最优化方法

哈尔滨工业大学
数学学院

杨 畅

第 3 章

线 性 规 划

3.1 线性规划模型

例：某工厂拥有A、B、C 三种类型的设备，生产甲、乙两种产品。每件产品在生产中需要占用的设备机时数，每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数如下表所示：

	甲产品	乙产品	设备能力（h）
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润（元/件）	1500	2500	

问题：工厂应如何安排生产可获得最大的总利润？

问题：工厂应如何安排生产可获得最大的总利润？

目标函数 Max $z = 1500x_1 + 2500x_2$

约束条件 s.t. $3x_1 + 2x_2 \le 65$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$3x_2 \le 75$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

图解法？

- 一般形式
- 目标函数：

$$\text{Max(Min)}z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- 约束条件：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \le (=, \ge) b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

- *标准形式*
- 目标函数：

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

- 约束条件：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

四个特点：

- 目标最大化
- 约束为等式
- 决策变量均非负
- 右端项非负

1.极小化目标函数的问题：

设目标函数为

$$\text{Min } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

则可以令 $z = -f$，该极小化问题与下面的极大化问题有相同的最优解，即

$$\text{Max } z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$$

但必须注意，尽管以上两个问题的最优解相同，但他们最优解的目标函数值却相差一个符号，即

$$\text{Min } f = -\text{Max } z$$

2.约束条件不是等式的问题：

设约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ \dots\ +a_{in}x_n \le b_i$$

可以引进一个新的变量s（引入“松弛变量”），使它等于约束右边与左边之差

$$s = b_i-(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \dots\ + a_{in}x_n)$$

显然，s也具有非负约束，即$s \ge 0$，

这时新的约束条件成为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ \dots\ +a_{in}x_n+s = b_i$$

当约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \ldots +a_{in}x_n \geq b_i$$

时，类似地令（引入“人工变量”）

$$s = (a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \ldots +a_{in}x_n)- b_i$$

显然，s 也具有非负约束，即$s\geq 0$，这时新的约束条件成为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \ldots +a_{in}x_n-s = b_i$$

例：将以下线性规划问题转化为标准形式

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\quad & f = 3.6\,x_1 - 5.2\,x_2 + 1.8\,x_3 \\
\text{s. t.}\quad & 2.3\,x_1 + 5.2\,x_2 - 6.1\,x_3 \le 15.7 \\
& 4.1\,x_1 \qquad\qquad + 3.3\,x_3 \ge 8.9 \\
& \quad x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 38 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

解：首先,将目标函数转换成极大化

其次考虑约束，有2个不等式约束，引进松弛变量或人工变量x_4，$x_5 \geq 0$。

于是得到以下标准形式的线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\ \ z &= -3.6x_1 + 5.2x_2 - 1.8x_3 \\
\text{s.t.}\ \ & 2.3x_1 + 5.2x_2 - 6.1x_3 + x_4 = 15.7 \\
& 4.1x_1 + 3.3x_3 - x_5 = 8.9 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 38 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. 变量无符号限制的问题：

在标准形式中，必须每一个变量均有非负约束。当某一个变量x_j没有非负约束时，可以令

$$x_j = x_j' - x_j''$$

其中

$$x_j' \geq 0，x_j'' \geq 0$$

即用两个非负变量之差来表示一个无符号限制的变量，当然x_j的符号取决于x_j'和x_j''的大小。

4.右端项有负值的问题：

在标准形式中，要求右端项必须每一个分量非负。当某一个右端项系数为负时，如 $b_i<0$，则把该等式约束两端同时乘以-1，得到：

$$-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\dots-a_{in}x_n=-b_i$$

例：将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\text{Min } f = -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 7x_4$$

$$\text{s.t. } 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 28$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 \ge 39$$

$$6x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le -58$$

$$x_1, x_3, x_4 \ge 0$$

解：首先，将目标函数转换成极大化

其次考虑约束，有3个不等式约束，需引进松弛变量或人工变量；由于x_2无非负限制，可令$x_2 = x_2' - x_2''$,其中$x_2' \geqslant 0$，$x_2'' \geqslant 0$；

由于第3个约束右端项系数为负，需等式两侧乘以-1

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad z &= 3x_1 - 5x_2' + 5x_2'' - 8x_3 + 7x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' + 5x_3 + 6x_4 + x_5 = 28 \\
& 4x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 3x_3 - 9x_4 - x_6 = 39 \\
& -6x_2' + 6x_2'' - 2x_3 - 3x_4 - x_7 = 58 \\
& x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

矩阵形式：

线性规划的标准形式：

$$
(\mathrm{LP}) \qquad \begin{aligned} \text{Max} \quad & c^{T}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}
$$

其中,

$c\ ,\ x \in R^{n}$

$b \in R^{m}$

A为$m \times n$ 矩阵

线性规划的规范形式：

$$(\mathrm{P})\quad \begin{array}{ll} \mathrm{Max} & c^{T}x \\ \mathrm{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

其中,

c , x $\in R^{n}$

b $\in R^{m}$

A为$m \times n$ 矩阵

3.2 线性规划的单纯形法

1.线性规划的理论

考虑(*LP*)多面体为$S = \{ x\in R^n \mid Ax = b , x\geq 0 \}$。

定理（解的存在性）考虑(*LP*)及上述多面体S，设 A 满秩，$x^{(1)},x^{(2)}$，…,$x^{(k)}$为所有极点，$d^{(1)},d^{(2)}$，…,$d^{(l)}$为所有极方向。那么，

