4.4 最佳线性滤波器

噪声中确知信号的检测实际是一个相关接收机，接收信号与已知信号的相关运算可看成是在时域上的匹配运算。

噪声中随机相位信号的检测，其检验量 $Z=\sqrt{G_s^2+G_c^2}$ 中 **2** 部分 $G_s=\int_0^T S_s(t)x(t)dt$ （ $S_s(t)=A\sin\omega_c t$ ）和 $G_c=\int_o^T S_c(t)x(t)dt$ （$S_c(t)=A\cos\omega_c t$）可看成是绕过相位不确定后在时域上对信号的匹配处理。

高斯背景噪声下高斯信号检测中的匹配网络功率传输函数 $\dfrac{S(\omega)}{N(\omega)}$ 则从频域实现与信号的匹配处理。

从接收机的工作特性曲线看，信噪比的提高可改善检测性能。所以通过某种处理提高信噪比是信号处理系统追求的目标。本节讨论的匹配滤波器则是满足最大信噪比准则的最佳线性滤波器。

4.4.1 匹配滤波器的原理

在波形检测中，经常用匹配滤波器来构造最佳检测器。因此，匹配滤波理论在信号检测理论中占有独特的重要地位。

在通信系统中，许多常用的接收机，均可简化成由一个线性滤波器和一个判决电路两部分组成。其原理图如图 4.7 所示。

图 4.7 接收机原理框图

图中，线性滤波器的作用是对接收机的信号进行某种方式的加工处理，使之增加正确的判决概率。而判决电路一般是一个非线性装置，最简单判决电路就是一个门限电路。为了增大信噪比，要求线性滤波器在最大信噪比准则下是最优的。

若信号是已知的，线性时不变滤波器输入为加性平稳噪声，这时，输出信噪比为最大的滤波器，就是一个与输入信号相匹配的最佳滤波器，并称这种滤波器为匹配滤波器。

下面讨论使输出信噪比最大时，匹配滤波器的频率响应函数 $H(\omega)$ 及冲击响应 $h(t)$。

$H(\omega)$ 和 $h(t)$ 是一对傅里叶变换，其表示式如下

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \textbf{（4-1）}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \textbf{（4-2）}$$

滤波器的输入波形为

$$z(t)=s(t)+n(t) \qquad \textbf{（4-3）}$$

式中，**s(t)**为已知信号；**n(t)**为零均值平稳噪声。
滤波器的输出为

$$z_0(t)=s_o(t)+n_0(t) \qquad \textbf{（4-4）}$$

由于滤波器是线性的，并且信号与噪声在输入端是相加的。故可分别考虑它们在滤波器输出端的影响。

首先，考虑信号 **s**（**t**）单独对滤波器输出的影响。若输入信号 **s(t)** 的傅里叶变换存在，且为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{（4-5）}$$

由此可得输出信号，为

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \text{（4-6）}$$

若滤波器的输出信号在 $t=t_0$ 时刻出现峰值，即

$$s_0(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega \qquad \text{（4-7）}$$

考虑噪声 **n(t)**对滤波器输出的影响。若滤波器输出噪声为 **n_0(t)**，其功率谱密度为 $s_{n_0}(\omega)$，则

$$P_{n_0}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 P_n(\omega) \qquad \textbf{（4-8）}$$

式中，$P_n(\omega)$ 为输入噪声 **n(t)**的功率谱密度；$P_{n_0}(\omega)$ 为输出噪声 $n_0(t)$ 的功率谱密度。

滤波器输出噪声的平均功率为

$$E\left[n_0^2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_{n_0}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(\omega)\right|^2 P_n(\omega)d\omega \qquad \textbf{（4-9）}$$

定义：滤波器的输出信噪比为输出信号峰值功率与噪声平均功率之比，即

$$SNR_0=\frac{\text{输出信号峰值功率}}{\text{输出噪声平均功率}}=\frac{s_0^2(t_0)}{E\left[n_0^2(t)\right]}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right)^2}{\frac{1}{2\pi}\int\left|H(\omega)\right|^2P_n(\omega)d\omega} \tag{4-10}$$

要得到使输出信噪比达到最大的条件，可利用许瓦兹（**Schwarz**）不等式，即

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(x)\theta(x)dx\right|^2$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(x)F(x)dx\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta^*(x)\theta(x)dx \qquad \textbf{（4-10）}$$

式中，**F**（**x**）和 θ （**x**）为两个复数；*****表示复共轭。并且当 $\theta(x)=aF(x)$时，式中等号成立。其中， α 为任意常数。

令

$$F^*(x)=\frac{S(\omega)e^{j\omega\ t_0}}{\sqrt{P_n(\omega)}} \qquad （4\text{-}11）$$

$$\theta(x)=\sqrt{P_n(\omega)}H(\omega) \qquad （4\text{-}12）$$

则

再令 ε 表示信号的能量。根据帕塞瓦尔（Parseval）定理，则

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(\omega) \right|^2 d\omega$$

（4-13）

由式（4-10），可得

$$SNR_0 = \frac{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \sqrt{P_n(\omega)} \cdot \frac{1}{\sqrt{S_n(\omega)}} S(\omega) e^{j\omega \ t_0} d\omega \right\}^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 P_n(\omega) d\omega}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 P_n(\omega) d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| S(\omega) \right|^2}{P_n(\omega)} d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 P_n(\omega) d\omega}$$

则 $$SNR_0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| S(\omega) \right|^2}{P_n(\omega)} d\omega \qquad （4\text{-}14）$$

根据许瓦兹不等式其等式成立之条件 $\theta(x) = aF(x)$，由式（**4-11**）和式（**4-12**），只有当

$$H(\omega) = \frac{\alpha S^*(\omega)}{2\pi P_n(\omega)} e^{-j\omega t_0} \tag{4-15}$$

