.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 3.3 *Soient f, g deux fonctions dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions suivantes*

$$(\lambda f),\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad f+g, \quad f.g, \quad \frac{f}{g}, \ (g(x_0) \neq 0)$$

sont dérivables en x_0. De plus on a :

1) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

2) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$.

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{g^2(x_0)}, \ (g(x_0) \neq 0)$.

3.6.5 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 3.4 *Soient $f : I \longrightarrow I'$ et $g : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) . f'(x_0) .$$

Exemple 3.20 *Soient les fonctions f et g définies par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \cos x. \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = \cos x^2, \end{array}$$

et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) . g'(f(x)) = -2x . \sin x^2.$$

3.6.6 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 3.5 *Si f est dérivable en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve. On a

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

Exemple 3.21 *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) = e^x, \end{array}$$

est bijective donc elle admet une application réciproque

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \ln x, \end{array}$$

avec

$$y = e^x \Longleftrightarrow \ln y = x.$$

On a

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = (\ln)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

3.7 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

3.7.1 Théorème de Rolle

Théorème 3.22 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

1. *f est continue sur $[a,b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$,*
3. *$f(a) = f(b)$. Alors,*

$$\exists c \in \,]a,b[\, : f'(c) = 0.$$

Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x.

3.7.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.23 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

1. *f est continue sur $[a,b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$. Alors,*

$$\exists c \in \,]a,b[\, : f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Preuve. Considérons la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a,b], \; g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

La fonction g est :

1. continue sur $[a,b]$ (resp. dérivable sur $]a,b[$) car c'est le produit et la somme de fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. dérivables sur $]a,b[$)

2. $g(a)=0, g(b)=0$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in \left]a,b\right[: g'(c)=0$.

On a $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, d'où

$$\exists c \in \left]a,b\right[: f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Exemple 3.24 *Montrer à l'aide du théorème des accroissement finis que*

$$\forall x>0, \quad \sin x \leq x.$$

Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R}, \quad f(t)=t-\sin t.$$

La fonction f *est continue sur* $[0,x], \forall x>0$ *(resp. dérivable sur* $]0,x[$, $\forall x>0$*) car c'est la somme de fonctions continues sur* $[0,x]$ *(resp. dérivables sur* $]0,x[$*).*

D'après le théorème des accroissement finis,

$$\exists c\in\left]0,x\right[: f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)$$

$$\text{donc, } \exists c\in\left]0,x\right[: x-\sin x = x(1-\cos c).$$

Comme $x>0$ *et* $\cos c\leq 1$*, on obtient* $\forall x>0$, $\sin x\leq x$.

3.7.3 Théorème de Cauchy

Théorème 3.25 *Soient* $f,g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *deux fonctions vérifiant*

1. f,g *sont continues sur* $[a,b]$,

2. f,g *sont dérivables sur* $]a,b[$. *Alors,*

$$\exists c\in\left]a,b\right[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

tel que : $g(b)\neq g(a)$ *et* $g'(c)\neq 0$

Preuve. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in[a,b], F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

■

3.7.4 Dérivée d'ordre supérieur

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors f' est dite la dérivée d'ordre 1 de f.

Si f' est dérivable sur I alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f, on la note f'' ou $f^{(2)}$

$$f^{(2)} = f'' = (f')'.$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On dit que f est de classe C^1 sur I (et on écrit $f \in C^1(I)$) si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I.

On dit que f est de classe C^n sur I (et on écrit $f \in C^n(I)$) si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est dite de classe C^∞ sur I si elle est de classe $C^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Formule de Leibniz (dérivée $\mathbf{n^{ème}}$ d'un produit)

Théorème 3.26 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables, alors $f.g$ est n fois dérivable. De plus, on a :*

$$\forall x \in [a,b] : (f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x), \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

3.8 Application de la dérivée

3.8.1 Critère de monotonie

Proposition 3.6 *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, alors on a :*

1) $f'(x) \geq 0$ *pour tout x dans I* $\Leftrightarrow$ *f est croissante sur I.*

2) $f'(x) \leq 0$ *pour tout x dans I* $\Leftrightarrow$ *f est décroissante sur I.*

3.8.2 Règles de l'Hospital

Première règle de l'Hospital

Théorème 3.27 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

$$1) \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$2) \quad g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}.$$

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 3.28

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

La réciproque est en général fausse.

Remarques.

1) La règle de l'Hospital est vraie lorsque $x \to +\infty$. En effet, posons $x = \dfrac{1}{t}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{-1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ et f', g' vérifient les conditions du théorème précédent, alors on peut appliquer encore une fois la règle de l'Hospital.

3.8.3 Deuxième règle de l'Hospital

Théorème 3.29 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$ *2)* $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}.$

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

La remarque précédente est vraie dans ce cas.

Exemple 3.30

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

3.9 Exercices

Exercise 3.31 *Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par :*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & si\ x \leq 0, \\ \\ \dfrac{3}{1+x}, & si\ x > 0. \end{cases}$$

1) Déterminer b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1) Continuité de f sur $\mathbb{R}$: Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue car $x \longmapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty, 0[$ et $x \longmapsto \dfrac{3}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.

Continuité de f en 0 :

On a $f(0) = a \times 0 + b = b$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{1+x} = 3,$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (ax + b) = b.$$

f est continue en 0 si et seulement si

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0)\,,\ donc\ b = 3.$$

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 3$.

2) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$: Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable car $x \longmapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty, 0[$ et $x \longmapsto \dfrac{3}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.

Dérivabilité de f en 0 :

Si $b \neq 3$, f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.

Donc Posons $b = 3$, *donc* $f(0) = 3$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{3}{1+x} - 3}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3 - 3 - 3x}{x(1+x)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-3}{1+x} = -3 = f'_d(0),$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{ax + 3 - 3}{x} = a = f'_g(0).$$

f *est dérivable en* $0 \iff b = 3$ *et* $f'_d(0) = f'_g(0) \iff b = 3$ *et* $a = -3$.

Finalement f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $b = 3$ *et* $a = -3$.

Exercise 3.32 *On considère la fonction :* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) & si \quad x \in]-\infty, 1], \\ \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & si \quad x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}$.

2) La fonction f *est-elle de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}$? *Justifier.*

Solution.

1) La continuité et la dérivabilité de f ***sur*** $\mathbb{R}$.

La continuité de f ***sur*** $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ *la fonction* f *est continue (car* f *est produit de deux fonctions continues).*

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$ *la fonction* f *est continue (car* f *est somme et rapport de deux fonctions continues).*

Il reste d'étudier la continuité de f *en* $x = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 = f(1). \\ & et \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) &= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \left(\cos^2(\pi x)\right) = 1 = f(1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1).$$

Alors, f *est continue en* $x = 1$, *on conclut que :* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

La dérivabilité de f ***sur*** $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ *la fonction* f *est dérivable (car* f *est produit de deux fonctions dérivables).*

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$ *la fonction* f *est dérivable (car* f *est somme et rapport de deux fonctions dérivables).*

Il reste d'étudier la dérivabilité de f *en* $x = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} f'_d(1) &= \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{\ln x}{(x-1)x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{(\ln x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{1}{x(2x-1)} = 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_g(1) &= \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ (forme indéterminée)} \\ &= \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{(\cos^2(\pi x) - 1)'}{(x-1)'} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{-2\pi(\sin(\pi x))\cos(\pi x)}{1} = 0. \end{aligned}$$

On a : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$, *donc* f *n'est pas dérivable en* $x = 1$, *d'où* f *n'est pas dérivable sur* $\mathbb{R}$.

(On conclut que : f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et dérivable sur* $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$*).*

2) La fonction f *n'est pas de classe* $C^1(\mathbb{R})$, *car* f *n'est pas dérivable en* $x = 1$.

Exercise 3.33 *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer λ *pour que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution.

1) Déterminons λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto 1-\dfrac{\sin(2x)}{x}$ est continue (car la fonction $x \mapsto 1-\dfrac{\sin(2x)}{x}$ est somme et rapport des fonctions continues).

Il reste d'étudier la continuité de f en $x=0$. On a : $f(0)=\lambda$ et

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1-2\frac{\sin(2x)}{2x}\right) = -1.$$

Donc, f est continuité ssi :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0) = \lambda.$$

Alors, la valeur de λ pour que f soit continue est :$\lambda=-1$.

2) Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une racine réelle sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$\text{La fonction } x \mapsto 1-\frac{\sin(2x)}{x} \text{ est continue sur } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1-\frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\frac{\pi}{4}} = 1-4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = 1-\frac{4}{\pi} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1-\frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\frac{\pi}{2}} = 1-2\frac{\sin(\pi)}{\pi} = 1 > 0$$

La fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(c)=0$ c'est à dire, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une racine réelle sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercise 3.34 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^x - 1}{x+1}, & si\ x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\sin^2(\pi x)}{2x^2}, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda e^x - 1}{x+1}$ est continue (car la fonction est une somme et rapport des fonctions continues).

- Sur l'intervalle $]-\infty,0[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(\pi x)}{2x^2}$ est continue (car la fonction une est somme et rapport des fonctions continues).

Il reste d'étudier la continuité de f en $x=0$.