（1）(*LP*)存在有界最优解 $\Leftrightarrow c^T d^{(j)} \leq 0, \forall j$。

（2）若(*LP*)存在有界最优解，则最优解可以在某个极点达到。

定理（最优性定理） 考虑(*LP*)，条件同上，设 x^* 为极点，存在分解 $A=(B, N)$，其中B为m阶非奇异矩阵，使 $x^{*T}=(x^{*T}_B, x^{*T}_N)$，这里 $x^*_B=B^{-1}b\geq 0$，$x^*_N=0$，相应 $c^T=(c_B^T, c_N^T)$。那么

（1）若 $c_N^T-c_B^T B^{-1}N\leq 0$，则 x^*为opt.。

（2）若 $c_j-c_B^T B^{-1}a_j>0$，且 $B^{-1}a_j\leq 0$，则 (*LP*) 无有界解。

2.表格单纯形法原理及算法过程

$$(LP)\qquad \begin{aligned} \text{Max}\quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中,

c , $x \in \mathrm{R}^n$

$b \in \mathrm{R}^m$

A 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}(A) = m$

Ⅰ.单纯形法原理及算法过程

算法过程 (考虑一般步, k = 0,1,2,…)

设 $x^{(k)}$ 为极点, 对应分解 $A=(B,N)$，使

$x^{(k)T}=(x^{(k)}{}_B{}^T, x^{(k)}{}_N{}^T)$，这里 $x^{(k)}{}_B=B^{-1}b>0$, $x^{(k)}{}_N=0$，

相应 $c^T=(c_B{}^T, c_N{}^T)$。那么，

（1）若 $\sigma_N^T=c_N{}^T-c_B{}^T B^{-1}N\le 0$, 则 $x^{(k)}$为opt，停止迭代；

（2）否则，存在 $\sigma_j=c_j-c_B{}^T B^{-1}a_j>0$,

1）若 $B^{-1}a_j\le 0$, 则 (LP) 无有界解，停止迭代；

2）若存在 $(B^{-1}a_j)_i>0$,

取 $\alpha=\min\{(B^{-1}b)_i/(B^{-1}a_j)_i \mid (B^{-1}a_j)_i>0\}$

$=(B^{-1}b)_r/(B^{-1}a_j)_r>0$

- ✓ 更新 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d$ （是极点）

其中, d^T = （ d_B^T, d_N^T ）, 这里 j

$$d_B = -B^{-1}a_j ,\quad d_N = (0, \dots , 1, \dots ,0)^T$$

- ✓ 更新点$x^{(k+1)}$是更优的

$$c^Tx^{(k+1)} = c^Tx^{(k)} + \alpha\, c^Td$$

$$= c^Tx^{(k)} + \alpha\,(c_j - c_B^TB^{-1}a_j) > c^Tx^{(k)}$$

所以，$x^{(k+1)}$ 比 $x^{(k)}$ 好。

- ✓ 重复这个过程，直到停机。
- ✓ α的选择保证了$x^{(k+1)} \geq 0$
- ✓ 另一方面，可以验证$Ax^{(k+1)} = b$，所以$x^{(k+1)}$属于S
- ✓ 最后可以证明$x^{(k+1)}$是一个极点

Ⅱ.单纯形表：

设 x 为初始极点，相应分解 $A=(B, N)$

	f	$\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}$	RHS	
目标行	1	$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}$	0	1行
约束行	0	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{b}$	m行
	1列	m列	$n-m$列	1列	

作变换，使前m+1列对应的m+1阶矩阵变为单位矩阵。相当于该表左乘（Gauss主元消去）

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

得到

检验数

	f	$\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}$	RHS	
目标行	1	0^{T}	$\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1行
$\boldsymbol{x}_B$	0	I	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{m}$行
	1列	m列	$n-m$列	1列	

1	0^{T}	$\boldsymbol{\sigma}_N^{\mathrm{T}}$	$-z=-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$
0	I	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{x}^*_B$

进一步，若$\boldsymbol{B}^{-1}$=I，则有

1	0^{T}	$\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}$	$-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$
0	I	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{b}$

为了计算方便，我们对规范形式建立如下单纯形表：

（注：引入了m个松弛变量）

考虑： $b_i > 0 \quad i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}$$

加入松弛变量

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \geq 0
\end{aligned}
$$

显然，$x_j = 0$， $j = 1, \dots, n$；$x_{n+i} = b_i$， $i = 1, \dots, m$ 是基本可行解。
对应的基是单位矩阵。