时，式（**4-14**）等式才能成立，滤波器有最大输出信噪比。

在一般情况下，噪声假定为非白的，即为有色噪声，这时，式（**4-15**）表示的滤波器称为有色噪声匹配滤波器。

当输入噪声为白噪声，其功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$时，则式（**4-14**）变成

$$SNR_0 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{N_0/2}d\omega \qquad (\mathbf{4\text{-}16})$$

由式（**4-13**），得

$$SNR_0 \le \frac{2\varepsilon}{N_0} \qquad (\mathbf{4\text{-}17})$$

则输出信噪比（**SNR$_0$**）以$\frac{2\varepsilon}{N_0}$为上限。

式（**4-15**）表示的滤波器，变成

$$H(\omega) = KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \qquad (\mathbf{4\text{-}18})$$

式中，$K = \frac{\alpha}{\pi N_0}$为任意常数。

虽然对滤波器的讨论已经扩展到有色噪声的情况，但是，通常我们重点研究的，还是白噪声的情况。

因此，具有式（**4-18**）这种频率响应函数的滤波器称为最佳线性滤波器。因为除了相差一个相乘因子 $Ke^{-j\omega t_0}$ 外，最佳线性滤波器的频率响应函数等于信号频谱的复共轭函数 **S***（ω）故称其为匹配滤波器，并由上述推导可知，t_0 就是输出信号峰值出现的时刻。

如果将 **S**（ω）和 **H**（ω）写成下列形式

$$S(\omega)=|S(\omega)|e^{j\arg[s(\omega)]} \qquad \text{（4-19）}$$

和

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\arg[H(\omega)]} \qquad \text{（4-20）}$$

则式（**4-18**）可以写成下列形式

$$|H(\omega)|=K|S(\omega)| \qquad \text{（4-21）}$$

和

$$\arg|H(\omega)|=-\arg[S(\omega)]-\omega t_0 \qquad \text{（4-22）}$$

式（**4-21**）和式（**4-22**）分别表示最佳滤波器频率响应函数的幅频特性和相频特性。这里，$-\omega t_0$ 表示相对于时延 $\mathbf{t_0}$ 的相移。

这两个公式的物理意义也很明确。

第一个公式说明，该系统的频率响应与输入信号的幅频特性一致。对输入信号中较强的频率成分给以较大的权重，对弱的频率成分给以较小的权重。而白噪声具有均匀的功率谱，这样，就从白噪声中过滤出信号来。

第二个等式说明，该系统的相位特性正好是信号相位特性的负值（除一个线性相位项外），因此，不管输入信号是怎样杂乱的非线性的相位谱，经过该滤波器后，全部补偿掉了。输出信号仅保留一线性相位项，使输出信号不同频率成分在时刻 t_0 达到同一相位，同相相加，形成输出的峰值，即形成一个窄的尖峰输出。至于噪声，由于各频率成分的相位是随机的，在各瞬间都处于杂乱无章的状态。该系统的相位特性，与噪声无关，即对噪声无任何影响。

常数 **K** 表示滤波器的相对放大量，因我们关心的是系统的频率特性的形状，而不是其相对大小。有时在分析滤波器时，为了简单，常令 **K=1**。

由式（**4-21**）和式（**4-22**）可以看出，匹配滤波器可用两个级联网络实现：一个是在 t_0 时，完成峰值所需的相位频谱的匹配，以产生所希望的输出峰值；另一个是使这一峰值达到最佳信噪比的幅度频谱匹配。

下面研究匹配滤波器的冲击响应 **h(t)**。对式（**4-18**）的 **H**（ω）进行傅里叶反变换，即可得

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=K\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega\right\}$$

$$=Ks^*(t_0-t) \qquad \textbf{(4-23)}$$

由于 **s(t)**一般是实函数，因而，有

$$h(t)=Ks(t_0-t) \qquad \text{（4-24）}$$

由此可得，匹配滤波器的冲击响应等于输入信号波形的镜像，但在时间轴上移动了 t_0，并在幅度上乘以常数 **K**。也就是说，其冲击响应与输入信号相匹配，因此，称为匹配滤波器。

综上所述，公式（**4-24**）是匹配滤波器的时域表示式。滤波器的冲击响应 **h(t)**与信号 **s(t)**对于 $\frac{t_0}{2}$ 呈偶对称关系，如图 **4.8** 所示。

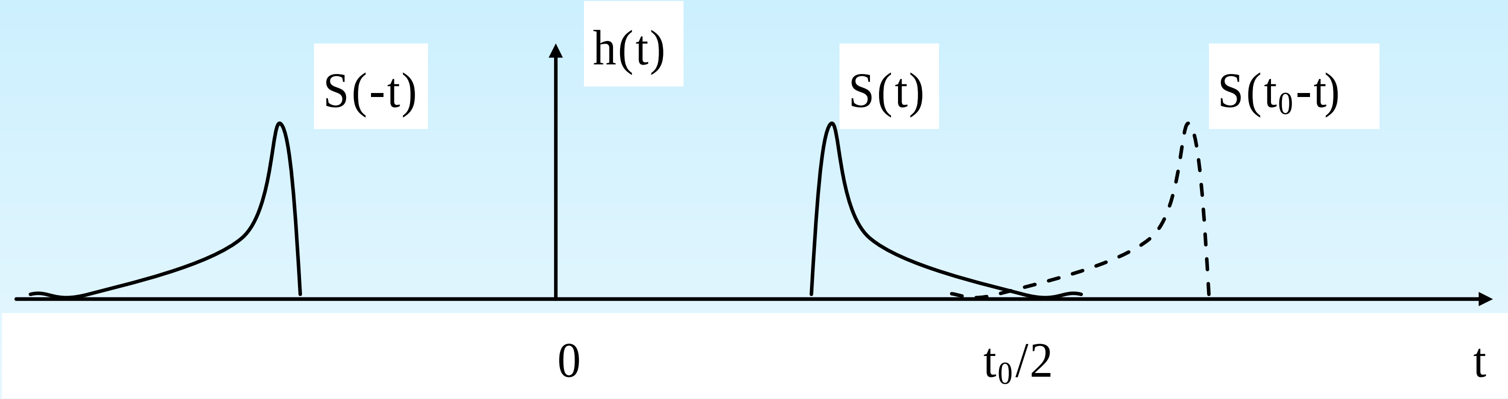


图 **4.8** 匹配滤波器的冲击响应特性

为了使实际工作的匹配滤波器在物理上能够实现，它必须满足因果性，即其冲击响应在时间为负时等于零，即

$$h(t) = 0, \qquad t < 0$$

由式（**4-24**），可将因果性条件写为

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ks(t_0 - t) & t \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4-25)}$$