On a : $f(0) = \dfrac{\lambda e^0 - 1}{0+1} = \lambda - 1$ *de plus* $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\dfrac{\lambda e^x - 1}{x+1}\right) = \lambda - 1$ *et*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{\sin^2(\pi x)}{2x^2}\right) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{2\pi \sin(\pi x)\cos(\pi x)}{4x}\right) \\
&= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{\pi^2 \cos(\pi x)}{2}\right)\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, f est continue en $x=0$ ssi : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = f(0)$.

On conclut que : f est continue sur $\mathbb{R}$ si $\lambda = 1 + \dfrac{\pi^2}{2}$

Si $\lambda \neq 1 + \dfrac{\pi^2}{2}$ la fonction f est discontinue en $x=0$.

Exercise 3.35 *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, Montrer que*

1) L'équation $3\tan x = \sin x + 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

2) L'équation $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ admet au moins deux racines réelles.

Solution.

1) Montrons que l'équation $3\tan x = \sin x + 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

On pose : $f(x) = 3\tan x - \sin x - 2$

On a : la fonction $x \mapsto 3\tan x - \sin x - 2$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, de plus

$$f(0) = 3\tan 0 - \sin 0 - 2 = -2 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} - 2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ *et* $f(0)\, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $3\tan x = \sin x + 2$ *admet au moins une racine réelle sur* $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

2) Montrons que l'équation $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins deux racines réelles.*

On pose : $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$

On a : la fonction, $x \mapsto -x^4 + 2x^3 + 2$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

$$f(-1) = -1 - 2 + 2 = -1 < 0, \qquad f(0) = 2 > 0$$
$$f(2) = -16 + 16 + 2 = 2 > 0, \qquad f(3) = -81 + 54 + 2 = -25 < 0.$$

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $]-1, 0[$ *et* $f(0)\, f(-1) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]-1, 0[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]-1, 0[$.

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $]2, 3[$ *et* $f(2)\, f(3) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]2, 3[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]2, 3[$.

On conclut que l'équation $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins deux racines réelles sur* $]-1, 3[$.

Exercise 3.36 *Soit* f *la fonction définie par :* $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$, $\quad x \in \mathbb{R}^*$.

1) La fonction f *est-elle prolongeable par continuité en* 0 *?*

2) Montrer que l'équation $f(x) - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $\left]\dfrac{3}{\pi}, \dfrac{4}{\pi}\right[$. *Cette solution est-elle unique ?*

Solution.

1) La fonction f *est-elle prolongeable par continuité en* 0 *?*

On a : $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : -1 \le \cos \frac{1}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \le x^2 \cos \frac{1}{x} \le x^2$$
$$\Rightarrow \quad -\lim_{x \to 0} x^2 \le \lim_{x \to 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right) \le \lim_{x \to 0} x^2$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le \lim_{x \to 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right) \le 0$$

D'après théorème d'encadrement : $\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right) = 0$, *d'où* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, *donc la fonction* f *est prolongeable par continuité en* 0, *et sa fonction prolongée est*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in \mathbb{R}^* \\ \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

2) Montrons que l'équation $f(x) - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

On pose : $g(x) = f(x) - 1$

On a : la fonction $x \mapsto f(x) - 1$ *est continue sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *de plus :*

$$g\left(\frac{3}{\pi}\right) = f\left(\frac{3}{\pi}\right) - 1 = \frac{9}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{3} - 1 = \frac{9}{2\pi^2} - 1 < 0$$

$$g\left(\frac{4}{\pi}\right) = f\left(\frac{4}{\pi}\right) - 1 = \frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} - 1 > 0$$

Donc, la fonction $x \mapsto g(x)$ *est continue sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *et* $g\left(\frac{4}{\pi}\right) g\left(\frac{3}{\pi}\right) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in \left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *tel que* $g(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $f(x) - 1 = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

Cette solution est-elle unique ?

On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f(x) - 1]' = \left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)' = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} > 0 \ sur \left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $x \mapsto g(x)$ *est continue et strictement croissante sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *et* $g\left(\frac{4}{\pi}\right) g\left(\frac{3}{\pi}\right) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il* c *existe et unique dans* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *tel que* $g(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $f(x) - 1 = 0$ *admet une racine réelle unique sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

Exercise 3.37 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & si\ x \geq 0 \\ \\ \sin x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur domaine de définition D_f.
2) f est-elle de classe C^1 sur D_f?

Solution.

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue et dérivable
.
- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et dérivable .
Il reste d'étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.

Continuité de f en $x = 0$

On a :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln(1+x) = 0 = f(0) \quad et \quad \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} (\sin x) = 0,$$

donc : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = f(0)$.

Alors, f est continue en 0 d'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de f en $x = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{x+1} = 1 \end{aligned}$$

et

$$f'_g(0) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

donc, $f_d(0) = f_g(0)$, d'où f est dérivable en $x = 0$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) f est-elle de classe C^1 sur D_f?

On a :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & si\ x \geq 0 \\ \\ \cos x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto f'(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *car :*

- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, *la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *est continue.*

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, *la fonction* $x \mapsto \cos x$ *est continue.*

- f *est continue en* $x = 0$ *puisque :*

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{1+x} = 1 \qquad et \qquad \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} (\cos x) = 1.$$

Donc, la fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée* $x \mapsto f'(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *alors* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, *on écrit* $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercise 3.38 *1) Enoncer le théorème des accroissement finis.*

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que :*

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

Solution.

Théorème des accroissement finis

Soit f *une fonction continue et dérivable sur* $]a, b[$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrons que :*

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ *est une fonction continue et dérivable sur* $]n, n+1[$, *donc d'après théorème des accroissement finis appliqué à cette fonction* $x \mapsto \ln x$, *il existe* $c \in]n, n+1[$ *tel que :*

$$\ln(n+1) - \ln(n) = (n+1-n)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Comme $n \geq 1$ *on aura :*

$$\begin{aligned} n < c < n+1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

Exercise 3.39 *Soit* $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que :* $f(0) = f(4)$.

Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ *tel que* $f(c) = f(c+2)$.

Solution.

Soit g *la fonction définie sur* $[0,2]$ *définie par* $g(x) = f(x) - f(x+2)$.

On a : $g(0) = f(0) - f(2)$ *et*

$$g(2) = f(2) - f(4) = f(2) - f(0) = -(f(2) - f(0)) = -g(0) \;\; (\textit{car} : f(0) = f(4)).$$

La fonction g *est continue et* $g(0)\,g(2) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]0,2[$ *tel que* $g(c) = 0$ *c'est à dire, il existe* $c \in]0,2[$ *tel que* $f(c) = f(c+2)$.

Exercise 3.40 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et dérivable sur* $]0,1[$. *On pose*

$$g(x) = (f(1) - f(0))\,x^3 - f(x).$$

1) Montrer que f *est continue et dérivable sur* $]0,1[$, *calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x \in]0,1[$.

2) Calculer $g(0)$ *et* $g(1)$. *En déduire qu'il existe* $c \in]0,1[$ *tel que :*

$$3\,(f(1) - f(0))\,c^2 = f'(c).$$

Solution.

1) Montrons que f *est continue et dérivable sur* $]0,1[$.

Les fonctions $x \mapsto x^3$ *et* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *sont continues et dérivable sur* $]0,1[$, *donc* g *est continue et dérivable sur* $]0,1[$.

Calculons $g'(x)$ *pour tout* $x \in]0,1[$.

Pour tout $x \in]0,1[$, *on a :* $g'(x) = 3\,(f(1) - f(0))\,x^2 - f'(x)$.

2) Calculons $g(0)$ *et* $g(1)$.

On a : $g(0) = -f(0)$ *et* $g(1) = (f(1) - f(0))\,(1)^3 - f(1) = -f(0)$

Donc on a : $g(0) = g(1)$.

Déduisons qu'il existe $c \in]0,1[$ *tel que :* $3\,(f(1) - f(0))\,c^2 = f'(c)$.

On a, la fonction g *est continue et dérivable sur* $]0,1[$, *donc d'après le théorème de Rolle, il existe* $c \in]0,1[$ *tel que* $g'(c) = 0$, *donc on aura :*

$$3\,(f(1) - f(0))\,c^2 = f'(c).$$

3.10 Applications aux fonctions élémentaires

3.10.1 Fonction puissance et leurs réciproques

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle fonction puissance d'exposant n l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^n. \end{array}$$

L'application est f continue sur $\mathbb{R}$.

Cas particuliers

1) Si $n = 0$, on aura : $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ donc la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ à valeur 1.

2) Si $n = 1$, on aura : $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ donc la fonction est identité sur $\mathbb{R}$.

La parité

- Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est paire.
- Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire.

La dérivée et la monotonie

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : (x^n)' = nx^{n-1}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- Si n est impair la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{- Si } n \text{ est pair} \begin{cases} \text{La fonction } x \mapsto x^n \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[. \\ \\ \text{La fonction } x \mapsto x^n \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0]. \end{cases}$$

Propriétés des fonctions puissances

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x^{n+m} = x^n.x^m \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, (x \neq 0) \qquad x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}, (x \neq 0)$$

$$x^n y^n = (xy)^n \qquad (x^n)^m = x^{nm} \qquad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n, (y \neq 0)$$

Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair.} \\ \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Fonction réciproque de la fonction puissance

Cas de n est impair. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donc, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est bijective sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée par :

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

De plus, f^{-1} est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\frac{1}{n}} \\ \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y^n \\ \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Cas de n est pair (n>0). La restriction de la fonction $f : x \mapsto x^n$ à $[0, +\infty[$est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Donc, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est bijective sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, notée par :

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

De plus, f^{-1} est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\frac{1}{n}} \\ \\ x \in [0, +\infty[\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y^n \\ \\ y \in [0, +\infty[\end{array}\right.$$

Remarque

Les résultats ci-dessus se généralisent au cas des puissances entières relatives.