回忆

1	0^T	$c_N^T - c_B^T N$	$-c_B^T b$
0	I	N	b

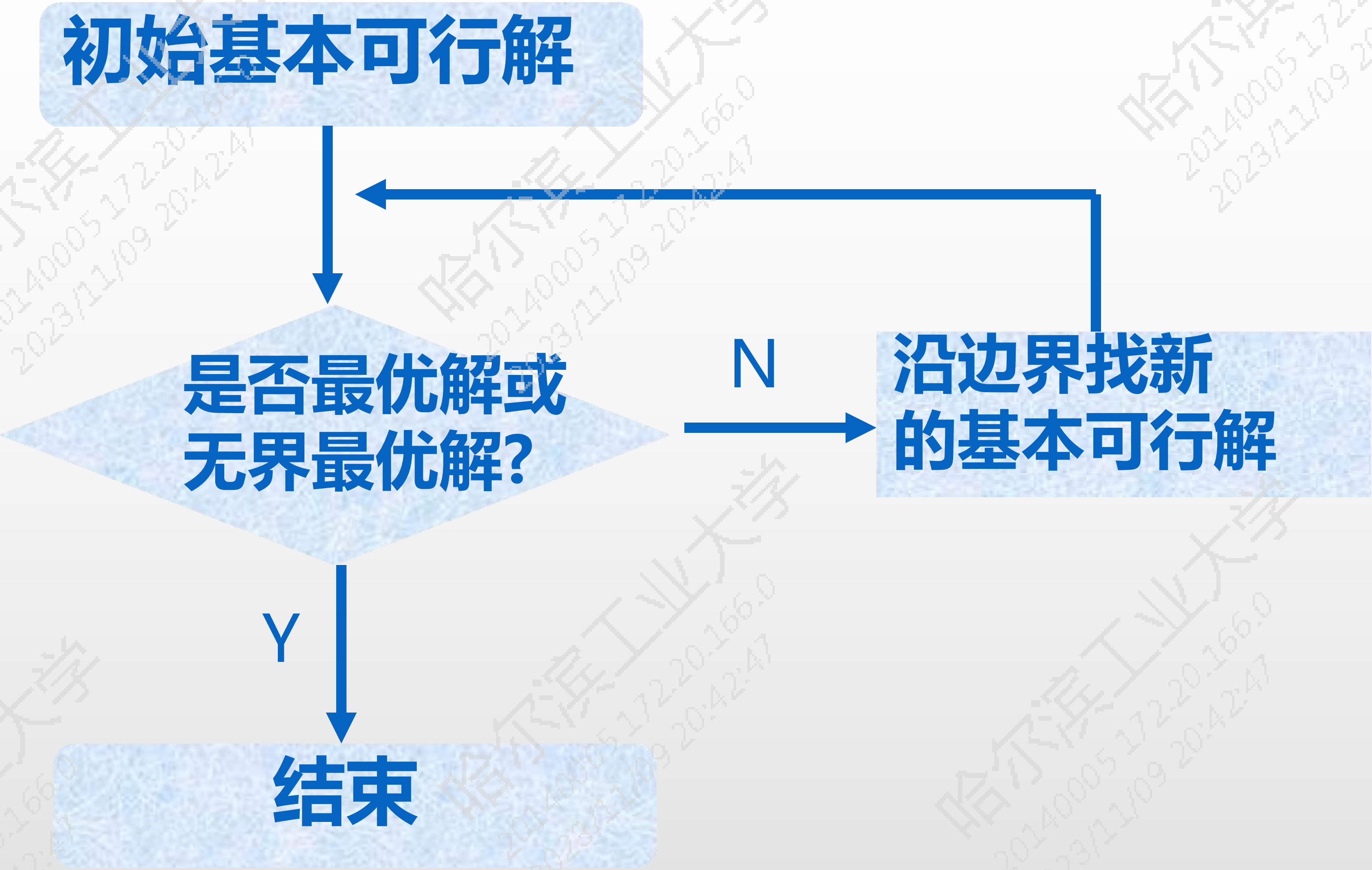
以下是初始单纯形表：

c_B	x_B	b	c_1 x_1	$\cdots$	c_n x_n	c_{n+1} x_{n+1}	$\cdots$	c_{n+m} x_{n+m}	α_i
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	$a_{1,n+1}$	$\cdots$	$a_{1,n+m}$	α_1
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}	$a_{2,n+1}$	$\cdots$	$a_{2,n+m}$	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	$a_{m,n+1}$	$\cdots$	$a_{m,n+m}$	α_m
$-z$		f	σ_1	$\cdots$	σ_n	0	$\cdots$	0	

其中：$f = -\sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\, b_i$ $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\, a_{ij}$ 为检验数 $c_{n+i} = 0$ $i = 1,\ldots,m$

$a_{n+i,i} = 1$ ，$a_{n+i,j} = 0\ (j \neq i)$ $i, j = 1, \ldots, m$

单纯形法的算法流程图



遍历线性规划问题基本可行解（极点）的方法来求解较大规模的问题是不可行的。

单纯形法的基本思路是：有选择地取基本可行解，即是从可行域的一个极点出发，沿着可行域的边界移到另一个相邻的极点，要求新极点的目标函数值不比原目标函数值差。

例 用单纯形法的基本思路解前例的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z = 1500\,x_1 + 2500\,x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 65 \\
& 2\,x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\
& 3\,x_2 + x_5 = 75 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

c_B	x_B	b	1500	2500	0	0	0	α_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	65	3	2	1	0	0	32.5
0	x_4	40	2	1	0	1	0	40
0	x_5	75	0	(3)	0	0	1	25
-z		0	1500	2500*	0	0	0	
0	x_3	15	(3)	0	1	0	-2/3	5
0	x_4	15	2	0	0	1	-1/3	7.5
2500	x_2	25	0	1	0	0	1/3	—
-z		-62500	1500*	0	0	0	-2500/3	
1500	x_1	5	1	0	1/3	0	-2/9	—
0	x_4	5	0	0	-2/3	1	1/9	—
2500	x_2	25	0	1	0	0	1/3	—
-z		-70000	0	0	-500	0	-500	

最优解 $x_1 = 5$ $x_2 = 25$ $x_4 = 5$**（松弛标量，表示**B**设备有5个机时数的剩余），最优值** $z^* = 70000$