为了使输入信号 **s(t)**的全部都能对输出信号分量 **s_0(t)**有所贡献，必须使

$$s(t) = 0, \qquad t > t_0 \qquad \textbf{(4-26)}$$

也就是说，必须在时间 **t=t_0**时，已将全部输入信号 **s(t)**送入匹配滤波器，其输出信噪比在该时间达到最大值；反之，如果信号还未全部送进滤波器，要使信噪比最大是不可能的。

4.4.2 匹配滤波器的性质

（1）匹配滤波器对输入波形相似、振幅和时延参量不同的信号具有适应性，而对频移信号不具有适应性。

若信号 **s(t)**的匹配滤波器传递函数是$H(\omega)=KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$，那么，它对所有与 **s(t)** 波形相同、仅振幅 **A** 和时延 τ 不同的信号 $s_1(t)=As(t-\tau)$ 而言，也是最佳滤波器。因信号 **$s_1(t)$** 的频谱 $S_1(\omega)=AS(\omega)e^{-j\omega\tau}$，因此，**$s_1(t)$**匹配滤波器的频率特性**(**取 **K=1)**为

$$H_1(\omega)=AS_1^*(\omega)e^{-j\omega t_0'}=AS^*(\omega)e^{-j\omega(t_0'-\tau)}$$

$$=AH(\omega)e^{-j\omega\left[t_0'-(t_0+\tau)\right]}$$

式中，**t_0** 为匹配滤波器$H(\omega)$输出信噪比达到最大的时刻；t_0' 为匹配滤波器$H_1(\omega)$输出信噪比达到最大的时刻。

如果观测时刻都选在信号末尾，由于信号$s_1(t)$相对 **s(t)**延迟τ时间，所以，t_0'相应地比 **t0** 延迟了τ时，即$t_0' = t_0 + \tau$，这样，便有

$$H_1(\omega) = AH(\omega)$$

由此可见，两个滤波器之间，除了一个表示相对放大量 **A** 之外，它们的频率响应函数是完全一致的。所以，滤波器$H(\omega)$对于信号$s_1(t) = As(t-\tau)$来说，也是匹配的，只不过最大输出信噪比出现的时刻移了τ。

匹配滤波器对频移信号不具有适应性。频移信号的频谱为

$$S_2(\omega) = S(\omega + \upsilon)$$

式中，v 为信号的频移。信号 S2（ω）的匹配滤波器的频率响应函数为

$$H_2(\omega) = S^*(\omega + \nu)e^{-j\omega t_0}$$

显然与 $H(\omega)$ 不同。 因此，匹配滤波器对频移参数不同的信号没有适应性。

（2）信号 s(t)通过匹配滤波器后，波形的形状变成自相关积分的形状，并且对于 $t=t_0$ 点对称，对称点 t_0 又是输出信号的峰点。

匹配滤波器对信号 s(t)波形的加工过程如下：

信号 s(t)在匹配滤波器中的响应为

$$s_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\mu)h(\mu)d\mu \qquad （4-27）$$

将匹配滤波器的冲击响应 $h(t)=Ks(t_0-t)$ 代入上式，得匹配滤波器的输出信号为

$$s_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\mu)Ks(t_0-\mu)d\mu \qquad （4-28）$$

进行变量置换，令$\tau = t_0 - \mu$，则

$$s_0(t) = K\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s\left[\tau - (t_0 - t)\right]d\tau = KR_s(t - t_0) \qquad （4-29）$$

式中，$R_s(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\mu)s(t_0-\mu)d\mu$ 为信号的自相关函数。就是说，输出信号波形，已不是原来的形状，而变成它的相关积分的形状。

若 $t_0=0$ 时，则输出信号为

$$s_0(t) = KR_s(t-0) = KR_s(t) \qquad （4-30）$$

若 $t=t_0$时，则输出信号为

$$s_0(t) = KR_s(0) = K\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = K\varepsilon \qquad （4-31）$$

说明在无噪声时，匹配滤波的输出，在时间 $t=t_0$时达到最大值，它与信号的能量成比例。

又因为任意相关函数都是偶函数。以 $t=t_0+\varphi$ 代入式（4-29），即可看出

$$S_0(t_0+\varphi)=KR_s(t_0+\varphi-t_0)=KR_s(\varphi)=KR_s(-\varphi)=S_0(t_0-\varphi)$$

即相关函数 $s_0(t)$ 对于 $t=t_0$ 点对称。所以，匹配滤波器的输出信号具有对称的形状，对称点就是输出信号的峰点。

伴随 s(t) 一同进入匹配滤波器的白噪声 n(t)，其相应的输出 $n_0(t)$ 为

$$n_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}n(t-\mu)h(\mu)d\mu$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}n(t-\mu)Ks(t_0-\mu)d\mu$$

$$=KR_{ns}(t-t_0) \qquad （4-32）$$

式中，$R_{ns}(t-t_0)$ 为白噪声与信号的互相关函数。

由上述讨论可见，匹配滤波器又可看成是一个计算输入信号的相关函数的相关器，或者说，匹配滤波器还可用相关接收的方法来实现，即用 $s\left[\tau-(t_0-t)\right]$ 去与输入 $x(\tau)=s(\tau)+n(\tau)$ 作相关运算。

