第四章 背景噪声中信号的检测

最佳检测系统，计算出似然比和最佳门限值比较，进行有无信号的判决。

似然比的计算与接收信号有关，称为最佳接收机，具体结构与信号和噪声的统计特性紧密相关，而判决门限值则取决于不同最佳准则 。

检测的信号有确知信号和随机信号两种 。

4.1 确知信号的检测

一、假设条件：

确知信号是指：如果信号出现了，它的幅度、频率、相位和到达时间等参量确定已知，而有无信号需要检测。相当于通信、雷达、主动声纳等系统，在无随机性传播路径中的确定距离上进行有无目标的检测。

假定噪声干扰是加性的、平稳高斯白噪声，均值为零，谱密度为 $N_0/2$。实际上，只能是相对信号频带而言，在一个足够宽的频带上功率谱密度均匀，就认为是白噪声。

二、最佳接收机的结构：

我们的目的是要设计一个接收机，能对输入随机过程 **x(t)**作似然比计算，并在两个假设 H_0、H_1 中选择一个。因此，还是从求 **x(t)**的似然比出发来设计接收机结构。

为了求得随机过程 **x(t)**的似然函数 **p(x/o)**，**p(x/s)**，我们先对 **x(t)**在时域上取样，把 **x(t)**看成 **N** 个随机变量的集合，然后再取 $N \to \infty$时的极限。

假定噪声干扰是带宽有限的白噪声，其功率谱密度为

$$N(\omega)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

该噪声的自相关函数是

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}N(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega=\frac{N_0\omega_c}{2\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c\tau}{\omega_c\tau}$$

构成高斯噪声的各随机变量为高斯变量。由于该噪声为平稳过程，所以各随机变量有相同的均值 **0** 和方差 σ_n^2。

$$6_N^2=R(0)\rightarrow\sigma_n^2=\frac{N_0\omega_c}{2\pi}=\frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{\Delta t}$$

①当无信号时，接收到随机过程为

$$x(t)=n(t)$$

其似然函数 $p(x/0)$ 就是噪声的概率密度函数

$$p(x,x_2,\ldots,x_N/0)=\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}x_k^2\}$$

其中 $\mathbf{x_k}$ 为对随机过程 $\mathbf{x(t)}$的取样值，是随机变量，且假设各取样值统计独立。

②当有信号时，接收到随机过程为

$$x(t)=s(t)+n(t)$$

由于信号为确定信号,随机过程 $x(t)$ 的似然函数 $p(x/s)$ 仍应是噪声的概率密度函数，方差不变，只是均值为 $s(t)$ 。

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N/s)=\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{K=1}^{N}(x_k-s_k)^2\}$$

其中 $\mathbf{s_k}$ 为对信号 $\mathbf{s(t)}$的取样值。

似然比为

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{p(x_1, x_2, \cdots, x_N / s)}{p(x_1, x_2, \cdots, x_N / 0)}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[\sum_{k=1}^{N}(x_k - s_k)^2 - \sum_{k=1}^{N} x_k^2\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\Delta t}{N_0}\left[2\sum_{k=1}^{N} x_k s_k - \sum_{k=1}^{N} s_k^2\right]\right\}$$

按要求的准则确定门限值

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \exp\left\{\frac{\Delta t}{N_0}\left[2\sum_{k=1}^{N} x_k s_k - \sum_{k=1}^{N} s_k^2\right]\right\} > \lambda_0$$

则接受假设 **H$_1$**，判决为有信号，否则判为无信号。

由于指数函数的单调性，不等式二边同时取对数，不等式仍然成立

$$\Delta t \frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N} x_k s_k > \ln\lambda_0 + \frac{\Delta t}{N_0}\sum_{k=1}^{N} s_k^2$$

化简得

$$\Delta t \sum_{k=1}^{N} x_k s_k > \frac{N_0}{2}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}\Delta t \sum_{k=1}^{N} s_k^2$$

对于理想白噪声，ω_c 无限宽，使 Δt 趋于 **0** 及 **N** 趋于无穷大，极限情况下求和变成积分，$T = N\Delta t$ 。

在 **O—T** 观察时间内，上式可写成

$$\int_0^T x(t)s(t)dt > \frac{N_0}{2}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}\int_0^T s^2(t)dt$$

令 $\int_0^T x(t)s(t)dt = G$

即 **G** 为输入 **x(t)**的统计量，是接收输入 **x(t)**与有用信号 **s(t)** 相乘后积分所得，称相关积分。$\int_0^T s^2(t)dt = E$ 为信号能量。这时的门限电平为

$$\frac{N_0}{2}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}E = G_0$$

这时的判决规则便为：$G > G_0$，判决为有信号，接受 **H_1** 假设，否则为无信号。

对 **x(t)**进行相关积分运算求得 **G**，比对 **x(t)**进行似然比运算简便。而$G > G_0$时，必然$\lambda > \lambda_0$，是等效的。这样，最佳接收机变成求接收输入 **x(t)**与信号 **s(t)**的相关积分 **G**，然后与一新的门限电平 **G_0**相比较，来判决信号的有无，称为相关接收。

值得注意的是，在多个随机变量表示的似然比中的$x_k - s_k$是时间对准的，也就是说，这里的 **x(t)**和 **s(t)**必须是时间对准的，所以 **G** 就是 **x(t)**和 **s(t)**的相关函数的最大值点（**R**（**0**）这一点）。即利用相关函数的峰值点来判决有无信号。进行相关积分的部件便是相关器。因此，最佳接收机的结构应由相关器和门限比较器组成。相关器是最佳检测系统中的重要基本部件。

对于一般的确知信号二元检测：

$H_0 : s_0(t)$

$H_1 : s_1(t)$

可用两个相关器实现相关接收机，也可设 $s(t) = s_1(t) - s_0(t)$，然后用上面形式。

三、工作特性

接收机的性能用工作特性曲线描述。即检测概率 **Pd**、虚警概率和信噪比（以其一为参变量）三者的关系曲线。

因为噪声经相关器后虽被抑制但仍有残留，故输出统计量 **G** 含有噪声成分，是一个随机变量。因而判决还会发生错误。

在“有”、“无”信号的情况下，由于 **G** 是对高斯过程 **x(t)** 线性运算后的结果，所以 **G** 是一个高斯随机变量。只要求得 **G** 的均值和方差就可以确定它的两个条件概率密度函数 p_1（**G**）和 p_0（**G**）。据此可计算虚警概率和正确检测概率。