例 用单纯形法的基本思路解修改后的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max}\quad & z = 1500\,x_1 + 1000\,x_2 \\
\textbf{s.t.}\quad & 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 65 \\
& 2\,x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\
& 3\,x_2 + x_5 = 75 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

c_B	x_B	b	1500	1000	0	0	0	α_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	65	3	2	1	0	0	32.5
0	x_4	40	2	1	0	1	0	40
0	x_5	75	0	(3)	0	0	1	25
-z		0	1500	1000*	0	0	0	
0	x_3	15	(3)	0	1	0	-2/3	5
0	x_4	15	2	0	0	1	-1/3	7.5
1000	x_2	25	0	1	0	0	1/3	—
-z		-25000	1500*	0	0	0	-1000/3	
1500	x_1	5	1	0	1/3	0	-2/9	—
0	x_4	5	0	0	-2/3	1	(1/9)	45
1000	x_2	25	0	1	0	0	1/3	75
-z		-32500	0	0	-500	0	0	
1500	x_1	15	1	0	-1	2	0	—
0	x_5	45	0	0	-6	9	1	—
1000	x_2	10	0	1	2	-3	0	—
		-32500	0	0	-500	0	0	

- 得到最优解：$(5，25，0，5, 0)^T$ 或 $(15，10，0，0, 45)^T$
- 最优目标值：32500

注意：单纯形法中，

（1）每一步运算只能用矩阵初等行变换；

（2）表中第3列的数总应保持非负（≥ 0）；

（3）当所有检验数均非正（≤ 0）时，得到最优单纯形表。

（4）检验数的更新也相当于是主元消去，例如以a_{kr}为主元

$$\sigma_j' = \sigma_j - \frac{a_{kj}}{a_{kr}}\sigma_r = a_{kj}(\frac{\sigma_j}{a_{kj}} - \frac{\sigma_r}{a_{kr}}))$$

一般情况主要是讨论初始基本可行解不明显时常用的方法。

考虑一般问题： $b_i > 0 \quad i = 1, \ldots, m$

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

● **大 *M* 法**

引入人工变量 $x_{n+i} \geq 0$（$i = 1$，…，m）及充分大正数 M。得到

$$\mathbf{Max}\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{aligned}$$

显然：$x_j = 0$，$j=1, \ldots, n$

$x_{n+i} = b_i$，$i=1$，…，m 是基本可行解。对应的基是单位矩阵。

结论：若得到的最优解满足：$x_{n+i} = 0$，$i = 1$，…，m 则是原问题的最优解；否则，原问题无可行解。

例 $\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 26 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

应用大M法

$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 26 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

c_B	x_B	b	5	2	3	-1	-M	-M	α_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_5	15	1	2	3	0	1	0	5
-M	x_6	20	2	1	(5)	0	0	1	4
-1	x_4	26	1	2	4	1	0	0	6.5
-z		35M+26	3M+6	3M+4	8M+7*	0	0	0	
-M	x_5	3	-1/5	(7/5)	0	0	1	-3/5	15/7
3	x_3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5	20
-1	x_4	10	-3/5	6/5	0	1	0	-4/5	25/3
-z		3M-2	-M/5+16/5	7/5M+13/5*	0	0	0	-8/5M-7/5	
2	x_2	15/7	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	—
3	x_3	25/7	(3/7)	0	1	0	-1/7	2/7	25/3
-1	x_4	52/7	-3/7	0	0	1	-6/7	-2/7	—
-z		-53/7	25/7 *	0	0	0	-M-13/7	-M-2/7	
2	x_2	10/3	0	1	1/3	0	2/3	-1/3	
5	x_1	25/3	1	0	7/3	0	-1/3	2/3	
-1	x_4	11	0	0	1	1	-1	0	
-z		-112/3	0	0	-25/3	0	-M-2/3	-M+8/3	

- 得到最优解：$(25/3, 10/3, 0, 11)^T$
- 最优目标值：112/3

两阶段法

引入人工变量 $x_{n+i} \geq 0$，$i = 1, \ldots, m$；

构造:

Max $z = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

- **第一阶段求解上述问题：**

显然$x_j = 0$，$j=1, \ldots, n$；

$x_{n+i} = b_i$，$i=1, \ldots, m$

是基本可行解,它对应的是单位矩阵。

结论：若得到的最优解满足$x_{n+i}=0$ $i=1, \ldots, m$，则是原问题的基本可行解;否则，原问题无可行解。

- **得到原问题的基本可行解后，第二阶段求解原问题。**

例 $\text{Max} \quad z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 26 \\ x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

应用两阶段法

$\text{Max} \ z = -x_5 - x_6$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 26 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

•第一阶段（*LP* - 1）

c_B	x_B	b	0	0	0	0	-1	-1	α_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-1	x_5	15	1	2	3	0	1	0	5
-1	x_6	20	2	1	(5)	0	0	1	4
0	x_4	26	1	2	4	1	0	0	6.5
-z		35	3	3	8*	0	0	0	
-1	x_5	3	-1/5	(7/5)	0	0	1	-3/5	15/7
0	x_3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5	20
0	x_4	10	-3/5	6/5	0	1	0	-4/5	25/3
-z		3	-1/5	7/5*	0	0	0	-8/5	
0	x_2	15/7	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	—
0	x_3	25/7	3/7	0	1	0	-1/7	2/7	—
0	x_4	52/7	-3/7	0	0	1	-6/7	-2/7	—
-z		0	0	0	0	0	-1	-1	

• 得到原问题的基本可行解 $(0，15/7，25/7，52/7)^T$

•第二阶段（*LP* - 2）

c_B	x_B	b	5	2	3	-1	α_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_2	15/7	-1/7	1	0	0	—
3	x_3	25/7	(3/7)	0	1	0	25/3
-1	x_4	52/7	-3/7	0	0	1	—
-z		-53/7	25/7	0	0	0	
2	x_2	10/3	0	1	1/3	0	
5	x_1	25/3	1	0	7/3	0	
-1	x_4	11	0	0	1	1	
-z		-112/3	0	0	-25/3	0	

