15|二分查找（上）：如何用最省内存的方式实现快速查找功能？

今天我们讲一种针对有序数据集合的查找算法：二分查找（Binary Search）算法，也叫折半查找算法。二分查找的思想非常简单，很多非计算机专业的同学很容易就能理解，但是看似越简单的东西往往越难掌握好，想要灵活应用就更加困难。

老规矩，我们还是来看一道思考题。

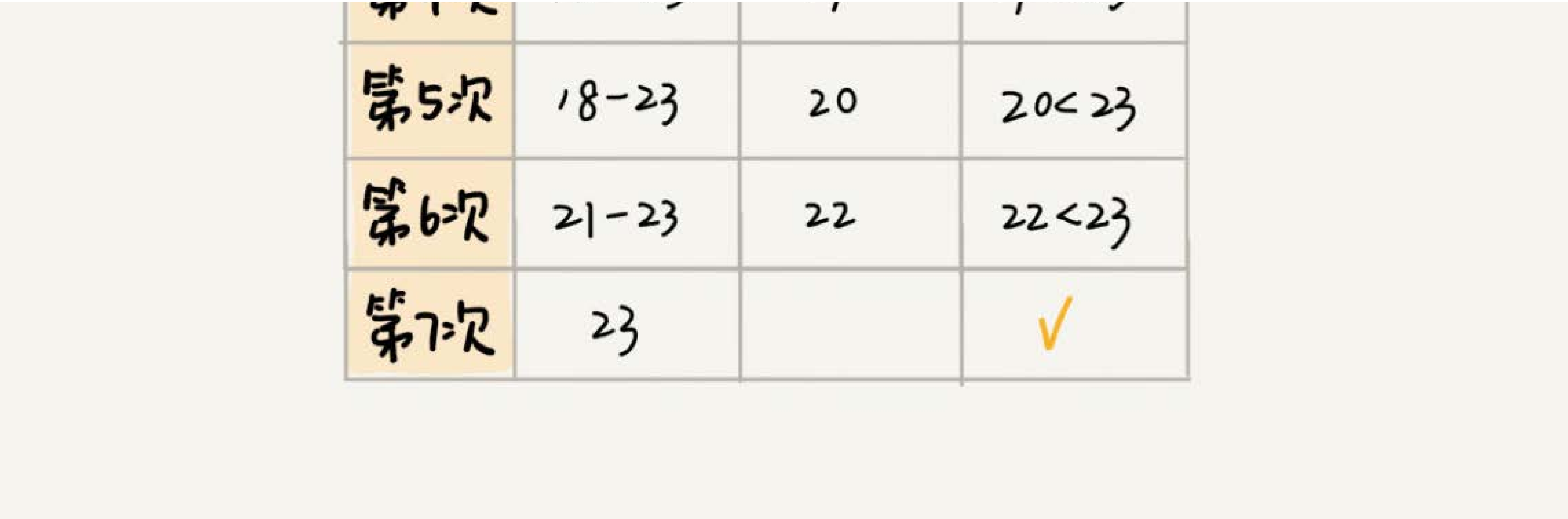
假设我们有1000万个整数数据，每个数据占8个字节，如何设计数据结构和算法，快速判断某个整数是否出现在这**1000**万数据中？ 我们希望这个功能不要占用太多的内存空间，最多不要超过100MB，你会怎么做呢？带着这个问题，让我们进入今天的内容吧！

无处不在的二分思想

二分查找是一种非常简单易懂的快速查找算法，生活中到处可见。比如说，我们现在来做一个猜字游戏。我随机写一个0到99之间的数字，然后你来猜我写的是什么。猜的过程中，你每猜一次，我就会告诉你猜的大了还是小了，直到猜中为止。你来想想，如何快速猜中我写的数字呢？

假设我写的数字是23，你可以按照下面的步骤来试一试。（如果猜测范围的数字有偶数个，中间数有两个，就选择较小的那个。）

次数	猜测范围	中间数	对比大小
第1次	0-99	49	49>23
第2次	0-48	24	24>23
第3次	0-23	11	11<23
第4次	12-23	17	17<23



第5次	18-23	20	20<23
第6次	21-23	22	22<23
第7次	23		✓

7次就猜出来了，是不是很快？这个例子用的就是二分思想，按照这个思想，即便我让你猜的是0到999的数字，最多也只要10次就能猜中。不信的话，你可以试一试。

这是一个生活中的例子，我们现在回到实际的开发场景中。假设有1000条订单数据，已经按照订单金额从小到大排序，每个订单金额都不同，并且最小单位是元。我们现在想知道是否存在金额等于19元的订单。如果存在，则返回订单数据，如果不存在则返回null。