相关器由乘法器和积分器组成。在相关器中，t 每取一个新的值，即进行一次新的运算，从而综合得到输出 y(t)。如果我们只关心 $t=t_0$ 时刻的输出，则可直接用 $s(\tau)$ 去与输入 x(t) 进行相关运算，但需要精确地知道输入信号在时间轴上的位置。如果为得到作为 t 的函数的 s_0(t 及 n_0(t)，就需要设置许多 t，进行乘法和积分，然后构成完整的 s_0(t) 的关系。

由此可见，匹配滤波器和相关器处理信号的效能是相同的，但两者对信号的加工过程并不相同。

（3）匹配滤波器输出信号的频谱与输入信号的功率谱成正比，仅差一个与频率成比例的时延因子。

匹配滤波器的输入信号 s(t) 的频谱为 $S(\omega)$，而输出信号为 $S_0(\omega)$，则

$$S_0(\omega) = H(\omega)S(\omega) = S^*(\omega)e^{-j\omega t_0}S(\omega) = \left|S(\omega)\right|^2 e^{-j\omega t_0}$$

（4-33）

匹配滤波器是在平稳白噪声中确知信号的最佳滤波问题，最佳的准则是最大输出信噪比。

下面我们对匹配滤波器若干重要的实例进行讨论。

例 **4.1**

单个矩形视频脉冲的匹配滤波器。设信号 **s(t)**是一宽度为 τ 、高度为 **A** 的矩形视频脉冲。其数学表示式为

$$s(t)=\begin{cases} A, & t \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

它的频谱为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j\omega t}dt = A\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

信号 **s(t)**的匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega) = KA\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\omega t_0}$$

当 t_0 选为 $\frac{\tau}{2}$ 时，冲击响应函数为

$$h(t) = Ks(t_0 - t) = \begin{cases} KA, & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

匹配滤波器的输出波形为

$$s_0(t) = KR_s(t - t_0) = K\int_{-\infty}^{\infty} s(t - \alpha)s(t_0 - \alpha)d\alpha$$

先求自相关函数$R_s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t+\alpha)s(\alpha)d\alpha$。其积分可以分成两种情况讨论，

（1）0<t<τ

$$R_s(t)=\int_{-\frac{\tau}{2}+t}^{\frac{\tau}{2}}A^2d\alpha=A^2(\tau-t)$$

（2）$-\tau<t<0$

$$R_s(t)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+t}A^2d\alpha=A^2(\tau+t)$$

其图形如图 4-7 所示。将上面两式合并成

$$R_s(t)=\begin{cases}A^2(\tau-t), & 0<t<\tau\\ A^2(\tau+t), & -\tau<t<0\end{cases}$$

t=0 时为最大。

于是，输出信号为

$$S_0(t)=KR_s(t-t_0)=\begin{cases}KA^2(\tau-t+t_0), & t_0<t<\tau+t_0\\ KA^2(\tau+t-t_0), & -\tau+t_0<t<t_0\end{cases}$$

其波形图如图 **4-8（b）**所示，**t=t₀**时为最大。当$t_0=\dfrac{\tau}{2}$时，输出信号为

$$s_0(t)=KR_s(t-t_0)=\begin{cases}KA^2(\dfrac{3\tau}{2}-t), & \dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{3\tau}{2}\\ KA^2(\dfrac{\tau}{2}+t), & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

显然，当$t=t_0=\dfrac{\tau}{2}$时，即刚好是输入信号的终止时刻，输出信号 **s(t)** 呈现峰值。

$$s(\frac{\tau}{2})=KA^2\tau=K\varepsilon$$

上述结果，也可由$s_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t')h(t-t')dt'$进行计算得到。

例 **4.2** 矩形包络的单个中频脉冲的匹配滤波器。

设矩形脉冲的幅度为 **A**，宽度为 τ，信号的波形表达式为

$$s(t) = A rect(\frac{t}{\tau}) \cos \omega_0 t$$

式中，**rect** 为矩形函数。

$$rect(x) = \begin{cases} 1, & 当 |x| \le \frac{1}{2} \\ 0, & 当 |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

信号 **s(t)**的频谱为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=A\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos\omega_0 te^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\left[e^{-j(\omega-\omega_0)}+e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right]dt$$

$$=\frac{A\tau}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right]$$

在 $\omega=\pm\omega_0$ 处形成两个主峰，并按 $\frac{\sin x}{x}$ 函数（通称 **sinc** 函） 展开，

形成一系列逐渐衰减的副瓣。主峰宽度—**4dB** 间约为 $\frac{1}{\tau}$。通常有

$f_0\tau>>1$，所以，可以认为 **f=0** 左右两边的频谱不会重叠。

其匹配滤波器的频率特性及脉冲响应为

$$H(\omega) = KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$= \frac{KA\tau}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right]e^{-j\omega t_0}$$

和 $h(t) = Ks(t_0 - t) = A\cos[\omega(t_0 - t)]$

输入信号的能量为

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cos^2 \omega_0 t dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (1 + \cos 2\omega_0 t)dt = \frac{A^2 \tau}{2}$$

匹配滤波器输出信噪比为

$$SNR_0 = \frac{2\varepsilon}{N_0} = \frac{A^2 \tau}{N_0}$$

例 4.3 线性调频矩形脉冲信号的匹配滤波器。雷达中广泛采用的一种载频做线性调制的矩形信号，其表示式如下

$$s(t)=Arect(\frac{t}{\tau})\cos(\omega_0 t+\frac{\mu t^2}{2})$$

式中，μ 为常数，如图 4-10 所示。

线性调频信号的包络宽度为 τ 的矩形脉冲，其信号的瞬时载频是随时间线性变化的。瞬时频率为

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0+\mu t$$

在脉冲宽度 τ 内，信号的角频率由 $\omega_0-\frac{\mu\tau}{2}$ 变化到 $\omega_0+\frac{\mu\tau}{2}$，调频的带宽 $B=\frac{\mu\tau}{2\pi}$。

