最优化方法

哈尔滨工业大学
数学学院

杨　畅

哈尔滨工业大学
20140005 172.20.166.0
2023/11/09 20:42:31

第 一 章

运筹学思想

与

运筹学建模

哈尔滨工业大学
20140005 172.20.166.0
2023/11/09 20:42:31

第一章 运筹学思想与运筹学建模

运筹学—简称 OR

（美）Operation’s Research

（英）Operational Research

“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”

三个来源：军事、管理、经济

三个组成部分：

运用分析理论、竞争理论、随机服务理论

1.1运筹学与建模

一、什么是运筹学

- 为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供一门量化为基础的科学方法。
- 或是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据。
- 运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术，否则的话，问题的结果会更坏。

目标：找到“优”的方法、途径（只是一种理想的追求）
实际上由于问题的复杂性与各种不确定性，
应该研究如何避开更坏的结果。

二、运筹学解决问题的工作步骤(7步)

（1）提出问题：目标、约束、决策变量、参数

（2）建立模型：变量、参数、目标之间的关系表示

（3）模型求解：数学方法及其他方法

（4）解的检验：制定检验准则、讨论与现实的一致性

（5）灵敏性分析：参数扰动对解的影响情况

（6）解的实施：回到实践中

（7）后评估：考察问题是否得到完满解决

三、运筹学建模

例：

	甲产品	乙产品	设备能力（h）
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润（元/件）	1500	2500	

问题一：如何安排生产，获得最大利润？

哈尔滨工业大学 201400051 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

例：

	甲产品	乙产品	设备能力（h）
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润（元/件）	1500	2500	

问题二：工厂不安排生产，而是把设备租出去，并收取租赁费用。应该如何确定租金价格？

优化模型的一般形式（数学规划）

$$\begin{cases} \text{Opt.} & f\,(\,x_i,\ y_j,\ \xi_k\,) \\ \text{s.t.} & g_h\,(\,x_i,\ y_j,\ \xi_k\,)\ \le (\,=,\ \ge\,)\ 0 \\ & h = 1,2,\ \dots\ ,m \end{cases}$$

其中： x_i 为决策变量（可控制）

y_j 为已知参数

ξ_k 为随机因素

f，g_h 为（一般或广义）函数

记 $S=\{x_i \mid g_h(x;\ y_j;\ \xi_k) \le (\,=,\ \ge\,)\ 0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Opt.} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in S \end{cases}$$

哈尔滨工业大学 20140005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

数学规划的分类

（1）线性规划：　f, g为线性函数

（2）非线性规划：f, g中含有非线性函数

（3）多目标规划：f为向量函数

（4）整数规划：　决策变量为整数

（5）动态规划：　多阶段决策过程

（6）随机规划：　含有随机因子

哈尔滨工业大学 20140005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

1.2 基本概念及符号

1、向量和子空间投影定理

（1）n维欧氏空间：R^n

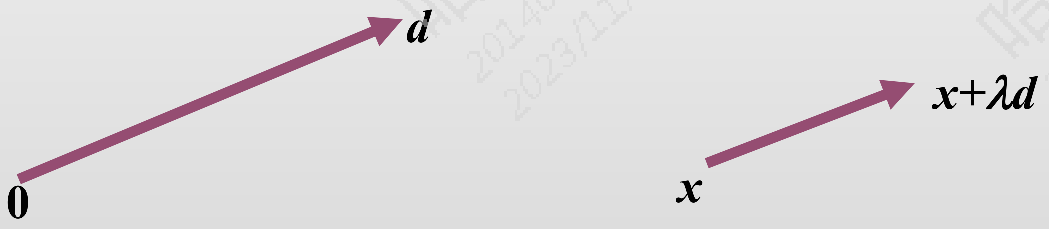
点（向量）：$\boldsymbol{x} \in R^n$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$

分量 $x_i \in R$（实数集）

方向（自由向量）：$\boldsymbol{d} \in R^n$，$\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^{\mathrm{T}}$ 表示从0指向$\boldsymbol{d}$ 的方向

实用中，常用 $\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}$ 表示从$\boldsymbol{x}$ 点出发沿$\boldsymbol{d}$ 方向移动$\lambda \boldsymbol{d}$ 长度得到的点



哈尔滨工业大学 20140005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

（2） 向量运算： $x, y \in R^n$

x, y 的内积： $x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

x, y 的距离： $\|x-y\| = [(x-y)^T(x-y)]^{(1/2)}$

x 的长度： $\|x\| = [x^T x]^{(1/2)}$

三角不等式： $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

点列的收敛：设点列 $\{x^{(k)}\} \subset R^n$， $x \in R^n$

点列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 x，记

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \forall i$$

哈尔滨工业大学 20140005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

（3） 子空间：设 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)} \in R^n$， $d^{(k)} \neq 0$

记 $L(d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)}) = \{ x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j d^{(j)} \mid \alpha_j \in R \}$

为由向量$d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m)}$生成的子空间，简记为$L$。

正交子空间：设 L 为R^n的子空间，其正交子空间为

$$L^{\perp} = \{ x \in R^n \mid x^T y = 0, \ \forall y \in L \}$$

子空间投影定理：设 L 为R^n的子空间。那么$\forall z \in R^n$，$\exists$ 唯一 $x \in L$，$y \in L^{\perp}$，使 $z = x + y$，且 x 为问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \| z - u \| \\ \text{s.t.} \quad & u \in L \end{aligned}$$

的唯一解，最优值为$\|y\|$。

特别，$L = R^n$ 时，正交子空间 $L^{\perp} = \{0\}$（零空间）

规定： $x, y \in R^n$, $x \le y \Leftrightarrow x_i \le y_i$, $\forall i$

可类似规定 $x \ge y$, $x = y$, $x < y$, $x > y$.

