第一章　集合的基本性质

1.1　集合的概念

在日常生活中，在逻辑、数学以及其它科学的研究中，我们经常遇到一类对象，这类对象是某些东西的总体。例如人类这个概念的外延就是所有具体的人的总体，动物这个概念的外延就是所有具体的动物的总体，又如自然数、整数、实数都是具有某种性质的数的总体，三角形、正方形、多边形都是某种几何图形的总体。把这类对象最一般的性质抽象出来就是集合。

集合，简单地说就是一堆东西的总体，其中每个东西称为这个集合的元素，这样的集合概念是素朴的和直观的，我们可以通过对具体集合的认识和对集合性质的讨论来加深对它理解。

以后在使用人类、动物等概念时、总是将它们当作集合来看待。除了以上提到的集合外，我们再来看几个例子。

1.1.1 例　太阳系的行星是水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星的总体。

1.1.2 例　书，纸，笔分别是所有具体的书，所有具体的纸和所有具体的笔的总体。

我们将什么东西都没有也看做一堆东西的总体，从而它就是一个集合。这样的集合称为空集。

有的集合只有一个元素，但这个集合和它惟一的的元素是不同的。这个元素只是一个东西，而这个集合是一堆东西的总体，只不过这堆东西只有一个。如地球的卫星是一个集合，它只有一个元素月亮。地球的卫星和月亮是不同的。

以后一般用英文大写字母 A, B, C, X, Y, Z 表示集合，用英文小

写字母 a, b, c, x, y, z 等表示集合的元素。常用的特殊集合用专门的记号，如用英文大写黑体字母 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别表示自然数、整数、有理数和实数。

1.1.3 定义　属于　a 是 A 的元素称为 a 属于 A，记为 $a\in A$，a 不是 A 的元素称为 a 不属于 A，记为 $a\notin A$。$\in$称为属于关系。

为了简便起见，将 $a\in A$ 且 $b\in A$ 简记为 $a, b\in A$。更一般地，将 $a_1\in A,\cdots, a_n\in A$ 简记为 $a_1,\cdots, a_n\in A$。

以下是属于关系的几个例子。

1.1.4 例　金星$\in$太阳系的行星。月亮$\notin$太阳系的行星。

1.1.5 例　$3\in\mathbf{N}$，$\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$。$\frac{2}{3}\notin\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$。

集合由它的元素惟一确定，不涉及其他因素。因此要描述一个集合，只要描述这个集合的元素就行了。有两种描述集合的方法，一种是列举集合的所有元素，用$\{a_1,\cdots, a_n\}$表示，如太阳系的行星可表示为

{水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 天王星, 海王星, 冥王星},

又如

{真，假}、{李白，杜甫}、$\{1, 2\}$、$\{0, 1,\cdots, n-1\}$

等。另一种是刻画集合中元素的性质，用$\{x \mid x$ 有性质$\phi\}$来表示，如

$\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x\le 0\}$、$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$

等。

集合是个很一般的概念。任何东西都能放在一起作为一堆东西，所以组成集合的元素没有任何限制。集合的元素本身可以还是一个集合，如在集合

{书，纸，笔}

中，元素书、纸、笔也是集合。集合的元素可以是具体的，如

{金星，水星}、{李白，杜甫}

等，也可以是抽象的，如

{真，假}，$\{1, 2\}$

等。甚至在一个集合中，可以有些元素是具体的，有些元素是抽象的，如

$$\{1, 2, \text{金星}, \text{水星}\}、\{\text{李白}, \text{杜甫}, \text{真}, \text{假}\}$$

等。集合和它的某些元素可以组成新的集合，如

$$\{1, \{1, 2, 3\}\}，\{\text{金星}, \text{水星}, \text{太阳系的行星}\}$$

等。

每个集合都有确定的元素，但刻画集合的确定性并不一定需要知道它们的元素。集合的确定性表现在：

任何一个东西是或者不是这个集合的元素，但不能既是又不是这个集合的元素。

这样，对于属于与不属于来说就有：

任给 x，并非 $x\in A$ 当且仅当 $x\notin A$。

从集合的确定性要求看，日常生活中使用的某些概念不能简单地看作集合的，如青年、新鲜的苹果等。如果需要将这样的概念作为集合来使用，必须给它们划出明确的界限。

1.1.6 定义 集合的相等 A 和 B 有同样的元素称为 A 和 B 相等，记为 $A = B$。因为集合由它的元素惟一确定，所以两个集合相等就是说它们是同一个集合。

如果 $A = B$，则 x 是 A 的元素当且仅当 x 是 B 的元素。如果 x 是 A 的元素当且仅当 x 是 B 的元素，则 A 和 B 就有同样的元素，所以 $A = B$。

因此可以用属于关系将 $A = B$ 表示为：

任给 x，$x\in A$ 当且仅当 $x\in B$。

由“当且仅当”的含义，也可以将 $A = B$ 表示为：

任给 x，如果 $x\in A$ 则 $x\in B$，如果 $x\in B$ 则 $x\in A$。

A 和 B 不相等记为 $A \neq B$。如果 $A \neq B$，则 B 中有元素不属于 A 或 A 中有元素不属于 B。反之如果 B 中有元素不属于 A 或 A 中有元素不属于 B，则 $A \neq B$。所以 $A \neq B$ 的条件是：

存在 x，$(x\in B$ 且 $x\notin A)$或$(x\in A$ 且 $x\notin B)$。

集合和它的描述方法无关。如

$$\{\text{金星}, \text{水星}\} = \{x \mid x \text{ 是离太阳比地球离太阳近的行星}\},$$

$$\{1, 2\} = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\},$$

$$\mathbf{N} = \{x \mid x\in \mathbf{Z} \text{ 且 } x\geq 0\}$$

等。在列举集合元素时和次序无关，如

$$\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\},$$

$$\{\text{金星}, \text{水星}\} = \{\text{水星}, \text{金星}\}$$

等。也和重复列举无关，如

$$\{\text{书}, \text{纸}, \text{笔}\} = \{\text{书}, \text{纸}, \text{笔}, \text{纸}\},$$

$$\{1, 2, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

等。

如果两个集合都没有元素，则它们就有同样的元素。这就是说任何空集都相等，实际上只有一个空集，以后将这惟一的空集记为$\varnothing$。

如果 $A \neq \varnothing$，则称 A 是非空集合。

习题 1.1

1.1.1 判断下列元素是否属于所指集合。

(1) 哈尔滨，北京，东京，浙江。集合是中国的城市。

(2) 1，2，$\{1, 2\}$，$\{1, 2, 3\}$。集合是$\{1, \{1, 2, 3\}\}$。

(3) 地球，哈雷彗星，北极星，天王星。集合分别是恒星，太阳系的行星，太阳系的天体。

1.1.2 指出下列集合是否相等。

(1) $\{1, \{1, 2\}\}$、$\{1, 1, 2\}$和$\{1, 2\}$。

(2) $\{1, \{1, 2, 1\}, 2\}$和$\{1, 2, \{1, 2\}\}$。

(3) $\{x \mid x\in \mathbf{N}$ 或$-x\in \mathbf{N}\}$和 $\mathbf{Z}$。

(4) $\{x \mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $x\leq 3\}$和$\{0, 1, 2, 3\}$。

1.2　子集和幂集

给定一个集合，它的一部分元素能组成一个集合。这样的集合的特征是：它的每个元素都是原集合的元素。

1.2.1 定义　子集　如果 B 的元素都是 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，也称 B 包含于 A，记为 $B \subseteq A$ (图 1.2.1)。$\subseteq$ 称为包含关系。

用属于关系可以将 $B \subseteq A$ 表示为：

任给 x，如果 $x \in B$ 则 $x \in A$。

如果 $B \subseteq A$，则所有不属于 A 的元素都不会属于 B。反之，如果所有不属于 A 的元素都不属于 B，则 $B \subseteq A$。所以 $B \subseteq A$ 也可以表示为：

任给 x，如果 $x \notin A$ 则 $x \notin B$。

B 不是 A 的子集记为 $B \nsubseteq A$。

如果 $B \nsubseteq A$，则 B 中有元素不属于 A。反之，如果 B 中有元素不属于 A，则 $B \nsubseteq A$ (图 1.2.2)。所以 $B \nsubseteq A$ 可以表示为：