先求信号的频谱

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=A\int_{-\infty}^{\infty}rect(\frac{t}{\tau})\cos(\omega_0 t+\frac{\mu\tau^2}{2})e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\exp\left\{+\left[j(\omega_0-\omega)t+j\frac{\mu t^2}{2}\right]\right\}dt$$

$$+\frac{A}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\exp\left\{-\left[j(\omega_0-\omega)t+j\frac{\mu t^2}{2}\right]\right\}dt$$

信号频谱分别集中于$\pm\omega_0$附近。

对于一般雷达载频信号，指数型复数频谱对于频率轴是正负对称的偶函数，且通常情况下，使信号带宽远小于中心频率 ω_0 ，因此，可以认为正负两部分频率不产生重叠。下面研究频谱的正频域部分，即式中第一项

$$S_+(\omega)=\frac{A}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\exp\left\{+j\left[(\omega_0-\omega)t+\frac{\mu}{2}t^2\right]\right\}dt$$

将积分项内的指数项进行配方，有

$$(\omega_0-\omega)t+\frac{\mu}{2}t^2=\frac{\mu}{2}\left[t^2+\frac{2}{\mu}(\omega_0-\omega)t+\left(\frac{\omega_0-\omega}{\mu}\right)^2\right]-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\omega_0-\omega}{\mu}\right)^2$$

$$=\frac{\mu}{2}\left(t+\frac{\omega_0-\omega}{\mu}\right)^2-\frac{1}{2\mu}(\omega_0-\omega)^2$$

所以

$$S_+(\omega)=\frac{A}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\exp\left[j\frac{\mu}{2}\left(t+\frac{\omega_0-\omega}{\mu}\right)^2-j\frac{1}{2\mu}(\omega_0-\omega)^2\right]dt$$

$$=\frac{A}{2}\exp\left[-j\frac{(\omega_0-\omega)^2}{2\mu}\right]\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\exp\left[j\frac{\mu}{2}\left(t+\frac{\omega_0-\omega}{\mu}\right)^2\right]dt$$

积分项可以通过化简后查表所得。

为查表方便，设

$$\sqrt{\mu}(t+\frac{\omega_0-\omega}{\mu})=\sqrt{\pi}x$$

则 $dt=\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\cdot dx$

正频率轴上的频谱可写为

$$S_+(\omega)=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\exp\left[-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}\right]\int_{-X_1}^{X_2}\exp\left[j\frac{\pi x^2}{2}\right]dx$$

积分上下限分别为

$$X_1=\frac{-\frac{\mu\tau}{2}+(\omega-\omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}$$

$$X2=\frac{\frac{\mu\tau}{2}+(\omega-\omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}$$

最后得到频谱表示式为

$$S_{+}(\omega)=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left\{\exp\left[-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}\right]\right\}$$

$$\bullet\left[C(X_1)+jS(X_1)+C(X_2)+jS(X_2)\right]$$

式中

$$C(X)=\int_0^X\cos\frac{\pi y^2}{2}dy$$

$$S(X)=\int_0^X\sin\frac{\pi y^2}{2}dy$$

为菲涅尔（**Fresnel**）积分，有专门函数表可查。菲涅尔积分具有以下性质

$$C(-X)=-C(X)$$

$$S(-X)=-S(X)$$

对于负频谱亦可做同样的推导，即

$$S_{-}(\omega)=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left\{\exp\left[j\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\mu}\right]\right\}$$

$$\bullet\left[C(X_3)+jS(X_3)+C(X_4)-jS(X_4)\right]$$

信号频谱正频谱部分的幅谱和相谱分别为

$$\left|S_{+}(\omega)\right|=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left\{\left[C(X_1)+S(X_2)\right]^2+\left[S(X_1)+S(X_2)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$\arg S_{+}(\omega)=tg-1\left[\frac{S(X_1)+S(X_2)}{C(X_1)+C(X_2)}\right]-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\mu}$$

已知信号的频谱后，即可求得其匹配滤波器的频率特性为

$$H(\omega)=KS*(\omega)\exp(-j\omega t_0)$$

$$=K\left[S_{+}^{*}(\omega)+S_{-}^{*}(\omega)\right]\exp(-j\omega t_0)$$

实现这种匹配滤波器常用的一种方法，是将其幅度谱匹配与相位谱匹配过程分开来实现。如图 **4-11** 所示。其振幅特性接近于矩形，中心频率为信号频率，而带宽等于信号的调制频偏 $B = \mu\tau / 2\pi$，相位特性的特点是与平方相位项共轭，然后加一延迟项，即

$$\beta(\omega) = \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} - \mu t_0$$

滤波器的群延迟特性为

$$T(\omega) = -\frac{d\beta(\omega)}{d\omega} = \frac{\omega - \omega_0}{\mu} + t_0$$

这就要求相位匹配网络具有色散特性。具体说，就是群延迟应随频率的增加而线性递减。附加上延迟 t_0，以保证在整个频率范围内，群延迟均是正值。这样的滤波器才是物理上可实现的。滤波器的群延迟特性正好与信号的相反，因此，通过匹配滤波器后相位特性得到补偿，而使输出信号的相位均匀，保证信号出现峰值。

4.4.3 匹配滤波器的性能

现在我们确定匹配滤波器的检测性能，对于给定的P_{FA}，推导P_D。对于有限长数据采样的匹配滤波器检测形式，如果

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \gamma'$$

我们判H1。在两种假设的情况下，x[n]是高斯的，由于T(x)是高斯随机变量的线性组合，所以也是高斯的。那么，

$$\begin{aligned}
E(T;\mathcal{H}_0) &= E\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]s[n]\right) = 0 \\
E(T;\mathcal{H}_1) &= E\left(\sum_{n=0}^{N-1} (s[n]+w[n])s[n]\right) = \mathcal{E} \\
\operatorname{var}(T;\mathcal{H}_0) &= \operatorname{var}\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]s[n]\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{var}(w[n])s^2[n] \\
&= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n] = \sigma^2\mathcal{E}
\end{aligned}$$