最简单的办法当然是从第一个订单开始，一个一个遍历这1000个订单，直到找到金额等于19元的订单为止。但这样查找会比较慢，最坏情况下，可能要遍历完这1000条记录才能找到。那用二分查找能不能更快速地解决呢？

为了方便讲解，我们假设只有10个订单，订单金额分别是：8，11，19，23，27，33，45，55，67，98。

还是利用二分思想，每次都与区间的中间数据比对大小，缩小查找区间的范围。为了更加直观，我画了一张查找过程的图。其中，low和high表示待查找区间的下标，mid表示待查找区间的中间元素下标。

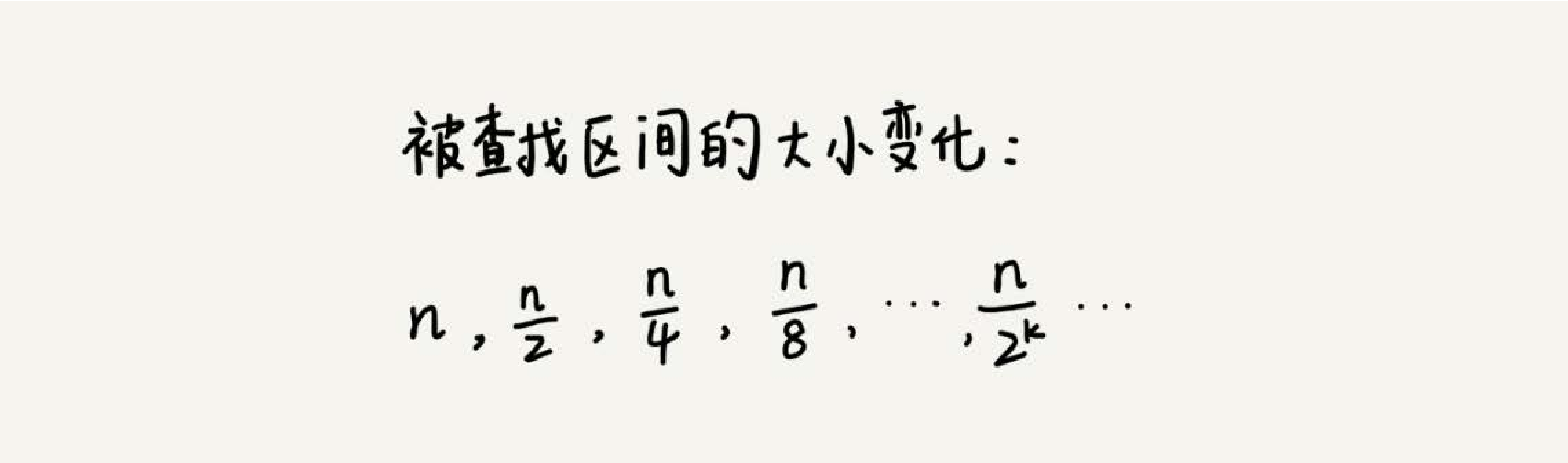

low
mid
high
1
8 11 19 23 27 33 45 55 67 98
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
low
mid
high
2
8 11 19 23 27 33 45 55 67 98
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
low
mid
high
3
8 11 19 23 27 33 45 55 67 98
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

看懂这两个例子，你现在对二分的思想应该掌握得妥妥的了。我这里稍微总结升华一下，二分查找针对的是一个有序的数据集合，查找思想有点类似分治思想。每次都通过跟区间的中间元素对比，将待查找的区间缩小为之前的一半，直到找到要查找的元素，或者区间被缩小为**0**。

O(logn)惊人的查找速度

二分查找是一种非常高效的查找算法，高效到什么程度呢？我们来分析一下它的时间复杂度。

我们假设数据大小是n，每次查找后数据都会缩小为原来的一半，也就是会除以2。最坏情况下，直到查找区间被缩小为空，才停止。



可以看出来，这是一个等比数列。其中$n/2^k=1$时，k的值就是总共缩小的次数。而每一次缩小操作只涉及两个数据的大小比较，所以，经过了k次区间缩小操作，时间复杂度就是O(k)。通过$n/2^k=1$，我们可以求得$k=\log_2 n$，所以时间复杂度就是O(logn)。