✓ 得到原问题的最优解:$(25/3，10/3，0，11)^T$

✓ 最优目标值：112/3

3.3 线性规划的对偶

1.对偶问题

若前面讲述的例题的设备都用于外协加工，工厂收取加工费。试问：设备 *A*、*B*、*C* 每工时各如何收费才最有竞争力？设 y_1、y_2、y_3 分别为每工时设备 *A*、*B*、*C* 的收取费用。

	甲产品	乙产品	设备能力（h）
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润（元/件）	1500	2500	

$$\text{Max}\quad z = 1500x_1 + 2500x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 65 \\ 2x_1 + x_2 \le 40 \\ 3x_2 \le 75 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原问题

$$\text{Min}\quad f = 65y_1 + 40y_2 + 75y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \ge 1500 \\ \text{（不少于甲产品的利润）} \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2500 \\ \text{（不少于乙产品的利润）} \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题

2.对偶定义

对称形式	互为对偶
(LP) Max $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ s.t. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ “Max—≤ ”	(DP) Min $f = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ s.t. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$ “Min—≥”

一对对称形式的对偶规划之间具有下面的对应关系。

(1)若一个模型为目标求“极大”，约束为“小于等于”的不等式，则它的对偶模型为目标求“极小”，约束是“大于等于”的不等式。即“Max，≤”和“Min，≥”相对应。

(2)从约束系数矩阵看：一个模型中为A，则另一个模型中为A^{T}。一个模型是m个约束、n个变量，则它的对偶模型为n个约束、m个变量。

(3)从数据b、c的位置看：在两个规划模型中，b和c的位置对换。

(4)两个规划模型中的变量皆非负。

非对称形式的对偶规划

一般称不具有对称形式的一对线性规划为非对称形式的对偶规划。

对于非对称形式的规划，可以按照下面的对应关系直接给出其对偶规划。

（1）将模型统一为“Max，≤”或“Min，≥” 的形式，对于其中的等式约束按下面（2）、（3）中的方法处理。

（2）若原规划的某个约束条件为等式约束，则在对偶规划中与此约束对应的那个变量取值没有非负限制。

（3）若原规划的某个变量的值没有非负限制，则在对偶问题中与此变量对应的那个约束为等式。

例 写出下面线性规划的对偶规划模型

$$\max z = x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 \geq -60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 30 \\ -5 \leq x_4 \leq 10, x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{没有非负限制} \end{cases}$$

解： 先将约束条件变形为“≤”形式

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 25 \\ -2x_1 \qquad\quad - 7x_3 - 2x_4 \le 60 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \qquad\quad \le 30 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_4 \le 10 \\ \qquad\qquad\qquad\quad -x_4 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3, x_4 \text{没有非负限制} \end{cases}$$

再根据非对称形式的对应关系，直接写出对偶规划

$$\min \ f = 25y_1 + 60y_2 + 30y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ 3y_1 \qquad\quad + 2y_3 \ge -1 \\ -2y_1 - 7y_2 - 4y_3 = 5 \\ y_1 - 2y_2 \qquad\quad + y_4 - y_5 = -7 \\ y_1\text{没有非负限制}, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{cases}$$

对偶定理

(原问题与对偶问题解的关系)

考虑（LP）和（DP）

定理(弱对偶定理)

若 x, y 分别为（LP）和（DP）的可行解，那么$c^{T}x \leq b^{T}y$。

推论 设（LP）有可行解，那么若（LP）无有界最优解，则（DP）无可行解。

定理（最优性准则定理）

若$\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*$分别$(LP),(DP)$的可行解,且$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$，那么$x^*,y^*$分别为$(LP)$和$(DP)$的最优解。

定理(主对偶定理)

若(LP)有最优解，则(DP)也有最优解。反之也成立，且最优值相等。

以上定理、推论对任意形式的相应规划的对偶均有效。

影子价格是一个向量，它的分量表示最优目标值随相应资源数量变化的变化率。

若 x^*, y^* 分别为（LP）和（DP）的最优解，

那么 $c^T x^* = b^T y^*$

根据 $f = b^T y^* = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + \cdots + b_m y_m^*$

可知 $\partial f / \partial b_i = y_i^*$

y_i^* 表示 b_i 变化一个单位对目标 f 产生的影响，称 y_i^* 为 b_i 的影子价格。

注意：若 B 是最优基，$y^* = (B^T)^{-1} c_B$ 为影子价格向量。

影子价格反映了不同的局部或个体的增量可以获得不同的整体经济效益。如果为了扩大生产能力，考虑增加设备，就应该从影子价格高的设备入手。这样可以用较少的局部努力，获得较大的整体效益。

由最优单纯形表求对偶问题最优解

标准形式：

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z = 50x_1 + 100x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 300 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 400 \\
& x_2 + x_5 = 250 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

c_B	x_B	b	50	100		0	0	0	α_i
			x_1	x_2		x_3	x_4	x_5	
0	x_3	300	1	1		1	0	0	300
0	x_4	400	2	1	E	0	1	0	400
0	x_5	250	0	(1)		0	0	1	250
-z		0	50	100*	O^T	0	0	0	
0	x_3	50	(1)	0		1	0	-1	50
0	x_4	150	2	0		0	1	-1	75
100	x_2	250	0	1		0	0	1	—
-z		-25000	50*	0		0	0	-100	
50	x_1	50	1	0		1	0	-1	—
0	x_4	50	0	0	B^{-1}	-2	1	1	—
100	x_2	250	0	1		0	0	1	—
-z		-27500	0	0	$-c_B^T B^{-1}$	-50	0	-50	