其中我们利用了w[n]是不相关的事实。类似地，$\mathrm{var}(T;\mathcal{H}_1)=\sigma^2\mathcal{E}$，这样

$$T \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0,\sigma^2\mathcal{E}) & \text{在 } \mathcal{H}_0 \text{ 条件下} \\ \mathcal{N}(\mathcal{E},\sigma^2\mathcal{E}) & \text{在 } \mathcal{H}_1 \text{ 条件下} \end{cases}$$

如图4.4所示，

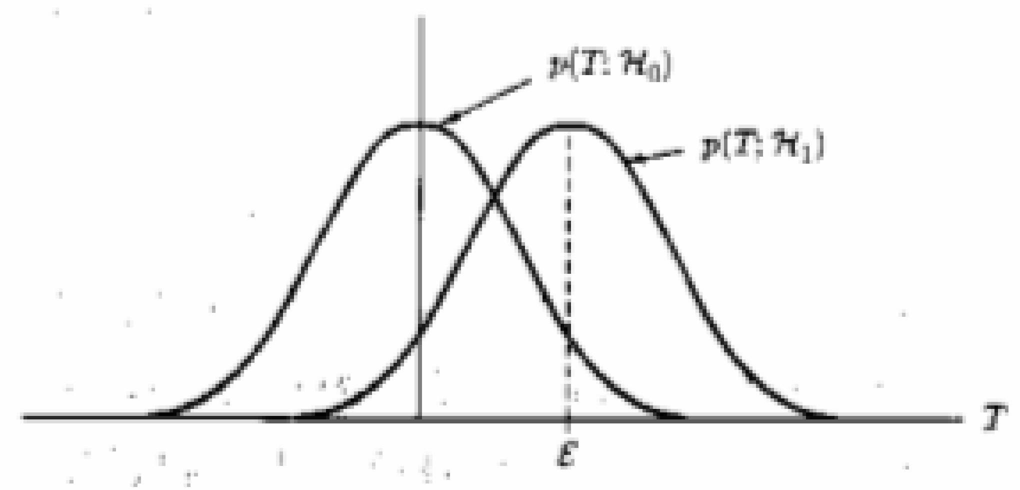


图 4.4 匹配滤波器检验统计量的 PDF

注意，比例统计量$T' = T/\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}}$的PDF为

$$T' \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0,1) & \text{在}\mathcal{H}_0\text{条件下} \\ \mathcal{N}(\sqrt{\mathcal{E}/\sigma^2},1) & \text{在}\mathcal{H}_1\text{条件下} \end{cases}$$

很显然，由于随着$\sqrt{\mathcal{E}/\sigma^2}$的增加，PDF的形状相同，但是分得更开，所以检测性能肯定随着增加。为了证明这一点，可以求出P_{FA}和P_D，

$$P_{FA} = \Pr\{T > \gamma'; \mathcal{H}_0\} = Q\left(\frac{\gamma'}{\sqrt{\sigma^2\mathcal{E}}}\right)$$

$$P_D = \Pr\{T > \gamma'; \mathcal{H}_1\} = Q\left(\frac{\gamma' - \mathcal{E}}{\sqrt{\sigma^2\mathcal{E}}}\right)$$

其中

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = 1 - \Phi(x)$$

把

$$\gamma = \sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}}\, Q^{-1}(P_{FA})$$

代入P_D

$$P_D = Q\left(\frac{\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}}\, Q^{-1}(P_{FA})}{\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}}} - \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}}\right) = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}}\right)$$

由于是单调递增函数，随着$\sqrt{\mathcal{E}/\sigma^2}$的增加，$P_D$增加，检测性能总结在图4.5中，关键参数是匹配滤波器输出端的SNR，它是信号能量噪声比（SNR）。通过增加信号能量，或者增加信号电平或者增加信号的持续时间，都可以使增加SNR。信号的形状并不影响检测性能。后面会看到，在色噪声情况下，信号的形状将是一种非常重要的设计考滤因素。