存在 x，使得 $x \in B$ 且 $x \notin A$。

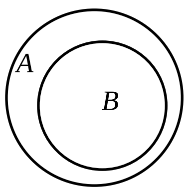


图 1.2.1　$B \subseteq A$

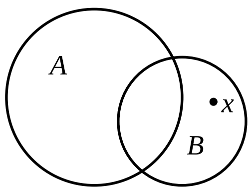


图 1.2.2　$B \nsubseteq A$

空集没有元素，所以对任何集合都可以说空集的元素都是这个集合的元素。因此空集是任何集合的子集，即：

任给集合 A，都有$\varnothing \subseteq A$。

另外，任何非空集合都不是空集的子集，所以：

如果 $A \subseteq \varnothing$，则 $A = \varnothing$。

显然，集合 A 的元素都是集合 A 的元素，所以任何集合都是它自己的子集，即：

任给集合 A，都有 $A \subseteq A$。

如果 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$，则称 B 是的 A 的真子集。

和属于关系类似，为了简便起见，将 $B_1 \subseteq A, \cdots, B_n \subseteq A$ 简记为 $B_1, \cdots, B_n \subseteq A$。

为了熟悉子集的概念，我们来看子集的一些例子。

1.2.2 例　鱼是动物的子集。

三角形不是正方形的子集。

1.2.3 例　$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$。

$\mathbf{R} \nsubseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Z}$。

A 是集合，集合$\{x \mid x \in A$ 且 x 有性质$\phi\}$是 A 中所有具有性质ϕ 的元素组成的 A 的子集，这是很常见的一种子集。

1.2.4 例　$\mathrm{n} \in \mathbf{N}$，所有比 n 小的自然数组成的集合

$\{x \mid x \in \mathbf{N}$ 且 $x < \mathrm{n}\}$

是 $\mathbf{N}$ 的子集，这个集合记为 $\mathbf{N}_\mathrm{n}$。它们有以下三个性质：

(1) $\mathbf{N}_0 = \varnothing$。因为没有比零小的自然数。

(2) 当 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ 时有 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。证明如下：

任给 x，如果 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{n}$，则 $x < \mathrm{n}$，由 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ 和 $x < \mathrm{n}$ 得

$x < \mathrm{m}$，

由 $\mathbf{N}_\mathrm{m}$ 的定义得

$x \in \mathbf{N}_\mathrm{m}$。

这就证明了

任给 x，如果 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{n}$ 则 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{m}$，

因此 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。

(3) 当 $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ 时有 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \neq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。证明如下：

如果 $\mathrm{n} < \mathrm{m}$，则

$n\in\mathbf{N}_m$ 且 $n\notin\mathbf{N}_n$，

如果 m<n，则

$m\in\mathbf{N}_n$ 且 $m\notin\mathbf{N}_m$，

在两种情况下都有

存在 x，使得($x\in\mathbf{N}_m$ 且 $x\notin\mathbf{N}_n$)或($x\in\mathbf{N}_n$ 且 $x\notin\mathbf{N}_m$)，

因此 $\mathbf{N}_n \neq \mathbf{N}_m$。

1.2.5 例 任给 $a, b\in\mathbf{R}$，开区间

$$(a, b) = \{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } a<x<b\}$$

和左开右闭区间

$$(a, b] = \{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } a<x\le b\}$$

都是 $\mathbf{R}$ 的子集。左开右闭区间有以下两个性质：

(1) 当 $b\le a$ 时，不存在满足 $a<x\le b$ 的实数 x，所以$(a, b] = \varnothing$。

(2) 当 $a\le c$ 且 $d\le b$ 时有$(c, d] \subseteq (a, b]$。

证明如下：

任给 x，如果 $x\in(c, d]$，则 $c<x\le d$，由 $a\le c$ 和 $c<x$ 得

$$a<x,$$

由 $d\le b$ 和 $x\le d$ 得 $x\le b$，所以

$$a<x\le b,$$

再由$(a, b]$的定义得

$$x\in(a, b]。$$

这就证明了

任给 x，如果 $x\in(c, d]$则 $x\in(a, b]$，

因此$(c, d] \subseteq (a, b]$。

开区间也有类似的性质。

1.2.6 例 $\mathbf{Z}^+ = \{x \mid x\in\mathbf{Z} \text{ 且 } x>0\}$，

$\mathbf{Q}^+ = \{x \mid x\in\mathbf{Q} \text{ 且 } x>0\}$，

$\mathbf{R}^+ = \{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x>0\}$

分别是正整数的集合，正有理数的集合和正实数的集合。

子集有以下基本性质。

1.2.7 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$。

(2) 如果 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$，则 $A = B$。

(3) 如果 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $C \subseteq A$。

证 (1) 前面已有说明。

(2) 任给 x，如果 $x\in B$，则由 $B \subseteq A$ 得

$$x\in A,$$

如果 $x\in A$，则由 $A \subseteq B$ 得

$$x\in B。$$

因此 $A = B$ (图 1.2.3)。

任给 x，如果 $x\in C$，则由 $C \subseteq B$ 得

$$x\in B,$$

由 $x\in B$ 和 $B \subseteq A$ 得

$$x\in A。$$

因此 $C \subseteq A$ (图 1.2.4)。■

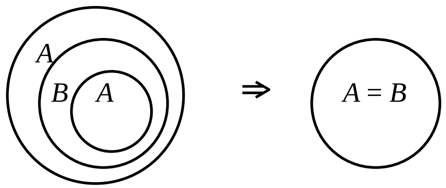


图 1.2.3

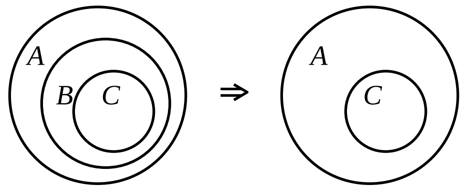


图 1.2.4

定理 1.2.7 的(2)可用来简化集合相等的证明，要证明 $A = B$，只需证明 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$ 就行了。

定理 1.2.7 的(3)称为包含关系的传递性。由于传递性，以后将 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 简记为 $C \subseteq B \subseteq A$。

一个集合有许多子集，所有这些子集可以组成一个集合。

1.2.8 定义 幂集 集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记为 $\mathsf{P}(A)$，即 $\mathsf{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$。所以：

$$X \in \mathsf{P}(A) \text{当且仅当 } X \subseteq A\text{。}$$

因为$\varnothing \subseteq A$ 且 $A \subseteq A$，所以$\varnothing, A \in \mathsf{P}(A)$。这说明了幂集不会是空集。特别地，空集$\varnothing$的幂集 $\mathsf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$不是空集，它有一个元素$\varnothing$。

以下是幂集的两个例子。

1.2.9 例 $\mathsf{P}(\{\text{真},\text{假}\}) = \{\varnothing, \{\text{真}\}, \{\text{假}\}, \{\text{真},\text{假}\}\}$，

$\mathsf{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$。

习题 1.2

1.2.1 判断下列集合是否是所指集合的子集。

(1) 西瓜，南瓜，苹果，荔枝，仙人掌。集合是水果。

(2) $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$。集合是$\{1, \{1, 2, 3\}, 3\}$。

(3) $\{x \mid x^2+3x+2 = 0\}$，$\{x \mid 2x^2+3x+1 = 0\}$，$\{x \mid x\in\mathbf{N}$ 且 $x\geq 5\}$。集合分别是 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Q}$。

1.2.2 任给 $a\in\mathbf{R}$，令 $\mathbf{Q}_a = \{x \mid x\in\mathbf{Q}$ 且 $x<a\}$。证明：

(1) 如果 $a\leq b$，则 $\mathbf{Q}_a \subseteq \mathbf{Q}_b$。

(2) 如果 $a \neq b$，则 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}_b$。

(3) 任给 $a\in\mathbf{R}$，都有 $\mathbf{Q}_a \neq \varnothing$且 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}$。

1.2.3 $a, b\in\mathbf{R}$。证明：如果 $a\leq c$ 且 $d\leq b$，则$(c, d) \subseteq (a, b)$。

1.2.4 求$\{1, \{1, 2\}\}$的幂集。

1.3 集合的交和并

两个集合的公共元素能够组成集合，如女大学生就是女人和大学生这两个集合的公共元素所组成的集合。两个集合的所有元素能够组成集合，如动植物就是动物和植物这两个集合的所有元素组成的集合，一般地引进以下概念。

1.3.1 定义 集合的交 集合 A 和 B 的公共元素组成的集合称为集合 A 和 B 的交，记为 $A\cap B$。$A\cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的元素所组成，所以有：