最优解 $x_1 = 50 \quad x_2 = 250 \quad x_4 = 50$

影子价格 $y_1 = 50 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 50$，

B^{-1}对应的检验数为$-c_B^T B^{-1}$。

$B = (a_1, a_4, a_2)$

对偶单纯形法

对偶单纯形法的基本思想:

从原规划的一个基本解出发，此基本解不一定可行，但它对应着一个对偶可行解（检验数非正），所以也可以说是从一个对偶可行解出发；然后检验原规划的基本解是否可行，即是否有负的分量，如果有小于零的分量，则进行迭代，求另一个基本解，此基本解对应着另一个对偶可行解（检验数非正）。

如果得到的基本解的分量皆非负，则该基本解为最优解。也就是说，对偶单纯形法在迭代过程中始终保持对偶解的可行性（即检验数非正），使原规划的基本解由不可行逐步变为可行，当同时得到对偶规划与原规划的可行解时，便得到原规划的最优解。

对偶单纯形法在什么情况下使用 ：

应用前提：有一个基，其对应的基满足:

（1）单纯形表的检验数行全部非正（对偶可行）；

（2）变量取值可有负数（非可行解）。

注：通过矩阵行变换运算，使所有相应变量取值均为非负数即得到最优单纯形表。

$$\min f = c^T x, \quad c \geq 0$$
s.t. $\quad Ax \geq b, \quad b \geq 0$
$\quad x \geq 0$

化为标准形式：
$$\max g = -c^T x$$
s.t. $\quad -Ax + I_s x_s = -b$
$\quad x, x_s \geq 0$

在初始计算中
$\sigma^T = (-c^T, 0^T) \leq 0$,即对偶可行
但是由于$-b \leq 0$，所以原问题不可行。

对偶单纯形法求解线性规划问题过程：

（1）建立初始对偶单纯形表,对应一个基本解,所有检验数均非正,转（2）。

（2）若$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$,则得到最优解,停止;否则,若有$b_k<0$则选$k$行的基变量为出基变量,转（3）。

（3）若所有$a_{kj} \geq 0(j=1,2,\ldots,n)$，则原问题无可行解,停止(因为以任何$a_{kj}$为主元做主元消去时，都不可能使$b_k$变为正数);

否则,若有$a_{kj}<0$ 则选

$$\theta=\min\{\sigma_j / a_{kj} \mid a_{kj}<0\}=\sigma_r / a_{kr},$$

那么x_r为进基变量,转（4）。

（4）以a_{kr}为主元,作矩阵行变换使其变为1,该列其他元变为0,转(2)。

说明：

（1）由于主元消去前a_{kj}与b_k同为负数，因此主元消去后右端列第k个分量变成正数，这有利于基本解向着满足可行性的方向转化。

（2）若有$a_{kj}<0$ 则选

$\theta=\min\{\sigma_j / a_{kj} \mid a_{kj}<0\}=\sigma_r / a_{kr}$ ，

θ的选取保证新的检验数$\sigma_j' \le 0$,因为

$$\sigma_j' = \sigma_j - \frac{a_{kj}}{a_{kr}}\sigma_r = a_{kj}\left(\frac{\sigma_j}{a_{kj}} - \frac{\sigma_r}{a_{kr}}\right)$$

（3）主元消去运算后，对偶问题的目标函数值减小（至少不增大）。因为

$$-(c_B^T b)' = -c_B^T b - \frac{\sigma_r}{a_{kr}} b_k$$

由于$\frac{\sigma_r}{a_{kr}} b_k \le 0$，故$-(c_B^T b)' \ge -c_B^T b$，即$(c_B^T b)' \le c_B^T b$。

	f	$\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}$	RHS	
目标行	1	$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}$	0	1行
约束行	0	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{m}$行
	1列	m列	$n-m$列	1列	

作变换，使前m+1列对应的m+1阶矩阵变为单位矩阵。相当于该表左乘（Gauss主元消去）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

得到

	f	$\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}$	RHS	
目标行	1	0^{T}	$\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1行
$\boldsymbol{x}_B$	0	I	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{m}$行
	1列	m列	$n-m$列	1列	

例 求解线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\text{Min } f &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