定理：

设 $x \in R^n$, $\alpha \in R$, L为R^n 的线性子空间，

(1) 若 $x^T y \le \alpha$, $\forall y \in R^n$ 且 $y \ge 0$,

则 $x \le 0$, $\alpha \ge 0$.

(2) 若 $x^T y \le \alpha$, $\forall y \in L \subseteq R^n$,

则 $x \in L^\perp$, $\alpha \ge 0$.(特别，$L = R^n$时，$x = 0$)

定理的其他形式：

"若 $x^T y \le \alpha$, $\forall y \in R^n$ 且 $y \le 0$，则 $x \ge 0$, $\alpha \ge 0$."

"若 $x^T y \ge \alpha$, $\forall y \in R^n$ 且 $y \ge 0$，则 $x \ge 0$, $\alpha \le 0$."

"若 $x^T y \ge \alpha$, $\forall y \in R^n$ 且 $y \le 0$，则 $x \le 0$, $\alpha \le 0$."

"若 $x^T y \ge \alpha$, $\forall y \in L \subseteq R^n$，则 $x \in L^\perp$, $\alpha \le 0$."

2、多元函数及其导数

（1） n元函数：$f\ (x):\ R^n \to R$

线性函数：$f(x) = c^T x + b = \Sigma\, c_i\, x_i + b$

二次函数：$f(x) = (1/2)\, x^T Q x + c^T x + b$

$$= (1/2)\Sigma_i\, \Sigma_j\, a_{ij}\, x_i\, x_j + \Sigma\, c_i\, x_i + b$$

向量值线性函数：$F(x) = Ax + d \in R^m$

其中 A为 $m\times n$矩阵，d为m维向量

$$F(x)=(\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ ,\ f_m(x)\ )^T$$

记 a_i^T为A的第i行向量，$f_i(x) = a_i^T x+d_i$

哈尔滨工业大学 201400005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

（2） 梯度（一阶偏导数向量）：

$$\nabla f(x) = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n .$$

线性函数：$f(x) = c^{\mathrm{T}}x + b$

$$\nabla f(x) = c$$

二次函数：$f(x) = (1/2)\, x^{\mathrm{T}}Qx + c^{\mathrm{T}}x + b$

$$\nabla f(x) = Qx + c$$

向量值线性函数：$F(x) = Ax + d \in R^m$

$$\partial F / \partial x = A^{\mathrm{T}}$$

哈尔滨工业大学 20140005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

(3) Hesse 阵（二阶偏导数矩阵）：

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_2\partial x_1 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n\partial x_1 \\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 & \partial^2 f/\partial x_2^2 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n\partial x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_n & \partial^2 f/\partial x_2\partial x_n & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n^2 \end{pmatrix}$$

线性函数：$f(x) = c^T x + b$， $\nabla^2 f(x) = 0$

二次函数：$f(x) = (1/2)\, x^T Q x + c^T x + b$， $\nabla^2 f(x) = Q$ （对称）

哈尔滨工业大学 2014000517 2.20.166.0 2023/11/09 20:42:31

(4) n元函数的Taylor展开式及中值公式：

设 $f(x)$：$R^n \to R$，二阶可导。在x^*的邻域内

一阶Taylor展开式：

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^T(x^*)(x-x^*) + o\|x-x^*\|$$

二阶Taylor展开式：

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^T(x^*)(x-x^*) + (1/2)(x-x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x-x^*) + o\|x-x^*\|^2$$

一阶中值公式：对x, $\exists\, \lambda \in (0,1)$, 使

$$f(x) = f(x^*) + [\nabla f(x^* + \lambda(x-x^*))]^T (x-x^*)$$

Lagrange余项：对x, $\exists\, \mu \in (0,1)$, 记$x_\mu = x^* + \mu(x-x^*)$

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^T(x^*)(x-x^*) + (1/2)(x-x^*)^T \nabla^2 f(x_\mu)(x-x^*)$$

其它基础知识

- 线性代数的有关概念：向量与矩阵的运算、向量的线性相关和线性无关，矩阵的秩，正定、半正定矩阵，线性空间等；
- 集合的有关概念：开集、闭集，集合运算，内点、边界点等。

练习题

- 求下列函数的梯度和海塞矩阵：

(1) $f_1(x) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + x_1x_2 + 9$

(2) $f_2(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 3x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_1x_2x_3 + 17$

(3) $f_3(x) = 10 - (x_2 - x_1^2)^2$

- 求以上函数的一阶和二阶Taylor展开式
- 设$x = (x_1, x_2, x_3)^T$,$d = (d_1, d_2, d_3)^T$,求函数$f_2(x)$在x点沿方向d的方向导数f'_2 (x;d)
- 设$F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$,求$F(x)$的偏导数矩阵

哈尔滨工业大学 20140005 172.20.166.0 2023/11/09 20:42:31