①在假设 $\mathbf{H_0}$ 的条件下，因 ***x(t)=n(t)***

$$E[x(t)] = E[n(t)] = 0$$

G 的均值**:**

$$E[G] = E[\int_0^T x(t)\cdot s(t)dt] = \int_0^T E[x(t)]\cdot s(t)dt = 0$$

在假设 $\mathbf{H_1}$ 的条件下，$x(t) = n(t) + s(t)$

$$E[G] = E\{\int_0^T [n(t)+s(t)]s(t)dt\} = \int_0^T \mathrm{s}^2(t)dt = E$$

由于 **s(t)**为确知信号，在任一假设 $\mathbf{H_0}$ 或 $\mathbf{H_1}$ 条件下，**G** 有相同的方差。下面在 $\mathbf{H_0}$ 条件下求方差

$$D[G]=E\{[G-E[G]]^2\}$$

$$=E\{[\int_0^T x(t)s(t)dt]^2\}$$

$$=E[\int_0^T\int_0^T n(t_1)n(t_2)s(t_1)s(t_2)dt_1dt_2]$$

$$=\int_0^T\int_0^T E[n(t_1)n(t_2)]s(t_1)s(t_2)dt_1dt_2]$$

$$=\frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T \delta(t_1-t_2)s(t_1)s(t_2)dt_1dt_2]$$

$$=\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t)dt=\frac{N_0E}{2}$$

于是可以直接写出 $p_0(G)$和$p_1(G)$

$$p_0(G) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_o E}} \exp\left[-\frac{G^2}{N_o E} \right]$$

$$P_1(G) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_o E}} \exp\left[-\frac{(G-E)^2}{N_0 E} \right]$$

这时的虚警概率可以按下列公式计算：

$$\alpha=\int_{G_0}^{\infty}P_o(G)dG=\int_{G_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi N_o E}}\exp\left[-\frac{G^2}{N_o E}\right]dG$$

令$u=\dfrac{G}{\sqrt{\dfrac{N_o E}{2}}}$，则积分限 $\mathbf{G_o}$ 换为$\dfrac{G_o}{\sqrt{\dfrac{N_o E}{2}}}=u_0$

则$\alpha=\int_{u_0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{u^2}{2})du=1-\Phi(u_0)$

其中Φ **(x)**为正态分布函数，可由表查得。

正确检测概率 **P$_d$** 为：

$$P_d = \int_{G_o}^{\infty} p_1(G)dG = \int_{G_o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_o E}} \exp\left[-\frac{(G-E)^2}{N_o E}\right]dG$$

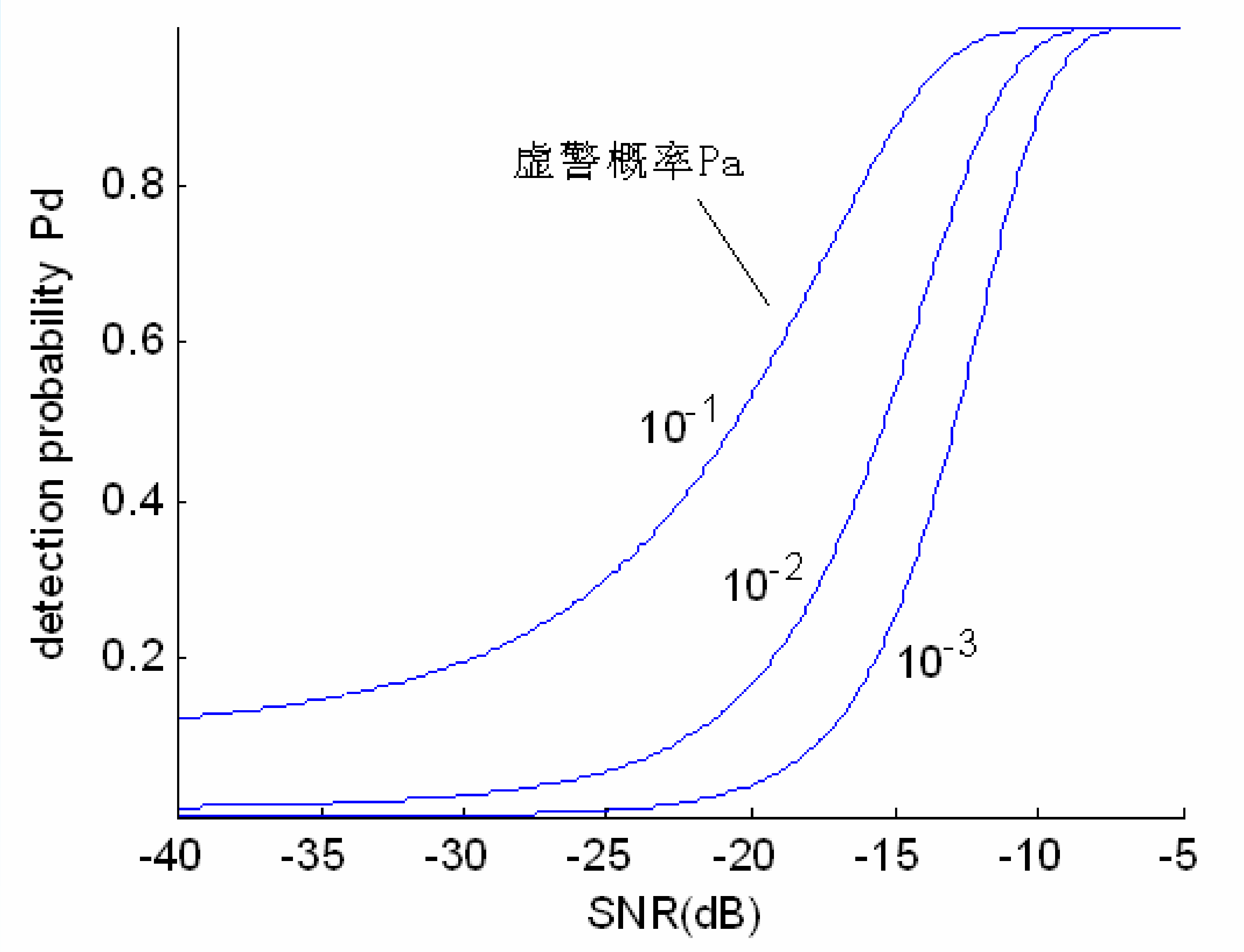
同样令 $v = \dfrac{G-E}{\sqrt{\dfrac{N_o E}{2}}}$， $u_0 = \dfrac{G_0}{\sqrt{\dfrac{N_o E}{2}}}$，则积分限 **G$_0$** 换为

$$\frac{G_o}{\sqrt{\dfrac{N_o E}{2}}} - \sqrt{\frac{2E}{N_o}} = u_0 - \sqrt{d}$$

$$P_d = \int_{u_0-\sqrt{d}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv = 1 - \Phi(u_0 - \sqrt{d})$$

其中$v=u-\sqrt{d}$，**d** 是信号能量与单位频带内噪声功率之比，即反映了信噪比的大小。所以α、$\mathbf{P_d}$取决于信号能量、噪声谱密度和门限电平。