3.10.2 Fonction logarithme népérien

Définition 3.19 *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} \ln: &]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

est appelée la fonction logarithme népérien, définie pour tout $x \in \,]0,+\infty[$ telle que :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ et } \ln 1 = 0.$$

Remarque : $\ln e = 1$ *où* $e = 2,718\,3....$

La dérivée

On a : $\forall x \in \,]0,+\infty[\, : (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

Propriétés de logarithme népérien

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, \ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^r = r \ln x, r \in \mathbb{R}. \qquad (\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \ \ (f(x) \neq 0).$$

Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0^-.$$

Généralisation du logarithme : $x \longmapsto \ln_a x$

La notion logarithme népérien se généralise dans une base quelconque $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons

$$\ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Remarque

Si $a = e$, on retrouve le logarithme Népérien.

Si $a = 10$, le $\ln_{10} x$ est appelé logarithme décimal se note par : $\log x = \ln_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

3.10.3 Fonction exponentielle

Définition 3.20 *L'application réciproque de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est continue et strictement croissante on l'appelle fonction exponentielle et on note*

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \rightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp x = e^x \end{array}$$

elle définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ de plus on a :

$$\left.\begin{array}{r} y = e^x \\ \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln y \\ \\ y \in]0,+\infty[\end{array}\right.$$

La dérivée

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$$

La fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction exponentielle

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad \left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\, e^{f(x)}.$$

Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0.$$

Généralisation de exponentielle : $x \longmapsto \exp_a x$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle exponentielle de base a, la fonction notée $x \longmapsto \exp_a x$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a x = e^{x \ln a}.$$

Remarque

La fonction exponentielle étant la réciproque de la fonction logarithme, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

3.10.4 Fonctions trigonométriques

Fonction sinus

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Propriétés

1) $x \longmapsto \sin x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) $x \longmapsto \sin x$ est une fonction périodique de période 2π

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

3) $x \longmapsto \sin x$ est une fonction impaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin x.$$

Fonction cosinus

$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Propriétés

1) $x \longmapsto \cos x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) $x \longmapsto \cos x$ est une fonction périodique de période 2π

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

3) $x \longmapsto \cos x$ est une fonction paire

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} : \cos(-x) = \cos x.$$

Fonction tangente

$$\begin{array}{rcl} \tan: \quad \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

Propriétés

1) $x\longmapsto\tan x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et

$$(\tan x)'=1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}.$$

2) $x\longmapsto\tan x$ est une fonction périodique de période π

$$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}:\tan(x+\pi)=\tan x.$$

3) $x\longmapsto\tan x$ est une fonction impaire

$$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\},(-x)\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}:\tan(-x)=-\tan x.$$

Fonction cotangente

$$\begin{array}{rcl} \cot: \quad \mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}. \end{array}$$

Propriétés

1) $x\longmapsto\cot x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ et

$$(\cot x)'=-1-(\cot x)^2=\frac{-1}{(\sin x)^2}.$$

2) $x\longmapsto\cot x$ est une fonction périodique de période π

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}:\cot(x+\pi)=\cot x.$$

3) $x\longmapsto\cot x$ est une fonction impaire

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\},(-x)\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}:\cot(-x)=-\cot x.$$

3.10.5 Fonctions inverses des fonctions trigonométriques

Fonction arc sinus

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ car :

$$\forall x \in \left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[: (\sin x)' = \cos x > 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \sin x$ est bijective sur $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\sin^{-1} : [-1,+1] \longrightarrow \left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$$

appelée fonction arcsin qui est continue et strictement croissante sur $[-1,+1]$, et on a :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ \\ x \in [-1,+1] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sin y \\ \\ y \in \left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

et

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Fonction arc cosinus

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ car :

$$\forall x \in]0,\pi[: (\cos x)' = -\sin x < 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \cos x$ est bijective sur $[0,\pi]$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\cos^{-1} : [-1,+1] \longrightarrow [0,\pi]$$

appelée fonction arccos qui est continue et strictement décroissante sur $[-1,+1]$, et on a :

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ \\ x \in [-1,+1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$

et

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Fonction arc tangente

La fonction

$$\begin{array}{rccl} \tan : & \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car :

$$\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \tan x$ est bijective sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

appelée fonction arctan qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ \\ y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Fonction arc cotangente

La fonction

$$\begin{array}{rccl} \cot : &]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ car :

$$\forall x \in \,]0,\pi[\,:(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \cot x$ est bijective sur $]0,\pi[$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\cot^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \,]0,\pi[$$

appelée fonction arccot qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ \\ y \in \,]0,\pi[\end{cases}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x) = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Propriétés

De définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes :

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$,

2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,

3) $\arctan(-x) = -\arctan x$,

4) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$,

5) $\arccos \dfrac{1}{x} + \arcsin \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$,

6) $\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

7) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

8) $\cos(\arctan x) = \sin(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

9) $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

10) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$

11) $\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3.10.6 Fonctions hyperboliques

Fonction sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Fonction cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Fonction tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, +1[\\ & x & \longmapsto & \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

Fonction cotangente hyperbolique

La fonction cotangente hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \coth : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{array}$$

Propriétés des fonctions hyperboliques

De définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes :

1) $(\sinh x)' = \cosh x$ et $(\cosh x)' = \sinh x$

2) $\cosh x + \sinh x = e^x$

3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

4) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

5) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x . \tanh y}$

6) $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

7) $\cosh(x+y) = \cosh x . \cosh y + \sinh x \sinh y$

8) $\sinh(x+y) = \sinh x . \cosh y + \sinh y . \cosh x$

9) $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x.$

3.10.7 Fonctions inverses des hyperboliques

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \sinh x$ est bijective sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

appelée fonction argument sinus hyperbolique (noté par :$\arg\sinh$ ou par $\arg\sin$), et on a :

$$\begin{cases} y = \arg\sinh x \\ \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a : la fonction

$$\arg\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Remarque. La fonction : $\arg\sinh \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rrcl} \cosh : & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x. \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, la fonction $x \longmapsto \cosh x$ est bijective sur $\mathbb{R}^+$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\cosh^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$$

continue et strictement croissante, appelée fonction argument cosinus hyperbolique (noté par : $\arg\cosh$ ou par : $\arg\cos$) et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \arg\cosh x \\ \\ x \in [1,+\infty[\end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \cosh y \\ \\ y \in [0,+\infty[\,. \end{array} \right.$$

La fonction

$$\arg\cosh : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$$

est définie, continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall x \in [1,+\infty[: (\arg\cos)'(x) = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rrcl} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,+1[\\ & x & \longmapsto & \tanh x \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, la fonction $x \longmapsto \tanh x$ est bijective sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\tanh^{-1} :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

continue et strictement croissante, appelée fonction argument tangente hyperbolique (noté par : $\arg\tanh$ ou par : $\arg\tan$) et on a :

$$\begin{cases} y = \arg\tanh x \\ \\ x \in \left]-1, +1\right[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a :

$$\forall x \in \left]-1, +1\right[: (\arg\tan)'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Remarque. La fonction $\arg\tan \in C^\infty\left(\left]-1, +1\right[, \mathbb{R}\right)$.

Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccl} \coth : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\\ & x & \longmapsto & \coth x \end{array}$$

est bijective, donc elle admet une fonction réciproque dite argument cotangente hyperbolique (noté par : $\arg\coth$ ou par :$\arg\cot$) et on a :

$$\begin{cases} y = \arg\coth x \\ \\ |x| > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ \\ y \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Propriétés des fonctions inverses des hyperboliques

De définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\arg\sinh x) = -\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arg\sinh x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\arg\cosh x) = -\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arg\cosh x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}(\arg\tanh x) = -\infty$ 6) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}(\arg\tanh x) = +\infty$

7) $\arg\sinh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$

8) $\arg\cosh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ \forall x \geq 1.$

9) $\arg\coth x = y = \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,\ \ |x| > 1.$

3.11 Exercices

Exercise 3.41 *Montrer que :*

1) $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x + \sinh x = e^x.$ 2) $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$ 4) $\forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)'(x) = \cosh x.$

5) $\forall x \in \mathbb{R} : (\cosh)'(x) = \sinh x.$ 6) $\forall x \in \mathbb{R} : (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}.$

Solution.
1) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x + \sinh x = e^x.$
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

donc

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

2) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x - \sinh x = e^{-x}..$

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}\right) \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

4) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)'(x) = \cosh x.$
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$(\sinh)'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x.$$

5) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\cosh)'(x) = \sinh x.$
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$(\cosh)'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x.$$

6) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}.$
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(\tanh)'(x) &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)'(\cosh x) - (\sinh x)(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\left(\cosh^2 x\right) - \left(\sinh^2 x\right)}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\left(\cosh^2 x\right)}{\cosh^2 x} + \frac{-\left(\sinh^2 x\right)}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x
\end{aligned}$$

Exercise 3.42 *Montrer que*

1) $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4) $\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

5) $\forall x \in \mathbb{R} : (\arg\sinh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

6) $\forall x \geq 1 : (\arg\cosh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7) $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arg\tanh)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Solution.