二分查找是我们目前为止遇到的第一个时间复杂度为O(logn)的算法。后面章节我们还会讲堆、二叉树的操作等等，它们的时间复杂度也是O(logn)。我这里就再深入地讲讲O(logn)这种对数时间复杂度。这是一种极其高效的时间复杂度，有的时候甚至比时间复杂度是常量级O(1)的算法还要高效。为什么这么说呢？

因为logn是一个非常“恐怖”的数量级，即便n非常非常大，对应的logn也很小。比如n等于2的32次方，这个数很大了吧？大约是42亿。也就是说，如果我们在42亿个数据中用二分查找一个数据，最多需要比较32次。

我们前面讲过，用大O标记法表示时间复杂度的时候，会省略掉常数、系数和低阶。对于常量级时间复杂度的算法来说，O(1)有可能表示的是一个非常大的常量值，比如O(1000)、O(10000)。所以，常量级时间复杂度的算法有时候可能还没有O(logn)的算法执行效率高。

反过来，对数对应的就是指数。有一个非常著名的“阿基米德与国王下棋的故事”，你可以自行搜索一下，感受一下指数的“恐怖”。这也是为什么我们说，指数时间复杂度的算法在大规模数据面前是无效的。

二分查找的递归与非递归实现

实际上，简单的二分查找并不难写，注意我这里的“简单”二字。下一节，我们会讲到二分查找的变体问题，那才是真正烧脑的。今天，我们来看如何来写最简单的二分查找。

最简单的情况就是有序数组中不存在重复元素，我们在其中用二分查找值等于给定值的数据。我用Java代码实现了一个最简单的二分查找算法。

```
public int bsearch(int[] a, int n, int value) {
  int low = 0;
  int high = n - 1;

  while (low <= high) {
    int mid = (low + high) / 2;
    if (a[mid] == value) {
      return mid;
    } else if (a[mid] < value) {
      low = mid + 1;
    } else {
      high = mid - 1;
    }
  }

  return -1;
}
```

这个代码我稍微解释一下，low、high、mid都是指数组下标，其中low和high表示当前查找的区间范围，初始low=0， high=n-1。mid表示[low, high]的中间位置。我们通过对比a[mid]与value的大小，来更新接下来要查找的区间范围，直到找到或者区间缩小为0，就退出。如果你有一些编程基础，看懂这些应该不成问题。现在，我就着重强调一下容易出错的**3**个地方。

1.循环退出条件

注意是low<=high，而不是low<high。

2.mid的取值

实际上，mid=(low+high)/2这种写法是有问题的。因为如果low和high比较大的话，两者之和就有可能会溢出。改进的方法是将mid的计算方式写成low+(high-low)/2。更进一步，如果要将性能优化到极致的话，我们可以将这里的除以2操作转化成位运算low+((high-low)>>1)。因为相比除法运算来说，计算机处理位运算要快得多。

3.low和**high**的更新

low=mid+1，high=mid-1。注意这里的+1和-1，如果直接写成low=mid或者high=mid，就可能会发生死循环。比如，当high=3，low=3时，如果a[3]不等于value，就会导致一直循环不退出。

如果你留意我刚讲的这三点，我想一个简单的二分查找你已经可以实现了。实际上，二分查找除了用循环来实现，还可以用递归来实现，过程也非常简单。

我用Java语言实现了一下这个过程，正好你可以借此机会回顾一下写递归代码的技巧。

```
// 二分查找的递归实现
public int bsearch(int[] a, int n, int val) {
  return bsearchInternally(a, 0, n - 1, val);
```

```
}

private int bsearchInternally(int[] a, int low, int high, int value) {
  if (low > high) return -1;

  int mid =  low + ((high - low) >> 1);
  if (a[mid] == value) {
    return mid;
  } else if (a[mid] < value) {
    return bsearchInternally(a, mid+1, high, value);
  } else {
    return bsearchInternally(a, low, mid-1, value);
  }
}
```

二分查找应用场景的局限性

前面我们分析过，二分查找的时间复杂度是O(logn)，查找数据的效率非常高。不过，并不是什么情况下都可以用二分查找，它的应用场景是有很大局限性的。那什么情况下适合用二分查找，什么情况下不适合呢?