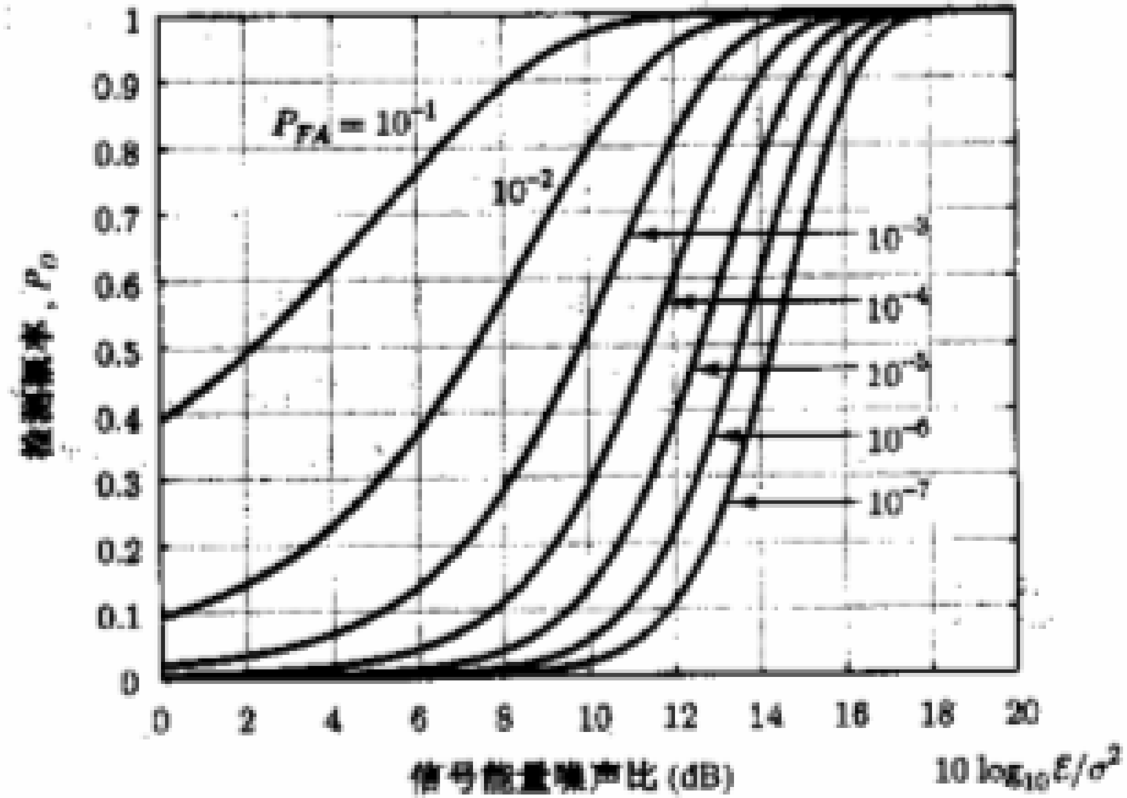
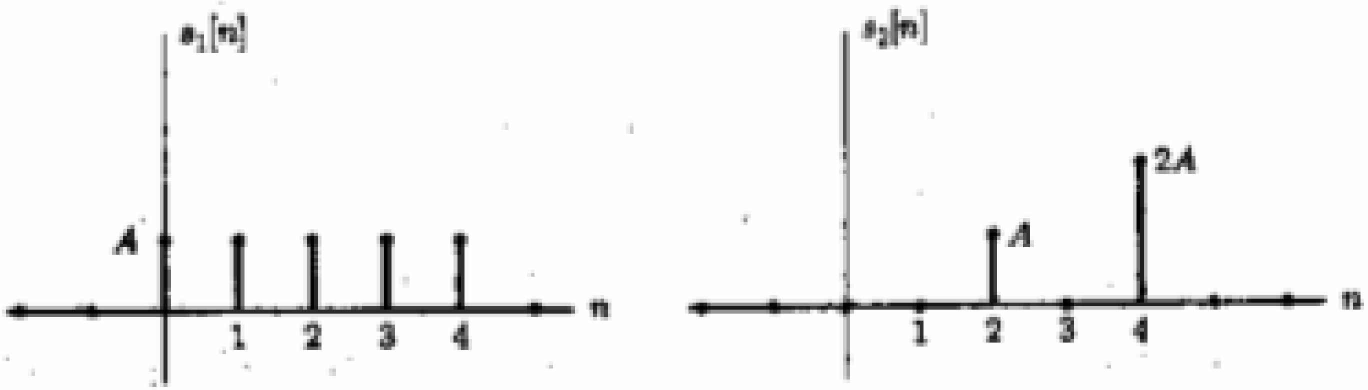


图 4.5 匹配滤波器的检测性能



信号检测中匹配滤波器的使用导出了处理增益的概念。处理增益可以看作为根据检验统计量进行判决的优势，检验统计量是数据的最佳组合，而直接根据数据进行判决则不是最佳组合。处理增益定义为最佳检验统计量的信噪比除以单个样本数据的信噪比。

例如，考虑WGN中的DC电平检测问题，如果我们试图根据单个样本检测信号，那么

$$\eta_{in} = \frac{\mathcal{E}}{\sigma^2} = \frac{A^2}{\sigma^2}$$

通过使用匹配滤波器来处理N个样本，那么性能将得到改善，

$$\eta_{out} = \frac{\mathcal{E}}{\sigma^2} = \frac{NA^2}{\sigma^2}$$

信噪比的改善称为处理增益（PG），

$$PG = 10\log_{10}\frac{\eta_{out}}{\eta_{in}} = 10\log_{10}N \quad \mathrm{dB}$$

如，根据图4.5，对于给定的$P_{FA}=10^{-3}$，要得到$P_D=0.5$的性能，那么要求SNR大约为10dB，如果我们要求$P_D=0.95$，SNR必须增加4dB，如果我们将N增加2.5倍就可以达到，那么处理增益也将增加4dB。处理增益的考虑在声纳/雷达系统设计中很重要。

4.5. 广义匹配滤波器

匹配滤波器是高斯白噪声中已知信号的最佳检测器。然而在许多情况下，将噪声看作为相关噪声则更为准确。我们现在假定噪声w～N（0，C），其中C是协方差矩阵。如果噪声是广义平稳的，那么C是对称Toepliz矩阵的特殊形式，这是因为对于零均值的广义平稳随机过程，有

$$[\mathbf{C}]_{mn} = \mathrm{cov}(w[m], w[n]) = E(w[m]w[n]) = r_{ww}[m-n]$$

因此，C的对角线上的元素是相等的。对于非平稳噪声，C是任意的协方差矩阵。

为了确定NP检测器，我们再次确定似然比检验，

$$p(\mathbf{x};\mathcal{H}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C})}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{s})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s})\right]$$

$$p(\mathbf{x};\mathcal{H}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C})}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\right]$$

在WGN情况下，C=σ^2I，似然函数的指数部分可以简化为求和的形式。

检测器就是如果

$$l(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)} > \ln \gamma$$

判为H1。而

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mathbf{s})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s}) - \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} - \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-}\right. \end{aligned}$$

$$= \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}$$

或者我们把与数据无关的项放入门限中，如果

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s} > \gamma'$$

我们判为H1。，注意，对于WGN，C=σ^2I，检测器化简为

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\sigma^2} > \gamma'$$

或者正如以前的形式，

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \gamma''$$

简化为匹配滤波器的形式。

我们把更一般形式的检测器

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s} > \gamma'$$

称为广义匹配滤波器。可以看出作为仿形-相关器，其中仿形信号是修改的信号

$$\mathbf{s}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}.$$

而

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s} = \mathbf{x}^T \mathbf{s}'$$

相当于对修改的信号相关。

例 不等方差的不相关噪声

如果 $w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$，且w[n]是不相关的，那么

$$\mathbf{C} = \mathrm{diag}(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_{N-1}^2)$$