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}\text{(图 1.3.1)。}$$

用属于关系表示就是：

$$x\in A\cap B \text{ 当且仅当}(x\in A \text{ 且 } x\in B)\text{。}$$

如果 x 不属于 $A\cap B$，则 x 必定不属于它们中的一个。反之如果 x 不属于它们中的一个，则 x 就不属于 $A\cap B$。所以：

$$x\notin A\cap B \text{ 当且仅当}(x\notin A \text{ 或 } x\notin B)\text{。}$$

如果 $A\cap B = \varnothing$，则称 A 和 B 不交(图 1.3.2)。$A\cap B = \varnothing$是说：任给 x，都有 $x\notin A\cap B$，由 $x\notin A\cap B$ 的条件，$A\cap B = \varnothing$可表示为：

$$\text{任给 } x\text{，都有 } x\notin A \text{ 或 } x\notin B\text{。}$$

如果 $A\cap B = \varnothing$，则 A 的元素都不属于 B。反之如果 A 的元素都不属于 B，则 $A\cap B = \varnothing$。所以 $A\cap B = \varnothing$也可以表示为：

$$\text{任给 } x\text{，如果 } x\in A \text{ 则 } x\notin B\text{。}$$

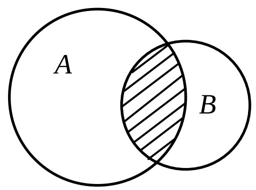


图 1.3.1 A∩B

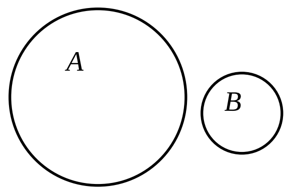


图 1.3.2 A∩B = ∅

1.3.2 定义　集合的并　集合 A 和 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 和 B 的并，记为 $A\cup B$。$A\cup B$ 是由属于 A 或属于 B 的元素所组成，所以有：

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}(\text{图 } 1.3.3)。$$

用属于关系表示就是：

$$x\in A\cup B \text{ 当且仅当}(x\in A \text{ 或 } x\in B)。$$

如果 $x\in A\cup B$，则从 $x\notin A$ 能得到 $x\in B$。反之如果从 $x\notin A$ 能得到 $x\in B$，则 $x\in A\cup B$。所以又有：

$$x\in A\cup B \text{ 当且仅当(如果 } x\notin A \text{ 则 } x\in B)。$$

如果 $x\notin A\cup B$，则 x 既不能属于 A 也不能属于 B。反之如果 x 既不属于 A 也不属于 B，则 $x\notin A\cup B$。所以：

$$x\notin A\cup B \text{ 当且仅当}(x\notin A \text{ 且 } x\notin B)。$$

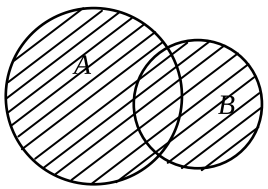


图 1.3.3　A∪B

我们通过例子来熟悉集合的交和并的概念。

1.3.3 例　菱形∩长方形 ＝ 正方形，

奇数∪偶数 ＝ 整数。

1.3.4 例　$\{1, 2, 3\}\cap\{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$，

$\{1, 2, 3\}\cup\{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$。

1.3.5 例　$(-1, 1]\cap(0, 2] = (0, 1]$，

$(-1, 1]\cup(0, 2] = (-1, 2]$。

一般地，如果 $a\le c\le b\le d$，则

$$(a, b]\cap(c, d] = (c, b],$$

$$(a, b]\cup(c, d] = (a, d],$$

理由如下：

任给 x，$x\in(a, b]\cap(c, d]$ 当且仅当 $(a<x\le b$ 且 $c<x\le d)$

当且仅当 $c<x\le b$

当且仅当 $x\in(c, b]$。

任给 x，$x\in(a, b]\cup(c, d]$ 当且仅当 $(a<x\le b$ 或 $c<x\le d)$

当且仅当 $a<x\le d$

当且仅当 $x\in(a, d]$。

1.3.6 例　A 是集合，令

$$B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 有性质}\phi\},$$

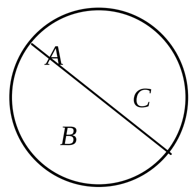
和

$$C = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 没有性质}\phi\},$$

则有

$$B\cap C = \varnothing，B\cup C = A。$$

这是无矛盾律和排中律在集合论中的一种体现(图 1.3.4)。



$B\cap C = \varnothing$

$B\cup C = A$

图 1.3.4

集合的交和并都是用两个集合去形成一个新的集合，它们都称为集合的运算。

集合运算和包含关系有以下关系。

1.3.7 定理　A, B, C 是任意集合。

(1) $A \subseteq A\cup B$，$B \subseteq A\cup B$。

(2) $A\cap B \subseteq A$，$A\cap B \subseteq B$。

(3) 如果 $B \subseteq A$ 且 $C \subseteq A$，则 $B \cup C \subseteq A$。

(4) 如果 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$，则 $C \subseteq A \cap B$。

证 (1)(2)显然。它们是说两个集合都是它们的并的子集，两个集合的交是它们中任一个的子集。

(3) 任给 x，如果 $x \in B \cup C$，则当 $x \in B$ 时，由 $B \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

当 $x \in C$ 时，由 $C \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

所以在两种情况下都有

$$x \in A。$$

因此 $B \cup C \subseteq A$ (图 1.3.5)。

(4) 任给 x，如果 $x \in C$，则由 $C \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

由 $C \subseteq B$ 得

$$x \in B,$$

所以

$$x \in A \cap B。$$

因此 $C \subseteq A \cap B$ (图 1.3.6)。■

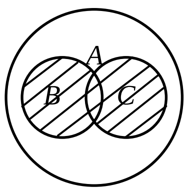


图 1.3.5

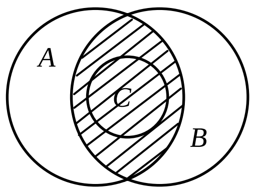


图 1.3.6

可以将定理 1.3.7 的(3)和(4)作以下推广。

1.3.8 定理 A_1, A_2, B_1, B_2 是任意集合。

(1) 如果 $B_1 \subseteq A_1$ 且 $B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1 \cup B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$。

(2) 如果 $B_1 \subseteq A_1$ 且 $B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$。

证 (1) 由 $B_1 \subseteq A_1$ 和 $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ 得

$$B_1 \subseteq A_1 \cup A_2,$$

由 $B_2 \subseteq A_2$ 和 $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ 得

$$B_2 \subseteq A_1 \cup A_2,$$

由 $B_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ 和 $B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ 得 $B_1 \cup B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$。

(2) 由 $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ 和 $B_1 \subseteq A_1$ 得

$$B_1 \cap B_2 \subseteq A_1,$$

由 $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$ 和 $B_2 \subseteq A_2$ 得

$$B_1 \cap B_2 \subseteq A_2,$$

由 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_1$ 和 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_2$ 得 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$。■

集合运算有以下基本性质。

1.3.9 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$。

(2) 幂等律 $A \cup A = A$，$A \cap A = A$。

(3) 交换律 $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

(4) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。

(5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$。

(6) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

证 (1) 显然。

(2) 因为“$x \in A$ 或 $x \in A$”与“$x \in A$”是等值的，所以

任给 x，$x \in A \cup A$ 当且仅当 $x \in A$。

因此 $A \cup A = A$。

类似地，由“$x \in A$ 且 $x \in A$”与“$x \in A$”是等值的，可得 $A \cap A = A$。

(3) 因为“$x \in A$ 或 $x \in B$”和“$x \in B$ 或 $x \in A$”是等值的，所以

任给 x，$x \in A \cup B$ 当且仅当 $x \in B \cup A$。

因此 $A\cup B = B\cup A$。

类似地，由“ $x\in A$ 且 $x\in B$ ”和“ $x\in B$ 且 $x\in A$ ”是等值的，可得 $A\cap B = B\cap A$。

(4) 由 $A\subseteq A$ 和 $B\subseteq B\cup C$ 得

$$A\cup B\subseteq A\cup(B\cup C),$$

由 $C\subseteq B\cup C$ 和 $B\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$得