首先，二分查找依赖的是顺序表结构，简单点说就是数组。

那二分查找能否依赖其他数据结构呢?比如链表。答案是不可以的，主要原因是二分查找算法需要按照下标随机访问元素。我们在数组和链表那两节讲过，数组按照下标随机访问数据的时间复杂度是O(1)，而链表随机访问的时间复杂度是O(n)。所以，如果数据使用链表存储，二分查找的时间复杂就会变得很高。

二分查找只能用在数据是通过顺序表来存储的数据结构上。如果你的数据是通过其他数据结构存储的，则无法应用二分查找。

其次，二分查找针对的是有序数据。

二分查找对这一点的要求比较苛刻，数据必须是有序的。如果数据没有序，我们需要先排序。前面章节里我们讲到，排序的时间复杂度最低是O(nlogn)。所以，如果我们针对的是一组静态的数据，没有频繁地插入、删除，我们可以进行一次排序，多次二分查找。这样排序的成本可被均摊，二分查找的边际成本就会比较低。

但是，如果我们的数据集合有频繁的插入和删除操作，要想用二分查找，要么每次插入、删除操作之后保证数据仍然有序，要么在每次二分查找之前都先进行排序。针对这种动态数据集合，无论哪种方法，维护有序的成本都是很高的。

所以，二分查找只能用在插入、删除操作不频繁，一次排序多次查找的场景中。针对动态变化的数据集合，二分查找将不再适用。那针对动态数据集合，如何在其中快速查找某个数据呢?别急，等到二叉树那一节我会详细讲。

再次，数据量太小不适合二分查找。

如果要处理的数据量很小，完全没有必要用二分查找，顺序遍历就足够了。比如我们在一个大小为10的数组中查找一个元素，不管用二分查找还是顺序遍历，查找速度都差不多。只有数据量比较大的时候，二分查找的优势才会比较明显。

不过，这里有一个例外。如果数据之间的比较操作非常耗时，不管数据量大小，我都推荐使用二分查找。比如，数组中存储的都是长度超过300的字符串，如此长的两个字符串之间比对大小，就会非常耗时。我们需要尽可能地减少比较次数，而比较次数的减少会大大提高性能，这个时候二分查找就比顺序遍历更有优势。

最后，数据量太大也不适合二分查找。

二分查找的底层需要依赖数组这种数据结构，而数组为了支持随机访问的特性，要求内存空间连续，对内存的要求比较苛刻。比如，我们有1GB大小的数据，如
1GB

果希望用数组来存储，那就需要 的连续内存空间。

注意这里的“连续”二字，也就是说，即便有2GB的内存空间剩余，但是如果这剩余的2GB内存空间都是零散的，没有连续的1GB大小的内存空间，那照样无法申请一个1GB大小的数组。而我们的二分查找是作用在数组这种数据结构之上的，所以太大的数据用数组存储就比较吃力了，也就不能用二分查找了。

解答开篇

二分查找的理论知识你应该已经掌握了。我们来看下开篇的思考题：如何在1000万个整数中快速查找某个整数？

这个问题并不难。我们的内存限制是100MB，每个数据大小是8字节，最简单的办法就是将数据存储在数组中，内存占用差不多是80MB，符合内存的限制。借助今天讲的内容，我们可以先对这1000万数据从小到大排序，然后再利用二分查找算法，就可以快速地查找想要的数据了。

看起来这个问题并不难，很轻松就能解决。实际上，它暗藏了“玄机”。如果你对数据结构和算法有一定了解，知道散列表、二叉树这些支持快速查找的动态数据结构。你可能会觉得，用散列表和二叉树也可以解决这个问题。实际上是不行的。

虽然大部分情况下，用二分查找可以解决的问题，用散列表、二叉树都可以解决。但是，我们后面会讲，不管是散列表还是二叉树，都会需要比较多的额外的内存空间。如果用散列表或者二叉树来存储这1000万的数据，用100MB的内存肯定是存不下的。而二分查找底层依赖的是数组，除了数据本身之外，不需要额外存储其他信息，是最省内存空间的存储方式，所以刚好能在限定的内存大小下解决这个问题。

内容小结

今天我们学习了一种针对有序数据的高效查找算法，二分查找，它的时间复杂度是$O(logn)$。

二分查找的核心思想理解起来非常简单，有点类似分治思想。即每次都通过跟区间中的中间元素对比，将待查找的区间缩小为一半，直到找到要查找的元素，或者区间被缩小为0。但是二分查找的代码实现比较容易写错。你需要着重掌握它的三个容易出错的地方：循环退出条件、mid的取值，low和high的更新。

二分查找虽然性能比较优秀，但应用场景也比较有限。底层必须依赖数组，并且还要求数据是有序的。对于较小规模的数据查找，我们直接使用顺序遍历就可以了，二分查找的优势并不明显。二分查找更适合处理静态数据，也就是没有频繁的数据插入、删除操作。