1) Montrons que : $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On a : Si la fonction f est dérivable en x, alors f^{-1} est dérivable en y et

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\arcsin)'(x) &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \textit{(car } y = \arcsin x \Rightarrow \sin y = x)\end{aligned}$$

2) Montrons que : $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

On a :

$$\begin{aligned}(\arccos)'(x) &= \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \textit{(car } y = ar\cos x \Rightarrow \cos y = x)\end{aligned}$$

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On a :

$$\begin{aligned}(\arctan)'(x) = &\ \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2},\ \textit{(car } y = \arctan x \Rightarrow \tan y = x)\end{aligned}$$

4) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\operatorname{arccot})'(x) = &\ \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{-1}{1+\cot^2 y}\\ &= \frac{-1}{1+x^2}, \ \textit{(car } y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow \cot y = x)\end{aligned}$$

5) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arg\,sinh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\operatorname{arg\,sinh})'(x) &= \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} \ (\textit{ car } \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ \textit{(car } y = \operatorname{arg\,sinh} x \Rightarrow \sinh y = x)\end{aligned}$$

6) Montrons que : $\forall x \geq 1 : (\operatorname{arg\,cosh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\operatorname{arg\,cosh})'(x) &= \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} (\textit{ car } \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ \textit{(car } y = \operatorname{arg\,cosh} x \Rightarrow \cosh y = x)\end{aligned}$$

7) Montrons que : $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\operatorname{arg\,tanh})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\operatorname{arg\,tanh})'(x) &= \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{1-\tanh^2 y}\\ &= \frac{1}{1-x^2}, \ \textit{(car } y = \operatorname{arg\,tan} x \Rightarrow \tanh y = x)\end{aligned}$$

Chapitre 4

Développements limités

4.1 Introduction

Les développements limités consistent à trouver une approximation polynômiale à une fonction plus compliquée, au voisinage d'un point choisi. Les développements limités ont de nombreuses applications dans d'autres sciences, Mécanique, Physique,..., mais aussi dans les mathématiques elles-mêmes, en particulier en analyse numérique.

4.2 Formules de Taylor

4.2.1 Formules de Taylor

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$, au voisinage de x_0 la fonction f peut s'écrire :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)}_{P_1(x)} + R(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to x_0} R(x) = 0.$$

Donc, le polynôme :

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

est une approximation de la fonction f.

L'erreur de cette approximation est : $R(x) = (x - x_0)\,\epsilon(x)$.

La formule de Taylor qui généralise ce résultat à des fonctions n fois dérivables est :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{P_n(x)} + R_n(x_0, x).$$

Le polynôme $P_n(x)$ est de degré n en $(x - x_0)$.

On appelle $R_n(x_0, x)$ le reste d'ordre n.

4.2.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

C'est la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Lagrange $\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Théorème 4.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ ($f \in C^n([a,b])$) et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in [a,b]$, alors $\forall x \in [a,b], x \neq x_0, \exists c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ...$$

$$... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

4.2.3 Formule de Taylor Mac-Laurin

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on pose $c = \theta x, 0 < \theta < 1, c \in]0,x[$ et on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

4.2.4 Formule de Taylor Young

Nous allons restreindre les hypothèses en supposant uniquement que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Théorème 4.2 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (finie), alors $\forall x \in V(x_0)$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(x-x_0)^n$$

où $o(x-x_0)^n = (x-x_0)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

4.3 Développements limités au voisinage de zéro

Nous avons vu que dans un voisinage de x_0 on peut approcher la fonction f par un polynôme P_n de degré n de sorte que

$$f(x) - P_n(x) = o(x-x_0)^n.$$

Ceci lorsque $f^{(n)}$ existe. Maintenant, nous allons voir qu'un tel polynôme peut exister même si $f^{(n)}$ n'existe pas et même si f n'est pas continue en x_0.

Définition 4.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de zéro. On dit que f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un ouvert I de centre 0 et des constantes $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $\forall x \in I, x \neq 0$*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0 \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}_{P_n(x)} + o(x^n). \end{aligned}$$

1) $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est la partie régulière du D.L.
2) $o(x^n) = x^n \epsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$) est le reste.

Propriétés des développements limités

Proposition 4.1 *(Unicité de D.L)*
Si f admet un $DL_n(0)$ alors ce D.L. est unique.

Preuve. Supposons que f admet deux $DL_n(0)$, c'est à dire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n = x^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on aura $a_0 = b_0$, d'où

$$(a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n = x^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

Si $x \neq 0$, on obtient

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + ... + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on aura $a_1 = b_1$. De cette manière, on aura $a_n = b_n$, $\forall n$.

D'où l'unicité du développement limité. ■

Théorème 4.3 *Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors le D.L. de f est*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Corollaire 4.4 *Si $f^{(n)}(0)$ existe, et f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors*

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemple 4.5 ***(D.L. obtenu par division suivant les puissance croissante)***

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n \epsilon(x),$$

avec $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ *lorsque* $x \to 0$.

On peut déduire $f^{(n)}(0)$. En effet,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x) \quad \textit{avec} \ \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

et par identification, on aura $\forall k : 0 \le k \le n$, $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$.

4.3.1 Développements limités usuels

Tous les développements ci-dessous sont valables à l'origine.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1})$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6), \quad thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + O(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^n)$$

$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!} x^n + O(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + O(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + O(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + O(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + O(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} ... + O(x^{2n+2})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} ... + O(x^{2n+2})$$

Remarques

- Si la fonction $x \mapsto f(x)$ est paire, alors toutes les puissances impaires disparaissent.

- Si la fonction $x \mapsto f(x)$ est impaire, alors toutes les puissances paires disparaissent.

4.4 Opérations sur les développements limités.

4.4.1 Opérations algébriques sur les développements limités.

Théorème 4.6 *Si f et g admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors $f+g, fg$ admettent des D.L. d'ordre n et $\dfrac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$.*

4.4.2 Développements limités d'une fonction composée

Théorème 4.7 *Si f et g admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0 et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0.*

Remarque 4.1 *La partie régulière de $f \circ g$ s'obtient en remplaçant dans la partie régulière de f, la partie régulière de g et en gardant que les puissances inférieures ou égales à n.*

4.4.3 Dérivation de développements limités.

Nous avons vu que l'existence de D.L. ne nécessite pas l'existence de la dérivée. Donc nous ne pourrons rien dire en ce qui concerne le D.L. de la dérivée.

Théorème 4.8 *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 et admettant un D.L. d'ordre n au voisinage de 0*

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \ \ \textit{avec} \ \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Si la dérivée f' admet un D.L. d'ordre $(n-1)$ au voisinage de 0, alors

$$f'(x) = P'(x) + x^{n-1} \eta(x) \ \ \textit{avec} \ \lim_{x\to 0} \eta(x) = 0.$$

4.4.4 Intégration de développements limités.

Théorème 4.9 *Soit f une fonction numérique dérivable dans l'intervalle $I =]-\alpha, \alpha[\,, \alpha > 0$, de dérivée f'. Si f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0,$$

alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0,$$

ici $x^{n+1} \eta(x) = \int_0^x t^n \epsilon(t)\, dt$.

4.4.5 Développements limités au voisinage de x_0 et de l'infini

Définition 4.2 *On dit que f définie au voisinage de x_0 admet un D.L. d'ordre n au $V(x_0)$ si la fonction*

$$F : x \longmapsto F(x) = f(x_0 + x)$$

admet un D.L. d'ordre n au $V(0)$.

On a

$$F(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

et donc

$$f(x_0 + x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x),$$

c'est à dire

$$f(y) = a_0 + a_1 (y - x_0) + ... + a_n (y - x_0)^n + (y - x_0)^n \epsilon((y - x_0)),$$

ou d'une manière équivalente

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon((x - x_0)).$$

Finalement, on se ramène du voisinage de x_0 au voisinage de 0 par le changement de variable $z = x - x_0$.

De même le D.L. au voisinage de l'infini se fait par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$.

Définition 4.3 *On dit qu'une fonction numérique admet un D.L. d'ordre n au $V(+\infty)$ s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait au $V(+\infty)$*

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

4.5 Applications des développements limités

4.5.1 Calcul de limites

Forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$

Il s'agit de

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée}$$

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de 0 et chacune admettant un développement limité au voisinage de 0

$$f(x) = P_n(x) + O(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_m(x) + O(x^m).$$

Alors on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Exemple 4.10 *Calculer, en utilisant les développements limités, la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - 1}.$$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1} = \frac{0}{0}$ *forme indéterminée.*
Comme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O\left(x^2\right) \quad \textit{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right)$$

donc,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{6}}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{6}}{1 + \frac{x}{2}} = 1.$$

Forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

Il s'agit de : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x))$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$.

Exemple 4.11 *Calculer, en utilisant les développements limités, la limite suivante :*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right).$$

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sqrt{x+1} = \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sqrt{x-1} = \left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2x}\right) + O'\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + O'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + O'\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) - O'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

4.5.2 Applications géométriques

Droite tangente à la courbe

Proposition 4.2 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0. Supposons que f admet un développement limité au voisinage de 0, du type :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + O(x^n) \text{ avec } n \geq 2 \text{ et } a_n \neq 0.$$

Alors, $y = a_0 + a_1 x$ est une droite tangente à la courbe de la fonction f en point $x = 0$.

Exemple 4.12 *On a :*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O\left(x^3\right).$$

Donc, $y = x+1$ est une droite tangente à la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en point $x = 0$.