$$C\subseteq A\cup(B\cup C),$$

由 $A\cup B\subseteq A\cup(B\cup C)$和 $C\subseteq A\cup(B\cup C)$得

$$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)。$$

类似地可以证明 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$。

因此 $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (图 1.3.7)。

由 $A\subseteq A$ 和 $B\cap C\subseteq B$ 得

$$A\cap(B\cap C)\subseteq A\cap B,$$

由 $A\cap(B\cap C)\subseteq B\cap C$ 和 $B\cap C\subseteq C$ 得

$$A\cap(B\cap C)\subseteq C,$$

由 $A\cap(B\cap C)\subseteq A\cap B$ 和 $A\cap(B\cap C)\subseteq C$ 得

$$A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C。$$

类似地可以证明$(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$。

因此 $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ (图 1.3.8)。

(5) 由 $A\subseteq A$ 和 $A\cap B\subseteq A$ 得

$$A\cup(A\cap B)\subseteq A,$$

又

$$A\subseteq A\cup(A\cap B),$$

因此 $A\cup(A\cap B) = A$。

类似地可证 $A\cap(A\cup B) = A$。

(6) 任给 x，如果 $x\in A\cap(B\cup C)$，则

$$x\in A \text{ 且 } x\in B\cup C。$$

当 $x\in B$ 时，由 $x\in A$ 且 $x\in B$ 得

$$x\in A\cap B,$$

当 $x\in C$ 时，由 $x\in A$ 且 $x\in C$ 得

$$x\in A\cap C,$$

在两种情况下都有

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)。$$

所以 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

由 $A\subseteq A$ 和 $B\subseteq B\cup C$ 得

$$A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C),$$

由 $A\subseteq A$ 和 $C\subseteq B\cup C$ 得

$$A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C),$$

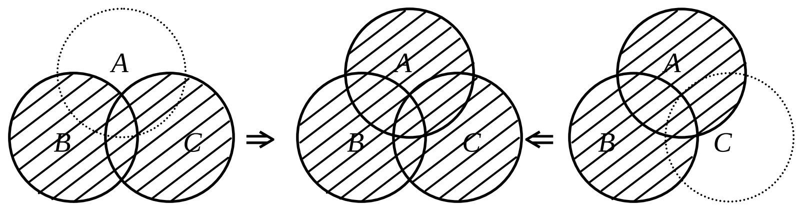
由 $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$和 $A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$得

$$(A\cap B)\cup(A\cap B)\subseteq A\cap(B\cup C)。$$

因此 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ (图 1.3.9)。

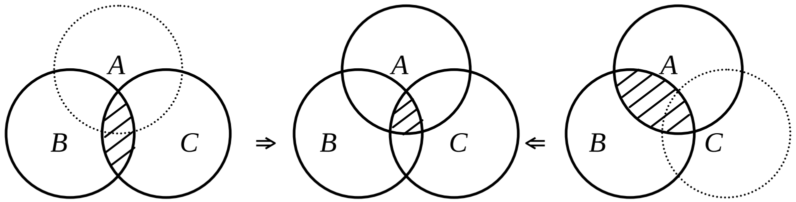
类似地可证 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (图 1.3.10)。但用已有的结果证明它更为简单：

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup C) &= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C)\\ &= (A\cap(A\cup B))\cup(C\cap(A\cup B))\\ &= A\cup(C\cap(A\cup B))\\ &= A\cup((C\cap A)\cup(C\cap B))\\ &= (A\cup(A\cap C))\cup(B\cap C)\\ &= A\cup(B\cap C)。\ ■\end{aligned}$$



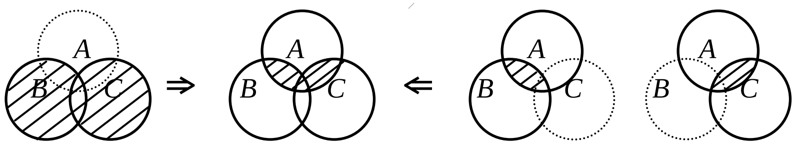
$B\cup C$ $\qquad$ $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ $\qquad$ $A\cup B$

图 1.3.7



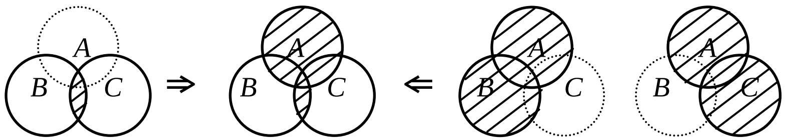
$B\cap C$　　$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$　　$A\cap B$

图 1.3.8



$B\cup C$　　$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$　　$A\cap B$　　$A\cap C$

图 1.3.9



$B\cap C$　　$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$　　$A\cup B$　　$A\cup C$

图 1.3.10

习题 1.3

1.3.1　求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$。

(1) $A =$ 长方形，$B =$ 四边形。

(2) $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{3, 4, 5\}$。

(3) $A = \{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<0\}$，$B = \{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x>0\}$。

(4) $A = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$，$B = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\le 1\}$。

(5) $A = (-2, 0]\cup(1, 4]$，$B = (-1, 2]\cup(3, 5]$。

1.3.2　$a, c, b, d\in\mathbf{R}$，$a\le c<b\le d$，证明：

$(a, b)\cap(c, d) = (c, b)$，

$(a, b)\cup(c, d) = (a, d)$。

1.3.3　补齐定理 1.3.9 的证明，即证明：

(1) $A\cup(B\cup C) \subseteq (A\cup B)\cup C$。

(2) $(A\cap B)\cap C \subseteq A\cap(B\cap C)$。

(3) $A\cap(A\cup B) = A$。

1.3.4　先证明 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$，再利用

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$。

1.3.5　证明：

(1) $B \subseteq A$ 当且仅当 $A\cap B = B$。

(2) $B \subseteq A$ 当且仅当 $A\cup B = A$。

1.3.6　证明：如果

$A\cap B = A\cap C$ 且 $A\cup B = A\cup C$，

则 $B = C$。

1.3.7　什么时候有 $A\cap B = A\cup B$？

1.4 集 合 的 差

集合还有一种重要的运算。

1.4.1 定义 集合的差 所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 和 B 的差，记为 $A\setminus B$，即：

$$A\setminus B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\} \text{ (图 1.4.1)。}$$

用属于关系表示就是：

$$x\in A\setminus B \text{ 当且仅当} (x\in A \text{ 且 } x\notin B)\text{。}$$

由 $A\setminus B$ 的定义，x 不属于 $A\setminus B$ 的条件是 x 不属于 A 或 x 属于 B，所以：

$$x\notin A\setminus B \text{ 当且仅当} (x\notin A \text{ 或 } x\in B)\text{。}$$

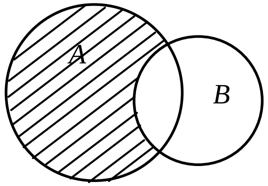


图 1.4.1 A\B

与集合的交和并类似，我们通过例子来熟悉集合的差的概念。

1.4.2 例 三角形\直角三角形 = 锐角三角形∪钝角三角形,

动植物\动物 = 植物。

1.4.3 例 $\{1, 2, 3\}\setminus\{2, 3, 4\} = \{1\}$。

$\{2, 3, 4\}\setminus\{1, 2, 3\} = \{4\}$。

$\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n = \{x \mid x\in\mathbf{N} \text{ 且 } x\geq n\}$。

集合的差有以下性质。

1.4.4 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $A\setminus B \subseteq A$。

(2) 如果 $B\subseteq A$，则 $B\setminus C\subseteq A\setminus C$。

(3) 如果 $C\subseteq B$，则 $A\setminus B\subseteq A\setminus C$。

(4) $(A\setminus B)\cap B = \varnothing$。

(5) $(A\setminus B)\cup B = A\cup B$。

证 (1) 显然。

(2) 任给 x，如果 $x\in B\setminus C$，则

$$x\in B \text{ 且 } x\notin C,$$

由 $B\subseteq A$ 得

$$x\in A,$$

由 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 得

$$x\in A\setminus C\text{。}$$

因此 $B\setminus C\subseteq A\setminus C$ (图 1.4.2)。

(3) 任给 x，如果 $x\in A\setminus B$，则

$$x\in A \text{ 且 } x\notin B,$$

由 $C\subseteq B$ 得

$$x\notin C,$$

由 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 得

$$x\in A\setminus C\text{。}$$

因此 $A\setminus B\subseteq A\setminus C$ (图 1.4.3)。

(4) 任给 x，如果 $x\in A\setminus B$，则

$$x\in A \text{ 且 } x\notin B,$$

所以

$$x\notin B\text{。}$$

因此$(A\setminus B)\cap B = \varnothing$。

(5) 任给 x，如果 $x\in A\cup B$，则

$$x\in A \text{ 或 } x\in B\text{。}$$

当 $x\in B$ 时，有

$$x\in (A\setminus B)\cup B,$$

当 $x\notin B$ 时，必有 $x\in A$，所以

$x\in A\setminus B$，

也有

$x\in(A\setminus B)\cup B$。

因此 $A\cup B\subseteq(A\setminus B)\cup B$。

由 $A\setminus B\subseteq A$ 和 $B\subseteq B$ 得$(A\setminus B)\cup B\subseteq A\cup B$。■