由 **E**、$\mathbf{N_o}$和 $\mathbf{G_o}$三个量确定积分限后，查表可得α、$\mathbf{P_d}$值。这样就可作出接收机的工作特性曲线。它表达了虚警概率α和检测概率 $\mathbf{P_d}$以及信噪比 **d** 三者的关系。**ROC** 曲线有几种形式，下面介绍一种。以 α为参变量，**d** 为横坐标，用分贝表示，$\mathbf{P_d}$为纵坐标，如图 **4.3**。



虚警概率Pa
0.8
0.6
0.4
0.2
detection probability Pd
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
-40
-35
-30
-25
-20
-15
-10
-5
SNR(dB)

该曲线表明，要求在一定的虚警概率条件下，要提高正确检测概率，则需要提高信噪比。或在一定的信噪比条件下，要求降低虚警概率必然也会降低正确检测概率。根据曲线可由二个参量获得第三个参量，并能计算出相应的门限值。如由 α 可求出 $\mathbf{u_o}$，由 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{u_o}$ 可求出 $\mathbf{P_d}$。

4.2 随机参量信号的检测

如果信号所有参量都确知，称为确知信号。然而，这种情况在实际中少见。通常总是有某个或几个参量未知，这些参量可能是在观测时间内不随时间变化的随机变量，称具有这种参量的信号为随机参量信号。如通信、雷达或主动声纳的接收信号，其幅度、相位、到达时间和频率等参量中的一个或几个是随机的。

4.2.1 随机相位信号的检测

一、假设条件：

由于波的传播条件变化，平台的摇摆等，均会导致信号相位的随机变化。此外，信号时延上的小的变化，也可以归结为相位上的变化来处理。

随机相位信号记为$s(t,\varphi_s)$，信号的频率和到达时间确知，而其中φ_s为随机初相，假设它在观测时间内不变，即φ_s为随机变量，在 0～2π 之间均匀分布，$p(\varphi_s)=\dfrac{1}{2\pi}$。

噪声干扰仍假定为相加的、平稳高斯白噪声，均值为零，谱密度为$\dfrac{N_0}{2}$。

二、最佳接收机的结构

为获得接收机结构，仍从计算似然比出发。

当无信号时，接收到的随机过程 **x(t)**只有噪声。**X(t)=n(t)**。其概率密度函数为 **p(x/o)**，仍取决于噪声的概率密度函数。

当有信号时，接收到的随机过程 $x(t)=n(t)+s(t,\varphi_s)$ 因 φ_s 和 **n(t)**均为随机的，所以 **x(t)**的概率函概率数为联合概率密度函数 **p(x,** φ_s **/s)** 。

似然比λ（**x**,φ_s）与φ_s有关。为了消除由于φ_s随机所带来的不确定性，可采用平均似然比的方法。即按随机变量φ_s的概率密度 **p**（φ_s）求平均，以消除φ_s的随机性。对其它随机参量信号同样可按这种方法求平均似然比。

因为 $p(x,\varphi_s/s)=p_s(x/\varphi_s)p(\varphi_s)$

所以 $p(x/s)=\int_0^{2\pi}p(x/\varphi_s)p(\varphi_s)d\varphi_s$

其中 $p(x/\varphi_s)$ 为条件概率密度函数，相当于φ_s给定时接收到 **x(t)**的概率密度函数。

$$\lambda(x)=\frac{p(x/s)}{p(x/o)}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi} p(x/\varphi_s)p(\varphi_s)d\varphi_s}{p(x/0)}$$

$$=\int_0^{2\pi}\lambda(x/\varphi_s)p(\varphi_s)d\varphi_s$$

其中 $\lambda(x/\varphi_s)=\dfrac{p(x/\varphi_s)}{p(x/0)}$ 称为条件似然比，也就是当随机初相 φ_s 固定条件下的似然比。条件似然比统计平均后所得 $\lambda(x)$，称为平均似然比。

由于条件似然比$\lambda(x/\varphi_s)$相当于φ_s确定条件下确知信号的似然比。在噪声和信号其他特性（除初始相位随机外）与上节假设相同的条件下，参照上节推导，取$\Delta t \to o$极限情况，得条件似然比$\lambda(x/\varphi_s)$为

$$\lambda(x/\varphi_s) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_O^T x(t)S(t,\varphi_s)dt - \frac{1}{N_0}\int_o^T S^2(t,\varphi_s)dt\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{2}{N_o}G(\varphi_s) - \frac{E(\varphi_s)}{N_o}\right\}$$

其中 $E(\varphi_s)=\int_o^T S^2(t,\varphi_s)dt$ ，为信号能量，$G(\varphi_s)=\int_o^T x(t)s(t,\varphi_s)dt$，是随机变量 φ_s 的函数，包含 φ_s 带来的不确定性，检验统计量不能包含信号带来的不确定性。故不能直接用 $G(\varphi_s)$ 作为统计量来判决有无信号。下面就设法消除这种不确定性。

设随机相位信号具有如下形式：

$$S(t,\varphi_s) = A\sin(\omega_c t + \varphi_s) \qquad 0 \le t \le T$$

利用三角函数公式分解为

$$S(t,\varphi_s) = A\sin\omega_c t \cdot \cos\varphi_s + A\cos\omega_c t \cdot \sin\varphi_s$$

令 $S_s(t) = A\sin\omega_c t$

$$S_c(t) = A\cos\omega_c t$$

则 $S(t,\varphi_s) = S_s(t)\cos\varphi_s + S_c(t)\sin\varphi_s$

代入$G(\varphi_s)$表达式，得

$$G(\varphi_s)=\int_o^T S(t,\varphi_s)x(t)dt$$

$$=\int_o^T \left[S_s(t)\cos\varphi_s+S_c(t)\sin\varphi_s\right]x(t)dt$$

$$=G_s\cos\varphi_s+G_c\sin\varphi_s$$

其中

$$G_s=\int_0^T S_s(t)x(t)dt$$

$$G_c=\int_o^T S_c(t)x(t)dt$$

引进新变量 **Z** 和 θ，令

$$Z = \sqrt{G_s^2 + G_c^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{G_c}{G_s}$$

则 $G_s = Z\cos\theta$

$$G_c = Z\sin\theta$$

于是有

$$G(\varphi_s) = Z\cos\theta\cos\varphi_s + Z\sin\theta\sin\varphi_s = Z\cos(\varphi_s - \theta)$$

（4-35）

这时信号能量

$$E(\varphi_s) = \int_0^T S^2(t,\varphi_s)dt = \int_0^T A^2 \sin^2(\omega_c t + \varphi_s)dt$$

$$= \frac{A^2}{2}T = E \qquad \text{（4-36）}$$

信号能量与初相φ_s几乎无关。将（**4-35**）和（**4-36**）式代入条件似然比表达式，有

$$\lambda(x/\varphi_s) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}Z\cdot\cos(\varphi_s - \theta) - \frac{E}{N_0})\right\}$$