因此，根据广义匹配滤波器检测器，有

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]s[n]}{\sigma_n^2} > \gamma'$$

则判H1。

从上式可以看出，如果数据样本具有小的方差，那么加权就重，使得对和式的贡献就大。另外，在H1条件下，有

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{w[n]+s[n]}{\sigma_n}\frac{s[n]}{\sigma_n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(w'[n]+\frac{s[n]}{\sigma_n}\right)\frac{s[n]}{\sigma_n}$$

由于$\mathbf{C}_{w'}=\mathbf{I}$，所以其中的噪声样本被均衡了，或者说被预白化了。

那么，广义的匹配滤波器首先要预白化噪声样本数据。这样，如果信号出现，那么信号会失真为

$$s'[n]=s[n]/\sigma_n$$

白化后检测器与失真后的信号相关，广义匹配滤波器可以表示为，

$$T(\mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{N-1} x'[n]s'[n]$$

其中

$$x'[n] = x[n]/\sigma_n$$

可以将其看作为预白化器，其后接着是相关器或匹配于失真信号s’[n]的匹配滤波器。

在更一般的情况中，对任何正定的矩阵C，可以证明是C^{-1}存在的且是正定的，所以它可以分解为

$$\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{D}^T\mathbf{D}$$

其中D是非奇异的N*N矩阵。对于前一个例子，

D=diag$(1/\sigma_0, 1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_{N-1})$

这样，检验统计量变为，

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{x}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{s} = \mathbf{x}'^T\mathbf{s}'$$

其中

$\mathbf{x}'=\mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{s}'=\mathbf{D}\mathbf{s}$

预白化形式的广义匹配滤波器如下图

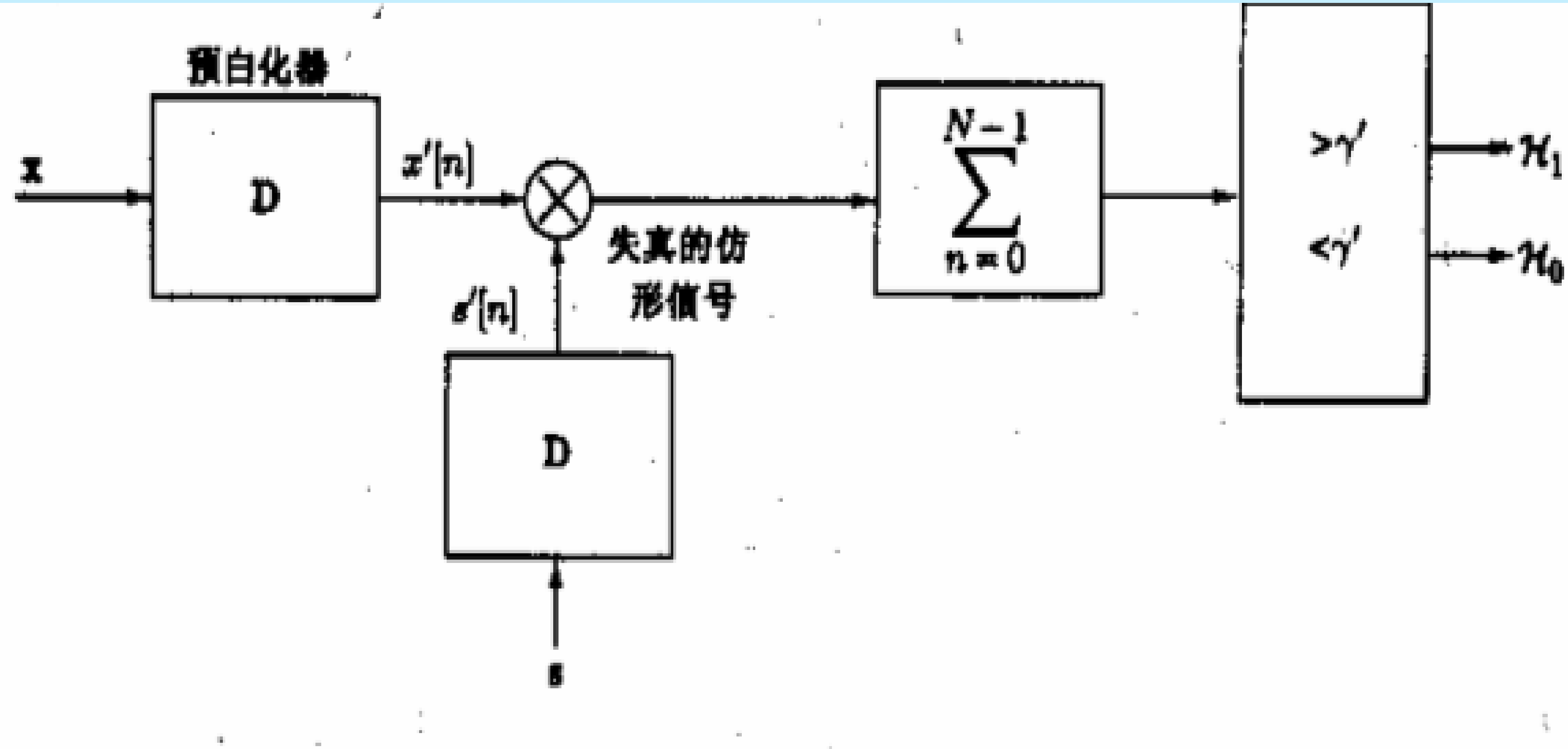


图 4.7　预白化器加仿形－相关器(匹配滤波器)的广义匹配滤波器

如果数据记录长度很大，而噪声是广义平稳随机过程，可以证明广义匹配滤波器可以近似，检验统计量变为，

$$T(\mathbf{x})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{X(f)S^*(f)}{P_{ww}(f)}df$$

其中$P_{ww}(f)$是噪声的PSD，C^{-1}的白化效果由检验统计量中的频率加权$1/P_{ww}(f)$所取代。显然，重要的频带是噪声小或SNR大的频带。