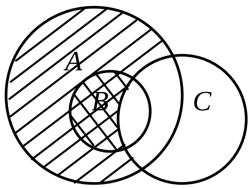


图 1.4.2

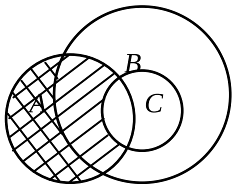


图 1.4.3

集合的三种运算有以下重要关系。

1.4.5 定理 De-Morgan 律 A, B, C 是任意集合。

(1) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。

(2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$。

证 (1) 任给 x，如果 $x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，则

$x\in A\setminus B$ 且 $x\in A\setminus C$，

所以

$x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$，

由 $x\notin B$ 和 $x\notin C$ 得

$x\notin B\cup C$，

由 $x\in A$ 和 $x\notin B\cup C$ 得

$x\in A\setminus(B\cup C)$。

因此$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\subseteq A\setminus(B\cup C)$。

由 $B\subseteq B\cup C$ 得

$A\setminus(B\cup C)\subseteq A\setminus B$，

由 $C\subseteq B\cup C$ 得

$A\setminus(B\cup C)\subseteq A\setminus C$，

由 $A\setminus(B\cup C)\subseteq A\setminus B$ 和 $A\setminus(B\cup C)\subseteq A\setminus C$ 得

$A\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ (图 1.4.4)。

(2) 任给 x，如果 $x\in A\setminus(B\cap C)$，则

$x\in A$ 且 $x\notin B\cap C$，

所以

$x\notin B$ 或 $x\notin C$。

当 $x\notin B$ 时，由 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 得

$x\in A\setminus B$，

当 $x\notin C$ 时，由 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 得

$x\in A\setminus C$，

在两种情况下都有

$x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$。

因此 $A\setminus(B\cap C)\subseteq(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$。

由 $B\cap C\subseteq B$ 得

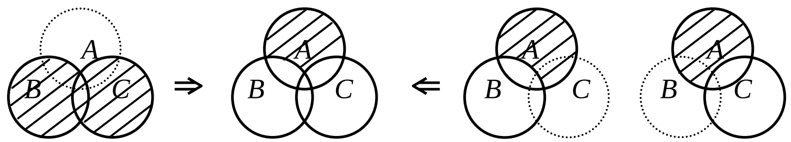
$A\setminus B\subseteq A\setminus(B\cap C)$，

由 $B\cap C\subseteq C$ 得

$A\setminus C\subseteq A\setminus(B\cap C)$，

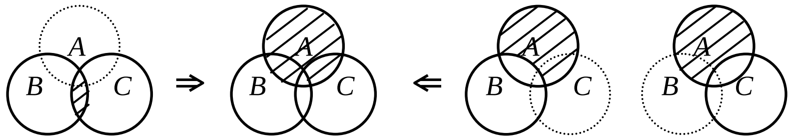
由 $A\setminus B\subseteq A\setminus(B\cap C)$和 $A\setminus C\subseteq A\setminus(B\cap C)$得

$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\subseteq A\setminus(B\cap C)$(图 1.4.5)。■



$B\cup C$　　$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$　　$A\setminus B$　　$A\setminus C$

图 1.4.4



$B\cap C$ $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ $A\setminus B$ $A\setminus C$

图 1.4.5

习题 1.4

1.4.1 求 $A\setminus B$ 和 $B\setminus A$。

(1) $A =$ 三角形，$B =$ 四边形。

(2) $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4, 5\}$。

(3) $A = \{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<0\}$，$B = \mathbf{Z}$。

(4) $A = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$，$B = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\le 1\}$。

(5) $A = (-2, 0]\cup(1, 3]$，$B = (-1, 2]$。

1.4.2 证明：如果 $a\le c\le b\le d$，则$(a, b]\setminus(c, d] = (a, c]$，$(c, d]\setminus(a, b] = (b, d]$。

1.4.3 证明：

(1) 如果 $C\subseteq B$，则 $A\cup C\setminus B\subseteq A\setminus B$。

(2) $(A\setminus B)\cup(A\cap B) = A$。

(3) 如果 $A\cap B = \varnothing$，则 $A\setminus B = A$。

(4) 如果 $C\subseteq B$，则$(A\setminus B)\cap C = \varnothing$。

(5) $A\setminus(A\setminus B) = A\cap B$。

1.4.4 证明：

(1) $B\subseteq A$ 当且仅当 $B\setminus A = \varnothing$。

(2) $A\ne B$ 当且仅当 $A\setminus B\ne\varnothing$或 $B\setminus A\ne\varnothing$。

1.5 集 合 族

幂集有一个性质，它的元素本身也是集合。现在考虑一般的每个元素都是集合的集合。对于这样的集合，我们可以讨论这集合中每个元素作为集合的性质，如它们的元素，它们之间的包含关系以及它们的运算等。为了突出体现一个集合的每个元素都是集合，给予这样的集合一个专门的名称。

1.5.1 定义 集合族 每个元素都是集合的非空集合称为集合族。

集合族一般用大写希腊字母$\Sigma, \Gamma, \Phi, \Psi$等表示。

注意集合族仍然是集合，是具有一定性质的非空集合。当我们对这样的集合使用集合族的称呼时，往往表明我们讨论的重点不在于这个集合本身，而在于作为它的元素的那些集合，主要讨论那些集合的性质。

我们还是通过例子来加深对集合族的概念的理解。

1.5.2 例 {书，纸，笔}和{行星，彗星，恒星}是集合族。

1.5.3 例 $\Gamma_1 = \{(\frac{-1}{(n+1)}, \frac{1}{(n+1)}] \mid n\in\mathbf{N}\}$和$\Gamma_2 = \{(x, x+1] \mid x\in\mathbf{Z}\}$是集合族。

1.5.4 例 $\Gamma(\mathbf{N}) = \{\mathbf{N}_n \mid n\in\mathbf{N}\}$和$\Gamma(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{Q}_a \mid a\in\mathbf{R}\}$是集合族，其中 $\mathbf{N}_n$ 和 $\mathbf{Q}_a$ 的定义分别见例 1.2.4 和习题 1.2.2。

1.5.5 例 令 $A_n = n$ 边形集合，则$\Gamma = \{A_n \mid n\in\mathbf{N}$ 且 $n\ge 3\}$是集合族。

对于两个集合的交和并来说，交的结合律的意义就是说$A\cap(B\cap C)$和$(A\cap B)\cap C$ 都代表三个集合的“交”，即三个集合的公共元素所组成集合。并的结合律的意义就是说 $A\cup(B\cup C)$和$(A\cup B)\cup C$ 都代表三个集合的“并”，即三个集合的所有元素所组成集合。

可以进一步推广，考虑更多的集合的“交”和“并”，考虑一个集合族的所有的集合的“交”和“并”。

1.5.6 定义 集合族的交 集合族Γ中所有集合的公共元素组成的集合称为集合族Γ的交，记为$\bigcap\Gamma$。属于$\bigcap\Gamma$的元素恰好是属于Γ中每个集合的元素，所以：

$$x\in\bigcap\Gamma\text{当且仅当(任给 }X\in\Gamma\text{，都有 }x\in X\text{)，}$$

也就是

$$\bigcap\Gamma = \{x\,|\,\text{任给 }X\in\Gamma\text{，都有 }x\in X\}\text{。}$$

如果 x 不属于$\bigcap\Gamma$，则 x 不属于Γ中的某个集合。反之如果 x 不属于Γ中的某个集合，则 x 不属于$\bigcap\Gamma$。所以：

$$x\notin\bigcap\Gamma\text{当且仅当(存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\notin X\text{)。}$$

1.5.7 定义 集合族的并 集合族Γ中所有集合的所有元素组成的集合称为集合族Γ的并，记为$\bigcup\Gamma$。属于$\bigcup\Gamma$的元素总是属于Γ中的某个集合，所以：

$$x\in\bigcup\Gamma\text{当且仅当(存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\in X\text{)，}$$

也就是

$$\bigcup\Gamma = \{x\,|\,\text{存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\in X\}\text{。}$$

如果 x 不属于$\bigcup\Gamma$，则 x 不属于Γ中的每个集合。反之如果 x 不属于Γ中的每个集合，则 x 不属于$\bigcup\Gamma$。所以：

$$x\notin\bigcup\Gamma\text{当且仅当(任给 }X\notin\Gamma\text{，都有 }x\notin X\text{)。}$$