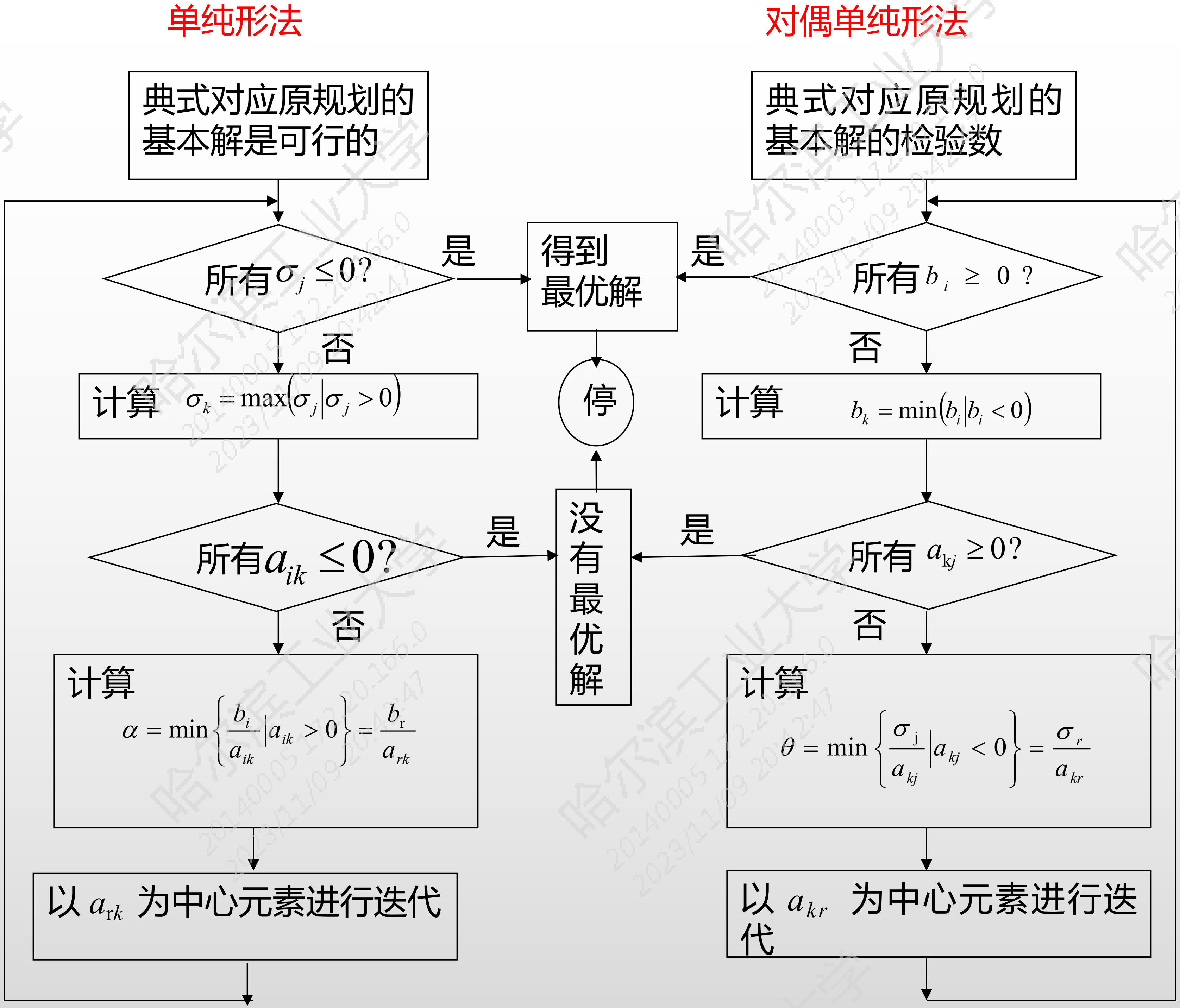
标准化：

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

表格对偶单纯形法

c_B	x_B	b	-2	-3	-4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	(-2)	1	-3	0	1
$-z$		0	-2	-3	-4	0	0
0	x_4	-1	0	(-5/2)	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
$-z$		4	0	-4	-1	0	-1
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
$-z$		28/5	0	0	-9/5	-8/5	-1/5

单纯形法和对偶单纯形法步骤



单纯形表的理解（例题）

c_B	x_B	b'						
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_3	b	4	a_1	1	0	a_2	0
	x_4	2	-1	-5	0	1	-1	0
	x_6	3	a_3	-3	0	0	-4	1
σ_j			σ_1	σ_2	0	0	-3	0

上表中6个常数 a_1， a_2，a_3，b， σ_1， σ_2 取值在什么范围可使

(1)现可行解最优，且唯一？何时不唯一？

(2)现基本解不可行。

(3)问题无可行解。

(4)无有界最优解。

(5)现基本解可行，由 x_1 取代 x_6 目标函数可改善。

3.4 灵敏度分析

进一步理解最优单纯形表中各元素的含义，并考虑问题

$$\textbf{Max}\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{s.t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

不防设 $x_j = 0$，$j = m+1, \ldots, n$；$x_i = b_i'$，$i = 1, \ldots, m$ 是基本可行解，对应的目标函数典式为 $z = -f + c_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c_n x_n$

以下是初始单纯形表：

c_B	x_B	b	c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	α_i
			x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1'	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	α_1
c_2	x_2	b_2'	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m'	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	α_m
$-z$		f	0	$\cdots$	0	σ_{m+1}	$\cdots$	σ_n	

其中：$f = -\sum_{i=1}^{m} c_i b_i'$，　$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}'$ 为检验数。向量 $b' = B^{-1} b$

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$a_j' = B^{-1} a_j$，

$a_j' = (a_{1j}', a_{2j}', \ldots, a_{mj}')^T$，$j = m+1, \ldots, n$

研究内容：c_j，b_j 发生变化？

增加一约束或变量？

价值系数c发生变化：

考虑检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{r_i} a_{r_i j}$ ， $j = 1,2,\ldots,n$

1. 若c_k是非基变量的系数

设c_k变化为 $c_k + \Delta c_k$ ，则

$$\sigma_k{}' = c_k + \Delta c_k - \sum c_{r_i} a_{r_i k} = \sigma_k + \Delta c_k$$

若 $\sigma_k{}' \le 0$,即 $\Delta c_k \le -\sigma_k$ ，则最优解不变；

否则，将最优单纯形表中的检验数 σ_k 用 $\sigma_k{}'$取代，继续单纯形法的表格计算。

例 Max $z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} -x_1-2x_2-x_3+x_4 = -3 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

原始最优单纯形表

c_B	x_B	b'	-2	-3	-4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
σ_j			0	0	-9/5	-8/5	-1/5