Etude de branches infinies

Si $|x| + |f(x)|$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers x_0 ou $\pm\infty$, on dit que le graphe de la fonction f admet une branche infinie.

De plus,

1) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = 0$, on dira que la courbe de fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe Ox.

2) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = \pm\infty$, on dira que la courbe de fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe Oy.

3) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on dira que la courbe de fonction f admet une branche parabolique de direction la droite $y = ax$.

4) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - ax) = b$, on dira que la courbe de fonction f admet la droite $y = ax + b$, comme une asymptote.

Proposition 4.3 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$. Supposons que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet un développement limité au voisinage de $+\infty$, du type :*

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \textit{avec } n \geq 2 \textit{ et } c \neq 0.$$

Alors, la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$.

4.6 Exercices

Exercise 4.13 *Ecrire D. L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :*

$f(x) = (\sin x) + e^x$, $g(x) = (\sin x)e^x$ *et* $h(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$.

Solution.

***D.L. à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction* f.**

On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O_1\left(x^3\right) \quad et \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O_2\left(x^3\right)$$

Donc,

$$f(x) = (\sin x) + e^x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + O_3(x^3)$$

$$= 1 + 2x + \tfrac{1}{2}x^2 + O_3(x^3),$$

est le D.L. à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction* f.

D.L. à l'ordre 3 ***au voisinage de*** 0 ***de la fonction*** g.

On a :

$$g(x) = (\sin x)\, e^x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + O_4(x^3)$$

$$= x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + O_4(x^3),$$

est le D.L. à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction* g.

Remarque. *On a effectué les produits et les sommes des monômes de degré inférieure ou égal à* 3 *et on a gardé les résultats ayant degré inférieure ou égal à* 3.

Le D.L. d'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction* $h(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$.

On a :

$$h(x) = x\left(\frac{x}{\sin x}\right) = x\left(\frac{x}{x - \frac{x^3}{6}}\right) = x\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}}\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)$$

$= x + \dfrac{x^3}{6} + O(x^3)$ *est le D.L. à l'ordre* 3 *au voisinage de 0 de la fonction* h.

car $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^3)$, *d'où* $\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6}} = 1 + \dfrac{x^2}{6} + O(x^3)$.

Exercise 4.14 *Ecrire le D. L. à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de la fonction* $x \mapsto \sin(\ln(x+1))$.

Solution.

On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O_1(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O_2(x^3)$$

Quand x *tend vers* 0, $\ln(x+1)$ *tend vers* 0. *Le D.L. de la fonction* $x \mapsto \sin(\ln(x+1))$ *au voisinage de* 0 *se ramène donc à celui de* $\sin u$ *au voisinage de* 0. *Donc,*

$$\sin(\ln(x+1)) = \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = \sin u \textit{ où } u = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3 + O_1(x^3).$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O_1(x^3),$$

est le D.L. à l'ordre 3 *au voisinage de 0 de la fonction* $x \mapsto \sin(\ln(x+1))$.

Exercise 4.15 *Ecrire le D. L. à l'ordre* 6 *au voisinage de* 0 *de la fonction* $x \mapsto \tan^2 x$.

Solution.

On a :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O\left(x^6\right)$$

Donc,

$$\tan^2 x = \tan x \tan x = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)\right)$$

$$= x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + O(x^6).$$

est le D.L. à l'ordre 6 *au voisinage de 0 de la fonction* $x \mapsto \tan^2 x$.

Remarque. *On a effectué les produits des monômes de degré inférieure ou égal à* 6 *et on a gardé les termes ayant degré inférieure ou égal à 6.*

Chapitre 5

Intégrales simples

5.1 Introduction

Ce chapitre donne une introduction à l'intégrale de Riemann et de quelques propriétés fondamentales qui sont conséquence des définitions. Ensuite, on établit le lien entre cette intégrale et les primitives. Une partie du cours est consacrée a exposer les principales techniques de calcul des primitives et des intégrales.

Dans ce qui suit, on considère que des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

5.2 Intégrale de Riemann

Définition 5.1 *(Subdivision)*

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est une partie finie fermée de $(n+1)$ éléments $\{a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n\}$ de $[a, b]$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b.$$

On appelle "pas" de la subdivision le réel $\underset{0 \leq i \leq n-1}{Max} (a_{i+1} - a_i)$.

Définition 5.2 *Une somme de Riemann d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles relativement à une subdivision $\{a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n\}$ de $[a, b]$ est le réel défini par :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(x_i), \quad \text{où} \;\; x_i \in [a_i, a_{i+1}].$$

Remarque. Lorsque : $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on parle de la subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$, le nombre $\dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.

Théorème 5.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue.*

Les sommes de Riemann relatives à la fonction f convergent toutes vers la même limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, on note cette limite : $\int_a^b f(x)\,dx$ et on dit que f est Riemann-intégrable.

Remarque. La variable d'intégration x est une variable muette, c'est à dire qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable (qui n'intervient pas déjà ailleurs)

Proposition 5.1 *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, $c \in [a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :*

1) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$, 2) $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$,

3) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$, 4) $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$, 5) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$.

6) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ *(la règle de Chasles).*

7) *Si* $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, *alors* $\int_a^b f(x)\, dx = 0$

8) *Si* $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, *alors* $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

8) *Si* $n \leq f(x) \leq m, \forall x \in [a, b]$ $(n, m \in \mathbb{R})$ *alors,* $n(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq m(b-a)$.

9) *Si* $n \leq f(x) \leq m$ *et* $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ $(n, m \in \mathbb{R})$, *alors*
$n \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq m \int_a^b g(x)\, dx$.

Proposition 5.2 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right).$$

Théorème 5.2 *(Théorème de la moyenne)*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

5.3 Les primitives

Définition 5.3 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On appelle "primitive" de f sur I toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.*

Une primitive d'une fonction f, représentée par $\int f(x)\, dx$ s'appelle aussi une intégrale indéfinie de f et l'ensemble de toutes les primitives de f s'écrit $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.3 *La fonction :* $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x$ *est une primitive de la fonction :* $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ *sur* $\mathbb{R}$ *et toutes les primitives de la fonction :* $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont* $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

On écrit :

$$\int \left(3x^2 - 8x + 2\right) dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Une primitive de la fonction : $x \longmapsto \cos 2x$ *est la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin 2x$ *sur* $\mathbb{R}$ *et toutes les primitives de la fonction :* $x \longmapsto \cos 2x$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont*

$$\int (\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 5.1 *Les primitives d'une fonction sont pas unique.*

Exemple 5.4 *Soit la fonction* $f(x) = 4x + 3$.

On a :

$$F(x) = 2x^2 + 3x, \ \ G(x) = 2x^2 + 3x + 1, \ \ H(x) = 2x^2 + 3x + 2, \ \ .....$$

sont des primitives de la fonction f *sur* $\mathbb{R}$.

Conclusion 5.5 *Si on connaît une primitive* F *de* f, *toutes les autres primitives de* f *sont de la forme* $F + c$ *où* c *est une constante.*

Propriétés fondamentales :

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1) $\int (f+g)(x)\, dx = F(x) + G(x), \ \forall x \in I.$ 2) $\int (\lambda f)(x)\, dx = \lambda F(x), \ \forall x \in I.$

3) $\int (fG + Fg)(x)\, dx = (F.G)(x), \ \forall x \in I.$

4) $\int \left(\dfrac{fG - Fg}{G^2}\right)(x)\, dx = \left(\dfrac{F}{G}\right)(x), \ \forall x \in I,$ (avec $G(x) \neq 0, \ \forall x \in I$).

Primitives des fonctions usuelles :

1) $\int \lambda dx = \lambda x + c, \ \lambda \in \mathbb{R}.$ 4) $\int \sin(ax+b)\, dx = \dfrac{-1}{a}\cos(ax+b) + c, \ a \neq 0.$

2) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$ 5) $\int \cos(ax+b)\, dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c, \ a \neq 0.$

3) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}.$ 6) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \ |x| < 1,$

où c est une constante dans $\mathbb{R}$.

5.4 Intégrale définie

Proposition 5.3 *Si F est une primitive de la fonction continue f sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette proposition montre toute l'importance que représente la connaissance des primitives des fonctions continues dans le calcul des intégrales.

Remarque 5.2 *Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction (il ne faut pas confondre les deux).*

* $\int f(x)\,dx$ *s'appelle une intégrale indéfinie de f, c'est une fonction primitive de f.*

* $\int_a^b f(x)\,dx$ *s'appelle une intégrale définie de f, c'est un nombre réel.*

Remarque 5.3

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \Big[\quad f(t) \quad\Big]_a^b = f(b) - f(a).$$

Exemple 5.6

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5.5 Techniques de calcul des primitives

5.5.1 Intégration par parties

La première méthode de calcul des primitives est donnée par la formule dite "intégration par parties". Elle est basée sur la formule de dérivation d'un produit.

Proposition 5.4 *Soient $U, V : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors*

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx \;=\; U(x)\,V(x) - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

Preuve. On a :

$$(U(x)\,V(x))' = U'(x)\,V(x) + U(x)\,V'(x),$$

donc,

$$\int U(x)V'(x)\,dx = \int (U(x)V(x))'\,dx - \int U'(x)V(x)\,dx.$$

D'où

$$\int U(x)V'(x)\,dx = U(x)V(x) - \int U'(x)V(x)\,dx.$$

■

Exemple 5.7 *Calculer* $\int xe^x dx$.