代入平均似然比表达式，可得平均似然比$\lambda(x)$为

$$\lambda(x)=\int_0^{2\pi}\lambda(x/\varphi_s)p(\varphi_s)d\varphi_s$$

$$=\exp(-\frac{E}{N_0})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}Z\cos(\varphi_s-\theta)\right\}d\varphi_s$$

$$=\exp(-\frac{E}{N_0})I_0(\frac{2Z}{N_0}) \qquad \text{（4-37）}$$

其中：$I_0(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{u\cdot\cos(\varphi-\theta)\}d\varphi$为零阶修正贝塞尔函数。

这时判决规则变为：

$$\lambda(x) = \exp(-\frac{E}{N_0}) I_0(\frac{2Z}{N_0}) > \lambda_0 \qquad \textbf{(4-38)}$$

判决为有信号，接受 $\mathbf{H_1}$ 假设。

将上式两边取对数，$\mathbf{H_1}$ 假设成立的判决不等式变为

$$\ln I_0(\frac{2Z}{N_0}) > \ln \lambda_0 + \frac{E}{N_0}$$

如果根据此式设计最佳接收机，则结构复杂。不过，由于对 **Z** 的变换都是单调的（$I_0(u)$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的单调函数，对数也是单调函数）。因此可经变换后直接用 **Z** 本身进行判决，判决规则变为

$$Z > \frac{N_0}{2} arcI_0[\lambda_0 \exp(\frac{E}{N_0})] \qquad \textbf{（4-39）}$$

门限电平相应地变为 $\mathbf{Z_0}$

$$Z_0 = \frac{N_0}{2} arcI_0[\lambda_0 \exp(\frac{E}{N_0})] \qquad \textbf{（4-40）}$$

当 $Z > Z_0$ 时，必然有 $\lambda(x) > \lambda_0$，所以最佳接收机变为对输入 $x(t)$ 进行 **Z** 运算，然后与门限电平 Z_0 比较，从而作出判决。最佳接收机的结构图如图 **4.4**。

当 $Z > Z_0$ 时，必然有 $\lambda(x) > \lambda_0$，所以最佳接收机变为对输入 $x(t)$ 进行 **Z** 运算，然后与门限电平 Z_0 比较，从而作出判决。最佳接收机的结构图如图 **4.4**。

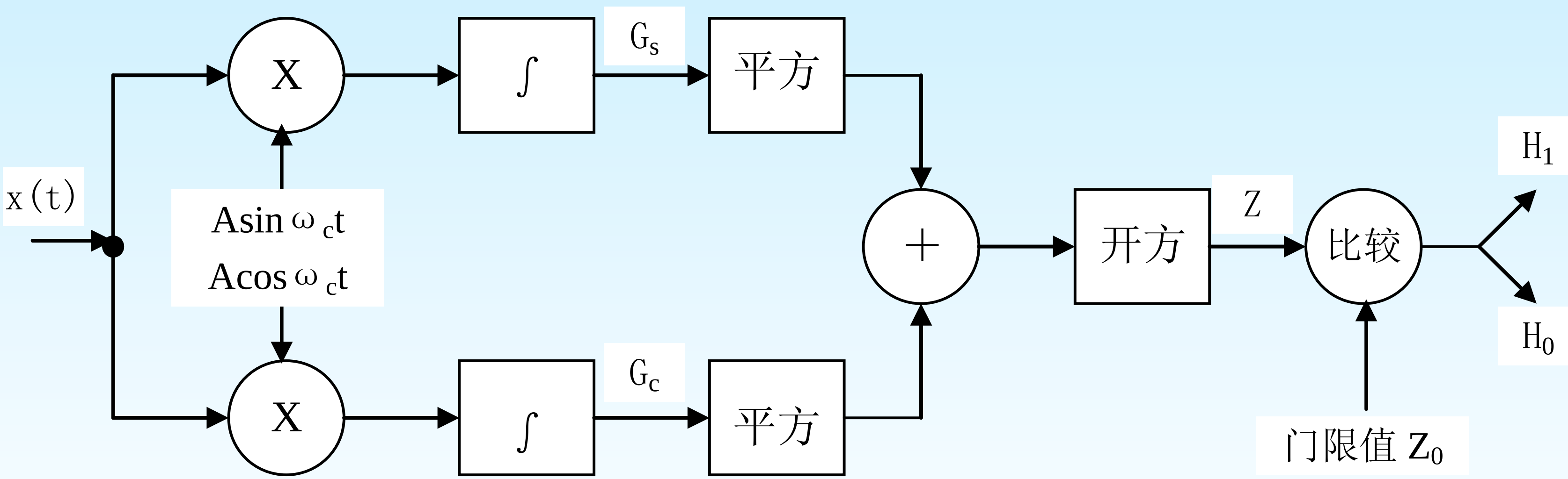


图 **4.4** 随机相位信号的最佳接收机的结构图

从图中可以看出，首先将接收到的信号 $x(t)$ 分成两路，分别与 $A\sin\omega_c t$、$A\cos\omega_c t$ 相乘积分，进行相关处理，然后平方求和，开方得 **Z**，这种对 $x(t)$ 进行 **Z** 运算的系统称为 **Z** 计算器。如果与确知信号的检测一样，直接只用一个相关器求得统计量 **G**，由于这个 **G** 包含信号初相 φ_s 所造成的不确定性，则不能直接对该 **G** 进行信号有无的判决。现在，把随机相位信号看成两个振幅随机的正交信号之和，通过两个通道的正交相关处理。两个相关器分别输出 $\mathbf{G_S}$ 和 $\mathbf{G_C}$，$\mathbf{G_S}$ 和 $\mathbf{G_C}$ 与信号随机初相 φ_s 有关，但经过平方求和所得 $\mathbf{Z}^2$ 就与 φ_s 无关了，消除了 φ_s 给判决带来的不确定性。

注意：上述讨论曾假设信号为单载频，对复杂信号该方法原理仍适用。对于确知信号的最佳检测，仅采用相关器，它属于线性系统。而对于随机相位信号的最佳检测，则必须采用更复杂的非线性系统 **Z** 计算器。

三、工作特性

输出统计量 **Z** 仍含有噪声成分，是一个随机变量，用 **Z** 进行判决还会有错误。下面就计算这种接收机的两种错误概率，讨论其工作性能。求出 **Z** 的条件概率密度函数 $p(Z/0)$ 和 $p(Z/s)$，就可求得虚警概率 α 和正确检测概率 $\mathbf{P_d}$。

因为 $Z=\sqrt{G_S^2+G_C^2}$，所以要确定 **Z** 的概率密度函数，就得先求出 $\mathbf{G_S}$ 和 $\mathbf{G_C}$ 的概率密度函数。因为输入噪声是高斯的，而 $\mathbf{G_S}$、$\mathbf{G_C}$ 为 $\boldsymbol{x(t)}$的线性泛函数，故也是高斯的。只要求得方差和均值，就可写出其概率密度函数。