课后思考

1. 如何编程实现“求一个数的平方根”？要求精确到小数点后6位。
2. 我刚才说了，如果数据使用链表存储，二分查找的时间复杂就会变得很高，那查找的时间复杂度究竟是多少呢？如果你自己推导一下，你就会深刻地认识到，为何我们会选择用数组而不是链表来实现二分查找了。

欢迎留言和我分享，我会第一时间给你反馈。

精选留言:

- Jerry银银 2018-10-25 02:36:38
  说说第二题吧，感觉争议比较大:
  假设链表长度为n，二分查找每次都要找到中间点(计算中忽略奇偶数差异):
  第一次查找中间点，需要移动指针n/2次；

第二次，需要移动指针n/4次；
第三次需要移动指针n/8次；
......
以此类推，一直到1次为值

总共指针移动次数(查找次数) = n/2 + n/4 + n/8 + ...+ 1，这显然是个等比数列，根据等比数列求和公式：Sum = n - 1.

最后算法时间复杂度是：O(n-1)，忽略常数，记为O(n)，时间复杂度和顺序查找时间复杂度相同

但是稍微思考下，在二分查找的时候，由于要进行多余的运算，严格来说，会比顺序查找时间慢

以上分析，不知道是否准确，还请老师解答 [211赞]

作者回复2018-10-26 01:20:04
分析的很好 同学们可以把这条顶上去了

- 蒋礼锐 2018-10-24 01:29:25
因为要精确到后六位，可以先用二分查找出整数位，然后再二分查找小数第一位，第二位，到第六位。

整数查找很简单，判断当前数小于+1后大于即可找到，

小数查找举查找小数后第一位来说，从x.0到(x+1).0，查找终止条件与整数一样，当前数小于，加0.1大于，

后面的位数以此类推，可以用x*10^(-i)通项来循环或者递归，终止条件是i>6，

想了一下复杂度，每次二分是logn，包括整数位会查找7次，所以时间复杂度为7logn。空间复杂度没有开辟新的储存空间，空间复杂度为1。

没有具体用代码实现，只是思路，还请多多指正。之后会用js去实际实现。 [11赞]

- Jerry银银 2018-10-26 11:54:50
个人觉得二分查找进行优化时，还个细节注意：
将mid = lo + (hi - lo) /2，将除法优化成移位运算时，得注意运算符的优先级，千万不能写成这样：mid = lo + (hi - lo) >> 1 [27赞]

作者回复2018-10-28 15:31:44

- 朱凯 2018-10-25 01:51:20
  二分法求一个数x的平方根y?
  解答：根据x的值，判断求解值y的取值范围。假设求解值范围min < y < max。若0<x<1，则min=x，max=1；若x=1，则y=1；x>1，则min=1，max=x；在确定了求解范围之后，利用二分法在求解值的范围中取一个中间值middle=(min+max)÷2，判断middle是否是x的平方根？若(middle+0.000001)*(middle+0.000001)＞x且(middle-0.000001)*(middle-0.000001)<x，根据介值定理，可知middle既是求解值;若middle*middle > x，表示middle＞实际求解值，max=middle; 若middle*middle ＜ x，表示middle＜实际求解值，min =middle;之后递归求解！
  备注：因为是保留6位小数，所以middle上下浮动0.000001用于介值定理的判断 [20赞]

- Alexis何春光 2018-11-11 17:10:24
  现在在cmu读研，正在上terry lee的data structure，惊喜的发现不少他讲的点你都涵盖了，个别他没讲到的你也涵盖了.... （当然可能因为那门课只有6学时，时间不足，但还是给这个专栏赞一个！） [13赞]

  作者回复2018-11-12 00:45:45
  读cmu 太厉害了 仰慕

- 锐雨 2018-10-24 08:39:41
  求平方根，可以参考0到99之间猜数字的思路，99换成x, 循环到误差允许内即可，注意1这个分界线。欢迎交流，Java如下

```
public static double sqrt(double x, double precision) {
if (x < 0) {
return Double.NaN;
}
double low = 0;
double up = x;
if (x < 1 && x > 0) {
/** 小于1的时候*/
low = x;
up = 1;
}
double mid = low + (up - low)/2;
while(up - low > precision) {
if (mid * mid > x ) {//TODO mid可能会溢出
up = mid;
```

} else if (mid * mid < x) {
low = mid;
} else {
return mid;
}
mid = low + (up - low)/2;
}
return mid;
} [11赞]