Posons :

$$\begin{cases} U(x) = x, \\ \\ V'(x) = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ \\ V(x) = e^x. \end{cases}$$

Donc

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = (x-1)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 5.4 *La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme* $\int x^k(\sin x)\,dx$, $\int x^k(\cos x)\,dx$, $\int x^k e^{\alpha x} dx$, $\int x^k(\ln x)\,dx$.

5.5.2 Intégration par changement de variable

Voici une seconde méthode de calcul de primitives. Elle s'appuie sur la formule de dérivation d'une fonction composée.

Formules de changement de variable :

Si le calcul de $\int f(x)\,dx$ s'avère difficile, on remplace x par $g(t)$ où g est dérivable, donc $dx = g'(t)\,dt$ et on aura :

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Remarque 5.5 *Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.*

Un changement de variable comporte trois étapes :

1- Choisir la fonction $g(t)$ *(c'est la seule partie où il faut faire preuve d'imagination et d'expérience).*

2- Ecrire $dx = g'(t)\,dt$ *pour préparer le changement de variable.*

3- Appliquer la formule du changement de variable (ne pas oublier de changer les bornes quand il s'agit d'une intégrale définie).

Exemple 5.8 *Calculer* $\int \frac{1}{(x-1)^5}\ dx$.

On pose : $t = x - 1$, *donc* $dt = dx$.

Alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^5}\ dx &= \int \frac{1}{t^5} dt = \int t^{-5}\ dt = \frac{-1}{4} t^{-4} + c,\ c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-1}{4(x-1)^4} + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 5.9 *Calculer* $\int \sin^3 x \cos x\ dx$.

On pose : $t = \cos x$, *donc* $dt = -(\sin x)\, dx$, *d'où* $dx = \frac{-1}{\sin x} dt$.

Alors

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &= \int \left(\sin^3 x\right) t\ \frac{-1}{\sin x} dt = -\int \left(\sin^2 x\right) t\ dt \\ &= -\int \left(1 - \cos^2 x\right) t\ dt = -\int \left(1 - t^2\right) t\ dt \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + c,\ c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5.6 Compléments sur le calcul des primitives

1- Intégration des fractions rationnelles :

Une intégrale d'une fonction rationnelle peut toujours, à l'aide de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples, se ramener à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx, \int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx \quad \text{où} \quad a, b, p, q, \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

Donc il suffit de connaître les valeurs des intégrales de ces types pour en déduire celles des intégrales de fonctions rationnelles.

a) Intégrale du type : $\int P(x)\, dx$.

Dans le cas où P est un polynôme, on intègre terme à terme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

alors

$$\begin{aligned}\int P(x)\,dx &= \int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) dx \\ &= \int a_n x^n dx + \int a_{n-1}x^{n-1}dx + ... + \int a_1 x dx + \int a_0 dx \\ &= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{1}{x+\lambda}dx, \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\int \frac{1}{x+\lambda}dx = \ln|x+\lambda| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

c) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx$ et $n > 1$.

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

d) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ où a, b, p et $q \in \mathbb{R}$.
Si x^2+px+q possède deux racines réelles α et β, donc :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{A}{x-\alpha}dx + \int \frac{B}{x-\beta}dx \\ &= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 5.10 *Calculer* $\int \frac{1}{x^2-1}dx.$
On a :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{2(x-1)}dx - \int \frac{1}{2(x+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si x^2+px+q *n'a pas de racines réelles, écrivons :*

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

En posant : $\alpha=-\frac{p}{2}$ *et* $\beta^2=q-\frac{p^2}{4}$, *on obtient :*

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2.$$

On fait maintenant le changement de variable $x-\alpha=\beta t$ *et donc* $dx=\beta dt$ *et* $(x-\alpha)^2+\beta^2=\beta^2\left(t^2+1\right).$

$$\begin{aligned}\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int\frac{Mt+N}{t^2+1}dt\\ &= \int\frac{Mt}{t^2+1}dt+\int\frac{N}{t^2+1}dt\\ &= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+1\right)+N\arctan t+c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Puis on remplace t *par* $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

Exemple 5.11 *Calculer* $\int\frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$.

On a :

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$

En posant : $x+1=2t$ *(et donc* $dx=2dt$*), on obtient :*

$$\begin{aligned}\int\frac{x+4}{x^2+2x+5}dx &= \int\frac{2t+3}{4\left(t^2+1\right)}2dt=\int\frac{4t}{4\left(t^2+1\right)}dt+\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{3}{2}\arctan t+c\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) Intégration des fractions rationnelles en : $\mathbf{e}^x$:

On utilise le changement de variable $t=e^x$ et donc : $dt=e^xdx$ où $dx=\dfrac{1}{t}dt$

Exemple 5.12 *Calculer* $\int \frac{dx}{3-2e^x}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3-2e^x} &= \int \frac{dt}{t(3-2t)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{3}\int \frac{(-2)\,dt}{3-2t} \\ &= \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{3}\ln|3-2t| + c,\ c\in\mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\ln|3-2e^x| + c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2- Intégrale du type : $\int P(x)\,e^{\lambda x}dx$ **où** P **est un polynôme et** $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

On peut effectuer des intégrations par parties successives selon le degré de P, mais on doit réserver cette méthode au cas où $\deg P$ est petit. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive de $P(x)\,e^{\lambda x}$ sous la forme $Q(x)\,e^{\lambda x}$, avec $\deg P = \deg Q$.

Exemple 5.13 *Calculer* $\int (5x^2+3x-1)\,e^{-x}dx$.

On sait que : $\int (5x^2+3x-1)\,e^{-x}dx = (ax^2+bx+c)\,e^{-x}$, *et on obtient :* a,b,c *de la formule suivante :*

$$\left[\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right]' = \left[-ax^2+(2a-b)\,x+b-c\right]e^{-x} = \left(5x^2+3x-1\right)e^{-x}.$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a=5, \\ 2a-b=3, \\ b-c=-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5, \\ b=2a-3, \\ c=b+1, \end{cases} \quad donc : \begin{cases} a=-5, \\ b=-13, \\ c=-12. \end{cases}$$

Ainsi

$$\int \left(5x^2+3x-1\right)e^{-x}dx = \left(-5x^2-13x-12\right)e^{-x}+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Exemple 5.14 *Calculer* $\displaystyle\int (x^4-1)\,e^{2x}dx$.

On pose : $\displaystyle\int (x^4-1)\,e^{2x}dx = Q(x)\,e^{2x}$ *avec* $Q(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+\lambda$ *où* a,b,c,d *et* $\lambda\in\mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\left[Q(x)\,e^{2x}\right]' &= \left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)e^{2x}+2\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+\lambda\right)e^{2x}\\
&= \left[2ax^4+(4a+2b)\,x^3+(3b+2c)\,x^2+(2c+2d)\,x+(2\lambda+d)\right]e^{2x}\\
&= \left(x^4-1\right)e^{2x}.
\end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2a=1, \\ 4a+2b=0, \\ 3b+2c=0, \\ 2c+2d=0, \\ 2\lambda+d=-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}, \\ b=-2a, \\ c=-\dfrac{3}{2}b, \\ d=-c, \\ \lambda=\dfrac{-1-d}{2}, \end{cases} \quad donc : \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}, \\ b=-1, \\ c=\dfrac{3}{2}, \\ d=-\dfrac{3}{2}, \\ \lambda=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Alors

$$Q(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

Ainsi

$$\int\left(x^4-1\right)e^{2x}dx=\left(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^{2x}+k,\ \ k\in\mathbb{R}.$$

3- Intégration de certaines fonctions trigonométriques :

a) Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles :

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x,\cos x)\,dx$. En effectuant le changement da variable : $t=\tan\dfrac{x}{2}$, les fonctions $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto\cos x$ s'expriment alors sous formes de fonctions rationnelles. En effet,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},
\end{aligned}$$

et

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{2} = \arctan t$$

$$\Rightarrow\quad x = 2\arctan t$$

$$\Rightarrow\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Donc on a :

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\cot x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Exemple 5.15 *Calculer* $\int \frac{1}{\cos x}dx.$

On a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{1-t}dt \\
&= \ln|1+t| - \ln|1-t| + c,\ \ c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c,\ \ c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}\right| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Remarque 5.6 *Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$, appelé changement de variable universel pour l'intégration des fonctions trigonométriques résout le problème d'intégration de toute expression de la forme $f(\sin x, \cos x)$ mais conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable d'utiliser d'autres changements de variables menant plus rapidement au but.*

b) Intégrale de type : $\int \cos^p x \sin^q x dx, p$ **et** $q \in \mathbb{N}$.
Premier cas : p est impair
Soit $p = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^{2k+1} x \sin^q x dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \sin^q x \cos x dx.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \sin x$, $(dt = (\cos x)\, dx)$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $\int (1-t^2)^k t^q dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 5.16 *Calculer* $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int \left(1-t^2\right)^2 t^2 dt = \int \left(t^6 - 2t^4 + t^2\right) dt \\
&= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \\
&= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : q est impair
Soit $q = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^p x \sin^{2k+1} x dx \\
&= \int \cos^p x \left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x dx.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \cos x$, $(dt = -(\sin x)\, dx)$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $-\int t^p \left(1-t^2\right)^k dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 5.17 *Calculer* $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.
On a :

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 x \sin^3 x dx &= \int \cos^6 x \left(1-\cos^2 x\right) \sin x dx = -\int t^6 \left(1-t^2\right) dt \\
&= \int \left(t^8 - t^6\right) dt = \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{7}t^7 + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Troisième cas : Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$ à la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle.

c) Intégrale de type : $\int (\cos\alpha x)(\cos\beta x)\, dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.
On utilise la formule suivante :

$$(\cos\alpha x)(\cos\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos[(\alpha+\beta)x]\,dx + \frac{1}{2}\int \cos[(\alpha-\beta)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\sin[(\alpha+\beta)x] + \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin[(\alpha-\beta)x] + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

tel que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$.