以假设 $\mathbf{H_1}$ 来说，对于一个给定的相位值，$\mathbf{G_S}$ 与 $\mathbf{G_C}$ 的均值是

$$E[G_S/\varphi_S] = E\cos\varphi_S$$

和 $$E[G_C/\varphi_S] = E\sin\varphi_S$$

其中 $$E = \frac{A^2}{2}T$$

有无信号方差是相同的，同上节求法。

$$\sigma_{G_S}^2 = \sigma_{G_C}^2 = \sigma_{G_O}^2 = \frac{N_0 E}{2}$$

由于 G_S 和 G_C 正交不相关，又是高斯变量，所以它们是统计独立的。联合概率密度函数等于各自概率密度函数的乘积。

$$P_1(G_S, G_C / \varphi_S) = P_1(G_S / \varphi_S) P_1(G_C / \varphi_S)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_{G_0}^2} \exp\left[-\frac{(G_S - E\cos\varphi_S)^2 + (G_C - E\sin\varphi_S)^2}{2\sigma_{G_0}^2}\right]$$

利用定义式$G_s = Z\cos\theta$和$G_c = Z\sin\theta$进行变量置换后，得

$$P_1(Z,\theta/\varphi_S) = P_1(G_s, G_C/\varphi_S)\cdot|J|$$

这里雅可比为

$$J = \frac{\partial(G_S, G_C)}{\partial(Z,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -Z\sin\theta & Z\cos\theta \end{vmatrix} = Z\ ,$$

所以有

$$p_1(Z,\theta/\varphi_S) = \frac{Z}{2\pi\sigma_{G_0}^2}\exp\left[-\frac{Z^2+E^2-2ZE\cos(\theta-\varphi_S)}{2\sigma_{G_0}^2}\right]$$

对θ从 **0** 到2π积分后,得到

$$p_1(Z/\varphi_S)=\frac{Z}{\sigma_{G_0}^2}I_0(\frac{ZE}{\sigma_{G_0}^2})\exp(-\frac{Z^2+E^2}{2\sigma_{G_0}^2})$$

以上都假设φ_s为某一固定值,若φ_s为任意值时,则有

$$p_1(Z)=\int_0^{2\pi} p_1(Z/\varphi_S)\frac{d\varphi_s}{2\pi}$$

$$=\frac{Z}{\sigma_{G_0}^2}I_0(\frac{ZE}{\sigma_{G_0}^2})\exp(-\frac{Z^2+E^2}{2\sigma_{G_0}^2})$$

可见，有信号时 **Z** 的概率密度函数为莱斯分布。

对于假设$H_0, E=0, I_0(0)=1$，故

$$p_0(Z)=\frac{Z}{\sigma_{G_0}^2}\exp(-\frac{Z^2}{2\sigma_{G_0}^2}) \qquad \text{（4-4）}$$

当无信号时，**Z**的概率密度函数为瑞利分布。

求出 **Z** 的概率密度函数之后，就可计算虚警概率α和正确检测概率 **Pd**。

$$\alpha = \int_{Z_0}^{\infty} \frac{Z}{\sigma_{G_0}^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma_{G_0}^2}\right) dz$$

$$= \exp\left(-\frac{Z_0^2}{2\sigma_{G_0}^2}\right) = \exp\left(-\frac{z_0^2}{2}\right) \qquad （4\text{-}43）$$

其中 $z_0 = \dfrac{Z_0}{\sigma_{G_0}}$

$$P_d=\int_{Z_0}^{\infty}\frac{Z}{\sigma_{G_0}^2}\exp(-\frac{Z^2+E^2}{2\sigma_{G_0}^2})I_0(\frac{ZE}{\sigma_{G_0}^2})dZ$$

$$=\int_{z_0}^{\infty}z\exp(-\frac{z^2+d^2}{2})I_0(d\cdot z)dz \qquad （4-44）$$

其中 $d=\frac{E}{\sigma_{G_0}},z=\frac{Z}{\sigma_{G_0}}$

这个积分是马库姆 **Q** 函数。

对于给定的d、z_0值，可以查函数表得到 $\mathbf{P_d}$和α，这样就可作出接收机的 **ROC** 曲线。如图 **4.5** 所示。为了比较，图中也画出了确知信号的最佳接收机的 **ROC** 曲线。从图中可以看出，要求达到同样的虚警概率和正确检测概率，对随机相位信号比对确知信号要求信噪比增大 **1dB** 左右，这是由于不知道或者未利用相位信息的缘故。

4.2.2 随机频率信号的检测

一、假设

从运动目标反射回来的信号，其频率与发射信号的频率为相差多普勒频移，$\Delta f_d = f_c \cdot \dfrac{2v_r}{c}$（其中 v_r 为目标运动的径向速度，**c** 为声速）。由于 v_r 是未知的，所以多普勒频移 Δf_d 也未知，反映为接收信号的频率是未知的，作为随机频率处理。

设信号为$S(t,\omega_s,\varphi_s)=A\sin(\omega_s t+\varphi_s)$ $0\le t\le T$，信号振幅 **A** 确知。初相φ_s是随机变量仍为均匀分布（在 **0**～**2**π间）。由于目标速度范围可知，接收信号频率范围也就可知。信号频率ω_s是随机变量,分布于(ω_L,ω_M)区间,其概率密度为$p(\omega_S)$。

噪声干扰仍假设为相加的、平稳高斯白噪声，均值为零，谱密度为$\dfrac{N_0}{2}$。

二、最佳接收机的结构

直接用随机相位信号似然比式，可得到以ω_s为条件（ω_s为某一固定值）的似然比

$$\lambda(x/\omega_s)=\exp(-\frac{E}{N_0})I_0(\frac{2Z}{N_0}) \qquad \text{（4-45）}$$

其中

$$Z=\{[\int_0^T x(t)A\sin\omega_s t dt]^2+[\int_0^T x(t)A\cos\omega_s t dt]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

平均似然比$\lambda(x)$

$$\lambda(x)=\int_{\omega_L}^{\omega_M}\lambda(x/\omega_s)p(\omega_s)d\omega_s \qquad \text{（4-46）}$$

将 ω_L — ω_M 范围划成 **M** 个区域，并认为在这些小区间内 $P(\omega_s)$ 相等。

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_L + i(\Delta\omega) \\ M = \dfrac{\omega_M - \omega_L}{\Delta\omega} \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,M$$

将 $\lambda(x)$ 改写成离散形式

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda(x/\omega_i)P(\omega_i) \qquad \text{（4-47）}$$

其中 $P(\omega_i) = p(\omega_i)\Delta\omega$

可按此式，设计似然比计算器加门限比较器构成的最佳接收机，但这种系统结构比较复杂。如果从多择一假设检验的观点出发，可以得到一个比较简化的方案。信号频率具有 **M** 个可能值之一。这里将每个频率 ω_i 对应于一个假设 **H_i**，没有信号存在对应于 **H**。假设。