修改后的单纯形表

c_B	x_B	b'	-2	-3	$-4+\Delta c_3$	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
σ_j'			0	0	$-9/5+\Delta c_3$	-8/5	-1/5

从表中看到$\sigma_3' = c_3+\Delta c_3-(c_2 a_{13}+c_1 a_{23})=\sigma_3+\Delta c_3$

可得到$\Delta c_3 \le 9/5$ 时，原最优解不变。

例

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

原始最优单纯形表

c_B	x_B	b’	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	-1.5	-1/8	0

修改后的单纯形表

c_B	x_B	b’	2	3	$0+\Delta c_3$	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	$-1.5+\Delta c_3$	-1/8	0

从表中看到$\Delta c_3 \le 1.5$ 时，原最优解不变。

2.若 c_s 是基变量的系数

设 c_s 变化为 $c_s+\Delta c_s$ ，那么

$$\sigma_j' = c_j - \sum_{r_i \neq s} c_{r_i} a_{r_i j} - (c_s + \Delta c_s) a_{sj} = \sigma_j - \Delta c_s a_{sj}$$

只要对所有非基变量 $\sigma_j' \le 0$ ，即 $\sigma_j \le \Delta c_s a_{sj}$，因此

$$\max\{\sigma_j / a_{sj} \mid a_{sj} > 0\} \le \Delta c_s \le \min\{\sigma_j / a_{sj} \mid a_{sj} < 0\}$$

则最优解不变；

否则，将最优单纯形表中的检验数 σ_j 用 σ_j' 取代，继续单纯形法的表格计算。

原始最优单纯形表

c_B	x_B	b′	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	-1.5	-1/8	0

修改后的单纯形表

c_B	x_B	b′	2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	$-1.5-\Delta c_2/2$	$-1/8+\Delta c_2/8$	0

从表中看到$\sigma_j' = c_j-(c_1 a_{1j}+c_5\, a_{5j}+(c_2+\Delta c_2)\, a_{2j})$，$j=3,4$

可得到 $-3\le\Delta c_2\le 1$时，原最优解不变。

右端项 b 发生变化

设分量 b_r 变化为 $b_r + \Delta b_r$，根据极点特征，最优解的基变量 $x_B = B^{-1}b$，那么只要保持 $B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$，则最优基不变，即基变量保持不变，只有最优值的变化；

否则，需要利用对偶单纯形法继续计算。

对于问题 (LP)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

最优单纯形表中含有

$\boldsymbol{B}^{-1}=(a_{ij})$，$i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,m$

那么，新的$x_i=(\boldsymbol{B}^{-1}b)_i+\Delta b_r a_{ir}$ $i=1,\ldots, m$ 。

由此可得，最优基不变的条件是

$\max\{-b_i' / a_{ir} \mid a_{ir}>0\} \leq \Delta b_r \leq \min\{-b_i' / a_{ir} \mid a_{ir}<0\}$

原始最优单纯形表

c_B	x_B	b'	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	-1.5	-1/8	0

这里 $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{pmatrix}$

各列分别对应 b_1，b_2，b_3 的单一变化。
因此，设 b_1 增加 4，则 x_1, x_5, x_2
分别变为$4+0\times4=4$, $4+(-2)\times4=-4<0$, $2+0.5\times4=4$
用对偶单纯形法进一步求解，可得$\boldsymbol{x}^* = (4, 3, 2, 0, 0)^T$，$f^* = 17$

增加一个变量

增加变量 x_{n+1} ，则有相应的a_{n+1} ,c_{n+1} 。那么，计算出

$$B^{-1}a_{n+1}, \sigma_{n+1}=c_{n+1}-\sum c_{r_i} a_{r_i\, n+1}$$

填入最优单纯形表,若 $\sigma_{n+1} \le 0$ ，则最优解不变；否则，进一步用单纯形法求解。

前例中增加x_6，$\boldsymbol{a}_6$=(2, 6, 3)^T, c_6=5

计算得到

c_B	x_B	b’	2	3	0	0	0	5
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	1.5
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	2
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	0.25
σ_j			0	0	-1.5	-1/8	0	1.25

用单纯形法进一步求解，可得

$\boldsymbol{x}^*$ = (1,1.5,0,0,0,2)^T f^* = 16.5

增加一个约束

增加一个约束之后，应把最优解代入新的约束，若满足，则最优解不变；

否则，填入最优单纯形表作为新的一行，引入一个新的非负变量（原约束若是小于等于形式，可引入非负松弛变量；否则，引入非负人工变量），并通过矩阵行变换把对应基变量的元素变为0，进一步用单纯形法或对偶单纯形法求解。

前例中增加$3x_1+2x_2\le 15$，原最优解不满足这个约束。于是

c_B	x_B	b’	2	3	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	0
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	0
0	x_6	-1	0	0	-1	-1/2	0	1
σ_j			0	0	-1.5	-1/8	0	0

经对偶单纯形法一步，可得最优解为

(3.5, 2.25, 0, 0, 3, 2)T，最优值为 13.75。

练习

给定线性规划问题：

$$\text{Max}\quad z = -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 2x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(1)用单纯形法求解此线性规化问题

(2)把$c_1=-1$改为$c_1'=4$，求新问题的最优解

(3)讨论c_2在什么范围内变化时原来的最优解也是新问题的最优解

练习

给定线性规划问题：

$$\text{Min}\quad f = x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(1)用单纯形法求解此线性规化问题

(2)将右端$(9,2,4)^T$改为$(3,2,3)^T$，求新问题的最优解

(3)增加约束$-3x_1 + x_2 + 6x_3 \le 17$，求新问题的最优解