如果$\Gamma = \{A, B\}$，则$\bigcap\Gamma = A\cap B$，$\bigcup\Gamma = A\cup B$，所以两个集合的交和并是集合族的交和并的特例。注意虽然两个集合的交和并是集合族的交和并的特例，但它们的意思稍有差别。两个集合的交确是这两个集合的“交”，但集合族的交并不是这个集合族的“交”，而是这个集合族中所有集合的“交”。两个集合的并和集合族的并也有类似的差别。

下面是集合族的交和并的几个例子。

1.5.8 例 $\Gamma = \{\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$，则$\bigcap\Gamma = \{2\}$，

$\bigcup\Gamma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$。

1.5.9 例 对于例 1.5.5 中的Γ，有$\bigcup\Gamma =$ 多边形的集合。对于例 1.5.3 中的Γ_1和Γ_2，有$\bigcap\Gamma_1 = \{0\}$，$\bigcup\Gamma_2 = \mathbf{R}$。

由集合族的交和并的定义可知：任给 $X\in\Gamma$，都有$\bigcap\Gamma\subseteq X$ 和 $X\subseteq\bigcup\Gamma$。这就是说，Γ中每个集合都是$\bigcup\Gamma$的子集，$\bigcap\Gamma$是Γ中每个集合的子集，它们是定理 1.3.7(1)(2)的推广。定理 1.3.8 也可以推广到集合族。

1.5.10 定理 Γ和Σ是集合族。

(1) 如果任给 $X\in\Gamma$，存在 $Y\in\Sigma$，使得 $X\subseteq Y$，则$\bigcup\Gamma\subseteq\bigcup\Sigma$。

(2) 如果任给 $X\in\Gamma$，存在 $Y\in\Sigma$，使得 $Y\subseteq X$，则$\bigcap\Sigma\subseteq\bigcap\Gamma$。

证 (1) 任给 x，如果 $x\in\bigcup\Gamma$，则

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x\in X$，

对于这个 X，由条件得

存在 $Y\in\Sigma$，使得 $X\subseteq Y$，

由 $x\in X$ 和 $X\subseteq Y$ 得 $x\in Y$，所以

存在 $Y\in\Sigma$，使得 $x\in Y$，

由集合族的并的定义得

$x\in\bigcup\Sigma$。

因此$\bigcup\Gamma\subseteq\bigcup\Sigma$。

(2) 任给 x，如果 $x\in\bigcap\Sigma$，则

任给 $Y\in\Sigma$，都有 $x\in Y$，

任给 $X\in\Gamma$，由条件得

存在 $Y\in\Sigma$，使得 $Y\subseteq X$，

由 $x\in Y$ 和 $Y\subseteq X$ 得 $x\in X$，所以

任给 $X\in\Gamma$，都有 $x\in X$，

由集合族的交的定义得

$x\in\bigcap\Gamma$。

因此$\bigcap\Sigma\subseteq\bigcap\Gamma$。■

在定理 1.5.10 中取$\Sigma = \{A\}$，则$\bigcup\Sigma = \bigcap\Sigma = A$，因此有

(1) 如果任给 $X\in\Gamma$，都有 $X\subseteq A$，则$\bigcup\Gamma\subseteq A$。

(2) 如果任给 $X\in\Gamma$，都有 $A\subseteq X$，则 $A\subseteq\bigcap\Gamma$。

它们是定理 1.3.7(3)(4)的推广。

设 I 是一个非空集合，如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 是集合，则$\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$是集合族，I 称为这个集合族的指标集。Γ本身是一个非空集合，令 $\mathrm{I}=\Gamma$，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，令 $A_\mathrm{i}=\mathrm{i}$，则$\Gamma=\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，所以每个集合族都可以用指标集 I 将其表示为$\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。当然同一个集合族可以用不同的指标集来表示。

讨论集合族时，经常使用指标集的形式，对于具体的集合族往往用一些比较熟悉的集合作指标集，如例 1.5.3 中的Γ_1和Γ_2分别用 **N** 和 **Z** 作指标集，例 1.5.4 中$\Gamma(\mathbf{N})$和$\Gamma(\mathbf{Q})$分别用 **N** 和 **R** 作指标集。用指标集来叙述和证明集合族的性质比较清晰。

如果$\Gamma=\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，则可以用$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$分别表示$\bigcap\Gamma$和$\bigcup\Gamma$。在这种表示下有：

$x\in\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 当且仅当(任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 $x\in A_\mathrm{i}$)，

$x\in\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 当且仅当(存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，使得 $x\in A_\mathrm{i}$)，

当 $\mathrm{I}=\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}$ 时，常常将$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$分别记为$\bigcap_{\mathrm{i}\geq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\geq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$，特别地，当 $\mathrm{I}=\mathbf{N}=\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_0$ 时，分别记为$\bigcap_{\mathrm{i}\geq0}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\geq0}A_\mathrm{i}$。当 $\mathrm{I}=\mathbf{N}_{\mathrm{n}+1}$ 时，常常将$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$分别记为$\bigcap_{\mathrm{i}\leq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\leq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$，也可记为$\bigcap_{\mathrm{i}<\mathrm{n}+1}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}<\mathrm{n}+1}A_\mathrm{i}$，还可更直观地记为 $A_0\cap\cdots\cap A_\mathrm{n}$ 和 $A_0\cup\cdots\cup A_\mathrm{n}$。

以下用指标集的形式来叙述和证明集合族的结合律、分配律和 De-Morgan 律。

1.5.11 定理

(1) $(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(2) $(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(3) $(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcup\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(4) $(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcap\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(5) $A\setminus\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}=\bigcup\{A\setminus A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。

(6) $A\setminus\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}=\bigcap\{A\setminus A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。

证 (1) 任给 x，如果 $x\in\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，则

存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，存在 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$，使得 $x\in A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}$，

当 $x\in A_\mathrm{i}$ 时，有 $x\in\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$，当 $x\in B_\mathrm{j}$ 时，有 $x\in\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j}$，所以

$x\in(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})$。

因此$\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}\subseteq(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})$。

任给 $A_\mathrm{i}\in\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，存在 $A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\in\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，使得 $A_\mathrm{i}\subseteq A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}$，由定理 1.5.10(3)得

$\bigcup\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}\subseteq\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，

即

$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\subseteq\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，

类似地可得

$\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j}\subseteq\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

因此$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(2) 任给 x，如果 $x\in(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})$，则

$x\in\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 且 $x\in\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j}$，

所以

任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，任给 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$，都有 $x\in A_\mathrm{i}$ 且 $x\in B_\mathrm{j}$，

所以

任给 $A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\in\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，都有 $x\in A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}$，

所以

$x\in\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

因此$(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})\subseteq\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

任给 $A_\mathrm{i}\in\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，存在 $A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\in\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，使得 $A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\subseteq A_\mathrm{i}$，由定理 1.5.10(4)得

$\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}\subseteq\bigcap\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，

即

$\bigcap\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq \bigcap_{i\in I}A_i$，

类似地可得

$\bigcap\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq \bigcap_{j\in J}B_j$。

因此$\bigcap\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq (\bigcap_{i\in I}A_i)\cap(\bigcap_{j\in J}B_j)$。

(3) 任给 x，如果 $x\in(\bigcup_{i\in I}A_i)\cap(\bigcup_{j\in J}B_j)$，则

$x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ 且 $x\in\bigcup_{j\in J}B_j$，

所以

存在 $i\in I$，存在 $j\in J$，使得 $x\in A_i$ 且 $x\in B_j$，

所以

存在 $A_i\cap B_j\in\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$，使得 $x\in A_i\cap B_j$，

所以

$x\in\bigcup\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$。

因此$(\bigcup_{i\in I}A_i)\cap(\bigcup_{j\in J}B_j) \subseteq \bigcup\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$。

任给 $A_i\cap B_j\in\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$，存在 $A_i\in\{A_i \mid i\in I\}$，使得 $A_i\cap B_j \subseteq A_i$，由定理 1.5.10(3)得

$\bigcup\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i\in I\}$，

即

$\bigcup\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq \bigcup_{i\in I}A_i$，

类似地可得

$\bigcup\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq \bigcup_{j\in J}B_j$。

因此$\bigcup\{A_i\cap B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq (\bigcup_{i\in I}A_i)\cap(\bigcup_{j\in J}B_j)$。

(4) 任给 x，如果 $x\notin(\bigcap_{i\in I}A_i)\cup(\bigcap_{j\in J}B_j)$，则

$x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$ 且 $x\notin\bigcap_{j\in J}B_j$，