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad x(t) = n(t) \\
H_1 &: \quad x(t) = n(t) + A\sin(\omega_1 t + \varphi_s) \\
&\vdots \\
H_M &: \quad x(t) = n(t) + A\sin(\omega_M t + \varphi_s)
\end{aligned}
$$

为简单起见，假定 $P(\omega_i)$ 是均匀分布。则 H_i 假设对 **H_0** 假设的似然比为

$$\lambda_i = \frac{p(x/\omega_i)}{p(x/o)} = \exp(-\frac{E}{N_0}) I_o(\frac{2Z_i}{N_0}) \qquad \textbf{（4-48）}$$

如果没有一个λ_i超过门限值λ_0，则判断 $\mathbf{H_0}$ 假设成立；

反之，则判断对应于最大λ_i的假设 $\mathbf{H_i}$ 成立。为简化起见，可用 $\mathbf{Z_i}$ 来进行门限比较，当 $\mathbf{Z_i}$ 中最大者超过

$$Z_0 = \frac{N_0}{2} arcI_0[\lambda_0 \exp(\frac{E}{N_0})]$$

时，则判断 $\mathbf{H_i}$ 假设成立；反之，没有一个 $\mathbf{Z_i}$ 超过门限值，则 $\mathbf{H_0}$ 假设成立。这种最佳接收机的结构如图 **4.5** 所示。

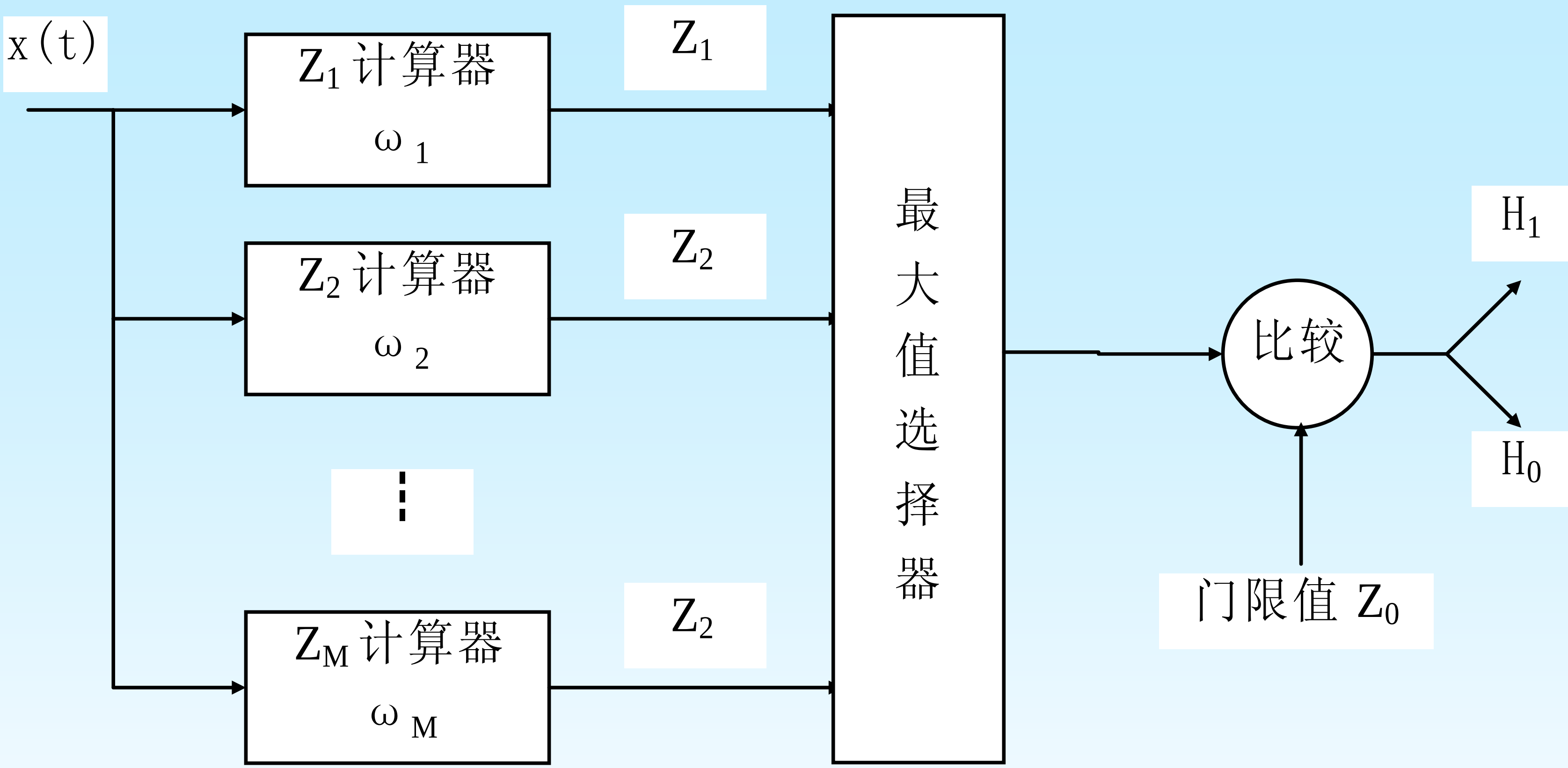


图 4.5

相当于随机相位信号检测系统重复多路，各路对应频率ω_i，然后在 **M** 路中选取其中输出最大者与门限值Z_0比较，进行判决。

4.3 高斯噪声背景下高斯信号的检测

一、假设条件

对于噪声监测系统、被动声呐等，信号是目标的辐射噪声。现假设，输入信号和噪声干扰都是限时限带的平稳高斯随机过程，均值为零，并具有任意功率谱。

二、随机过程的富氏变换

高斯噪声中高斯信号的检测，仍采用似然比检测。

根据抽样定理，一个限时限带的随机过程，若其时间长度 **T**，谱宽为 **W**，则可完全由时域抽样或频域抽样所得的 **2TW** 个随机变量来描述。为了计算似然比，我们必须给出这 **2TW** 随机变量的联合概率密度函数。

两种办法，一种是采用时域抽样，但对于非白噪声，时域抽样点之间彼此相关，因而相应的联合概率出度函数有比较复杂的形式。因此采用频域抽样，这就需要先求出随机过程的频谱。

设 **x(t)** 为平稳随机过程的一样本函数，受限于（**-2πW,2πW**）频率范围，作（**0≤ t≤T**）的截断，并以 **T** 为周期作周期延拓，然后展开为富氏级数

$$x(t)=\sum_{n=-TW}^{TW}X(n)\exp(j\omega_n t) \qquad \textbf{(4-49)}$$

$$X(n)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp(-j\omega_n t)dt \qquad \textbf{(4-50)}$$