Exemple 5.18 *Calculer* $\int (\cos 5x)(\cos x)\,dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int (\cos 5x)(\cos x)\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos 6x)\,dx + \frac{1}{2}\int (\cos 4x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}\sin 6x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right) + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) Intégrale de type : $\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\,dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule suivante :

$$(\sin \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x].$$

Donc on a :

$$\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin[(\alpha+\beta)x]\,dx + \frac{1}{2}\int \sin[(\alpha-\beta)x]\,dx$$

$$= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta)x - \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\cos(\alpha-\beta)x + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

tel que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$.

Exemple 5.19 *Calculer* $\int (\sin 4x)(\cos 6x)\,dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int (\sin 4x)(\cos 6x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \sin(10x)\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{10}\cos 10x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{-2}\cos(-2x)\right) + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{-1}{20}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 2x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) Intégrale de type : $\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule suivante :

$$(\sin \alpha x)(\sin \beta x) = \frac{1}{2}\left[-\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx = \frac{-1}{2}\int \cos\left[(\alpha+\beta)x\right] dx + \frac{1}{2}\int \cos\left[(\alpha-\beta)x\right] dx$$

$$= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin(\alpha-\beta)x + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

tel que $\alpha \neq \beta et \alpha \neq -\beta$.

Exemple 5.20 *Calculer* $\int (\sin 3x)(\sin 2x)\, dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int (\sin 3x)(\sin 2x)\, dx &= \frac{1}{2}\int \left[-\cos 5x + \cos x\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{5}\sin 5x + \sin x\right] + c, c \in \mathbb{R}. \\
&= \frac{-1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4- Intégrales des fonctions contenant des radicaux :

Fonction de la forme $f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où f est soit un polynôme, soit une fraction rationnelle. On suppose que $ad - cb \neq 0$ et $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, dans ce cas le changement de variable adéquat est $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, il permet de ramener le calcul de l'intégrale à celui de l'intégrale d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle. Expliquons cela sur un exemple.

Exemple 5.21 *Calculer* $I = \int \dfrac{1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}dx$.

On pose $t = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$, *c'est à dire* $t^2 = \dfrac{x+2}{x}$ *et par suite* $x = \dfrac{2}{t^2-1}$ *et* $dx = \dfrac{-4t}{(t^2-1)^2}dt$. *D'où*

$$I = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - 2\arctan t + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

puis on remplace t *par* $\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$.

5.7 Exercices

Exercise 5.22 *Calculer les primitives suivantes :*

1) $\int (3x^2 - 8x + 2)\, dx$ 2) $\int (\cos 2x)\, dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{-3}{x+2} dx.$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^4} dx.$ 5) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx.$ 6) $\displaystyle\int (2x+1)^{10}\, dx.$

Solution.

1) $\int (3x^2 - 8x + 2)\, dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

2) $\int (\cos 2x)\, dx = \dfrac{1}{2} \sin 2x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

3) $\displaystyle\int \frac{-3}{x+2} dx = -3 \ln |x+2| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^4} dx = \frac{-1}{3} \frac{1}{(x+1)^3} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

6) $\displaystyle\int (2x+1)^{10}\, dx = \frac{1}{22} \int (11)(2)(2x+1)^{10}\, dx = \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

Exercise 5.23 *Calculer les primitives suivantes :*

1) $\displaystyle\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3}\ \ dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x}\ \ dx$

3) $\int \cos(5x)\ \ dx.$ 4) $\int (2x-2)\ \ \sqrt{x^2-2x+3}\ \ dx$

Solution.

1) Calculons $\displaystyle\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3} dx.$

On a,

$$\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx = 2\ln\left|x^2-2x+3\right| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

2) Calculons $\int \frac{1+\ln x}{x}dx.$

On a,

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\ln x}{x}dx &= \int (\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x})dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int 2\frac{1}{x}\ln x dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calculons $\int \cos(5x)dx.$
On a,

$$\int \cos(5x)dx = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x)dx = \frac{1}{5}\sin(5x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

4) Calculons $\int (2x-2)\sqrt{x^2-2x+3}dx.$
On a,

$$\begin{aligned}\int (2x-2)\sqrt{x^2-2x+3}dx &= \int (2x-2)(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{3}(x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercise 5.24 *Calculer les primitives et les intégrales suivants :*

1) $\int (x+1)e^x dx, \quad \int_0^1 (x+1)e^x dx.$ *2)* $\int \frac{1}{(x+1)^{10}}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^{10}}dx.$

3) $\int (\ln x)\,dx, \quad \int_1^e (\ln x)\,dx.$ *4)* $\int \frac{dx}{1+e^x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}.$

Solution.
1) Calculons $\int (x+1)e^x dx.$

On utilise l'intégration par parties.
On pose :

$$\begin{cases} U(x) = x+1, \\ V'(x) = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = e^x. \end{cases}$$

Donc

$$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int 1e^x dx = xe^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = \left[\quad xe^x \quad \right]_0^1 = 1.e^1 - (0)e^0 = e.$$

2) Calculons $\int \frac{1}{(x+1)^{10}}\, dx$.
On pose : $t = x+1$, *donc* $dt = dx$. *Alors*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^{10}}\, dx &= \int \frac{1}{t^{10}} dt = \int t^{-10}\, dt = \frac{-1}{9} t^{-9} + c, \ c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{-1}{9(x+1)^9} + c, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^{10}} dx = \left[\frac{-1}{9(x+1)^9} \right]_0^1 = \left(\frac{-1}{9(1+1)^9} \right) - \left(\frac{-1}{9(0+1)^9} \right) = \frac{511}{4608}.$$

3) Calculons $\int (\ln x)\, dx$.
On utilise l'intégration par parties.
On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \ln x, \\ V'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x}, \\ V(x) = x. \end{cases}$$

Donc

$$\int (\ln x)\, dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x} dx = x\ln x - \int 1dx = -x + x\ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\int_1^e (\ln x)\, dx. = \left[\quad -x + x\ln x \quad \right]_1^e = (-e + e\ln e) - (-1 + 1\ln 1) = 1.$$

4) Calculons $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

On pose : $t = e^x$, *donc* $dt = e^x dx$, *d'où* $dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{-1}{1+t}\right) di = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} \\
&= \ln|t| - \ln|1+t| + c, \ c \in \mathbb{R} \\
&= x - \ln|1+e^x| + c, \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} &= \Big[\ x - \ln|1+e^x|\ \Big]_0^1 = (1 - \ln|1+e|) - (0 - \ln|2|) \\
&= \ln 2 - \ln(e+1) + 1 = 1 + \ln\frac{2}{e+1}.
\end{aligned}$$

Exercise 5.25 *Calculer les primitives suivantes :*

1) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$. *2)* $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

3) $\int \sin^3 x \cos x dx$. *4)* $\int_0^\pi \sin^3 x \cos x dx$

Solution.

1) Calculons $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

On pose $t = \sin x \Rightarrow dt = (\cos x)\, dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt \\
&= \frac{1}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + c, \ c \in \mathbb{R}. \\
&= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x + c, \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) Calculons $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \sin^3 x dx &= \int \cos^6 x \left(1-\cos^2 x\right) \sin x dx = -\int t^6 \left(1-t^2\right) dt \\ &= \int \left(t^8 - t^6\right) dt = \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{7}t^7 + c,\ c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calculons $\int \sin^3 x \cos x\ dx$.

On pose : $t = \cos x,$ *donc* $dt = -(\sin x)\, dx,$ *d'où* $dx = \dfrac{-1}{\sin x} dt.$

Alors

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &= \int \left(\sin^3 x\right) t\ \frac{-1}{\sin x} dt = -\int \left(\sin^2 x\right) t\ dt \\ &= -\int \left(1-\cos^2 x\right) t\ dt = -\int \left(1-t^2\right) t\ dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4 + c,\ c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2 ème méthode

On pose : $t = \sin x,$ *donc* $dt = (\cos x)\, dx,$ *d'où* $dx = \dfrac{1}{\cos x} dt.$

Alors,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &= \int t^3\ \cos x \frac{1}{\cos x} dt = \int t^3\ dt = \frac{1}{4}t^4 + c,\ c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3 ème méthode

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

(*On a appliqué* $\int f.f^n = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$ *avec* $f(x) = \sin x$ *et* $n = 3$).

