Note de synthèse sur les Series Chronologiques

Hissein Tidei*

2023-05-06

1 Nature des series

1.1 Concepts de Base

Qu'est ce qu'une série chronologique ou Time Series (TS)?

C'est une suite finie des observations effectuer à un intervalle régulier au cours du temps. Dite aussi série temporelles, elle se matérialise économiquement par l'observation des grandeurs telles que: IPC, PNB, PIB, etc.

La notion de processus stationnaire au sens large (SSL) d'une TS :

Un processus est X_t est SSL, au sens faible, ou dite de "second ordre" si et seulement si:

1. $\mathbb{E}(X_t) = \mu$: constant ou ne croit pas avec le temps (t): démunie de tendance;
2. $\mathbb{E}(X_t^2) = Var(X_t) = \sigma^2 \neq \infty$: c'est dire constant et ne tend pas vers l'infinie au fil du temps infinie au fil du temps;
3. $\gamma\left(k\right)$, sa fonction d'auto-covariance , est dépendante de l'ampleur du décalage k et non de la position en t, celle-ci étant:
   - $\gamma\left(k\right) = Cov\left(X_t, X_{t+k}\right) = E\left\{\left(X_t - \mathbb{E}\left(X_t\right)\right)\left(X_{t+k} - \mathbb{E}\left(X_{t+k}\right)\right)\right\} \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$
   - $\gamma\left(k=0\right) = \gamma\left(0\right) = \sigma_x^2 = Var\left(X\right) =>$ confirme le respect de (2.).

La fonction d'auto-corrélation d'un processus X_t SSL

Confondue avec la covariance dans le cadre de la stationnarité des séries chrono, elle écrit comme suit [1]:

$$\rho\left(k\right) = cor\left(X_t, X_{t+k}\right) = \frac{Cov\left(X_t, X_{t+k}\right)}{Var\left(X_t\right)Var\left(X_{t+k}\right)} \Longrightarrow \frac{\gamma\left(k\right)}{\gamma\left(0\right)} \tag{1}$$

.

Bruit blanc (BB) ou White noise

a- ***Simple BB***:

$X_t \rightsquigarrow BB\left(0, \sigma^2\right)$ si :

- $\mathbb{E}\left(X_t\right) = 0$;
- $Var\left(X_t\right) = \sigma^2$;
- $\gamma\left(k\right) = Cov\left(X_t, X_{t+k}\right) = 0 \quad \forall k \neq O \Longrightarrow$
  - $\gamma\left(k=o\right) = \sigma^2$
  - $\gamma\left(k \neq o\right) = 0$

NB: Un BB est processus SSL.

b- ***BB Gaussien(BBG)***:

*Twitter

[1] Cf au démonstration

$X_t \rightsquigarrow BBG\left(0, \sigma^2\right)\ ssi$:

- $X_t : i.i.d \rightsquigarrow N\left(0, \sigma^2\right)$

Attention : si $X_t \rightsquigarrow BB\left(0, \sigma^2\right) \longrightarrow \rho\left(k\right) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$

1.2 Un processsus moyen Mobile d'ordre q: MA(q)

1.2.1 Un MA(q=1):

$MA(1)$ est un processus tel X_t, tel que :

$$X_t = \mu + a_t + \theta a_{t-1} \tag{2}$$

où:

$$a_t \rightsquigarrow BB\left(0, \sigma^2\right)\ et\ \theta \in \mathbb{R} \tag{3}$$

avec comme:

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mu \tag{4}$$

$$Var\left(X_t\right) = \left(1 + \theta^2\right)\sigma^2 \tag{5}$$

$$\gamma\left(k\right) = Cov\left(X_t, X_{t+k}\right) = \begin{cases} \left(1 + \theta^2\right)\sigma^2 = Var(X_t) & \text{si } k = O \\ \theta\sigma^2 & \text{si } K = 1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases} \tag{6}$$