其中 $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$，　$X(n)=X(\omega_n)$，**n** 的取值范围为 **(-TW~TW)**。

令 **X(n)=a(n)+jb(n)**，则 **x(t)**可用三角级数来表示：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{TW}[2a(n)\cos\omega_n t - 2b(n)\sin\omega_n t] \qquad \textbf{(4-51)}$$

$$a(n) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(\omega_n t)dt \qquad \textbf{(4-52)}$$

$$b(n) = -\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin(\omega_n t)dt \qquad \textbf{(4-53)}$$

x(t)和 **X(n)**仅仅在（**0**、**T**）时间内唯一对应。以上是对一个样本函数展开的，所以，得 **X(n)**或 **a(n)**、**b(n)**为随机变量。可这样理解：富氏级数展开实际是针对每一个样本函数进行的，由于样本函数是依某种概率规则出现的，所以相应的富氏系数 **X(n)**或 **a(n)**、**b(n)**的取值也是依同一概率出现的，即 **X(n)**或 **a(n)**、**b(n)**是随机变量。

为了能够写出各富氏系数的联合概率密度函数，必须研究富氏系数的相关性。如若各系数之间不相关，就可简化联合概率密度函数的求解。

原假设随机过程 **x(t)**的均值为零，即 **E[x(t)]=0**，由此推出随机变量 **X(n)**或 **a(n)**、**b(n)**也是`零均值，

$$E[X(n)] = E[a(n)] = E[b(n)] = 0$$

各富氏系数 $a(n)$ 与 $a(m)$（或 $b(n)$与 $b(m)$ 及 $a(n)$ 与 $b(m)$ ）的协方差，在零均值条件下就是二阶矩。当观察时间T足够长时，可以证明：

$$E[a(n)a(m)]=\begin{cases}\dfrac{S_x(\omega_n)}{2T} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$E[b(n)b(m)]=\begin{cases}\dfrac{S_x(\omega_n)}{2T} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$E[a(n)b(m)]=0 \qquad \text{任意}\, n\, \text{和}\, m$$

其中 $S_x(\omega_n)$ 为随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度函数在 ω_n 处的取值。

再考虑复富氏系数 **X(n)**与 **X(m)**的协方差。

$$E[X(n)X^*(m)] = E\left\{\left[a(n)+jb(n)\right]\left[a(m)-jb(m)\right]\right\}$$
$$= E[a(n)a(m)] + E[b(n)b(m)] + jE[a(m)b(n)] - jE[a(n)b(m)]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{S_x(\omega_n)}{T} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

以上这些结果表明，当观察时间 **T** 足够长时，不同频率的付氏系数是不相关的。即使在相同频率下，$a(n)$ 和 $b(m)$ 也是不相关的。

三、最佳拉收机的结构

为导出最佳接收机的结构，需求出富氏系数的概率密度函数和似然比。

按定义，由于$a(n)$和$b(n)$均为$x(t)$的线性泛函数，所以它们都是高斯变量。显然，$X(n)$也是高斯变量。

先求出一维复高斯变量$X(n)$的概率密度函数。实高斯变量$a(n)$和$b(n)$互不相关，对于高斯分布而言，不相关就意味着独立，所以$a(n)$和$b(n)$的联合概率密度函数即为

$$p\left[a(n),b(n)\right]=\frac{1}{2\pi\cdot\dfrac{S_x(\omega_n)}{2T}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{2T}{S_x(\omega_n)}\left[a^2(n)+b^2(n)\right]\right\}$$

将关系式

$$a^2(n)+b^2(n)=\left|X(n)\right|^2$$

$$\sigma_{X_n}^2=\frac{S_x(\omega_n)}{T}$$

代入上式，得到 **X(n)**的概率密度函数为

$$p\left[X(n)\right]=\frac{1}{\pi\sigma_{X_n}^2}\exp\left[-\frac{\left|X(n)\right|^2}{\sigma_{X_n}^2}\right] \qquad \text{（4-55）}$$

$p\left[a(n),b(n)\right]$和$p\left[X(n)\right]$一样，都是描述同一个复随机变量 $X(n)$ 的概率分布，只不过 $p\left[a(n),b(n)\right]$是以 $X(n)$ 的实部和虚部两个实变量 $a(n),b(n)$ 为自变量的概率密度函数。

频域抽样点组$\{X(n)\}$完全代表了原输入过程$x(t)$。我们只考虑所有样本波形均无直流项的随机过程，$\overline{x}(t)=0$,即$X(0)=0$。又注意正负频率的复共轭关系，**X(-n)=X*(n)**，所以真正携带信息的频域复样点只有TW个：$X(1), X(2), \cdots x(TW)$. 由这 **TW** 个复随机变量构成一个 **TW** 维复随机向量 **X**。$X=\left[X(1), X(2), \cdots X(TW)\right]$。

当 **x(t)**是高斯过程时，可以证明 **X** 是一个高斯向量。**X** 的概率密度函数，代表了所有富氏系数的联合概率概率密度函数。不同频率成分的富氏系数 $X(1), X(2), \cdots X(TW)$ 是互不相关的，即相互独立的，所以向量 **X** 可具有下列形式的复高斯密度函数

$$\begin{aligned} p(X) &= \prod_{n=1}^{TW} \frac{1}{\pi\sigma_{X_n}^2} \exp\left[-\frac{\left|X(n)\right|^2}{\sigma_{X_n}^2}\right] \\ &= [\prod_{n=1}^{TW} \frac{1}{\pi\sigma_{X_n}^2}] \cdot \exp\left[-\sum_{n=1}^{TW} \frac{\left|X(n)\right|^2}{\sigma_{X_n}^2}\right] \end{aligned} \quad \text{（4-56）}$$

在 **H₀** 情况下，即只有噪声干扰时。$x(t)=n(t)$，设噪声干扰的功率谱为 $N(\omega)$，则

$$\sigma_{X_n}^2\Big|_{H_0}=\left.\frac{S_x(\omega_n)}{T}\right|_{H_0}=\frac{N(\omega_n)}{T}$$

由此得 $\mathbf{H_0}$ 情况下 **X** 的概率密度函数为

$$p_0(\mathbf{X})=A\exp\left\{-\sum_{n=1}^{TW}T\frac{|X(n)|^2}{N(\omega_n)}\right\}$$

式中 **A** 为与 $X(n)$ 无关的量。

在 $\mathbf{H_1}$ 情况下，噪声信号加噪声干扰，$x(t)=s(t)+n(t)$。设信号的功率谱密度为 $S(\omega)$，信号和干扰（加性噪声）相互独立，则

$$\sigma_{X_n}^2\Big|_{H_1}=\frac{N(\omega_n)}{T}+\frac{S(\omega_n)}{T}$$

由此得 $\mathbf{H_1}$ 情况下 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数为

$$p_1(\mathbf{X})=B\exp\left\{-\sum_{n=1}^{TW}T\cdot\frac{\left|X(n)\right|^2}{N(\omega_n)+S(\omega_n)}\right\}$$