所以

存在 $i\in I$，存在 $j\in J$，使得 $x\notin A_i$ 且 $x\notin B_j$，

所以

存在 $A_i\cup B_j\in\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$，使得 $x\notin A_i\cup B_j$，

所以

$x\notin\bigcap\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$。

因此$\bigcap\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\} \subseteq (\bigcap_{i\in I}A_i)\cup(\bigcap_{j\in J}B_j)$。

任给 $A_i\cup B_j\in\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$，存在 $A_i\in\{A_i \mid i\in I\}$，使得 $A_i \subseteq A_i\cup B_j$，由定理 1.5.10(4)得

$\bigcap\{A_i \mid i\in I\} \subseteq \bigcap\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$，

即

$\bigcap_{i\in I}A_i \subseteq \bigcap\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$，

类似地可得

$\bigcap_{j\in J}B_j \subseteq \bigcap\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$。

因此$(\bigcap_{i\in I}A_i)\cup(\bigcap_{j\in J}B_j) \subseteq \bigcap\{A_i\cup B_j \mid i\in I \text{ 且 } j\in J\}$。

(5) 任给 x，如果 $x\in A\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$，则

$x\in A$ 且 $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$，

由 $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$ 得

存在 $i\in I$，使得 $x\notin A_i$，

所以

存在 $i\in I$，使得 $x\in A\setminus A_i$，

所以

$x\in\bigcup\{A\setminus A_i \mid i\in I\}$。

因此 $A\setminus\bigcap_{i\in I}A_i \subseteq \bigcup\{A\setminus A_i \mid i\in I\}$。

任给 $i\in I$，都有$\bigcap_{i\in I}A_i \subseteq A_i$，所以

任给 $i\in I$，都有 $A\setminus A_i \subseteq A\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$。

因此$\bigcup\{A\setminus A_i \mid i\in I\} \subseteq A\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$。

(6) 任给 x，如果 $x\in\bigcap\{A\setminus A_i \mid i\in I\}$，则

任给 $i\in I$，都有 $x\in A\setminus A_i$，

所以

$x\in A$ 且任给 $i\in I$，都有 $x\notin A_i$，

所以

$x\in A$ 且 $x\notin\bigcup_{i\in I}A$，

所以

$x \in A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$。

因此$\bigcap\{A \setminus A_i \mid i\in I\} \subseteq A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$。

任给 i∈I，都有 $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$，所以

任给 i∈I，都有 $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A \setminus A_i$。

因此 $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap\{A \setminus A_i \mid i\in I\}$。■

有三种重要类型的集合族。

1.5.12 定义 单调 Γ是集合族，如果

任给 $X, Y\in\Gamma$，都有 $X \subseteq Y$ 或 $Y \subseteq X$，

则称Γ是单调的集合族，简称Γ是单调的。

例 1.5.4 中的Γ(**N**)和Γ(**Q**)都是单调的(见例 1.2.4 和习题 1.2.2)，例 1.5.3 中的Γ_1是单调的。

1.5.13 定义 不交 Γ是集合族，如果Γ满足：

任给 $X, Y\in\Gamma$，只要 $X \neq Y$，就有 $X\cap Y = \varnothing$，

则称Γ是不交的集合族，简称Γ是不交的，也称Γ中的集合两两不交。当$\Gamma = \{A_1,\cdots, A_n\}$时，也称 $A_1,\cdots, A_n$ 两两不交。

如例 1.5.2 中的集合族，例 1.5.3 中的Γ_2和例 1.5.5 中的Γ都是不交的。

1.5.14 定义 子集族 如果Γ中的每个集合都是集合 A 的子集。则称Γ是 A 的子集族。因为 A 的所有子集的集合是幂集 $\mathsf{P}(A)$，所以Γ是 A 的子集族当且仅当$\Gamma \subseteq \mathsf{P}(A)$。

例 1.5.3 中，Γ_1和Γ_2都是 **R** 的子集族。例 1.5.4 中，Γ(**N**)是 **N** 的子集族，Γ(**Q**)是 **Q** 的子集族。

显然，如果Γ是 B 的子集族且 $B \subseteq A$，则Γ也是 A 的子集族。又因为Γ中的每个集合都是$\bigcup\Gamma$的子集，所以任何集合族都是$\bigcup\Gamma$的子集族，也总是满足$\bigcup\Gamma \subseteq A$ 的集合 A 的子集族。

我们一般用 a, b, c, x, y, z 等表示元素，用 A, B, C, X, Y, Z 等表示集合，用Σ, Γ, Φ, Ψ等表示集合族。为了清楚起见，以后尽量这样表示，但需要时可以不受这个限制，任何符号都能用来表示集合和元素，只要将它们之间的属于关系刻画清楚就可以了。

习题 1.5

1.5.1 证明：如果任给 i∈I，都有 $B_i \subseteq A_i$，则$\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$，$\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$。

1.5.2 求$\bigcap\Gamma$和$\bigcup\Gamma$。

(1) $\Gamma = \{\{0,1,2,4\}, \{1,3,4,5\}, \{0,2,4,5\}\}$。

(2) $\Gamma = \{(-x, x] \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$。

(3) $\Gamma = \{A_a \mid a\in\mathbf{R}$ 且 $a>0\}$，其中

$A_a = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 且$-a+y\le x\le a+y\}$。

1.5.3 证明：

(1) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\cup(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A_i\cup B_i)$。

(2) $(\bigcap_{i\in I} A_i)\cap(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A_i\cap B_i)$。

(3) $A\cup(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$。

(4) $A\cap(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$。

1.5.4 指出下列集合族哪些是单调的，哪些是不交的。

(1) {金鱼，鱼，动物，生物}，

(2) {三角形，正方形，多边形}。

(3) $\{(0, x] \mid x\in\mathbf{N}$ 且 $x>0\}$，

(4) {(0,3), (1,4), (2,5)}，

(5) {{0,3}, {1,4}, {2,5}}。

1.5.5 证明：如果Γ是单调的，则任给 $x, y\in\bigcup\Gamma$，存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, y\in X$。

1.5.6 $\Gamma= \{A_i \mid i\in\mathbf{N}\}$，任给 $n\in\mathbf{N}$，令

$B_n = \bigcap_{i\le n} A_i$，$C_n = \bigcup_{i\le n} A_i$。

证明：

(1) $\{B_i \mid i\in\mathbf{N}\}$和$\{C_i \mid i\in\mathbf{N}\}$都是单调的。

(2) $\bigcap_{i\ge 0} A_i = \bigcap_{i\ge 0} B_i$，$\bigcup_{i\ge 0} A_i = \bigcup_{i\ge 0} C_i$。

1.5.7 什么样的集合族既是单调又是不交的？

1.6　卡　氏　积

由两个元素 a, b 组成的集合$\{a, b\}$中，a 和 b 是没有次序的。有时我们需要考虑有次序的两个元素，所以我们需要由两个元素组成新的东西，其中两个元素是有次序的。

1.6.1 定义　有序对　两个元素 a, b 有次序地放在一起，称为一个有序对，记为$<a, b>$。规定

$$<a_1, b_1> = <a_2, b_2> \text{当且仅当 } a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2。$$

这样当 $a \neq b$ 时，就有$<a, b> \neq <b, a>$。所以有序对相等的定义刻画了有序对中两个元素的次序。

在有序对$<a, b>$中，a 称为第一元素，b 称为第二元素。

有序对可以作为集合的元素，一般的以有序对为元素的集合以后再讨论，这里只考虑一种特殊的有序对的集合。

1.6.2 定义　卡氏积　A, B 是两个集合，集合

$$\{<x, y> \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

称为 A 和 B 的卡氏积，记为 $A\times B$ (图 1.6.1)。用属于关系来表示就是：

$$<x, y>\in A\times B \text{ 当且仅当 } x\in A \text{ 且 } y\in B$$

和

$$<x, y>\notin A\times B \text{ 当且仅当 } x\notin A \text{ 或 } y\notin B。$$

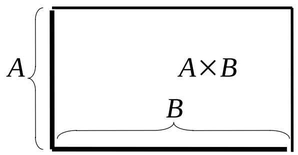


图 1.6.1

在卡氏积 $A\times B$ 中，A 称为第一集合，B 称为第二集合。

由卡氏积的定义可知有 $A\times\varnothing = \varnothing\times A = \varnothing$。又由有序对的性质可知，一般没有 $A\times B = B\times A$。$A\times B$ 也是一个集合，所以可以和另一集合 C 作卡氏积$(A\times B)\times C$，类似地有 $A\times(B\times C)$。注意，一般没有$(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$。