4) Calculons $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos x dx.$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos x dx &= \left[-\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\pi} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\cos^2 \pi + \frac{1}{4}\cos^4 \pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos^2 0 + \frac{1}{4}\cos^4 0\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{4}(-1)^4\right) - \left(-\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{4}(1)^4\right) = 0.\end{aligned}$$

Exercise 5.26 *Calculer les primitives suivantes :*

1) $\int x^3 ln(3x) \quad dx.$ 2) $\int (x+1)\sqrt{2x+1}dx$ 3) $I = \int \sin(2x)e^{3x}dx.$

1) Calculons $\int x^3 \ln(3x)dx.$

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \ln(3x), \\ V'(x) = x^3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}, \\ V(x) = \frac{x^4}{4}. \end{cases}$$

Donc,

$$\int x^3 \ln(3x)dx = \frac{x^4}{4}\ln(3x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln(3x) - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln(3x) - \frac{1}{16}x^4 + c, c \in \mathbb{R}.$$

2) Calculons $\int (x+1)\sqrt{2x+1}dx.$

On utilise l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = x+1, \\ V'(x) = \sqrt{2x+1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Donc,

$$\int (x+1)\sqrt{2x+1}dx = (x+1)\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \tfrac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$= \frac{x+1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\int 2(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$= \frac{x+1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3) Calculer $I = \int \sin(2x)e^{3x}dx.$

On utilise l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \sin 2x, \\ V'(x) = e^{3x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 2\cos 2x, \\ V(x) = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{cases}$$

Donc,

$$I = \sin(2x)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 2\cos(2x)\frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{3}\int \cos(2x)e^{3x}dx$$

On calcule de $\int e^x \cos(x)dx$, *par l'intégration par parties.*

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \cos 2x, \\ V'(x) = e^{3x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = -2\sin 2x, \\ V(x) = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int \cos(2x)e^{3x}dx &= \cos(2x)\frac{1}{3}e^{3x} - \int -2\sin(2x)\frac{1}{3}e^{3x}dx \\ &= \frac{1}{3}\cos(2x)e^{3x} + \frac{2}{3}\int \sin(2x)e^{3x}dx. \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{3}\int \cos(2x)e^{3x}dx \\ &= \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{3}(\frac{1}{3}\cos(2x)e^{3x} + \frac{2}{3}\int \sin(2x)e^{3x}dx) \\ &= \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{9}\cos(2x)e^{3x} - \frac{4}{9}\int \sin(2x)e^{3x}dx \\ &= \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{9}\cos(2x)e^{3x} - \frac{4}{9}I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow I + \frac{4}{9}I = \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{9}\cos(2x)e^{3x} \\ &\Rightarrow \frac{13}{9}I = \frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{9}\cos(2x)e^{3x} \\ &\Rightarrow I = \frac{9}{13}(\frac{1}{3}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{9}\cos(2x)e^{3x}) + c, c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow I = \frac{3}{13}\sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{13}\cos(2x)e^{3x} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercise 5.27 *Calculer les primitives suivantes :*

1) $\int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}} \quad dx$ 2) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \quad dx$ 3) $\int \frac{3}{2x(lnx)^2} \quad dx$

Solution.

1) Calculons $\int \frac{e^{(2x+1)}}{2+5e^{(2x+1)}}dx.$

En posant

$$t = e^{(2x+1)} \Rightarrow dt = 2e^{(2x+1)}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2e^{(2x+1)}}dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2t}dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{(2x+1)}}{2+5e^{(2x+1)}}dx &= \int \frac{t}{2+5t}\frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2+5t}dt = \frac{1}{10}\int \frac{5}{2+5t}dt \\ &= \frac{1}{10}\ln|2+5t| + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{10}\ln\left|2+5e^{(2x+1)}\right| + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Calculons $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx$.
En posant

$$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x+1}dt \Rightarrow dx = 2tdt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{1}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt \\ &= 2\int (\frac{t+1}{1+t} + \frac{-1}{1+t})dt = 2\int 1dt - 2\int \frac{1}{1+t}dt \\ &= 2t - 2\ln|1+t| + c, c \in \mathbb{R} \\ &= 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right| + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calculons $\int \frac{3}{2x(\ln x)^2}dx$.
En posant $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x(\ln x)^2}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2}dt = \frac{3}{2}\int t^{-2}dt \\ &= \frac{3}{2}\frac{t^{-2+1}}{-2+1}dt = \frac{-3}{2}\frac{1}{t} + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-3}{2\ln x} + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercise 5.28 *Intégrer les fractions rationnelles suivantes :*

$$1) \int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}dx. \quad 2) \int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx. \quad 3) \int \frac{7x+6}{x^2-x-6}dx$$

Solution.
1) Calculons $\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}dx$.

On décompose d'abord $\dfrac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}$ *en éléments simples :*
On a :

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} = x+2+\frac{x-5}{x^2+2x+1}.$$

On décompose aussi $\dfrac{x-5}{x^2+2x+1}$ *en éléments simples :*

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{x^2+2x+1} &= \frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2}, \quad a,b\in\mathbb{R}.\\ &= \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{ax+(a+b)}{(x+1)^2} = \frac{1x+(-5)}{(x+1)^2},\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-5 \end{cases} \quad \Rightarrow a=1, b=-6,$$

d'où

$$\frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}.$$

Donc,

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} = x+2+(\frac{x-5}{x^2+2x+1}) = x+2+(\frac{1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}).$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}dx &= \int (x+2+\frac{x-5}{x^2+2x+1})dx\\ &= \int (x+2+\frac{1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2})dx\\ &= \int (x+2)dx + \int \frac{1}{x+1}dx - 6\int \frac{1}{(x+1)^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Calculons $\int \dfrac{x-1}{x^2+x+1}dx.$
On a

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int (\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{-3}{x^2+x+1})dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$,

$$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(\frac{(\frac{2x+1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1)=\frac{3}{4}((\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1),$$

on pose

$$t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Rightarrow dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}dt=dx,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx &= \int\frac{1}{\frac{3}{4}((\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1)}dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{((\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1)}dx\\ &= \frac{4}{3}\int\frac{1}{(t^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{(t^2+1)}dt\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(t)+c, c\in\mathbb{R}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{3}{2}\int(\frac{1}{x^2+x+1})dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c, c\in\mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\sqrt{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calculons $\int \frac{7x+6}{x^2-x-6}dx$.

On décompose d'abord $\frac{7x+6}{x^2-x-6}$ *en éléments simples :*

$$\begin{aligned}\frac{7x+6}{x^2-x-6} &= \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3},\quad a,b\in\mathbb{R}.\\ &= \frac{(a+b)x+(-3a+2b)}{(x+1)(x-1)}=\frac{7x+6}{x^2-1}\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases}a+b=7\\-3a+2b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+3b=21\\-3a+2b=6\end{cases}\Rightarrow a=\frac{8}{5}, b=\frac{27}{5},$$

d'où
$$\frac{7x+6}{x^2-x-6} = \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{8}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{27}{5}\frac{1}{x-3}.$$
Donc,
$$\begin{aligned}
\int \frac{7x+6}{x^2-x-6}dx &= \int \left(\frac{8}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{27}{5}\frac{1}{x-3}\right) dx \\
&= \frac{8}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{27}{5}\int \frac{1}{x-3}dx \\
&= \frac{8}{5}\ln|x+2| + \frac{27}{5}\ln|x-3| + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercise 5.29 *Intégrer les fonctions trigonométriques suivantes :*

1) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 2) $\int \sin(3x)\cos(4x)dx$.

1) Calculons $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
On utilise les deux formules suivantes :
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad et \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$
d'où,
$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^2 x &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) = \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x) \\
&= \frac{1}{4}(1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x)) = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x) = \frac{1}{8}(1-\cos 4x),
\end{aligned}$$
donc,
$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{8}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx \\
&= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
2) Calculons $\int \sin(3x)\cos(4x)dx$.
On a,
$$\begin{aligned}
\int \sin(3x)\cos(4x)dx &= \int \frac{1}{2}(\sin((3+4)x) + \sin((3-4)x))dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sin(7x)dx + \frac{1}{2}\int \sin(-x)dx \\
&= \frac{-1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos(-x) + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{-1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercise 5.30 *Considérons les primitives suivantes :*

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad et \quad J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

1) Calculer $I + J$ et $I - J$.

2) Déduire I et J.

Solution.

1) Calculons $I + J$ et $I - J$.

On a,

$$\begin{aligned} I + J &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int (\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}) dx \\ &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int 1 dx = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} I - J &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int (\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}) dx \\ &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int \frac{- \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \ln |\sin x + \cos x| + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) En déduire I et J.

On a,

$$\begin{cases} I + J = x + c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ I - J = - \ln |\sin x + \cos x| + c_2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

De $(1) + (2)$, *on a :* $2I = x - \ln |\sin x + \cos x| + c_1 + c_2$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{\ln |\sin x + \cos x|}{2} + c_3, c_3 \in \mathbb{R}.$$

De $(1) - (2)$, *on obtient :* $2J = x + \ln |\sin x + \cos x| + c_1 - c_2$

$$J = \frac{x}{2} + \frac{\ln |\sin x + \cos x|}{2} + c_4, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

[1] J. Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.

[2] N. Faddeev, I. Sominski, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Edition de Moscou

[3] M. Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université.

[4] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boshet, Exercices d'algèbre, 1er cycle scientifique préparation aux grandes écoles 2e année, Armand Colin – Collection U.

[5] K. Allab, *Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle*. Office des publications universitaires, (1986).

[6] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs*, Librairie Armand Colin (1977).

[7] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, *Précis de mathématiques, Analyse- première année*, Bréal, Rosny 2003.

[8] J. P. Escofier, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod 2014.

[9] M. Mehbali, *Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle)*, Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[10] J. M. Monier, *ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5^e édition. Dunod, Paris, 2006.