式中 $\mathbf{B}$ 是与 $X(n)$ 无关的量。

似然比为两似然函数之比，即

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{p_1(\mathbf{X})}{P_0(\mathbf{X})}$$

$$= \frac{B}{A}\exp\left\{\sum_{n=1}^{TW} T\left|X(n)\right|^2\left[\frac{1}{N(\omega n)} - \frac{1}{N(\omega_n) + S(\omega_n)}\right]\right\}$$

用似然比计算器按上式计算出似然比 $\lambda(x)$，然后与由指定准则所确

定的门限值 λ_0 进行比较，就构成了似然比接收系统。判决规则为

$$\frac{B}{A}\exp\left\{\sum_{n=1}^{TW} T\left|X(n)\right|^2\left[\frac{1}{N(\omega_n)} - \frac{1}{N(\omega_n) + S(\omega_n)}\right]\right\} > \lambda_0$$

接收 $\mathbf{H_1}$ 假设。

由于指数函数的单值性和单调性，不等式两边同时取对数，不等式仍成立。取对数并移项后得

$$G=\sum_{n=1}^{TW} T\left|X(n)\right|^{2}\left[\frac{1}{N(\omega_{n})}-\frac{1}{N(\omega_{n})+S(\omega_{n})}\right] > \ln\left[\frac{A}{B}\lambda_{0}\right]=G_{0} \qquad \text{（4-57）}$$

G 为新的统计检验量，**G_0** 为新的门限值。当 $G>G_{0}$ 时，必然 $\lambda(x)>\lambda_{0}$，两者等价。

若令某一滤波器的传输函数 $H(\omega)$ 满足

$$\left|H(\omega)\right| = \left[\frac{1}{N(\omega)} - \frac{1}{N(\omega)+S(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{S(\omega)}{N(\omega)\left[N(\omega)+S(\omega)\right]}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{（4-58）}$$

且令 $Y(n) = X(n)H(\omega_n), Y(n)$ 为 $x(t)$ 在频域上的抽样点 $X(n)$ 通过传输函数为 $H(\omega)$ 的滤波器的输出。则对数似然比不等式可改写为

$$G = T\sum_{n=1}^{TW}\left|X(n)H(\omega_n)\right|^2 = T\sum_{n=1}^{TW}\left|Y(n)\right|^2 > G_0$$

根据周期函数的巴塞伐尔定理，有

$$\int_o^T y^2(t)dt = 2T\sum_{n=1}^{TW}|Y(n)|^2$$

其中 **y(t)**是任意时间波形，**Y(n)**是它的频率为ω_n的富氏系数。于是似然比检测的判决规则最终可写为

$$G = \frac{1}{2}\int_o^T y^2(t)dt > G_0 \qquad （\mathbf{4\text{-}59}）$$

接受 $\mathbf{H_1}$ 假设。

通过上面的计算，将频域上的结果转化为时域上的表达式。这样，最佳接收机可以描述为：按时间截段（**0**，**T**）内的随机过程 **x(t)**，通过一个幅度特性由（**4-58**）式所规定的预选滤波器，然后进行平方积分，输出量与一个新的门限电平 **Go** 相比较。略去似然比检测的判决规则中无关重要的因子$\frac{1}{2}$，其结构如图 **4.6** 所示。

四、最佳接收机物理意义的讨论

我们知道，最佳检测的目的是尽可能准确无误地区分 $\mathbf{H_0}$ 和 $\mathbf{H_1}$，$\mathbf{H_0}$ 和 $\mathbf{H_1}$ 的输入波形都是零均值高斯过程。因为高斯过程是由均值和功率谱（或相关函数）所完全确定的，故在零均值条件下，$\mathbf{H_0}$ 和 $\mathbf{H_1}$ 所对应的输入过程的区别仅在于功率谱有所不同。功率谱包括谱的形状和谱级（功率）。

下面讨论不同功率谱的情况。

1、限带白谱情况

当信号和干扰都是限带白高斯过程。这时 $S(\omega)$和$N(\omega)$ 都只在有限频带 $(-2\pi W, 2\pi W)$ 内取非零的常数，称为限带白谱。显然，信号加干扰的过程也同样具有限带白谱。因此，**H₀** 和 **H₁** 两种情况下的输入过程的谱形状是相同的，唯一可以利用的差异点只是两者的谱级（功率）不同。

这时预选滤波器的传输函数 $H(\omega)$ 等于常数，如略去这常数因子，最佳接收机简化为平方积分系统。其运算式为

$$\int_0^T [x(t)]^2 dt$$

它代表了样本波形在截断时间 **T** 内的能量。可见白高斯噪声干扰下检测白高斯信号的最佳接收机是能量检测器。只能根据输出能量的大小来判别有无信号。

2、任意功率谱情况

当输入过程的功率谱不是白谱噪声,则可利用的信息不仅有能量的差异，而且还有谱形状的差异。谱形状信息的利用体现在预选滤波器传输函数 $H(\omega)$ 的幅度特性上：

$$\left|H(\omega)\right| = \left\{\frac{S(\omega)}{N(\omega)\left[N(\omega)+S(\omega)\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

通常感兴趣的是小输入信噪比情况，这时

$$\left|H(\omega)\right| \approx \frac{S^{\frac{1}{2}}(\omega)}{N(\omega)} \qquad \text{（4-60）}$$

上式所描述的滤波器称厄卡特(**Eckart**)滤波器。为了看清楚它的作用，幅度传输特性$|H(\omega)|$分解为以下两个因子：

$$|H(\omega)| = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}(\omega)} \cdot \frac{S^{\frac{1}{2}}(\omega)}{N^{\frac{1}{2}}(\omega)}$$

这两个因子分别代表了滤波器的两个基本作用。

（**1**）第一个因子$\dfrac{1}{N^{\frac{1}{2}}(\omega)}$表示对噪声干扰的预白化作用，噪声干扰通过预白网络后，功率谱变为常数 **1**，即“白谱”；而信号通过预白网络后，功率谱变为$\dfrac{S(\omega)}{N(\omega)}$

（2）第二个因子$\dfrac{S^{\frac{1}{2}}(\omega)}{N^{\frac{1}{2}}(\omega)}$表示对预白网络的输出信号进行匹配，称为匹配网络。匹配网络的功率传输函数$\dfrac{S(\omega)}{N(\omega)}$与预白后的信号功率谱有完全相同的形式。这就是说，在任何频率上，只要经过预白的信号功率谱有较大的数值，匹配网络相应地就有较大的功率传输系数。所以匹配网络的传输特性是　强调那些信噪比较大的频率成分，而抑制信噪比较小的频率成分，从而提高信噪比。在上述意义下，厄卡特滤波器具有最佳预先滤波器的作用。