虽然卡氏积也是由两个集合形成新集合，但和集合的运算不同。$A\cup B$, $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 中的元素还是 A 或 B 中的元素，而 $A\times B$ 中元素既不是 A 中的元素，也不是 B 中的元素。

现在讨论卡氏积的性质。

1.6.3 定理　如果 $B_1 \subseteq A_1$，$B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1\times B_2 \subseteq A_1\times A_2$。

证　任给$<x, y>$，如果$<x, y>\in B_1\times B_2$，则

$$x\in B_1 \text{ 且 } y\in B_2，$$

由 $B_1 \subseteq A_1$ 和 $B_2 \subseteq A_2$ 得 $x\in A_1$ 且 $y\in A_2$，所以

$$<x, y>\in A_1\times A_2。$$

因此 $B_1\times B_2 \subseteq A_1\times A_2$ (图 1.6.1)。■

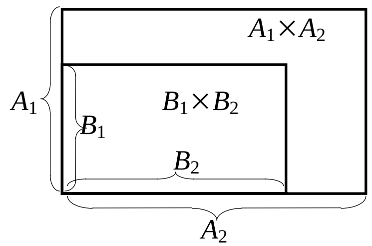


图 1.6.1

1.6.4 定理　A, B, C 是任意集合。

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$，

　$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

(2) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$，

　$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

(3) $A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C)$，

$(B\setminus C)\times A = (B\times A)\setminus(C\times A)$。

证 (1) 任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cup C)$，则

$x\in A$ 且 $y\in B\cup C$，

所以

$x\in A$ 且($y\in B$ 或 $y\in C$)，

当 $y\in B$ 时，由 $x\in A$ 和 $y\in B$ 得

$\langle x, y\rangle\in A\times B$，

当 $y\in C$ 时，由 $x\in A$ 和 $y\in C$ 得

$\langle x, y\rangle\in A\times C$，

所以

$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$。

因此 $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$。

由 $A\subseteq A$，$B\subseteq B\cup C$ 和 $C\subseteq B\cup C$ 得

$A\times B\subseteq A\times(B\cup C)$和 $A\times C\subseteq A\times(B\cup C)$，

因此$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$ (图 1.6.2)。

同理可证$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

(2) 任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$，则

$\langle x, y\rangle\in A\times B$ 且$\langle x, y\rangle\in A\times C$，

所以

($x\in A$ 且 $y\in B$)且($x\in A$ 且 $y\in C$)。

由 $y\in B$ 且 $y\in C$ 得 $y\in B\cap C$，由 $x\in A$ 且 $y\in B\cap C$ 得

$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cap C)$。

因此$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$。

由 $A\subseteq A$，$B\cap C\subseteq B$ 和 $B\cap C\subseteq C$ 得

$A\times(B\cap C)\subseteq A\times B$ 和 $A\times(B\cap C)\subseteq A\times C$，

因此 $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$(图 1.6.3)。

同理可证$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

(3) 任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in A\times(B\setminus C)$，则

$x\in A$ 且 $y\in B\setminus C$，

所以

$x\in A$ 且 $y\in B$ 且 $y\notin C$。

由 $x\in A$ 且 $y\in B$ 得$\langle x, y\rangle\in A\times B$，由 $y\notin C$ 得

$\langle x, y\rangle\notin A\times C$，

所以

$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\setminus(A\times C)$。

因此 $A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)$。

任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，则

$\langle x, y\rangle\in A\times B$ 且$\langle x, y\rangle\notin A\times C$，

由$\langle x, y\rangle\in A\times B$ 得

$x\in A$ 且 $y\in B$，

由 $x\in A$ 和$\langle x, y\rangle\notin A\times C$ 得

$y\notin C$，

所以

$x\in A$ 且 $y\in B$ 且 $y\notin C$。

由 $y\in B$ 且 $y\notin C$ 得

$y\in B\setminus C$，

所以

$\langle x, y\rangle\in A\times(B\setminus C)$。

因此$(A\times B)\setminus(A\times C)\subseteq A\times(B\setminus C)$ (图 1.6.4)。

同理可证$(B\setminus C)\times A = (B\times A)\setminus(C\times A)$。■

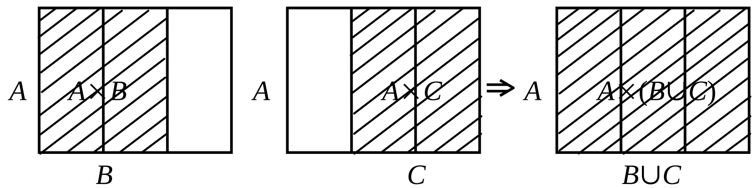


图 1.6.2

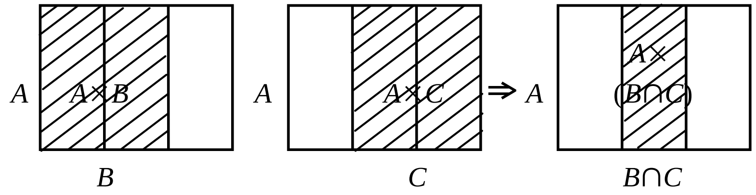


图 1.6.3

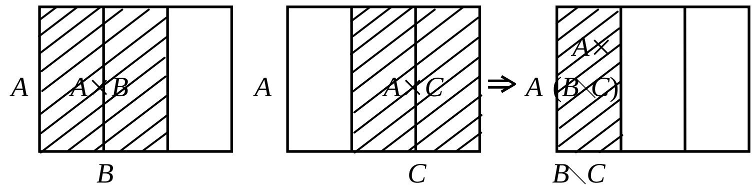


图 1.6.4

定理 1.6.4 说明了卡氏积对集合的交、并和差有分配律，无论是第一集合还是第二集合。

可以将有序对和卡氏积作一定的推广。

1.6.5 定义　n 元有序组　任给 n≥2，n 个元素 $a_1,\cdots, a_n$ 有次序地放在一起，称为一个 n 元有序组，记为$<a_1,\cdots, a_n>$。为了体现 n 元有序组的次序，规定

$<a_1,\cdots, a_n> = <b_1,\cdots, b_n>$当且仅当任给 1≤i≤n，都有 $a_i = b_i$。

n 元有序组可以组成集合，特别地有 n 个集合的卡氏积。

1.6.6 定义　n 个集合的卡氏积　n≥2，$A_1,\cdots, A_n$ 是 n 个集合，集合

$\{<x_1,\cdots, x_n>|$ 任给 1≤i≤n，都有 $x_i\in A_i\}$

称为 $A_1,\cdots, A_n$ 的卡氏积，记为 $A_1\times\cdots\times A_n$。任给 1≤i≤n，$A_i$ 称为这个卡氏积的第 i 个集合。

1.6.7 定义　卡氏幂　如果在卡氏积 $A_1\times\cdots\times A_n$ 中，任给

1≤i≤n，都有 $A_i = A$，则称这个卡氏积为 A 的 n 次卡氏幂，记为 A^n，即

$A^n = \{<x_1,\cdots, x_n>|$ 任给 1≤i≤n，都有 $x_i\in A\}$。

另外规定 $A^1 = A$。

和两个集合的卡氏积类似，n 个集合的卡氏积有以下性质。

1.6.8 定理　$A_1,\cdots, A_n$ 是任意集合。

(1) 如果存在 1≤i≤n，使得 $A_i = \varnothing$，则 $A_1\times\cdots\times A_n = \varnothing$。

(2) 如果任给 1≤i≤n，都有 $B_i \subseteq A_i$，则

$B_1\times\cdots\times B_n \subseteq A_1\times\cdots\times A_n$。

(3) 任给 1≤i≤n，卡氏积的第 i 个集合对集合的交、并和差有分配律。

证　略。■

习题 1.6

1.6.1　A 和 B 是非空集合。证明：如果 $A\neq B$，则

$A\times B \neq B\times A$。

1.6.2　补齐定理 1.6.4 的证明，即证明：

(1) $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

(2) $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

(3) $(B\setminus C)\times A = (B\times A)\setminus(C\times A)$。

1.6.3　证明：

(1) $A\times(\bigcup_{i\in I}B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\times B_i)$。

(2) $A\times(\bigcap_{i\in I}B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\times B_i)$。

1.6.4　证明：如果$\{B_i \mid i\in I\}$是单调的，则

$(\bigcup_{i\in I}B_i)\times(\bigcup_{i\in I}B_i) = \bigcup_{i\in I}(B_i\times B_i)$。

1.6.5　证明：如果任给 1≤i≤n，都有 $A_i\neq\varnothing$，则

$A_1\times\cdots\times A_n \neq \varnothing$。