- TWO STRINGS 2018-10-24 01:27:06
  1000w数据查找这个，在排序的时候不就可以找到了么？ [10赞]

  作者回复2018-10-24 15:23:38
  如果是多次查找操作呢

- Smallfly 2018-10-24 01:29:16
  1. 求平方根可以用二分查找或牛顿迭代法;
  2. 有序链表的二分查找时间复杂度为 O(n)。 [7赞]

- 姜威 2018-10-31 13:28:35
  总结：二分查找（上）
  一、什么是二分查找?
  二分查找针对的是一个有序的数据集合，每次通过跟区间中间的元素对比，将待查找的区间缩小为之前的一半，直到找到要查找的元素，或者区间缩小为0
  。
  二、时间复杂度分析?
  1.时间复杂度
  假设数据大小是n，每次查找后数据都会缩小为原来的一半，最坏的情况下，直到查找区间被缩小为空，才停止。所以，每次查找的数据大小是：n，n/2，n/4，…，n/(2^k)，…，这是一个等比数列。当n/(2^k)=1时，k的值就是总共缩小的次数，也是查找的总次数。而每次缩小操作只涉及两个数据的大小比较，所以，经过k次区间缩小操作，时间复杂度就是O(k)。通过n/(2^k)=1，可求得k=log2n，所以时间复杂度是O(logn)。
  2.认识O(logn)
  ①这是一种极其高效的时间复杂度，有时甚至比O(1)的算法还要高效。为什么?
  ②因为logn是一个非常“恐怖“的数量级，即便n非常大，对应的logn也很小。比如n等于2的32次方，也就是42亿，而logn才32。
  ③由此可见，O(logn)有时就是比O(1000)，O(10000)快很多。
  三、如何实现二分查找?

1.循环实现

代码实现：

```
public int binarySearch1(int[] a, int val){
int start = 0;
int end = a.length - 1;
while(start <= end){
int mid = start + (end - start) / 2;
if(a[mid] > val) end = mid - 1;
else if(a[mid] < val) start = mid + 1;
else return mid;
}
return -1;
}
```

注意事项：

①循环退出条件是：start<=end，而不是start<end。

②mid的取值，使用mid=start + (end - start) / 2，而不用mid=(start + end)/2，因为如果start和end比较大的话，求和可能会发生int类型的值超出最大范围。为了把性能优化到极致，可以将除以2转换成位运算，即start + ((end - start) >> 1)，因为相比除法运算来说，计算机处理位运算要快得多。

③start和end的更新：start = mid - 1，end = mid + 1，若直接写成start = mid，end=mid，就可能会发生死循环。

2.递归实现

```
public int binarySearch(int[] a, int val){
return bSear(a, val, 0, a.length-1);
}
private int bSear(int[] a, int val, int start, int end) {
if(start > end) return -1;
int mid = start + (end - start) / 2;
if(a[mid] == val) return mid;
else if(a[mid] > val) end = mid - 1;
else start = mid + 1;
return bSear(a, val, start, end);
}
```

四、使用条件（应用场景的局限性）

1.二分查找依赖的是顺序表结构，即数组。

2.二分查找针对的是有序数据，因此只能用在插入、删除操作不频繁，一次排序多次查找的场景中。

3.数据量太小不适合二分查找，与直接遍历相比效率提升不明显。但有一个例外，就是数据之间的比较操作非常费时，比如数组中存储的都是长度超过300的字符串，那这是还是尽量减少比较操作使用二分查找吧。

4.数据量太大也不是适合用二分查找，因为数组需要连续的空间，若数据量太大，往往找不到存储如此大规模数据的连续内存空间。

五、思考

1.如何在1000万个整数中快速查找某个整数？

①1000万个整数占用存储空间为40MB，占用空间不大，所以可以全部加载到内存中进行处理；

②用一个1000万个元素的数组存储，然后使用快排进行升序排序，时间复杂度为O(nlogn)

③在有序数组中使用二分查找算法进行查找，时间复杂度为O(logn)

2.如何编程实现“求一个数的平方根”？要求精确到小数点后6位？ [6赞]

- 三忌 2018-10-24 03:42:22

```
def sqrt(x):
'''
求平方根，精确到小数点后6位
'''
low = 0
mid = x / 2
high = x
while abs(mid ** 2 - x) > 0.000001:
if mid ** 2 < x:
low = mid
else:
high = mid
mid = (low + high) / 2
return mid [6赞]
```